



**UNIVERSIDAD DE LEÓN**

**Departamento de Dirección y Economía de la Empresa**

**TESIS DOCTORAL**

**MODELOS DE GESTIÓN  
BASADOS EN TECNOLOGÍAS BIO-INSPIRADAS  
PARA EL DESARROLLO DE NUEVOS PRODUCTOS**

**Cristina Mendaña Cuervo**

**León, 2000**





**UNIVERSIDAD DE LEÓN**

**Departamento de Dirección y Economía de la  
Empresa**

**MODELOS DE GESTIÓN  
BASADOS EN TECNOLOGÍAS BIO-INSPIRADAS  
PARA EL DESARROLLO DE NUEVOS PRODUCTOS**

**Tesis Doctoral presentada por:**

**Cristina Mendaña Cuervo**

**Dirigida por el Doctor:**

**D. Enrique López González**

**Catedrático de Economía Financiera y Contabilidad**

**Universidad de León**

**León, 2000**



# Índice

## **CAPÍTULO 1.**

### **INTRODUCCIÓN**

1.1.	INTRODUCCIÓN.....	13
1.2.	OBJETIVOS Y PROPOSICIONES DE LA INVESTIGACIÓN.....	18
1.3.	JUSTIFICACIÓN DE LA METODOLOGÍA: EL ENFOQUE CONSTRUCTIVO EN LA CONTABILIDAD DE GESTIÓN .....	22
1.4.	ESTRUCTURA DEL TRABAJO .....	29

## **CAPÍTULO 2.**

### **INFORMACIÓN PARA LA GESTIÓN Y DESARROLLO DE NUEVOS PRODUCTOS**

2.1.	INTRODUCCIÓN.....	35
2.2.	EL MODELO DE DESPLIEGUE DE LA FUNCIÓN DE CALIDAD (QFD).....	38
2.2.1.	Consideraciones generales.....	38
2.2.2.	La Matriz de Planificación del producto: la Casa de la Calidad .....	47
2.2.3.	Evaluación y diagnóstico del modelo de Despliegue de la Función de Calidad (DFC) para el Desarrollo de Nuevos Productos (DNP) .....	57
2.2.4.	Limitaciones del modelo de Despliegue de la Función de Calidad .....	64

## CAPÍTULO 3.

### TÉCNICAS DE BÚSQUEDA Y OPTIMIZACIÓN CON HEURÍSTICAS BASADAS EN LA NATURALEZA

3.1.	INTRODUCCIÓN.....	67
3.2.	ALGORITMOS GENÉTICOS .....	80
3.2.1.	Elementos básicos de un Algoritmo Genético .....	82
3.2.2.	Fundamento teórico de los Algoritmos Genéticos tradicionales.....	93
3.2.3.	Métodos y criterios necesarios para la implantación de un Algoritmo Genético .....	106
3.2.3.1.	Criterio de codificación .....	107
3.2.3.2.	Criterio de tratamiento de individuos no factibles.....	113
3.2.3.3.	Criterio de selección de la población inicial .....	117
3.2.3.4.	Criterio de convergencia, parada o solución aceptable.....	119
3.2.3.5.	Función de evaluación y función de aptitud .....	122
3.2.3.6.	Operadores genéticos .....	127
3.2.3.7.	Criterios de selección.....	137
3.2.3.8.	Parámetros de funcionamiento.....	145
3.2.4.	Incorporación de conocimiento específico en los AGs .....	149
3.3.	ALGORITMOS BASADOS EN HORMIGAS .....	150
3.3.1.	Sistemas de Hormigas (Ant Systems) .....	154
3.3.2.	Sistema de Colonia de Hormigas (Ant Colony System) .....	161
3.3.3.	Modificaciones al SH y al SCH: Listas de Candidatos y búsqueda Local .....	165
3.3.3.1.	Listas de Candidatos: experimentos con instancias de gran tamaño.....	165
3.3.3.2.	Búsqueda local: ascensión de colinas .....	166
3.3.4.	Otros Algoritmos basados en Colonias de Hormigas .....	167
3.3.4.1.	Sistema de Hormigas MAX-MIN (MAX-MIN Ant System).....	167
3.3.4.2.	Sistema de Hormigas Elitista (Ant System Elite) .....	170
3.3.4.3.	Sistema de Hormigas con Estrategia Elitista y Ordenación (Rank Ant System).....	173
3.3.4.4.	Sistema de Hormigas Rápido (Fast Ant System).....	176
3.3.4.5.	Sistema de Hormigas Híbrido (Hybrid Ant System).....	178
3.3.4.6.	Sistema De La Mejor y Peor Hormiga (Best-Worