Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales

Universidad de León

Grado en Economía

Curso 2013/ 2014

MODELOS SOBRE ENERGÍA Y CRECIMIENTO ECONÓMICO

(MODELS OF ECONOMIC GROWTH AND ENERGY)

Realizado por el alumno D. Álvaro Gallego Andrés.

Tutelado por el Profesor D. Carlos Arias Sampedro.

León, 1 de julio de 2014

ÍNDICE

RESUMEN

En el presente trabajo se lleva a cabo un estudio del papel que desempeña la energía en la economía usando modelos básicos de crecimiento económico. El modelo neoclásico de Solow será el punto de partida para este análisis. En especial se analizan los efectos en el crecimiento económico de la introducción de un factor de producción fijo y no acumulable, la tierra. De manera análoga, se introduce la energía como un recurso no acumulable y agotable. Asimismo se abordan las posibilidades de sustitución de la energía como factor de producción tanto por otras fuentes energéticas alternativas como por otros factores productivos. Finalmente se contempla el cambio técnico como fuente de crecimiento económico frente a la limitación de recursos y ante una baja sustitución de los mismos.

ABSTRACT

The present paper carries out the study of the role of energy in the economy using basic models of economic growth. The Solow neoclassical model will be the starting point for this analysis. The effects on economic growth of land as an exhaustible and non-cumulative are analysed with some detail. Similarly, the energy is introduced as a finite resource. The feasibility of substituting energy as a production factor by alternative energy resources or other production factors is also being addressed. Finally, we analyze the role of technical change as a source of economic growth with limited resources and low substitution.

Palabras Clave: Crecimiento económico, Modelo de Solow, Función de producción generalizada, Cobb-Douglas, Energía, Sustitución, Elasticidad de sustitución, CES, Cambio técnico.

Key Words: Economic growth, Solow model, Energy, Generalised production function, Cobb-Douglas, Substitution, Elasticity of Substitution, CES, Technical change.

1. INTRODUCCIÓN

La energía es una componente esencial de muchos bienes y servicios que se consumen en una economía moderna. Por ejemplo, el transporte, la calefacción, la refrigeración, las comunicaciones, el comercio o la misma electricidad. Al mismo tiempo, la energía juega un papel central en los procesos productivos. La extracción de las materias primas, la fabricación de productos semielaborados o la de productos finales destinados al consumo son posibles gracias a la energía canalizada a través de factores productivos como el trabajo y capital.

En una economía en crecimiento, el incremento en la producción de bienes y servicios implica un consumo cada vez mayor de la energía. Del mismo modo, el crecimiento poblacional apunta también a incrementos en el consumo de energía. Por tanto, es razonable esperar un papel creciente de la energía en la economía.

Sin embargo, la energía no aparece de forma explícita en los modelos de crecimiento más habituales (Lucas, 1988; Romer, 1990; Solow, 1956). Por un lado esta omisión resulta sorprendente dado el papel que parece jugar la energía en una economía moderna. Por otra parte, la omisión puede limitar la capacidad de los modelos para analizar temas relevantes, como por ejemplo, la escasez potencial de combustibles fósiles o la limitación en el uso de estos combustibles debido a la emisión de CO_2.

En este contexto, es razonable analizar la omisión de la energía en los modelos, sus consecuencias y alternativas. Es evidente que el consumo de energía aumenta con el crecimiento económico pero no está claro qué papel juega la energía en el proceso. Por ejemplo, si la disponibilidad de energía fomenta el crecimiento económico o, por el contrario, el crecimiento económico incrementa la demanda de energía.

En este trabajo pretendemos analizar las razones para la ausencia de la energía en los modelos y sus consecuencias. El escaso peso de la energía en el producto final es una de las razones para esta ausencia y está relacionado con su bajo precio. A su vez, el precio bajo no parece recoger el hecho de que la mayor parte de la energía utilizada provenga de recursos naturales no renovables. En esta segunda característica juega un papel las posibilidades de sustitución de capital por energía o de energía renovables por energía fósil. Por último, el cambio técnico afecta al papel que juega la energía en la economía.

La historia económica proporciona algunas claves sobre el papel de la energía en una economía moderna. A lo largo de la historia se han ido sustituyendo máquinas por trabajadores, y estas máquinas funcionan gracias a la energía empleada en ellas. Es decir, se ha producido históricamente una evolución desde el trabajo humano, activado por el consumo de productos agrícolas, al trabajo mecánico, activado por combustibles fósiles.

Algunos autores (Malamina, 2010) consideran el uso de la energía como un elemento clave en la Revolución Industrial. Las continuas innovaciones realizadas en la tecnología del carbón como combustible permitieron además un uso más eficaz de éste y el logro de altas rentabilidades. Podemos hablar, por tanto, de innovaciones inducidas que desencadenaron una revolución industrial y que, precisamente, estos cambios se introdujeron a raíz de un cambio en el tipo de energía utilizada.

Por último, es necesario señalar que la energía se ha convertido en las últimas décadas en un tema central en la política económica y medioambiental. En concreto, existe una preocupación por el posible agotamiento de los recursos no renovables y el impacto ambiental negativo del uso creciente de la energía de origen fósil.

Esta preocupación por los límites al crecimiento por un factor limitante recuerda a los problemas Malthusianos. Malthus, (1973) coincide con otros autores de su época en las preocupación por las limitaciones que la tierra podía imponer en el crecimiento. Sin embargo, en épocas posteriores la tierra deja de ser una preocupación del análisis económico.

En este trabajo, se exploran los paralelismos entre el papel de la tierra en la economía clásica con el tratamiento de la energía en nuestra época. En concreto, se proponen modelos que analizan procesos en los que algunos factores de producción pasan de ser centrales a secundarios, o viceversa, en la explicación de la producción y el crecimiento económico.

2. OBJETO DEL TRABAJO

El *objetivo fundamental* de este trabajo es el estudio del papel que juega la energía en el crecimiento económico. Esta relación puede estar afectada por el carácter de recurso natural no renovable y finito de la mayor parte de las fuentes de energía, por las posibilidades de sustitución entre diferentes tipos de energía o entre energía y otros factores productivos (v.g. capital, trabajo o tierra) y por el cambio técnico. El cumplimiento de este objetivo lleva a la construcción y análisis detallado de un modelo neoclásico en el que se incluyen un factor de producción no acumulable y agotable.

Además del objetivo principal, se establecen unos *objetivos secundarios*, que son:

- El estudio de los efectos de un factor fijo en un proceso de crecimiento económico con especial referencia al caso de la tierra en la economía clásica.
- La modelización del papel de los recursos naturales en el crecimiento económico.
- El estudio de la modelización de la sustitución de factores y el cambio técnico.
- La modelización de las características peculiares de la energía como factor de producción.

La estructura del trabajo que permite cubrir estos objetivos es la siguiente. El epígrafe 3 hace una revisión metodológica de los conceptos básicos de modelización económica. El epígrafe 4 presenta el modelo básico de crecimiento económico de Solow-Swan con el fin de analizar posteriormente el papel de los recursos no renovables y la energía como extensión a este modelo. El epígrafe 5 analiza las implicaciones de un factor fijo en un modelo de crecimiento económico. Para ello se revisa el papel de la tierra en la economía clásica y se introduce ésta como factor productivo en un modelo de crecimiento neoclásico. Finalmente el epígrafe 6 introduce los recursos naturales como factor no reproducible en contextos de escasez y se plantean modelos que reflejan la dinámica de estos recursos, las posibilidades de sustitución entre factores y el cambio técnico como alternativa a la sustitución.

3. METODOLOGÍA.

El presente trabajo usa modelos económicos para analizar el papel de la energía en el crecimiento económico y los factores que pueden afectar esa relación. Por ese motivo, en esta sección, se revisan conceptos básicos de modelización económica que se usan en las secciones posteriores del trabajo. En concreto, se discuten diversos conceptos de modelo, sus componentes y las técnicas básicas de análisis.

3.1. MODELOS ECONÓMICOS.

Un modelo es una representación simplificada de la realidad que permite ver con claridad las características fundamentales del fenómeno que se pretende analizar. La simplicidad puede llevar a dejar fuera del modelo cuestiones relevantes pero la excesiva complejidad lo puede convertir en inútil. Por tanto, la modelización siempre va a ser un delicado ejercicio sometido a la necesaria crítica.

Santos, (2012) define un modelo como una forma de resumir los datos y la experiencia de la profesión, como un depósito de conocimiento utilizado para avanzar en una dirección determinada dentro de una investigación generalizando supuestos y como un método de comunicación efectivo entre investigadores. Asimismo los modelos proveen de disciplina al investigador, de orden y rigor en la notación y de una lógica de las ideas, incrementando el conocimiento y volviendo a éstos más complejos y exigentes.

Lucas, (1980) plantea la modelización como un proceso de construcción de sistemas económicos artificiales, como si fueran laboratorios, a través de los cuales se reproduce la realidad. De este modo, se pueden analizar políticas a coste reducido. Por ello, se utilizan estos estudios en aquellos casos en que la experimentación en una situación real sería muy onerosa. Teniendo en cuenta esta característica, es posible definir teorías económicas, no solo como enunciados sobre el comportamiento de la economía real, sino también como instrucciones implícitas que sirven para construir sistemas paralelos o análogos, que son las economías de imitación.

Walliser, (1995) considera los modelos económicos como aproximaciones inexactas e incompletas debido a su idealidad y generalidad. Destaca su capacidad para analizar la realidad centrándose en lo esencial, su importancia para el análisis empírico y la posibilidad de que, dada su concreción, evolucionen a través de cambios discretos en un modelo dado.

3.2. COMPONENTES DE UN MODELO

Las componentes de un modelo pueden ser:

- *Variables*: son representantes genéricas de un conjunto como por ejemplo el capital o el trabajo.
- *Funciones*: definen relaciones entre variables como por ejemplo la función de producción que relaciona la cantidad máxima producida con los factores de producción usados.
- *Ecuaciones* proporcionan una representación matemática de las funciones. Por ejemplo, la función de producción Cobb-Douglas que se usa en varios modelos del presente trabajo.
- *Igualdades*: se cumplen para un número reducido de valores de las variables.
- *Identidades*: representan definiciones que se cumplen para todos los valores de las variables. En nuestros modelos, usaremos la identidad de Renta Nacional.

Es importante distinguir entre variables exógenas y endógenas. El valor de las *variables exógenas* se determina fuera del modelo como ocurre con la población en el modelo básico de crecimiento. Por el contrario, el valor de las *variables endógenas* se determina en el modelo, como ocurre con el stock de capital en ese mismo modelo. La distinción entre variables endógenas y exógenas es una parte esencial del proceso de modelización. De hecho, reconocer que hay variables que no se van a explicar es una simplificación clave en la construcción de un modelo.

Para los objetivos del presente trabajo, es interesante distinguir entre modelos estáticos y dinámicos. Los modelos estáticos no tienen en cuenta el paso del tiempo y se centran en el valor de las variables endógenas y no en su variación temporal. Por su parte, los modelos dinámicos tienen en cuenta el efecto del paso del tiempo en las variables endógenas. Es decir, las variables endógenas del modelo son funciones del tiempo.

Un elemento clave de un modelo es el equilibrio. Se entiende que existe equilibrio estático cuando las variables endógenas del modelo no pueden cambiar de valor sin un cambio exógeno. El equilibrio dinámico hace referencia a una situación en que las variables del modelo crecen en el tiempo a una tasa constante.

El análisis de estática comparativa analiza los cambios en los valores de equilibrio de las variables endógenas ante cambios en las variables exógenas. Un cambio en una variable exógena modifica el equilibrio y, por tanto, los valores de las variables endógenas. El análisis dinámico estudia tanto el punto de equilibrio como la trayectoria hacia ese punto.

Finalmente, se analizan algunas cuestiones metodológicas concretas y de notación que afectan a los modelos que se usan en el presente trabajo.

Las variables cambian a lo largo del tiempo. Es decir, son funciones del tiempo que se representan usando la notación $x(t)$.

El cambio en las variables en una unidad de tiempo se representa como una derivada de la función anterior con respecto al tiempo. Es decir: $\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}$. En este trabajo, se adopta una práctica común que es representar una derivada con respecto al tiempo con un punto sobre la variable original.

El cambio de la variable depende de sus unidades de medida. Una práctica corriente es analizar las tasas de crecimiento de las variables que no tienen esta limitación. Es decir, su valor no depende de las unidades de medida. La tasa de crecimiento de una variable se puede escribir como: $\frac{\dot{x}}{x} = \frac{\frac{dx}{dt}}{x}$.

Una práctica corriente es el uso de las denominadas derivadas logarítmicas. Se trata de analizar el cambio temporal de la variable $y(t) = \ln x(t)$. Si se deriva la variable *y(t)* con respecto al tiempo se tiene que: $\dot{y} = \frac{1}{x}\dot{x} = \frac{\dot{x}}{x}$. Es decir, que la derivada con respecto al tiempo del logaritmo neperiano de una variable permite calcular la tasa de crecimiento de la variable original.

Otra práctica habitual es suponer tasas de crecimiento exógenas y constantes para algunas variables del modelo. Es decir: $\frac{\dot{x}}{x} = a$. Este supuesto es equivalente a suponer la siguiente forma funcional para la variable $x(t)$: $x(t) = x(0)e^{at}$

4. EL MODELO NEOCLÁSICO DE CRECIMIENTO DE SOLOW-SWAN.

En esta sección se presenta con cierto detalle un modelo básico de crecimiento económico. Las extensiones de este modelo planteadas en las siguientes secciones permiten el análisis del papel de los recursos naturales no renovables en general y de la energía en particular.

El modelo neoclásico de crecimiento (Solow, 1956) parte de una representación de la producción en la que tres factores de producción, capital, trabajo y tecnología se combinan para obtener un producto final.

El primer input es el factor trabajo en el que el número total de trabajadores idéntico se representa por L_t, siendo t un subíndice de tiempo. Se considera que la población en la economía es igual a la cantidad de trabajadores. Por tanto, la variable L_t equivale no solo al factor trabajo sino también a la población total. Un supuesto adicional es que la población crece a una tasa exógena y constante a lo largo del tiempo $g_L = \frac{\dot{L}}{L}$ (Weil, 2006).

El segundo input es el capital. Éste incluye productos elaborados en un periodo anterior que permanecen en la economía para facilitar la producción de nuevos productos. En esta categoría se incluirían las máquinas, edificios, estructuras, ordenadores, etc. Se representa como K_t, siendo t un subíndice de tiempo. (Sala i Martín, 1999)

El tercer input es la tecnología. La tecnología puede verse como el conjunto de ideas o recetas que permiten combinar los factores para obtener la producción. En un momento, dado esas ideas o recetas determinan cuánto producto se puede conseguir de unos factores dados. Es decir, la tecnología es un determinante de la productividad. Por otra parte, el cambio en esas ideas o recetas a lo largo del tiempo se conoce como cambio técnico. El cambio técnico es un elemento clave a la hora de explicar las mejoras en la productividad a lo largo del tiempo. La tecnología se representa por A_t, siendo *t* un subíndice de tiempo (Sala i Martín, 1999). Solow (1957) se refiere a la variable *A* como Productividad total de los factores (PTF).

Una característica relevante de la tecnología en este modelo es que es un bien no rival. Es decir, que su uso por una persona no impide su uso simultáneo por otra. En cambio, los factores trabajo y capital son bienes rivales. (Sala i Martín, 1999)

También se supone que la propia función de producción no se desplaza a lo largo del tiempo. En otras palabras, se supone un nivel tecnológico constante A. Además, A es exógena, se determina fuera del modelo (Weil, 2006).

Según Sala i Martín (1999), un elemento clave del modelo es la identidad de Renta Nacional. Prescindiendo de los subíndices de tiempo por simplicidad, ésta se puede escribir como:

$$Y = C + I + G + XN \tag{4.1}$$

Donde Y es el producto interior bruto de una economía, C es el consumo privado de las familias, I es la inversión de las empresas, G es el gasto público y XN son las exportaciones netas. Todos los términos están referidos a un momento concreto del tiempo. En otras palabras, cambian con el tiempo o son función del tiempo.

En este trabajo, se usará una versión simplificada de la ecuación (4.1) suponiendo que estamos ante una economía cerrada, donde las exportaciones netas son nulas, y sin sector público, por lo el gasto realizado por el gobierno es nulo.

Tras estos dos supuestos iniciales la identidad de Renta Nacional se reduce a:

$$Y = C + I \tag{4.2}$$

Restando en ambos lados de la ecuación (4.2) el consumo obtenemos que el ahorro de las familias (la parte de la producción que no se consume) es igual a la inversión de las empresas:

$$Y - C \equiv S \equiv I \tag{4.3}$$

A continuación, se procede a una propuesta de modelización de los componentes de la identidad de Renta Nacional.

En primer lugar, la producción de una economía se representa como la combinación de los tres inputs a través de una función de producción:

$$Y = F\left(A, K, L\right) \qquad (4.4)$$

La función de producción relaciona los factores de producción y la cantidad de producción obtenida en una economía. La producción puede crecer si aumenta el stock de capital *K*, si se incrementa el número de trabajadores *L*, o si mejora la tecnología existente *A*.

Siguiendo a Sala i Martín (1999), la función de producción ha de satisfacer las siguientes propiedades:

- La función de producción presenta rendimientos constantes a escala. De esta manera, al incrementar los factores productivos en una determinada proporción, la producción se incrementa en la misma proporción.
- La productividad marginal de todos los factores de producción es positiva, pero decreciente.
- Se deben cumplir las condiciones de Inada.

Dividiendo la ecuación (4.4) por la población *L* la producción per cápita es:

$$\begin{aligned} &Y = F\left(A, K, L\right) \\ &\frac{Y}{L} = \frac{F\left(A, K, L\right)}{L} = F\left(A, \frac{K}{L}, 1\right) \\ &y = f\left(A, k\right) \end{aligned} \qquad (4.5)$$

Donde *f* es la función de producción per cápita, *y* es la producción per cápita y k es el capital per cápita.

La función de producción Cobb-Douglas es usada con mucha frecuencia en este tipo de análisis. Se puede escribir como:

$$Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha} \qquad (4.6)$$

Dónde, α se conoce como parámetro de distribución. Esta función satisface las propiedades neoclásicas mencionadas anteriormente si el parámetro α está comprendido entre *0* y *1* y A es mayor que *0*.

La función de producción (4.4) permite reescribir (4.2) como:

$$F\left(A,K,L\right)=C+I \tag{4.7}$$

En segundo lugar, el ahorro se representa como una proporción constante de la renta. Por tanto, el consumo agregado se escribe como:

$$C=\left(1-s\right)Y \tag{4.8}$$

Donde s es un parámetro cuyo valor está comprendido entre cero y uno que representa la tasa de ahorro. Sustituyendo (4.8) en (4.7) se obtiene:

$$sY=I \tag{4.9}$$

Esto implica que puesto que el ahorro es igual a la inversión, la tasa de ahorro es también la tasa de inversión.

En tercer lugar, se modeliza la inversión. La inversión se puede descomponer en cambio en el stock de capital $\left(\dot{K}=\frac{dK}{dt}\right)$ y depreciación D. Es decir:

$$I=\dot{K}+D \tag{4.10}$$

El stock de capital crece si la inversión es mayor que la depreciación del stock de capital existente y decrece en caso contrario. La depreciación se modeliza como una proporción constante del stock de capital. Es decir, se supone que en cada momento del tiempo se deteriora una fracción constante δ. De esta manera, la depreciación total es igual a la tasa de depreciación δ multiplicada por la cantidad de stock de capital, quedando $D=\delta K$. Esta idea implica que las maquinas son siempre productivas mientras no se deterioran.

La modelización anterior permite escribir la identidad de Renta Nacional de la expresión (4.7) como:

$$F\left(A,K,L\right)=\left(1-s\right)F\left(A,K,L\right)+\dot{K}+\delta K \tag{4.11}$$

Reordenando términos se tiene que:

$$\dot{K} = sF\left(A, K, L\right) - \delta K \tag{4.12}$$

Esta ecuación diferencial es el elemento central del modelo de Solow La ecuación determina el aumento del stock de capital en un instante de tiempo, si conocemos los valores de K, L y A en ese momento t, dado que la tasa de ahorro s y la tasa de depreciación δ son constantes conocidas (Sala i Martín, 1999). La variación en el stock de capital depende del ahorro, de la función de producción y de la depreciación.

A continuación se procede al análisis del modelo en términos per cápita usando una función de producción Cobb-Douglas por simplicidad. La producción per cápita en esta función se puede escribir como:

$$\begin{aligned} y &= \frac{Y}{L} = \frac{1}{L} AK^{\alpha} L^{1-\alpha} = A\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha} \left(\frac{L}{L}\right)^{1-\alpha} \\ y &= Ak^{\alpha} \end{aligned} \tag{4.13}$$

El cambio a lo largo del tiempo del capital per cápita $k = \frac{K}{L}$ se puede escribir como:

$$\dot{k} = \frac{\dot{K}L - \dot{L}K}{L^2} = \frac{\dot{K}}{L} - \frac{\dot{L}}{L}\frac{K}{L} = \frac{\dot{K}}{L} - g_L k \tag{4.14}$$

Dividiendo por L en la expresión (4.12) se puede calcular $\frac{\dot{K}}{L}$ como:

$$\frac{\dot{K}}{L} = s\frac{F\left(A, K, L\right)}{L} - \delta\frac{K}{L} = sf\left(A, k\right) - \delta k \tag{4.15}$$

Llevando este resultado a la expresión (4.14) se tiene que el crecimiento del capital per cápita se puede escribir como:

$$\dot{k} = sf\left(A, k\right) - \left(g_L + \delta\right)k \tag{4.16}$$

Donde el primer sumando de la parte derecha de la ecuación representa la función de ahorro per cápita. En otras palabras, cuanto se produce y lo que se ahorra. El segundo sumando de la ecuación muestra que el stock de capital per cápita disminuye a medida que aumenta la población y con la depreciación física del stock de capital. Este segundo sumando representa la inversión necesaria para mantener el stock de capital per cápita constante.

Si la tecnología es Cobb-Douglas la tasa de crecimiento del capital per cápita se escribe como:

$$\dot{k} = sAk^{\alpha} - (g_L + \delta)k \tag{4.17}$$

Donde el stock de capital per cápita aumenta con la diferencia entre el ahorro bruto y el término de depreciación $\left(g_L + \delta\right)k$.

Para calcular la tasa de crecimiento del capital per cápita, se divide el crecimiento del capital per cápita en la expresión (4.17) por el capital per cápita:

$$\frac{\dot{k}}{k} = sAk^{-(1-\alpha)} - \left(g_L + \delta\right) \tag{4.18}$$

El estado estacionario es un equilibrio dinámico que se caracteriza por tener tasas de crecimiento constante de las variables endógenas del modelo. La tasa de crecimiento del capital per cápita constante del estado estacionario la denotaremos por g_k. Incorporando esta condición de estado estacionario y agrupando los términos constantes en el lado izquierdo de la expresión se tiene que:

$$\begin{aligned} g_k &= sAk^{-(1-\alpha)} - \left(g_L + \delta\right) \\ \frac{g_k + g_L + \delta}{sA} &= k^{-(1-\alpha)} \end{aligned} \tag{4.19}$$

Tomando logaritmos y derivando con respecto al tiempo se tiene:

$$\begin{aligned} &\ln\left(\frac{g_k + g_L + \delta}{sA}\right) = -\left(1-\alpha\right)\ln\left(k\right) \\ &0 = -\left(1-\alpha\right)\frac{\dot{k}}{k} \\ &\left(1-\alpha\right)g_k = 0 \Rightarrow \quad g_k = 0 \end{aligned} \tag{4.20}$$

Es decir, en el modelo de Solow la tasa de crecimiento del capital per cápita en el estado estacionario g_k es cero.

La tasa de crecimiento de la renta per cápita se calcula tomando derivadas logarítmicas sobre la función de producción per cápita en la ecuación (4.13):

$$\begin{aligned} &\ln y = \ln A + \alpha \ln k \\ &\frac{\dot{y}}{y} = \alpha \frac{\dot{k}}{k} \Rightarrow g_y = \alpha g_k \end{aligned} \tag{4.21}$$

Donde la tasa de crecimiento de la renta per cápita es α veces la tasa de crecimiento del capital per cápita. Puesto que la tasa de crecimiento del capital es nula, también lo es la tasa de crecimiento de la renta per cápita.

Por tanto, tenemos que la economía tiende a un estado estacionario en que la tasa de crecimiento de la renta per cápita es cero. En este caso, si se iguala la ecuación (4.17) a cero se obtiene la siguiente expresión para el capital per cápita en el estado estacionario.

$$\begin{aligned} &sAk^{-(1-\alpha)} = \left(g_L + \delta\right) \\ &k = \left(\frac{sA}{g_L + \delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \end{aligned} \tag{4.22}$$

La acumulación de capital per cápita es el mecanismo de crecimiento en la aproximación al estado estacionario. El producto marginal del capital decreciente es la clave para explicar una acumulación de capital per cápita a una tasa decreciente hasta que esta tasa es cero. El producto marginal del capital per cápita decrece al añadir unidades de capital a través de la inversión. Por tanto, una unidad de capital adicional aporta una cantidad decreciente de producción, ahorro e inversión debido al producto marginal decreciente. Esa aportación a la inversión debe ser mayor a la depreciación por unidad de capital $\left(g_L + \delta\right)$ para que haya acumulación de capital. Cuando no es mayor que la depreciación, deja de acumularse capital y se detiene el proceso de crecimiento.

El modelo de Solow sin cambio técnico predice que la economía puede crecer fuera del estado estacionario pero no crecerá cuando alcance el estado estacionario. Este resultado cambia si existe cambio técnico. Se desarrolla a continuación el modelo de crecimiento de Solow introduciendo cambio técnico exógeno en la función de producción. Es decir, se supone que A crece con el paso del tiempo por factores exógenos a una tasa de crecimiento constante $g_A = \frac{\dot{A}}{A}$.

Este supuesto obliga a cambiar ligeramente el análisis del estado estacionario en la expresión (4.19). En concreto, ahora el parámetro A no es constante y debe permanecer en la parte derecha de la igualdad mientras que en la parte izquierda se agrupan todos los términos constantes. Así en el estado estacionario se tiene que:

$$\frac{g_k + g_L + \delta}{s} = Ak^{-(1-\alpha)} \tag{4.23}$$

Tomando derivadas logarítmicas con respecto al tiempo en la expresión (4.23) se tiene

$$\begin{aligned} &\ln \frac{g_k + g_L + \delta}{s} = \ln A - (1-\alpha)\ln k \\ &0 = g_A - (1-\alpha) g_k \Rightarrow g_k = \frac{g_A}{(1-\alpha)} \end{aligned} \tag{4.24}$$

La tasa de crecimiento de la renta per cápita se calcula tomando derivadas logarítmicas con respecto al tiempo en la función de producción per cápita $y = Ak^{\alpha}$ quedando:

$$\begin{aligned} &\ln y = \ln A + \alpha \ln k \\ &\frac{\dot{y}}{y} = \frac{\dot{A}}{A} + \alpha \frac{\dot{k}}{k} \Rightarrow g_y = g_A + \alpha g_k \end{aligned} \tag{4.25}$$

El valor de la tasa de crecimiento del capital per cápita g_k calculado en la ecuación (4.24) se sustituye en (4.25) y se tiene que en el estado estacionario el capital per cápita crece a la misma tasa que la producción per cápita.

$$\begin{aligned} &g_y = g_A + \alpha \frac{g_A}{(1-\alpha)} = \frac{g_A}{(1-\alpha)} \\ &g_y = g_k \end{aligned} \tag{4.26}$$

Es decir, el cambio técnico exógeno permite que exista un estado estacionario con crecimiento positivo. La tasa de crecimiento de la renta per cápita en el estado estacionario aumenta con la tasa de crecimiento del cambio técnico.

5. FACTORES FIJOS EN UN MODELO DE CRECIMIENTO: EL CASO DE LA TIERRA.

En esta sección se analizan las implicaciones de un factor fijo en un modelo de crecimiento económico. La sección consta de dos partes bien diferenciadas. En la primera, se hace una revisión del papel de la tierra en el pensamiento económico. En concreto, en la economía clásica. En la segunda parte, se introduce la tierra en un modelo de crecimiento neoclásico. De este modo, se consigue modelizar algunas de las preocupaciones de la economía clásica y se busca un paralelismo entre el papel de la tierra en este modelo y el papel de los recursos naturales no renovables como la energía en un modelo más general.

5.1. LA TIERRA EN LA ECONOMÍA CLÁSICA.

La tierra, desde una perspectiva económica, puede ser considerada como el espacio limitado y escaso, donde se localizan las actividades económicas de producción, las infraestructuras y las viviendas; como suelo productivo que proporciona los materiales orgánicos e inorgánicos para la agricultura; y como lugar de disfrute y de servicios recreativos (Polanyi, 1957).

Los economistas clásicos consideraban a la tierra como un factor que no era posible incrementar de forma sustancial. El papel limitante de la tierra en sus trabajos guarda algunos paralelismos con el papel que puede jugar la energía en los modelos de crecimiento. Un punto interesante a la hora de explorar el paralelismo entre tierra y energía es la paulatina pérdida de importancia de la tierra como factor de producción en autores posteriores.

La producción agrícola suponía un porcentaje muy alto de la producción total en las economías antiguas y medievales donde el sistema económico seguía dominado por el feudalismo. La tierra era el factor esencial en este sector, actuando como fuente de riqueza, prestigio, y como principio de organización de las relaciones socio económicas. Se trataba de una agricultura no mecanizada que usaba técnicas que habían avanzado poco en varios siglos. Por tanto, los economistas clásicos recogen la preocupación de su tiempo por la agricultura y la tierra.

El papel de la tierra en la economía ha sido objeto de estudio por numerosos autores. Las características del análisis han ido cambiando de forma considerable a lo largo del tiempo. La Escuela de Economía Clásica Inglesa agrupa a numerosos economistas y filósofos, entre ellos a David Hume, Adam Smith, Bentham, David Ricardo, Malthus, James Mill, John Stuart Mill, Torrens que vivieron desde mediados del S. XVIII hasta mediados del S. XIX. Sin duda, las preocupaciones presentes en la época en la que vivieron marcaron sus pensamientos y su manera de entender la economía.

Heilbroner (1985) analiza la relación de los autores con los problemas y las características de la economía de su época. Los economistas clásicos escribieron al principio de la Revolución Industrial, periodo de tiempo caracterizado por el auge de la clase industrial y el comienzo de la decadencia de la importancia de los terratenientes. De esta manera, las preocupaciones de los economistas clásicos recayeron sobre los factores tierra, mano de obra y capital y como estos contribuyen al crecimiento económico. Éstos consideraban a la tierra un factor diferente de los medios de producción conformados por el ser humano y distinto de la mano de obra, que podía evidentemente crecer (Blaug, 1985).

Los fisiócratas consideraban a la producción agrícola como la fuente de riqueza y de renta de una nación. Desde la visión de los fisiócratas, el comercio (intercambio) y las manufacturas no crean riqueza y se consideran actividades que modifican la riqueza anteriormente creada, donde la industria se limita a cambiar su forma a los productos originarios, provenientes de la naturaleza (materias primas originales) pero no añade nada nuevo a lo existente. Smith (1965) manifiesta que los fisiócratas creen que el trabajo en el sector artesanal y manufacturero no añade nada al valor de la producción agrícola. De ahí que se reserve para la producción agrícola el papel de ser la creadora de la riqueza

En el último cuarto del siglo XVIII, Adam Smith publica su tratado “Investigación sobre la Naturaleza y Causa de la Riqueza de las Naciones”. Esta obra tiene una importancia extraordinaria en la historia del pensamiento económico. Se publica al comienzo de la Revolución Industrial, una época de grandes cambios en el ámbito de lo económico, social y cultural, en la que el uso intensivo y extensivo de los recursos de capital, como sustitutivo y complementario del esfuerzo humano, juega un papel determinante en el crecimiento económico y el cambio energético. Es en este momento cuando surge una alta especialización de la producción en los mercados nacionales e internacionales. Asimismo se lleva a cabo un movimiento considerable de mano de obra desde las actividades primarias a la producción de bienes manufacturados (Malamina, 2010). Como se ha apuntado, era el comienzo de la Revolución Industrial, y por tanto, en la época de Adam Smith no se había realizado una transformación sustancial de las herramientas e instrumentos de trabajo. De esta manera se justifica la convicción de Smith de que la agricultura era la principal fuente de riqueza y no las manufacturas, que sostiene que la riqueza está formada por "las cosas necesarias y convenientes para la vida" (Blaug, 1997). De igual forma la creadora principal de riqueza será el trabajo del hombre entendido como el trabajo de la sociedad en su conjunto.

Estos autores tratan a la tierra como un obsequio que la naturaleza brinda al hombre. La tierra entendida como recursos disponibles para su uso sin coste alguno lleva a pensar que gran parte de esos factores productivos no se pueden considerar tierra. Por ejemplo, los campos trabajados y abonados no se podrían considerar tierra al ser el producto del trabajo de hombres y máquinas. Siguiendo este argumento, los recursos naturales no se distinguen de los bienes de capital ya que en ambos se requiere una inversión inicial y unos costes de mantenimiento. De esta forma para que la tierra sea considerada un factor productivo, el legado del equipo y las mejoras realizadas en el pasado y transferidas a la generación actual como bienes gratuitos, deben de tenerse en cuenta (Blaug, 1985).

La obra de Malthus (1973) señala la estrecha relación entre el crecimiento demográfico y la producción de alimentos. De este modo, Malthus precede a Ricardo en la preocupación por el papel del uso de la tierra en el progreso económico (Blaug, 1985). La teoría malthusiana del crecimiento de la población se asienta en tres proposiciones:

1. La capacidad física del hombre para aumentar la oferta de alimentos está por debajo de sus instintos de reproducción.

2. La intervención de frenos al crecimiento como pueden ser la reducción de los nacimientos y el incremento de las defunciones.

3. La limitación de la oferta de alimentos como freno final al crecimiento poblacional.

Bajo estas proposiciones, Malthus enuncia su teoría sobre el crecimiento poblacional en la cual la población crece de manera geométrica mientras que la producción agrícola de alimentos lo hace de forma aritmética. Esto causaría una situación de pobreza que podría desembocar en catástrofes que limitasen la población. De esta forma, Malthus explica la pobreza desde la relación entre la población y los alimentos. La capacidad de producir alimentos está restringida porque la oferta de tierra es limitada y los avances técnicos no son frecuentes. Asimismo, la acumulación de capital y el cambio técnico no podrían compensar las limitaciones de los recursos naturales por la decreciente proporción del producto ante continuas adiciones de capital. Respecto al cambio técnico tampoco podría compensar estas limitaciones en los recursos naturales al no presentarse con adecuada rapidez (Blaug, 1985).

Algunos autores clásicos se dieron cuenta de que estos patrones se producían en cualquier proceso productivo cuando la técnica es constante y hay factores fijos. Enunciaron el principio o ley y le dieron un nombre "Ley de los rendimientos decrecientes". La ley de los rendimientos decrecientes se presenta en modelos con dos factores, como por ejemplo capital y trabajo. Cuando entra en juego un tercer factor, como por ejemplo la tierra, podría darse el caso de que el capital aumente lo suficiente con respecto al trabajo y contrarrestar así el aumento del trabajo en relación a la tierra. Todo ello incluso en ausencia de cambio técnico (Blaug, 1985).

Esta ley estudia los rendimientos en las unidades adicionales añadidas de cualquier factor variable, manteniendo fijas las cantidades de los otros factores y dada una tecnología. En el proceso, la producción total tenderá a aumentar a un ritmo acelerado en una primera fase, a un ritmo más lento después, hasta llegar a un punto de máxima producción; de ahí en adelante la producción tenderá a reducirse (Blaug, 1985).

El concepto de los rendimientos decrecientes y la teoría de la renta de la tierra surgen como parte de la reacción ante la publicación de la obra de Malthus. Es en este momento cuando aparecen las publicaciones de West, Torrens, Malthus y Ricardo tratando de explicar el precio del grano de trigo. West (1934) afirmaba que en el proceso de mejora del cultivo, la recolección del producto se torna más cara. Basándose en los rendimientos decrecientes, cada unidad adicional e idéntica de trabajo que se dedique a la agricultura genera un rendimiento decreciente. Según West (1934), la necesidad de recurrir a la tierra inferior a la que ya se encuentra en cultivo, o de cultivar la misma tierra con mayores costes, tiende a volver menos productiva la mano de obra en la agricultura en el curso del progreso. Ambas características de la producción contrarrestan los efectos del cambio técnico y la división del trabajo en la agricultura. Ricardo y Malthus veían que el progreso estaba limitado por el papel de la tierra en el proceso productivo. De ahí surge la vinculación de estos autores con la noción de que el crecimiento económico debe terminar tarde o temprano debido a la escasez de los recursos naturales (Blaug, 1985).

Los cuatro autores consideran que la ley es válida al demostrar que el crecimiento de la población obliga bien a utilizar suelos de peor calidad o bien a invertir más capital persiguiendo una mayor productividad del terreno. Al centrarse en la limitación de la oferta de la tierra, la visión pesimista sobre la población de Malthus se torna más relevante. Desde un punto de vista malthusiano, el nivel de vida se ve limitado por la sobrepoblación. Se entiende sobrepoblación como una población demasiado grande para ser alimentada con los medios de subsistencia existentes (Blaug, 1985).

Para los autores anteriores, la tierra fértil era considerada como un factor físico limitado con un papel fundamental en la producción agrícola y que estaría sujeta a rendimientos decrecientes. Por ello sus escritos se centraron en cuestiones como la productividad de la tierra o la distribución de sus beneficios. Por el contrario, la producción industrial podría extenderse indefinidamente con una dotación apropiada de capital, mano de obra y tecnología. Malthus fue criticado por diversas razones. En el mundo real, la población no crece a la máxima tasa biológica. Asimismo, las limitaciones del nivel de vida podrían disiparse atendiendo a la posibilidad del comercio exterior (Blaug, 1985). Por otra parte, no reconoce las variaciones en la calidad de la tierra, las especificaciones en el horizonte temporal, la disponibilidad de otros recursos, y la mejora de la tecnología y de los procesos de producción (Schumpeter, 1981; Walpole et al., 1996).

Del mismo modo, algunos autores clásicos también fueron criticados, al pensar que la oferta fija de tierra garantizaba eventualmente los rendimientos decrecientes. Esto solo era cierto dentro de un modelo de dos factores. Si admitimos un tercer factor, el capital con respecto a la mano de obra puede aumentar lo necesario para compensar el aumento en la relación mano de obra y tierra aun en ausencia de cambio técnico (Blaug, 1985).

En resumen, estos autores no fueron totalmente conscientes de dos fenómenos relevantes: la sustituibilidad de capital por tierra y el cambio técnico. La historia del pensamiento económico muestra que llegado un momento, la tierra deja de ser considerada como un factor limitante en la producción. De este modo, son los economistas neoclásicos los que empiezan a excluir a la tierra de sus modelos. Los inputs de la función de producción serán desde ese momento el capital y el trabajo.

Entre los factores que hacen que la tierra deje de ser un factor fundamental destacamos (Hubacek y van den Bergh, 2002)

1. La inversión y el cambio técnico.

En los años previos al comienzo de la Revolución Industrial se produjo, en Inglaterra una gran acumulación de capital que posibilitó un cambio técnico gracias a la mayor inversión y al gasto en innovación. A causa de este cambio técnico, en el que se da un uso mayor de capital y un aumento de la productividad de todos los factores implicados, se pasa a considerar al capital un factor de tipo secundario en el proceso productivo.

Las tierras aptas para la agricultura no son constantes en el tiempo. La intervención humana en la creación y el cultivo de las áreas naturales, ha aumentado la superficie agrícola potencialmente disponible. Mientras, la erosión, las inundaciones y la transformación en otros usos la han reducido. Cabe señalar la posibilidad de recurrir a los suelos inferiores. La extensión del cultivo es un proceso temporal con técnicas que evolucionan todo el tiempo. En este caso, y aun conociendo la fecundidad de toda la tierra cultivada, una mejora de la tecnología puede hacer rentable una extensión de tierra que hasta entonces no se consideraba rentable (Blaug, 1985). Al respecto de la ley de los rendimientos decrecientes expuesta anteriormente, la expansión del cultivo a suelos inferiores no prueba la universalidad de los rendimientos decrecientes de cantidades iguales de mano de obra aplicadas a cantidades iguales de tierra con un estado de la técnica constante (Blaug, 1985).

Por otra parte con el cambio técnico las hectáreas cultivadas al final podrían ser más productivas que las hectáreas anteriores. El ritmo de los avances tecnológicos trajo consigo la mecanización del suelo. Se introdujeron nuevas técnicas de cultivo y productos químicos (pesticidas, insecticidas y similares) logrando una mayor productividad y calidad de la tierra, cambiando las relaciones de producción de las actividades agrícolas. Esto se traduce en excedentes en las actividades agrícolas y cambios en el consumo de alimentos. En resumen, el cambio técnico puede romper las barreras que impone la limitación física de tierra mediante el aumento de su productividad unitaria. En consecuencia, la tierra deja de ser un factor limitante en los modelos económicos.

En la segunda mitad del siglo XX, la tierra o, de forma general, los recursos ambientales, desaparecieron por completo de la función de producción, quedando como inputs de producción el capital y el trabajo.

2. El comercio internacional reduce la presión sobre la tierra en países con un importante desarrollo industrial.

La tierra tiene limitaciones a nivel físico como factor fijo y a nivel económico, en ausencia de cambio técnico. Por ello, llegado un punto la mejor alternativa posible es ayudarse del comercio internacional para sobrepasar dichas limitaciones (Ricardo, 1817). El libre comercio sin restricciones arancelarias permitiría acabar con la problemática de la escasez de la tierra, posibilita la especialización en aquellos sectores en donde cada país es puntero (teoría de la ventaja comparativa de David Ricardo) y se accedería al uso de tierras de otros países. Pongamos por ejemplo la Inglaterra del siglo XVIII. La Revolución Industrial trajo consigo una especialización en la industria. El sector agrícola deja de ser el sector principal de su economía, centrándose ésta en la producción de manufacturas. A modo de ejemplo nos centraremos en la industria del algodón, la cual se benefició de los cambios estructurales de ahorro de tierra en la producción inglesa. A partir de entonces se produce el cambio de la lana de buena calidad, pero dependiente de la tierra en Inglaterra, con el algodón de mala calidad, pero abundante en la India o América. Por lo tanto, fue posible un aumento de la producción de algodón a pesar de la escasez de tierra en Inglaterra. De este modo, la tierra deja de ser un factor limitante. Una especialización en su industria, junto con el desarrollo del comercio internacional es equivalente a que Inglaterra usase la tierra de otros países.

5.2. MODELIZACIÓN DE LAS PREOCUPACIONES CLÁSICAS POR LA TIERRA.

La función de producción agregada implícita en el análisis de los economistas clásicos se puede representar por la ecuación:

$$Y = F(K, T, L) \tag{5.1}$$

Donde, *Y* representa la producción total, *T* la tierra, *K* el capital y *L* el trabajo. Esta "tríada clásica" representa las tres categorías de participantes en el proceso económico - terratenientes, trabajadores y capitalistas - asociados con una tríada de ingresos – la renta, los salarios y el interés. No se considera relevante el papel del cambio técnico y, por tanto, no es necesario incluir la componente *A* del modelo de Solow que permite modelizar el cambio técnico.

Esta función de producción nos permite analizar el papel de la tierra fija en el modelo de crecimiento de Solow. El análisis se simplifica usando una forma funcional Cobb-Douglas para la función de producción. Es decir:

$$Y = K^{\alpha} T^{\beta} L^{1-\alpha-\beta} \tag{5.2}$$

Como en apartados anteriores se cumple que: $0 < \alpha < 1$ y $0 < \beta < 1$. Por otra parte, *T* es constante ya que la tierra es un factor fijo y se tiene que $\dot{T} = 0$.

Expresando la ecuación (5.2) en términos per cápita quedaría de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} y &= \frac{Y}{L} = \frac{K^{\alpha} T^{\beta} L^{1-\alpha-\beta}}{L^{\alpha} L^{\beta} L^{1-\alpha-\beta}} \\ y &= k^{\alpha} t^{\beta} \end{aligned} \tag{5.3}$$

Donde *k* representa el capital per cápita $\frac{K}{L}$ y *t* la tierra per cápita $\frac{T}{L}$.

Para calcular la tasa de crecimiento de la tierra per cápita *t* se toma logaritmos en ambos lados de la ecuación y se deriva para calcular sus incrementos.

$$t = \frac{T}{L}$$
$$\ln t = \ln T - \ln L \tag{5.4}$$
$$\frac{\dot{t}}{t} = \frac{\dot{T}}{T} - \frac{\dot{L}}{L}$$

Donde, la tasa de crecimiento de la tierra $\frac{\dot{T}}{T}$ es cero ya que se trata de un factor fijo.

Un supuesto adicional ya comentado en el modelo de Solow es que la población crece a una tasa exógena y constante representada por $g_L = \frac{\dot{L}}{L}$. Por tanto, la tasa de crecimiento de la tierra per cápita es:

$$\frac{\dot{t}}{t} = -g_L \tag{5.5}$$

La ecuación fundamental del modelo de Solow si la tecnología es Cobb-Douglas se escribe como (Sala i Martín, 1999):

$$\dot{k} = sy - (g_L + \delta)k \tag{5.6}$$

Donde $\dot{k}$ mide el crecimiento del stock de capital per cápita. Usando la función de producción Cobb-Douglas se tiene que:

$$\dot{k} = sk^{\alpha}t^{\beta} - (g_L + \delta)k \tag{5.7}$$

Dado el stock de capital per cápita existente un determinado instante, la ecuación (5.7) nos muestra cuál será el incremento instantáneo del stock de capital per cápita $\dot{k}$.

Dividiendo la expresión (5.7) por el capital per cápita *k*, la tasa de crecimiento del capital per cápita se puede escribir como:

$$\frac{\dot{k}}{k} = sk^{-(1-\alpha)}t^{\beta} - (g_L + \delta) \tag{5.8}$$

A continuación se analiza la tasa de crecimiento del capital per cápita en el estado estacionario. En el estado estacionario, la tasa de crecimiento de capital per cápita $\frac{\dot{k}}{k}$ es igual a una constante que denotaremos como g_k. Por tanto, la ecuación (5.8) en el estado estacionario tiene la forma:

$$g_k = sk^{-(1-\alpha)}t^{\beta} - (g_L + \delta) \tag{5.9}$$

Agrupando los términos constantes a la derecha y tomando logaritmos se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{g_K + g_L + \delta}{s} &= k^{-(1-\alpha)}t^{\beta} \\ \ln\left(\frac{g_K + g_L + \delta}{s}\right) &= -(1-\alpha)\ln k + \beta \ln t \end{aligned} \tag{5.10}$$

Derivando la expresión con respecto al tiempo resulta que:

$$0 = -(1-\alpha)\frac{\dot{k}}{k} + \beta\frac{\dot{t}}{t} \tag{5.11}$$

Sustituyendo las tasas de crecimiento del capital per cápita en el estado estacionario y de la tierra per cápita por sus valores se obtiene:

$$\begin{aligned} 0 &= -(1-\alpha)g_k - \beta g_L \\ g_k &= -\frac{\beta}{1-\alpha}g_L \end{aligned} \tag{5.12}$$

La ecuación (5.12) muestra que el modelo de Solow con una cantidad de tierra fija produce un crecimiento negativo del capital per cápita en el estado estacionario. A su vez, la tasa de crecimiento de la renta per cápita $g_y = \frac{\dot{y}}{y}$ se puede calcular como:

$$
\begin{aligned}
&y = k^{\alpha} t^{\beta} \\
&\ln y = \alpha \ln k + \beta \ln t \\
&\frac{\dot{y}}{y} = \alpha \frac{\dot{k}}{k} + \beta \frac{\dot{t}}{t} = -\alpha \frac{\beta}{1-\alpha} g_L - \beta g_L \\
&g_y = -\frac{\beta}{1-\alpha} g_L
\end{aligned}
\tag{5.13}
$$

La inclusión de la tierra como factor fijo en el modelo de Solow cambia sustancialmente los resultados obtenidos en la sección anterior. Ahora, en ausencia de cambio técnico, se produce un crecimiento negativo de la producción per cápita en el estado estacionario siempre que la tasa de crecimiento de la población g_L sea positiva. La tasa de crecimiento será más negativa cuanto más alto sea el nivel de crecimiento poblacional.

El sencillo modelo desarrollado en esta sección logra, mediante la inclusión de un factor fijo, obtener el resultado básico que caracteriza las preocupaciones malthusianas. Es decir, el efecto negativo del crecimiento poblacional en la renta per cápita. Al mismo tiempo, muestra que la ausencia de cambio técnico es fundamental para que esta conclusión se mantenga.

En la siguiente sección, se usa un modelo similar para modelizar las preocupaciones actuales sobre los efectos en el crecimiento a largo plazo de los recursos naturales no renovables. En esa sección, se hace un análisis más detallado del papel del cambio técnico y de la sustitución entre factores.

6. MODELIZACIÓN DE LA ENERGÍA EN EL CRECIMIENTO ECONÓMICO.

Los modelos de crecimiento genérico se componen de factores no reproducibles como el trabajo o la tierra y de factores reproducibles como el capital. En esta sección se introduce los recursos naturales como factor no reproducible. La preocupación por los recursos naturales y en especial por los recursos no renovables surge en un contexto de escasez, en el que estos recursos, antes considerados recursos inagotables, pasan a estar limitados en existencia y explotación, y por tanto son susceptibles de aparecer en los modelos generales de crecimiento. Por ello se plantean dos modelos que reflejan la dinámica de los recursos naturales en la economía, la sustitución de factores y el cambio técnico.

Se entiende por recursos naturales, a los factores de producción obtenidos por la naturaleza de manera directa y sin intervención ni alteración por parte del ser humano. Estos recursos naturales influyen en la economía positivamente al ser los medios conductores para la generación de energía o la obtención de alimentos. Asimismo contribuyen a satisfacer las necesidades de la población y la consecución de mayores tasas de crecimiento económico.

Según el ritmo de uso o consumo, su disponibilidad en el tiempo y la tasa de regeneración intrínseca de cada recurso, se pueden clasificar en recursos renovables y recursos no renovables o agotables.

Entendemos por recursos renovables a aquellos que no se agotan con su utilización debido a que se regeneran a mayor ritmo que su tasa de explotación. En el caso de que la tasa de explotación supere a la tasa de regeneración, los recursos renovables pierden su categoría de renovable y se habla de recursos extintos (v.g. bosques, pesquerías). De igual manera son recursos renovables aquellos que por su propia naturaleza vuelven a su estado original y donde su stock no se modifica por su utilización. Son considerados recursos renovables ilimitados (v.g. luz solar, viento).

Entendemos por recursos no renovables aquellos que constituyen cantidades fijas y por tanto limitadas. En otras palabras, a medida que se consumen se agotan, debido a que no pueden ser producidos o regenerados a una tasa tal que permita sostener su consumo.

En el contexto particular de la consecución de energía a partir de fuentes no renovables se pretende desacelerar el agotamiento de éstas con el fin de posibilitar un desarrollo sostenible social y medioambiental que garantice un crecimiento económico estable en el tiempo.

6.1. MODELO DE CRECIMIENTO CON RECURSOS NATURALES: UNA VERSIÓN SIMPLIFICADA.

A continuación se plantea un modelo de crecimiento con recursos naturales que sigue las líneas del desarrollado en la sección *4*. El análisis comienza con un caso simplificado en que el proceso productivo se representa por una función de producción Cobb-Douglas. Esta aproximación permite un análisis más sencillo.

La función de producción Cobb-Douglas con rendimientos constantes a escala y con recursos naturales se escribe como:

$$Y = AK^{\alpha}R^{\beta}L^{1-\alpha-\beta} \tag{6.1}$$

Donde Y es la producción, K es el stock de capital, L el trabajo y R el stock de recursos naturales disponibles. El capital K es una variable endógena del modelo cuyo stock se acumula mediante el ahorro de una proporción constante de la producción y A representa la tecnología. La tecnología, los recursos naturales y la población cambian a las tasas de crecimiento exógeno que siguen:

$$\frac{\dot{A}}{A} = g_A \quad \frac{\dot{R}}{R} = g_R \quad \frac{\dot{L}}{L} = g_L \tag{6.2}$$

Los coeficientes α y β son positivos y $\alpha + \beta < 1$. De este modo, los productos marginales de los factores son positivos y la tecnología tiene rendimientos de escala constantes en los factores rivales. Es decir, capital, recursos naturales y trabajo.

La remuneración unitaria de los factores se puede escribir como:

$$
\begin{aligned}
w_K &= \frac{\partial Y}{\partial K} = \alpha A K^{\alpha-1} R^{\beta} L^{1-\alpha-\beta} \\
w_R &= \frac{\partial Y}{\partial R} = \beta A K^{\alpha} R^{\beta-1} L^{1-\alpha-\beta} \\
w_L &= \frac{\partial Y}{\partial L} = \left(1-\alpha-\beta\right) K^{\alpha} R^{\beta} L^{-(\alpha+\beta)}
\end{aligned} \tag{6.3}
$$

La remuneración total de los factores se puede escribir como:

$$
\begin{aligned}
w_K K &= \alpha A K^{\alpha} R^{\beta} L^{1-\alpha-\beta} = \alpha Y \\
w_R R &= \beta A K^{\alpha} R^{\beta} L^{1-\alpha-\beta} = \beta Y \\
w_L L &= \left(1-\alpha-\beta\right) K^{\alpha} R^{\beta} L^{1-\alpha-\beta} = \left(1-\alpha-\beta\right) Y
\end{aligned} \tag{6.4}
$$

Finalmente, las participaciones de la remuneración de los factores en el producto final son:

$$
\frac{w_K K}{Y} = \alpha \quad \frac{w_R R}{Y} = \beta \quad \frac{w_L L}{Y} = 1-\alpha-\beta \tag{6.5}
$$

Por tanto, las participaciones de las remuneraciones en el producto total son constantes. Es decir, no varían al modificarse el capital, el trabajo, los recursos naturales o la tecnología. En otras palabras, se mantienen constante con independencia de la escasez o abundancia relativa de todos estos factores.[1]

La producción per cápita es:

$$
\begin{aligned}
\frac{Y}{L} &= \frac{A K^{\alpha} R^{\beta} L^{1-\alpha-\beta}}{L^{\alpha} L^{\beta} L^{1-\alpha-\beta}} \\
y &= A k^{\alpha} r^{\beta}
\end{aligned} \tag{6.6}
$$

Dónde $y = \frac{Y}{L}, k = \frac{K}{L}$ y $r = \frac{R}{L}$. Es decir, se trata de la producción y los factores rivales en términos per cápita. La tasa de crecimiento de los recursos naturales en términos per cápita se puede calcular tomando logaritmos y derivando con respecto al tiempo.

[1] Cobb y Douglas, (1928) proponen esta función de producción para representar un patrón común en la economía en aquel momento: la constancia a lo largo del tiempo de las participaciones de la remuneración de los factores en el producto final.

$$\ln r = \ln R - \ln L$$

$$\frac{\dot{r}}{r} = \frac{\dot{R}}{R} - \frac{\dot{L}}{L} = g_R - g_L \tag{6.7}$$

Siguiendo el resultado obtenido en la ecuación (4.16) de la sección *4*, el crecimiento del capital per cápita viene determinado por:

$$\dot{k} = sAk^{\alpha} r^{\beta} - \left(g_L + \delta\right) k \tag{6.8}$$

Dividiendo por el capital per cápita se obtiene la tasa de crecimiento del capital per cápita:

$$\frac{\dot{k}}{k} = sAk^{\alpha-1} r^{\beta} - \left(g_L + \delta\right) \tag{6.9}$$

El estado estacionario se caracteriza por un crecimiento constante del capital per cápita que denominados g_k. Incluyendo esta característica en la ecuación (6.9) y agrupando a la izquierda las constantes del modelo se tiene que:

$$\begin{aligned} g_k &= sAk^{\alpha-1} r^{\beta} - \left(g_L + \delta\right) \\ \frac{g_k + g_L + \delta}{s} &= Ak^{\alpha-1} r^{\beta} \end{aligned} \tag{6.10}$$

Tomando logaritmos y derivando con respecto al tiempo se tiene que:

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{g_k + g_L + \delta}{s}\right) &= \ln A + \left(\alpha - 1\right) \ln k + \beta \ln r \\ 0 &= \frac{\dot{A}}{A} + \left(\alpha - 1\right) \frac{\dot{k}}{k} + \beta \frac{\dot{r}}{r} \end{aligned} \tag{6.11}$$

Sustituyendo las tasas de crecimiento en (6.11) por sus valores exógenos constantes y despejando la tasa de crecimiento del capital per cápita en el estado estacionario se tiene que:

$$
\begin{aligned}
0 &= g_A + (\alpha - 1) g_k + \beta (g_R - g_L) \\
g_k &= \frac{1}{(1-\alpha)} \left[g_A + \beta (g_R - g_L) \right]
\end{aligned}
\tag{6.12}
$$

La ecuación (6.12) nos permite explicar el crecimiento del capital per cápita a través de la tasa de cambio técnico g_A, de la tasa de crecimiento de los recursos naturales g_R y de la tasa de crecimiento de la población g_L.

La tasa de crecimiento de la producción per cápita se puede calcular usando la función de producción per cápita $y = Ak^{\alpha} r^{\beta}$ .Tomando logaritmos, derivando con respecto al tiempo y sustituyendo por las tasas de crecimiento conocidas se tiene que:

$$
\begin{aligned}
&\ln y = \ln A + \alpha \ln k + \beta \ln r \\
&\frac{\dot{y}}{y} = \frac{\dot{A}}{A} + \alpha \frac{\dot{k}}{k} + \beta \frac{\dot{r}}{r} \\
&g_y = g_A + \alpha g_k + \beta (g_R - g_L) \\
&g_y = \frac{1}{1-\alpha} \left[g_A + \beta (g_R - g_L) \right]
\end{aligned}
\tag{6.13}
$$

Donde g_y es la tasa de crecimiento de la producción per cápita en el estado estacionario.

El análisis del caso sin cambio técnico y con población constante $(g_A = g_L = 0)$permite ver con claridad el efecto de los recursos naturales no renovables en el crecimiento económico. En ese caso, la tasa de crecimiento de la economía en el estado estacionario se puede escribir como:

$$
g_y = \frac{\beta}{1-\alpha} g_R \tag{6.14}
$$

La expresión (6.14) muestra que el signo de la tasa de crecimiento de la producción per cápita depende de la tasa de crecimiento de los recursos naturales g_R. Esta tasa será menor o igual que cero $(g_R \leq 0)$ si los recursos son no renovables. Por tanto, en este caso tenemos una economía con una tasa de crecimiento negativo.

La magnitud del decrecimiento económico depende de la participación de la remuneración stock de recursos naturales en el producto (β). Cuanto mayor sea esta participación mayor será la tasa negativa de crecimiento económico debido al papel de los recursos naturales no renovables. Por tanto, la participación de la remuneración de los recursos naturales en el producto es clave a la hora de determinar el efecto económico negativo de su agotamiento. Algunos autores (Stern, 2010; Ayres y Warr, 2009) consideran que la escasa preocupación por este efecto negativo se debe a que la participación de la remuneración de los recursos naturales en el producto total es baja.

Una cuestión relevante es si esa participación sube cuando los recursos naturales se hacen cada vez más escasos. En el caso de una función de producción Cobb-Douglas esa participación es constante. Por tanto, el análisis de este punto requerirá un modelo con una función de producción más general en que esas participaciones no sean constantes. La expresión (6.13) muestra además como el cambio técnico $\left(g_A \geq 0\right)$ puede atenuar o eliminar el impacto negativo de la disminución del stock de recursos no renovables.

En resumen, este modelo simplificado señala dos factores claves en el crecimiento económico con recursos no renovables: el cambio técnico y el peso de los recursos naturales en la producción medida por la participación de su remuneración en el producto final. Sin embargo, el hecho de que esta participación sea constante en la función de producción nos lleva a plantear el modelo con una función de producción general en el siguiente apartado.

6.2. MODELO DE CRECIMIENTO CON RECURSOS NATURALES. CASO GENERAL.

En esta sección se hace un planteamiento más general del modelo de crecimiento con recursos naturales. En concreto, se pretende que las tasas de participación de la remuneración de los recursos en la producción no sean constantes como ocurre en la función de producción Cobb-Douglas. Para ello, las posibilidades de producción de la economía se representan por una función de producción genérica como:

$$Y = F\left(A, K, R, L\right) \tag{6.15}$$

Los componentes de la ecuación (6.15) se corresponden con las definiciones dadas en la sección con función de producción Cobb-Douglas descrita anteriormente. Por otra parte, la tecnología, los recursos naturales y la población cambian a las tasas de crecimiento exógeno de la expresión (6.2).

La función de producción presenta rendimientos constantes a escala en los factores rivales. Por tanto, la producción per cápita se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \frac{Y}{L} &= F\left(A, \frac{K}{L}, \frac{R}{L}, 1\right) \\ y &= f\left(A, k, r\right) \end{aligned} \tag{6.16}$$

Donde, las letras minúsculas indican las variables en términos per cápita.

Las remuneraciones unitarias del capital y de los recursos naturales se pueden escribir en términos de la función de producción per cápita tomando derivadas en la expresión que relaciona la función de producción con la función de producción per cápita:

$$\begin{aligned} &F\left(A, K, R, L\right) = Lf\left(A, k, r\right) \\ &w_K = \frac{\partial F}{\partial K} = L\frac{\partial f}{\partial k}\frac{1}{L} = \frac{\partial f}{\partial k} \\ &w_R = \frac{\partial F}{\partial R} = L\frac{\partial f}{\partial r}\frac{1}{L} = \frac{\partial f}{\partial r} \end{aligned} \tag{6.17}$$

Las derivadas parciales en la ecuación (6.17) muestran que el producto marginal del capital $\left(\frac{\partial F}{\partial K}\right)$ es igual al producto per cápita marginal del capital per cápita $\left(\frac{\partial f}{\partial k}\right)$. De la misma manera, $\frac{\partial F}{\partial R}$ es igual a $\frac{\partial f}{\partial r}$. Este resultado muestra que la economía no cambia con mayores cantidades de capital o de recursos naturales y será de gran importancia a la hora de determinar las participaciones de las remuneraciones del capital y de los recursos en el producto total más adelante.

Siguiendo la expresión (4.16), la tasa de crecimiento del capital per cápita se puede escribir como:

$$\dot{k} = sf\left(A, k, r\right) - \left(g_L + \delta\right)k \tag{6.18}$$

Dividiendo por el capital per cápita se obtiene la tasa de crecimiento del capital per cápita:

$$\frac{\dot{k}}{k}=\frac{sf\left(A,k,r\right)}{k}-\left(g_L+\delta\right) \tag{6.19}$$

El estado estacionario se caracteriza por una tasa de crecimiento constante del capital per cápita $g_k=\frac{\dot{k}}{k}$. Incluyendo esta característica en la ecuación (6.19) y agrupando a la izquierda las constantes del modelo se tiene que:

$$\begin{aligned} g_k &= \frac{sf\left(A,k,r\right)}{k}-\left(g_L+\delta\right) \\ \frac{g_k+g_L+\delta}{s} &= \frac{f\left(A,k,r\right)}{k} \end{aligned} \tag{6.20}$$

Derivando con respecto al tiempo la expresión (6.20) se tiene que:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial A}\dot{A}+\frac{\partial f}{\partial k}\dot{k}+\frac{\partial f}{\partial r}\dot{r}\right)k-f\left(A,k,r\right)\dot{k}}{k^2} \\ A\frac{\partial f}{\partial A}\frac{\dot{A}}{A}+k\frac{\partial f}{\partial k}\frac{\dot{k}}{k}+r\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\dot{r}}{r} &= f\left(A,k,r\right)\frac{\dot{k}}{k} \\ \frac{A}{f}\frac{\partial f}{\partial A}\frac{\dot{A}}{A}+\frac{k}{f}\frac{\partial f}{\partial k}\frac{\dot{k}}{k}+\frac{r}{f}\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\dot{r}}{r} &= \frac{\dot{k}}{k} \end{aligned} \tag{6.21}$$

Analizando los diferentes términos de la ecuación (6.21) se tiene que:

$$\begin{aligned} \varepsilon_A &= \frac{A}{f}\frac{\partial f}{\partial A} \\ \frac{k}{f}\frac{\partial f}{\partial k} &= \frac{\frac{K}{L}}{\frac{Y}{L}}\frac{\partial F}{\partial K}=\frac{K\frac{\partial F}{\partial K}}{Y}=S_K\left(A,K,L\right) \\ \frac{r}{f}\frac{\partial f}{\partial r} &= \frac{\frac{R}{L}}{\frac{Y}{L}}\frac{\partial F}{\partial R}=\frac{R\frac{\partial F}{\partial R}}{Y}=S_R\left(A,K,L\right) \end{aligned} \tag{6.22}$$

El término ε_A representa la elasticidad de la producción con respecto al cambio técnico A. Las participaciones de la remuneración de K y R en el producto total se obtienen usando la igualdad del producto marginal absoluto y el per cápita que aparece en la expresión (6.17).

En este modelo, S_K y S_R son funciones de la tecnología A y de las cantidades de factores. Es decir, pueden cambiar en función de cambios en el stock de capital, el stock de recursos naturales, el trabajo y la tecnología. Por tanto, la expresión (6.22) se puede escribir como:

$$\frac{\dot{k}}{k} = \varepsilon_A \frac{\dot{A}}{A} + S_K \frac{\dot{k}}{k} + S_R \frac{\dot{r}}{r} \tag{6.23}$$

Sustituyendo las tasas de crecimiento por sus valores constantes y despejando la tasa de crecimiento del capital per cápita en el estado estacionario se tiene que:

$$\begin{aligned}
&\left(1 - S_K\right)\frac{\dot{k}}{k} = \varepsilon_A \frac{\dot{A}}{A} + S_R \frac{\dot{r}}{r} \\
&g_k = \frac{\dot{k}}{k} = \frac{\varepsilon_A}{1 - S_K}\frac{\dot{A}}{A} + \frac{S_R}{1 - S_K}\frac{\dot{r}}{r} \\
&g_k = \frac{1}{1 - S_K}\left[\varepsilon_A g_A + S_R\left(g_R - g_L\right)\right]
\end{aligned} \tag{6.24}$$

La tasa de crecimiento de la renta per cápita g_y se obtiene derivando la función de producción per cápita con respecto al tiempo y dividiendo por la producción y:

$$\begin{aligned}
&y = f\left(A, k, r\right) \\
&\dot{y} = \frac{\partial f}{\partial A}\dot{A} + \frac{\partial f}{\partial k}\dot{k} + \frac{\partial f}{\partial r}\dot{r} \\
&\frac{\dot{y}}{y} = \frac{A}{y}\frac{\partial f}{\partial A}\frac{\dot{A}}{A} + \frac{k}{y}\frac{\partial f}{\partial k}\frac{\dot{k}}{k} + \frac{r}{y}\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\dot{r}}{r}
\end{aligned} \tag{6.25}$$

Sustituyendo en la expresión (6.25) las definiciones de la expresión (6.22), las tasas de crecimiento exógeno y la tasa de crecimiento del capital per cápita calculada en (6.24) se tiene que:

$$g_y = \varepsilon_A g_A + \frac{S_K}{1-S_K}\left[\varepsilon_A g_A + S_R\left(g_R - g_L\right)\right] + S_R\left(g_R - g_L\right)$$
$$g_y = \frac{1}{1-S_K}\left[\varepsilon_A g_A + S_R\left(g_R - g_L\right)\right] \tag{6.26}$$

Se obtiene que, cómo en el modelo anterior, la tasa de crecimiento del capital per cápita es igual a la tasa de crecimiento de la renta per cápita.

La tasa de crecimiento de la renta per cápita g_y es función de la tasa de cambio técnico g_A, de la tasa de crecimiento de los recursos naturales g_R y de la tasa de crecimiento de la población g_L. Por una parte, el cambio técnico tiene un efecto positivo en la tasa de crecimiento de la renta. Por otra, con un recurso natural no renovable $\left(g_R \leq 0\right)$ y con crecimiento poblacional $\left(g_L \geq 0\right)$ se tiene que el término $\left(g_R - g_L\right)$ es negativo. Por tanto, los recursos naturales no renovables contribuyen de forma negativa al crecimiento de la renta. Como en el modelo anterior, la magnitud de este efecto negativo depende de la participación de la remuneración del recurso en el producto total (S_R). Sin embargo, en este modelo más general, es posible analizar la evolución de esta participación cuando el recurso natural se hace más escaso.

El efecto negativo de los recursos en el crecimiento de la renta sería menor si la participación de los recursos naturales S_R se redujese a medida que éstos se hiciesen más escasos. Como las participaciones suman *1*, una reducción de la participación de los recursos S_R tiene que estar acompañada por un aumento de la participación de capital S_K y del trabajo S_L. Es decir, que una reducción de S_R está asociada a un incremento de la ratio:

$$\frac{S_K}{S_R} = \frac{w_K K}{w_R R} = \frac{\frac{K}{R}}{\frac{w_R}{w_K}} \tag{6.27}$$

La ratio en (6.27) es muy importante. Si el recurso natural *R* disminuye, el mantenimiento de la producción requiere usar más capital *K*. Es decir, el numerador $\frac{K}{R}$

crece. Si R es más escaso, su remuneración (producto marginal) se incrementa. Es decir, el denominador $\frac{w_R}{w_K}$ crece también.

La clave de la evolución del cociente en (6.27) es conocer si el numerador crece más o menos que el denominador. En otras palabras, es necesario conocer el porcentaje en que crece el numerador cuando el denominador lo hace en un *1%*. Es decir, la siguiente elasticidad:

$$\sigma = \frac{\partial \ln\left(\frac{K}{R}\right)}{\partial \ln\left(\frac{w_R}{w_K}\right)} \tag{6.28}$$

La expresión (6.28) se conoce como Elasticidad de Sustitución de Allen. Mide el porcentaje en que se incrementa la ratio de dos factores productivos cuando su precio relativo se incrementa en un *1*%, manteniendo la producción constante (Allen, 1938).

Si la elasticidad de sustitución de Allen es mayor que *1*, un incremento del precio relativo del recurso natural $\frac{w_R}{w_K}$ en un *1%* por su escasez creciente da lugar a un aumento mayor del *1%* de la ratio $\frac{K}{R}$. A su vez, este resultado implica un incremento de la ratio $\frac{S_K}{S_R}$. Es decir, una reducción de S_R. Por tanto, si la elasticidad de sustitución de Allen es mayor que *1* la escasez de los recursos hace que se reduzca la participación del recurso en el producto total. La consecuencia es que el impacto negativo del agotamiento de los recursos naturales en el crecimiento económico se atenúa por la reducción de S_R que acompaña a la reducción de los recursos.

Por otra parte, si la elasticidad de sustitución de Allen es menor que *1*, tenemos el caso contrario. Es decir, un incremento de la participación de la remuneración de los recursos naturales en la producción asociado a su creciente escasez. Por tanto, un efecto creciente de la escasez en el crecimiento económico.

Este análisis destaca el papel en el crecimiento de la renta de la sustitución de capital por los recursos naturales que se agotan. El impacto negativo en el crecimiento de la renta del agotamiento de recursos naturales puede ser atenuado si la elasticidad de sustitución de Allen es mayor que *1*. Es decir, si existe la posibilidad de sustituir capital por recursos naturales de un modo que atenúe los efectos negativos del agotamiento de los recursos naturales.

6.3. MODELIZACIÓN DE LA SUSTITUCIÓN DE FACTORES.

La sustitución de capital por recursos naturales es una de los elementos que puede reducir el impacto de los recursos naturales finitos en el crecimiento económico. Por esa razón, en esta sección se analiza la modelización de la sustitución en los modelos productivos. En concreto, se analizan las propiedades de un conjunto de funciones de producción que aparecen con frecuencia en el análisis económico capaces de modelizar la ausencia de sustitución, la sustitución perfecta y dos casos intermedios.

6.3.1. La ausencia de sustitución: función de producción de Leontief.

La función de producción de Leontief considera el caso en que no existe sustitución entre los factores. Esta función se puede escribir como:

$$Y = A\min\left(\alpha K, \left(1-\alpha\right)L\right) \tag{6.29}$$

La minimización de costes ocurre cuando:

$$Y = A\alpha K = A\left(1-\alpha\right)L \tag{6.30}$$

Reordenando la ecuación (6.30) y tomando derivadas logarítmicas con respecto al precio relativo de los factores $\frac{w_L}{w_K}$ se obtiene la elasticidad de sustitución de Allen como:

$$
\begin{aligned}
\frac{K}{L} &= \frac{1-\alpha}{\alpha} \\
\ln\frac{K}{L} &= \ln\frac{1-\alpha}{\alpha} \\
\sigma &= \frac{\partial \ln\frac{K}{L}}{\partial \ln\frac{w_L}{w_K}} = 0
\end{aligned}
\tag{6.31}
$$

Es decir, la elasticidad de sustitución de Allen toma el valor *0* en el caso de una función de producción de Leontief.

6.3.2. La sustitución perfecta: función de producción lineal.

La función de producción lineal se puede escribir como:

$$
Y = A\left[\alpha K + \left(1-\alpha\right)L\right] \tag{6.32}
$$

La minimización de costes tiene dos soluciones distintas dependiendo de si la Relación Marginal de Sustitución de trabajo por capital es mayor o menor que el precio relativo del trabajo y el capital. La relación Marginal de Sustitución de trabajo por capital se calcula como:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial Y}{\partial K} = A\alpha \quad \frac{\partial Y}{\partial L} = A\left(1-\alpha\right) \\
&RMST_{LK} = \frac{\frac{\partial Y}{\partial L}}{\frac{\partial Y}{\partial K}} = \frac{1-\alpha}{\alpha}
\end{aligned}
\tag{6.33}
$$

Si la Relación Marginal de Sustitución de trabajo por capital es mayor que el precio relativo del trabajo en términos de capital solo se usaría trabajo para la producción. Es decir:

$$
\frac{1-\alpha}{\alpha} > \frac{w_L}{w_K} \;\Rightarrow L > 0 \;\; K = 0 \;\Rightarrow\; \frac{K}{L} = 0 \tag{6.34}
$$

Por el contrario, si la Relación Marginal de Sustitución de trabajo por capital es menor que el precio relativo del trabajo en términos de capital solo se usaría capital para la producción. Es decir:

$$\frac{1-\alpha}{\alpha} < \frac{w_L}{w_K} \Rightarrow L = 0 \;\; K > 0 \;\Rightarrow\; \frac{K}{L} \to \infty \tag{6.35}$$

Por lo tanto, un cambio marginal del precio relativo de los factores en el punto $\frac{1-\alpha}{\alpha}$ produce un cambio de *0* a un número que tiende a infinito en la ratio de factores. Por tanto, la elasticidad de sustitución de Allen tiende a infinito.

6.3.3. Un caso intermedio de sustitución: la función de producción Cobb-Douglas.

La función de producción se puede escribir como:

$$Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha} \tag{6.36}$$

La minimización de costes implica la igualación de los productos marginales de los factores a sus respectivos precios. Es decir:

$$w_L = \frac{\partial Y}{\partial L} = (1-\alpha)AK^{\alpha}L^{-\alpha} \quad w_K = \frac{\partial Y}{\partial K} = \alpha AK^{\alpha-1}L^{1-\alpha} \tag{6.37}$$

La Relación Marginal de Sustitución Técnica de trabajo por capital es el cociente de los productos marginales:

$$RMST_{LK} = \frac{\frac{\partial Y}{\partial L}}{\frac{\partial Y}{\partial K}} = \frac{(1-\alpha)AK^{\alpha}L^{-\alpha}}{\alpha AK^{\alpha-1}L^{1-\alpha}} = \frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{K}{L} \tag{6.38}$$

La minimización de costes implica igualar la Relación Marginal de Sustitución Técnica a la ratio del precio de los factores:

$$\frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{K}{L} = \frac{w_L}{w_K} \Rightarrow \frac{K}{L} = \frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{w_L}{w_K} \tag{6.39}$$

Tomando logaritmos naturales y derivando con respecto al precio relativo del factor trabajo se tiene que:

$$
\begin{aligned}
&\ln \frac{K}{L} = \ln \frac{\alpha}{1-\alpha} + \ln \frac{w_L}{w_K} \\
&\frac{\partial \ln \frac{K}{L}}{\partial \ln \frac{w_L}{w_K}} = 0 + \frac{\partial \ln \frac{w_L}{w_K}}{\partial \ln \frac{w_L}{w_K}} \\
&\sigma = \frac{\partial \ln \frac{K}{L}}{\partial \ln \frac{w_L}{w_K}} = 1
\end{aligned}
\tag{6.40}
$$

Es decir, la elasticidad de sustitución de Allen es igual a 1 en la función de producción Cobb-Douglas. Esta propiedad está relacionada con resultados mencionados con anterioridad. En la expresión (6.28), una elasticidad de sustitución de *1* implica que numerador y denominador cambian en el mismo porcentaje. Por tanto, las participaciones de los factores en el producto total se mantienen constantes.

6.3.4. Un caso intermedio más general: la función de producción CES.

La función de producción CES **(**Arrow et al., 1961**)** es homogénea lineal y tiene una elasticidad de sustitución de los inputs constante que puede tomar valores distintos de la unidad.

La función de producción CES se puede escribir como:

$$
Y = A\left[\alpha K^{\rho} + \left(1-\alpha\right) L^{\rho}\right]^{\frac{1}{\rho}} \tag{6.41}
$$

La minimización de costes implica la igualación de los productos marginales de los factores a sus respectivos precios. Es decir:

$$
\begin{aligned}
w_K &= \frac{\partial Y}{\partial K} = A\alpha\left[\left(1-\alpha\right) L^{\rho} + \alpha K^{\rho}\right]^{\frac{1}{\rho}-1} K^{\rho-1} \\
w_L &= \frac{\partial Y}{\partial L} = A\left(1-\alpha\right)\left[\left(1-\alpha\right) L^{\rho} + \alpha K^{\rho}\right]^{\frac{1}{\rho}-1} L^{\rho-1}
\end{aligned}
\tag{6.42}
$$

La Relación Marginal de Sustitución de trabajo por capital $RMST_{LK}$ se puede calcular a partir de las productividades marginales de *K* y *L* como:

$$RMST_{LK} = \frac{\frac{\partial y}{\partial L}}{\frac{\partial y}{\partial K}} = \frac{(1-\alpha)}{\alpha}\left(\frac{K}{L}\right)^{1-\rho} = \frac{w_L}{w_K} \tag{6.43}$$

Donde, $\frac{w_L}{w_K}$ es la ratio de precios que relaciona la remuneración del trabajo w_L con la remuneración del capital w_K.

Tomamos logaritmos a ambos lados de la expresión se tiene que:

$$\ln\frac{1-\alpha}{\alpha} + (1-\rho)\ln\frac{K}{L} = \ln\frac{w_L}{w_K} \tag{6.44}$$

Derivando ambos lados de la ecuación (6.44) con respecto al logaritmo de la ratio de precios $\frac{w_L}{w_K}$ se tiene que:

$$\begin{gathered}(1-\rho)\frac{\partial \ln\frac{K}{L}}{\partial \ln\frac{w_L}{w_K}} = 1 \\ \sigma = \frac{1}{1-\rho}\end{gathered} \tag{6.45}$$

La ecuación (6.45) representa la elasticidad de sustitución de capital por el trabajo en una función de producción CES.

Una característica importante de la función de producción CES es que contiene como casos particulares a las funciones de producción lineal, Cobb-Douglas y Leontief dependiendo del valor del parámetro ρ.

Caso 1: $\rho \to 1$

En este caso, la elasticidad de sustitución de Allen toma el siguiente valor:

$$\lim_{\rho \to 1} \frac{1}{1-\rho} = +\infty \Rightarrow \sigma \to +\infty .$$

Cuando $\rho \to 1$, la función de producción *CES* en la expresión (6.41) toma la forma:

$$Y = A\left[\alpha K + (1-\alpha) L\right]$$

Que es una función de producción lineal en la que las isocuantas son líneas rectas y los inputs son sustitutivos perfectos.

Caso 2: $\rho \to 0$

En este caso, la elasticidad de sustitución de Allen toma el siguiente valor:

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{1}{1-\rho} = 0 \Rightarrow \sigma \to 1$$

El límite de la función de producción CES se calcula tras tomar logaritmos en la expresión (6.40).

$$\begin{aligned} \ln Y &= \ln A + \frac{1}{\rho} \ln\left[\alpha K^{\rho} + (1-\alpha) L^{\rho}\right] \\ \lim_{\rho \to 0} \ln Y &= \ln A + \lim_{\rho \to 0} \frac{\ln\left[\alpha K^{\rho} + (1-\alpha) L^{\rho}\right]}{\rho} \end{aligned} \tag{6.46}$$

Aplicando la regla de L'hôpital se tiene que:

$$\lim_{\rho \to 0} \ln Y = \ln A + \lim_{\rho \to 0} \frac{\dfrac{\alpha K^{\rho} \ln K + (1-\alpha) L^{\rho} \ln L}{\alpha K^{\rho} + (1-\alpha) L^{\rho}}}{1} = \ln A + \alpha \ln K + (1-\alpha) \ln L \tag{6.47}$$

Que se trata de la función de producción Cobb-Douglas $Y = AK^{\alpha} L^{1-\alpha}$.

Caso 3: $\rho \to -\infty$

En este caso, la elasticidad de sustitución de Allen toma el siguiente valor:

$$\lim_{\rho \to -\infty} \frac{1}{1-\rho} = 0 \Rightarrow \sigma \to 0$$

De nuevo, el límite de la función de producción CES se calcular en tras tomar logaritmos en la expresión (6.40):

$$\lim_{\rho \to -\infty} \ln Y = \ln A + \lim_{\rho \to -\infty} \frac{\ln\left[\alpha K^{\rho} + (1-\alpha) L^{\rho}\right]}{\rho} \tag{6.48}$$

Aplicando la regla de L'hôpital se tiene que:

$$\lim_{\rho \to -\infty} \ln Y = \ln A + \lim_{\rho \to -\infty} \frac{\alpha K^{\rho} \ln K + (1-\alpha) L^{\rho} \ln L}{\alpha K^{\rho} + (1-\alpha) L^{\rho}} \tag{6.49}$$

El cálculo de este límite requiere dividir los factores productivos por el de menor valor. Es decir, por $Z = \min\{K, L\}$. En este caso se tiene que:

$$\lim_{\rho \to -\infty} \ln Y = \ln A + \lim_{\rho \to -\infty} \frac{\alpha \left(\frac{K}{Z}\right)^{\rho} \ln K + (1-\alpha) \left(\frac{L}{Z}\right)^{\rho} \ln L}{\alpha \left(\frac{K}{Z}\right)^{\rho} + (1-\alpha) \left(\frac{L}{Z}\right)^{\rho}} \tag{6.50}$$

Si $K > L = Z$, entonces:

$$\lim_{\rho \to -\infty} \ln Y = \ln A + \ln L \Rightarrow Y = AL \Rightarrow Y = AZ \Rightarrow Y = A \min\{K, L\}$$

Si L>K=Z, entonces:

$$\lim_{\rho \to -\infty} \ln Y = \ln A + \ln K \Rightarrow Y = AK \Rightarrow Y = AZ \Rightarrow Y = A \min\{K, L\}$$

Por tanto, el límite de la función de producción CES es $Y = \min\{K, L\}$ que es evidentemente una función de producción de Leontief sin posibilidades de sustitución entre inputs.

6.4. CAMBIO TÉCNICO.

El análisis de los modelos de crecimiento con recursos naturales no renovables muestra que el cambio técnico puede ser una pieza clave junto a la sustitución de factores a la hora de atenuar el impacto negativo del agotamiento de los recursos naturales. En los modelos básicos de crecimiento, el cambio técnico tiene las características de no rivalidad y no excluibilidad. Es no rival en cuanto a que una persona utilice una tecnología no impide en absoluto que sea utilizada por otra con la igual eficacia. No es excluible ya que las ideas por su propia naturaleza hacen difícil impedir que otros las utilicen y son susceptibles de imitación. No obstante, existen modelos de crecimiento con una especificación más detallada y realista del papel del cambio técnico (Romer, 1990) que quedan fuera del alcance de este trabajo.

En los modelos estudiados en este trabajo el cambio técnico se recoge como una variación del valor del parámetro A en la función de producción (Weil, 2006). De hecho, el parámetro A representa el cambio técnico como un desplazamiento ascendente y proporcional de la función de producción. (Weil, 2006; Blaug, 1985). El origen de ese desplazamiento se supone exógeno, es decir, que se produce por causas ajenas al modelo que se estudia. Sin embargo, para los objetivos de este trabajo puede ser interesante analizar la hipótesis del cambio técnico inducido por la escasez relativa de los factores de producción. Por ejemplo, tanto la escasez física reflejada en la carencia de stock de un recurso (v.g. stock de carbón) como la escasez económica manifestada en la viabilidad de la extracción (v.g. cómo extraer el carbón).

Hicks, (1932) establece que un cambio en los precios relativos de los factores de producción tiende a inducir cambios tecnológicos destinados a economizar el uso del factor en cuestión debido a que se ha vuelto relativamente caro. Aplicado al caso de la energía, supondría que ante subidas en el precio de los combustibles y las materias primas se buscan alternativas técnicas que ahorren el uso de energía. Es decir, los precios de los factores generan incentivos para la reducción del uso del factor escaso y, por tanto, a dirigir el esfuerzo de innovación hacia aquel que con mejores precios logre una producción óptima. En el cambio técnico inducido se aprovecha la tecnología potencial para ahorrar en el factor escaso. Aunque esto no significa que el cambio técnico sea lo suficientemente potente como para superar todas las carencias. Esta limitación en el uso de los recursos energéticos, condiciona, acota y restringe el crecimiento económico.

La evidencia empírica muestra que la tecnología responde al incentivo de la escasez. La escasez de mano de obra o de capital induce el progreso tecnológico más rápido. Ante la falta de mano de obra el cambio técnico responde creando máquinas que requieran un uso menor de trabajadores. Ante la falta de capital el cambio técnico mejora la eficiencia del capital humano. Frente a la falta de materias primas energéticas el cambio técnico pone la atención en lograr capital que logre un consumo más eficiente de energía.

De acuerdo con la hipótesis del cambio técnico inducido, la subida del precio de la energía asociada a su escasez puede producir innovaciones en los siguientes ámbitos:

1. Mejoras en la extracción de los recursos fósiles que permita hacer económicamente viables vetas que se consideraban no explotables. El incremento en la extracción del gas pizarra puede ser un ejemplo en esta dirección.

2. Mejoras en la eficiencia en el uso de los combustibles. Es decir, en conseguir mayor cantidad de trabajo físico de una determinada cantidad de recurso energético. Las mejoras en la eficiencia energética de los medios de transporte y de la maquinaria en general podrían ir en esta dirección.

3. Desarrollo de fuentes de energía no basadas en el uso de recursos naturales no renovables.

6.5. EL PAPEL DE LA ENERGÍA EN EL CRECIMIENTO ECONÓMICO.

La relación entre energía y crecimiento de la producción ha sido estudiada en la literatura empírica. En concreto, se intenta determinar si existe tal relación y si la hay, cuál es dirección de causalidad entre las dos variables mencionadas. Los resultados son contradictorios, no llegando a un consenso ni en la existencia ni en la dirección de la relación de causalidad entre energía y crecimiento. Se dan casos donde el crecimiento del producto interior es la causa de la energía, casos donde es la energía la causa del crecimiento del producto y casos en que la relación va en ambas direcciones. Además, aparecen casos en que no existe relación entre las dos variables. Stern (2010) y Ayres y Warr (2009) sugieren que no se detecta una relación causal debido a los efectos de la sustitución entre la energía y otros inputs. Es decir, que las reducciones en el consumo de energía pueden ser contrarrestadas por incrementos en el uso de otros factores de producción.

Los modelos de crecimiento económico no suelen hacer referencia explícita a la energía. La explicación radica en que la energía es relativamente barata y supone un porcentaje pequeño del coste de producción. Esta participación pequeña de la energía implica que las posibles reducciones en su stock tengan un efecto pequeño en el crecimiento.

Ante esta aproximación, se antepone la visión de la Economía Ecológica que sí hace referencia explícita a la energía. El argumento básico es que, si bien es cierto, que la participación de la energía en el coste total es pequeña, ésta puede crecer al convertirse la energía fósil en más cara debida a su creciente escasez. El problema es muy importante ya que una gran proporción de la energía que se consume proviene de combustibles fósiles cuya escasez sólo puede crecer.

La Economía Ecológica considera que la energía es la principal fuente de valor debido a que otros factores de producción, como el trabajo o el capital no pueden prescindir ni sustituir a la energía. De acuerdo con esta visión, se espera que la energía actúe como factor limitante con respecto al crecimiento económico. La visión pesimista de estos economistas se basa en su escepticismo sobre las posibilidades de sustitución de otros factores de producción por energía.

El uso de capital puede ahorrar energía a través de mejoras de la eficiencia energética. Sin embargo, sustituir capital por energía parece difícil[2]. De hecho la energía entendida como trabajo es difícil de sustituir. Si el producto final o intermedio contiene calor, movimiento, fuerzas electromagnéticas, luz o electricidad, necesita energía por definición, por lo que la sustitución no parece posible. Por otra parte, no parece

---

[2] Es bien sabido que la energía no se crea ni se destruye, sino que sólo se transforma (de acuerdo con la primera ley de la termodinámica). Por otra parte, también se sabe que en cualquier transformación hay una pérdida de energía y que permanece no disponible (de acuerdo con la segunda ley de la termodinámica).

razonable considerar la posibilidad de obtener un output final solo proveniente del trabajo o del capital sin energía. La sustituibilidad de los factores es limitada en el mundo real. Pero si ésta fuese mucho más limitada de lo que los economistas asumen, el crecimiento será más lento (Ayres y Voudouris, 2014). Esta línea de razonamiento coincide con resultados previos obtenidos en el presente trabajo. En concreto, la expresión (6.28) refleja el impacto negativo de la escasez de recursos en el crecimiento económico si la elasticidad de sustitución es inferior a la unidad.

Por otra parte, existe otra corriente de pensamiento que propone a la energía como factor neutral para el crecimiento. Según esta literatura se habla de la hipótesis de la neutralidad. La hipótesis de independencia entre energía y crecimiento se basa en que el coste de la energía es muy pequeño en proporción al producto interior bruto y que, por tanto, no es probable que la energía tenga un impacto significativo en el crecimiento del producto (Khalifa y El-Sakka, 2004).

Cabe señalar que la sustitución puede darse bien dentro de una misma categoría de inputs de producción similares (v.g. entre diferentes combustibles) o bien entre diferentes categorías de inputs (v.g. entre energía y maquinas o entre energía y capital).

En esta línea, Solow (1997) argumenta que la sustitución dentro de la misma categoría con inputs parecidos es más factible ya que es razonable suponer que se encontrarán nuevos recursos energéticos. Dentro de estos inputs, Solow se está refiriendo a la sustituibilidad de los recursos fósiles no renovables por energías alternativas y renovables. De ahí que la probabilidad de que dentro de esta categoría la elasticidad sea mayor que la unidad es alta.

De este modo, dentro de la categoría de inputs de producción similares, Stern (2010), argumenta que los resultados obtenidos sobre las elasticidades de sustitución en el largo plazo para el sector industrial muestran elasticidades mayores a la unidad para petróleo-carbón, petróleo- gas, petróleo- electricidad y gas- electricidad. Para el resto de elasticidades entre carbón- gas y carbón- electricidad son menores que la unidad o cero siendo debido este último resultado a grandes errores en su cálculo.

En resumen, esta línea de pensamiento basa su mayor optimismo sobre el papel de la escasez de energía en el crecimiento económico en la existencia de diversos tipos de sustitución. Esta línea de razonamiento coincide con resultados previos obtenidos en el presente trabajo. En concreto, en la expresión (6.28) se refleja como una elasticidad de sustitución superior a la unidad es capaz de atenuar el impacto en el crecimiento del agotamiento de un recurso natural no renovable.

6.6. ELEMENTOS BÁSICOS DE LA MODELIZACIÓN DEL PAPEL DE LA ENERGÍA EN LA PRODUCCIÓN AGREGADA.

En esta sección, se analizan algunos aspectos clave de la modelización de la energía en la producción agregada. En concreto, se estudia la modelización de la energía como input primario o intermedio, el papel de los flujos y los stocks de energía, la sustitución de otros factores por energía o el efecto del cambio técnico. La sección concluye con un análisis de la función de producción usada en la sección anterior que incluye el stock de energía como variable explicativa.

6.6.1. Energía como input intermedio versus energía como input primario.

En un modelo dinámico tanto la producción como los factores han de referirse a un periodo de tiempo determinado. Se considera input primario todo factor de producción que, o bien no es reproducible, o bien es reproducible y acumulable durante un tiempo que excede el periodo de tiempo al que hace referencia la producción. Por otra parte, se define como input intermedio aquel que se obtiene a partir de inputs primarios durante el periodo de análisis, incorporándose en ese mismo tiempo a otros bienes y servicios. Los inputs intermedios no aparecen en la función de producción agregada, de la que se descuentan, relacionándose en dicha función el valor añadido de la economía con los factores primarios de producción.

En los modelos tradicionales de crecimiento económico (Solow, 1956; Romer, 1990; Aghion et al., 1992) la energía es considerada como un input intermedio producido con capital y trabajo e incorporada a la producción de otros bienes. Esta consideración puede ser aceptable siempre y cuando las reservas de energía fósil no sean un factor limitante en la producción. En cambio, si las reservas juegan un papel en la capacidad de producir de una economía, la modelización sería incorrecta.

Sin embargo, una mirada a la literatura reciente permite descubrir autores que incluyen la energía como un input primario. Pokrovski (2003) plantea una función de producción de la forma

$$Y = Y\left(K, L, S\right) \tag{6.51}$$

Donde, K, L y S son capital, trabajo y energía productiva introducida como un flujo. Khalifa y El-Sakka (2004) hacen un análisis empírico en el que la energía se considera un input primario.

La inclusión de la energía como factor primario plantea dudas de doble contabilización. La energía que se incluye en el modelo como input ha tenido que ser producida usando el capital y el trabajo. Sin embargo, esos mismos factores capital y trabajo se incluyen ya en el modelo como inputs primarios.

El modelo de Stern (2010) introduce la energía como input primario. El modelo consta de dos ecuaciones:

$$Y = \left[\left(1-\gamma\right)\left(AL^{\alpha}K^{\beta}\right)^{\rho} + \gamma\left(BE\right)^{\rho}\right]^{\frac{1}{\rho}} \tag{6.52}$$

$$\Delta K = s\left(Y - p_E E\right) - \delta K \tag{6.53}$$

La primera ecuación es una función de producción con Elasticidad Constante de Sustitución (CES) con dos variables explicativas. La primera variable es un agregado Cobb-Douglas de capital K y trabajo L. La segunda variable es la energía E expresada como flujo de energía consumida en el periodo de análisis. Sin embargo, en esta especificación no hay doble contabilización ya que la segunda ecuación resta del producto total la energía consumida al precio pagado.

6.6.2. La energía como flujo versus la energía como stock.

En ocasiones, la energía aparece en los modelos como un flujo. Es decir, como una cantidad que se usa en el periodo de análisis para contribuir a la producción. Este enfoque no permite tener en cuenta el efecto económico de un stock limitado y decreciente de energía.

Un tratamiento muy completo sobre la preocupación por el papel de los recursos naturales no renovables como factor limitante del crecimiento económico se encuentra en los trabajos de Solow, (1974), Stiglitz, (1974) y Dasgupta y Heal, (1979). A grande rasgos estos trabajos comparten tres características. En primer lugar, la energía entra en el modelo como un flujo que afecta a la producción en el periodo de análisis. Es decir, usan una función de producción como:

$$Y = F\left(A, K, L, E\right) \tag{6.54}$$

Donde, *E* representa la energía utilizada en el periodo. Sin embargo, el stock juega un papel relevante en este modelo. De hecho, el stock va variando a lo largo del tiempo dependiendo de la energía que se consume.

$$\frac{\partial R}{\partial t} = -E \tag{6.55}$$

Donde *R*, sería el stock de reservas energéticas en la economía.

Adicionalmente, la cantidad de energía consumida en un periodo y que reduce el stock se determina por la regla de (Hotelling, 1931).

La regla de Hotelling propone que la decisión óptima sobre la explotación económica y social del recurso no renovable, se toma en base a su precio presente y futuro. Este precio estará determinado por el ingreso y el coste marginal de su venta aumentada conforme a la tasa de interés de descuento. Ante una reserva de recursos naturales no renovables la decisión óptima sobre el recurso sería:

1. Explotar el recurso en su totalidad en el periodo inicial $t = 0$. En este periodo, el ingreso marginal es $p_0\left(1 + w_K\right)$ donde p_0 es el precio del recurso en el periodo *0* y w_K el tipo de interés (producto marginal del capital) . Es decir, se extrae el recurso, se vende al precio p_0 y se obtiene $p_0\left(1 + w_K\right)$ en el mercado financiero. El coste marginal es p_1, el precio del recurso en el periodo *1*, ya que esa es la renuncia que se hace al extraer y vender el recurso en el periodo *0*. En este caso, extraer el recurso en su totalidad será

una buena decisión siempre y cuando $p_0\left(1+w_K\right)>p_1$. En caso contrario, es decir cuando $p_0\left(1+w_K\right)<p_1$ es beneficioso preservar la totalidad del recurso.

El equilibrio, entendido como la circunstancia en que se extrae aquella cantidad de recurso que se demanda ocurre cuando:

$$p_0\left(1+w_K\right)=p_1 \Rightarrow w_K=\frac{p_1-p_0}{p_0} \tag{6.56}$$

En palabras, la cantidad de energía usada es aquella que haga que la tasa de crecimiento del precio de la energía sea igual al rendimiento del capital. En términos del modelo de crecimiento la condición sería:

$$\frac{\partial F}{\partial K}=\frac{\partial \ln \frac{\partial F}{\partial E}}{\partial t} \tag{6.57}$$

El término de la derecha es el rendimiento del capital y el de la izquierda la tasa de variación del precio de la energía. El producto marginal de la energía $\frac{\partial F}{\partial E}$ iguala al precio de ésta bajo minimización de costes. Como se explicó en el apartado de metodología, la derivada logarítmica de este término mide la variación temporal del precio de la energía.

Estos modelos no parecen tener en cuenta los factores de producción convencionales, capital y trabajo, necesarios para la extracción de los recursos naturales no renovables. En este sentido, tampoco parece que se tenga en cuenta el hecho de que la extracción de energía a partir de un stock decreciente puede requerir más factores capital y trabajo a medida que los stocks se reducen (Rodríguez y Arias, 2008).

Finalmente, destacar que el modelo de Stern (2010) en la expresión (6.52 y 6.53) sí tiene en cuenta el efecto del stock de recursos en la economía. Para ello se presenta un modelo con dos sectores. En el primero se producen bienes y servicios usando energía. En el segundo se produce la energía de forma que ésta aparece descontada de la producción en el primer sector. Es decir, el coste de extraer la energía se tiene en cuenta con el precio de la energía. p_E. La paulatina reducción del stock de energía haría subir este precio manteniendo todo lo demás constante.

6.6.3. Modelos que tienen en cuenta la sustitución de capital por energía.

La sustitución de capital por energía es fundamental en los modelos de crecimiento que tienen en cuenta la energía. Tal y como se desarrolla en el apartado (6.5) es dificultoso reemplazar el capital por energía. Siendo una de las mayores limitaciones para lograr una senda de crecimiento estable con sostenibilidad real para las generaciones tanto presentes como futuras (Stern, 2010; Ayres y Warr, 2009; Solow, 1956; Dasgupta y Heal, 1979; Stiglitz, 1974).

Un ejemplo de modelización de las posibilidades de sustitución de capital y trabajo por energía es el desarrollado por Berndt y Wood, (1979**)**. Estos autores presentan un modelo que tiene en cuenta las posibilidades de sustitución. El análisis parte de una función de producción como:

$$Y = F\left(K, L, E, M\right) \tag{6.58}$$

Donde K, L, E y M son inputs agregados de servicios de capital, trabajo, energía y materiales intermedios no energéticos. La función de producción en (6.58) contiene una sub-función lineal y homogénea con dos inputs:

$$K^{*} = f\left(K, E\right) \tag{6.59}$$

Donde K^{*} es un agregado resultante de combinar de manera óptima los inputs K y E. Es decir, esta subfunción recoge la idea de que el capital necesita energía para funcionar. Tomando como ejemplo una central térmica, K^{*} se refiere a la cantidad de vapor producido por unidad de tiempo de uso del capital (en forma de calderas y apoyo a los equipos de combustión) y los inputs de combustibles.

De esta manera, la sub-función implica que las relaciones $\frac{E}{K}$ óptimas en (6.59) dependen únicamente de los precios del capital y la energía, y no de los precios de otros inputs como pueden ser el trabajo o los materiales intermedios no energéticos o del nivel de producción *Y*. Por otra parte, consideran una segunda sub-función de producción lineal y homogénea con dos inputs:

$$L^{*} = h\left(L, M\right) \tag{6.60}$$

Donde L^* es el trabajo resultante de combinar de manera óptima los inputs L y M.

Combinando la ecuación (6.58) con (6.59) y (6.60) la función de producción principal puede escribirse:

$$Y = F\left(K, L, E, M\right) = F^*\left(K^*, L^*\right) \tag{6.61}$$

El modelo de crecimiento propuesto por Stern (2010) supone una modificación del modelo de crecimiento de Solow (1956) añadiendo la posibilidad de que la sustituibilidad de trabajo y capital por energía sea baja. Esa es la razón por la que la función de producción en la expresión (6.52) se especifica con Elasticidad Constante de Sustitución de un agregado de capital y trabajo por energía. Es decir, esta forma funcional permite que la elasticidad de Allen de sustitución del agregado de capital y trabajo por energía sea mayor, menor o igual a *1*. Las consecuencias económicas del valor de esta sustitución fueron analizadas en el apartado (6.2). En este modelo, la energía puede limitar o facilitar el crecimiento, dependiendo de su disponibilidad y de las posibilidades de sustitución ya que la elasticidad de sustitución constante puede ser mayor, menor o igual a la unidad. Cuando σ se aproxima a 1 y γ a 0, este modelo es equivalente al de Solow con una función de producción Cobb-Douglas que no incluye la energía como variable explicativa. Es decir, el modelo de Solow sería aquí un caso particular en el que la energía abundante no aparece en el modelo (Stern y Kander, 2010).

Por otra parte, la literatura de la economía ecológica y los resultados econométricos discutidos anteriormente consideran una elasticidad de sustitución entre capital y energía menor a la unidad. La función de producción en (6.52) impone dos límites a la sustitución (Stern, 1997). El límite “microeconómico” a la sustitución resulta de una elasticidad de sustitución del agregado capital-trabajo por energía $\sigma < 1$, así que se requiere una mínima cantidad de energía para producir cualquier nivel dado de output y la energía es esencial para la producción. El límite “macroeconómico” a la sustitución resulta del requerimiento de la energía para producir capital y en tanto $\gamma > 0$, la depreciación significa que el mantenimiento de stock de capital requiere un input continuo de energía. Si el modelo es una representación razonable de la realidad es correcto omitir la energía del modelo económico cuando es abundante, pero estos modelos tienen una aplicabilidad limitada en situaciones de escasez de energía. Sin embargo, a largo plazo, incluso si hay un cambio técnico aumentador del trabajo, el uso de energía o la eficiencia energética deberían incrementarse o la energía comenzará a limitar el crecimiento económico. Los resultados de la investigación preliminar muestran que este modelo puede simular razonablemente bien los hechos observados en la economía sueca en los dos últimos siglos, incluida la caída del coste de energía y la disminución de la intensidad de la energía en el tiempo (Stern y Kander, 2010)

6.6.4. Modelos que tienen en cuenta el cambio técnico del sector energético.

Los modelos teóricos desarrollados en el los apartados (6.1) y (6.2) del presente trabajo muestran que el cambio técnico puede aminorar el efecto negativo en el crecimiento económico del agotamiento de las reservas energéticas. En esta sección, revisamos algunos modelos que tienen en cuenta el cambio técnico en modelos con energía.

Tahvonen y Salo, (2001) desarrollan un modelo de transición energética entre fuentes de energías renovables y no renovables a largo plazo. Asumen también que el output final se produce por una función de Cobb-Douglas y que se da un progreso técnico en la extracción de combustibles fósiles pero no en la producción de output final.

El modelo de Stern (2010) puede distinguir entre el cambio técnico aumentador del agregado capital- trabajo y el cambio técnico aumentador de la energía. Es conveniente recordar que en una función de producción Cobb-Douglas no es posible distinguir entre cambio técnico aumentador de trabajo, capital o de energía. En cambio, el uso de una función de elasticidad de sustitución constante permite hacer esta distinción (Ayres y Warr, 2009).

6.6.5. Un modelo general.

La función de producción propuesta en la expresión (6.15) del presente trabajo se basa en la existencia de dos sectores. Por un lado, la producción requiere energía pero la energía debe ser extraída de recursos naturales finitos usando capital y trabajo. En primer lugar, se considera el sector no energético con una función de producción:

$$Y = G\left(A_N, K_N, L_N, E\right) \tag{6.62}$$

Donde, el subíndice N hace referencia a que tanto la tecnología exógena A_N como el capital K_N y el trabajo L_N son específicos del sector no energético. Por otra parte, este sector se caracteriza por usar un flujo de energía E para llevar a cabo la producción. Se supone que la energía tiene un producto marginal positivo. Es decir:

$$\frac{\partial G}{\partial E} > 0 \tag{6.63}$$

Por otra parte, la función de producción del sector energético se escribe como:

$$E = E(A_E, K_E, L_E, R) \tag{6.64}$$

Donde, el subíndice E indica que tanto la tecnología exógena A_E como el capital K_E y el trabajo L_E son específicos del sector energético. En este sector es importante el papel del stock de recursos energéticos R. En concreto, se supone que la reducción del stock dificulta la extracción de energía manteniendo constantes los factores productivos capital y trabajo y la tecnología (Rodríguez y Arias, 2008). Es decir, se supone que:

$$\frac{\partial E}{\partial R} > 0 \tag{6.65}$$

Introduciendo la expresión (6.64) en (6.62) se tiene que:

$$Y = G\left(A_N, K_N, L_N, E(A_E, K_E, L_E, R)\right) \tag{6.66}$$

Es decir, que la producción es función de la tecnología en el sector energético y no energético, del uso de capital y trabajo en ambos sectores y del nivel de reservas. En concreto, se tiene que:

$$\frac{\partial Y}{\partial R} = \frac{\partial G}{\partial E}\frac{\partial E}{\partial R} > 0 \tag{6.67}$$

Por tanto, la reducción del stock de energía afecta negativamente a la producción total de la economía tal como se suponía en el modelo usado en la sección 6.2.

Suponiendo que la producción se maximiza asignado K y L de forma óptima entre los dos sectores de forma que su producto marginal sea igual en ambos, la función de producción en la expresión (6.66) se puede escribir como:

$$Y = F\left(A_N, A_E, K, L, R\right) \tag{6.68}$$

Dónde:

$$K = K_N + K_E \quad L = L_N + L_E \tag{6.69}$$

Suponiendo que la producción se maximiza asignado K y L de forma óptima entre los dos sectores de forma que su producto marginal sea igual en ambos.

La función de producción en (6.68) es muy parecida a la que se presenta en la expresión (6.15) y constituye la base del análisis general del efecto de los recursos naturales no renovables en la sección 6.2. La única diferencia entre ambas expresiones es que el modelo con dos sectores es capaz de distinguir entre la productividad del sector no energético de la economía A_N y la productividad del sector energético A_E. La posibilidad de que la productividad de la economía esté relacionada en gran medida con la productividad en la extracción de energía es una hipótesis avanzada por autores de la denominada Economía Ecológica (Stern, 2010; Ayres y Warr, 2009).

7. CONCLUSIONES.

La energía como factor productivo o bien final es una componente esencial de una economía. Tanto el crecimiento poblacional como el incremento en la producción implican consumos cada vez mayores de energía. Por lo tanto, es de esperar un papel creciente de la energía en la economía.

La historia económica evidencia la importancia creciente que ha ido teniendo la energía desde el trabajo humano al trabajo mecánico. El papel de la energía ha ido cambiando a lo largo del tiempo y también su representación en los modelos económicos.

Un hito importante en el uso intensivo de energía es la Revolución Industrial, época caracterizada por la innovación tecnológica pero también por el acceso a grandes stocks de carbón. En las últimas décadas preocupa el agotamiento de los recursos no renovables como fuente de energía al igual que en su día preocupó las limitaciones que la tierra imponía al crecimiento. El papel limitante de la tierra guarda ciertos paralelismos con el papel que actualmente puede jugar la energía en los modelos económicos. De esta forma, desde los modelos básicos de crecimiento económico hasta los modelos que de estos se derivan se ha ido modificando la función de producción para modelizar el papel cambiante de los factores.

Los economistas clásicos consideraban a la tierra el elemento fundamental en la producción agrícola. Al considerarse ésta un factor físico limitado y sujeto a la ley de los rendimientos decrecientes tuvo cabida en los modelos de crecimiento económico en esa época. Si bien es cierto, estos autores no tuvieron en cuenta el papel de la sustitución de factores y el cambio técnico, que pueden hacer que un factor de producción escaso deje ser limitante. Como años después se vería y de la mano de los economistas neoclásicos la tierra deja de ser un factor fundamental debido a la inversión, al cambio técnico y a la mejora del comercio internacional. El estudio del modelo de Solow-Swan sirve de base para comprender las extensiones y peculiaridades que en diferentes épocas se han ido dando a los modelos de crecimiento.

De manera análoga, se usa un modelo similar para modelizar las preocupaciones en el crecimiento a largo plazo de una limitación en los recursos naturales no renovables, poniendo especial atención en el papel del cambio técnico y la sustitución de factores. Al igual que en el modelo con tierra, la preocupación por los recursos no renovables surge en un contexto de escasez física y económica. Por ello son susceptibles de aparecer en los modelos generales de crecimiento. Este modelo señala que cuanto mayor sea la participación de la remuneración de los recursos no renovables en el producto final, mayor será el efecto negativo del agotamiento de estos en el crecimiento económico.

Un elemento clave de estudio es la sustitución de capital por los recursos naturales agotables. Para ello se analizan funciones de producción capaces de modelizar desde la ausencia de sustitución a la sustitución perfecta. Las posibilidades de sustitución se miden a través del concepto de elasticidad de sustitución. Su valor determina la magnitud del impacto negativo del agotamiento de los recursos naturales en el crecimiento económico.

El cambio técnico es un elemento importante en este análisis junto a la sustitución de factores. La evidencia empírica muestra que la tecnología responde al incentivo de la escasez, induciendo a un progreso tecnológico más rápido.

Tanto sustitución como cambio técnico están influenciados por el precio de los factores. De este modo una subida del precio de la energía puede ocasionar mejoras en la extracción de los recursos fósiles, mejoras de eficiencia o búsqueda de energías renovables alternativas.

Después de un estudio pormenorizado se evidencia que los modelos de crecimiento no suelen hace referencia explícita a la energía. De hecho no se ha llegado a un consenso en la dirección de causalidad entre energía y crecimiento. Por una parte se defiende la no referencia a la energía en los modelos, argumentando que la energía es barata y constituye una parte muy pequeña del coste de producción. Por otra parte la visión opuesta es la de la Economía Ecológica, que sí hace referencia explícita a la energía argumentando que la participación de ésta puede crecer al convertirse la energía fósil en más cara a consecuencia de su escasez. Asimismo los economistas ecológicos creen que los factores de producción trabajo y capital no pueden prescindir de la energía ni sustituirla.

Al respecto de estas dos visiones, se puede señalar que el uso de capital puede ahorrar energía a través de mejoras de la eficiencia energética. Sin embargo, sustituir capital por energía parece difícil ya que la energía no es perfectamente sustituible por los otros dos factores de producción.

8. BIBLIOGRAFÍA.

Aghion, P., & Howitt, P. (1992). A model of growth through creative destruction. *The Econometric Society, 60*(2), 323-351.

Allen, R. G. D. (1938). *Mathematical analysis for economists*. London: MacMillan & Co.

Arrow, K. J., Chenery, H. B., Minhas, B. S., & Solow, R. M. (1961). Capital-labor substitution and economic efficiency. *The Review of Economics and Statistics, 43*(3), 225-250.

Ayres, R. U., & Warr, B. (2009). *The economic growth engine: How energy and work drive material prosperity*. Cheltenham, UK ; Northampton, MA: Edward Elgar.

Ayres, R., & Voudouris, V. (2014). The economic growth enigma: Capital, labour and useful energy? *Energy Policy, 64*, 16-28.

Berndt, E. R., & Wood, D. O. (1979). Engineering and econometric interpretations of energy-capital complementarity. *The American Economic Association, 69*(3), 342-354.

Blaug, M. (1985). *Teoría económica en retrospección* [Economic Theory in Retrospect] (1 en español de la 3 en inglés ed.). México: Fondo de Cultura Económica.

Cobb, C. W., & Douglas, P. H. (1928). A theory of production. *The American Economic Review, 18*(1), 139-165.

Dasgupta, P., & Heal, G. M. (1979). *Economic theory and exhaustible resources*. Digswell Place Welwyn, Herts; Cambridge: James Nisbet; Cambridge University Press.

Ghali, K. H., & El-Sakka, M. I. T. (2004). Energy use and output growth in canada: A multivariate cointegration analysis. *Energy Economics, 26*(2), 225-238.

Heilbroner, R. L. (1984). *Vida y doctrina de los grandes economistas*. Barcelona: Orbis.

Hicks, J. R. (1932). *The theory of wages* (2nd ed.). London: Macmillan.

Hotelling, H. (1931). The economics of exhaustible resources. *Journal of Political Economy, 39*, 137-175.

Lucas, R. E., Jr. (1988). On the mechanics of development planning. *Journal of Monetary Economics, 22*(1), 3-42.

Malanima, P. (2010). Energy in history. *Encyclopedia of Life Support Systems (UNESCO-EOLSS),*

Malthus, T. R. (1973). *An essay on the principle of population*. London: J. M. Dent & Sonts LTD.

Pokrovski, V. N. (2003). Energy in the theory of production. *Energy, 28*(8), 769-788.

Polanyi, K. (1957). *The great transformation*. Boston, Massachusetts: Beacon Press.

Ricardo, D. (1817). *On the princles of political economy and taxation* (3rd ed.). London: John Murray, Albemarle-Street.

Romer, P. M. (1990). Endogenous technological change. *Journal of Political Economy, 98*(5), 71-102.

Sala i Martín, X., & Vila Artadi, E. (1999). *Apuntes de crecimiento económico* (2ª ed.). Barcelona: Antoni Bosch.

Santos, T. (2012). *Relojes, gatos, Madagascar: una nota para estudiantes de economía sobre lo que hacemos los economistas [Mensaje en un blog]*. Retrieved 04/30, 2014, from http://www.fedeablogs.net/economia/?p=19884

Schumpeter, J., A. (1981). *History of economic analysis.* London, Boston, Sidney: George Allen & Unwin.

Silberberg, E. (2000). *The structure of economics: A mathematical analysis* (3rd ed.). Boston: McGraw-Hill.

Smith, A. (1965). *An inquiry into de nature and causes of the wealth of nations*. New York: P.F. Collier & Son.

Solow, R. M. (1956). A contribution to the theory of economic growth. *The Quarterly Journal of Economics, 70*(1), 65-94.

Solow, R. M. (1997). Reply: Georgescu-Roegen versus Solow/Stiglitz. *Ecological Economics, 22*, 267-268.

Stern, D. I. (1997). Limits to substitution and irreversibility in production and consumption: A neoclassical interpretation of ecological economics. *Ecological Economics*, *21*, 197-215.

Stern, D. I. (2010). The role of energy in economic growth. *Ecological Economics Reviews, 1219*, 26-51.

Stern, D. I., & Kander, A. (2012). The role of energy in the industrial revolution and modern economic growth. *Energy Journal, 33*(3), 125-152.

Stiglitz, J. E. (1974). Growth with exhaustible natural resources: Efficient and optimal growth paths. *Review of Economic Studies, 41*(5), 123-137.

Tahvonen, O., & Salo, S. (2001). Economic growth and transitions between renewable and nonrenewable energy resources. *European Economic Review, 45*(8), 1379-1398.

Walliser, B. (1995). L' économie est une science ideale et générique. In D'Autume, A. & Cartelier, J. (Ed.), *L'économie devient-elle une science dure ?* (pp. 83-91). Paris: Economica.

Weil, D. N. (2006). *Crecimiento económico*. Madrid: Pearson Educación.

West, S. E. (1934). *Essay on the application of capital to land, with observations shewing the impolicy of any great restriction of the importation of corn*. Baltimore: Johns Hopkins Press.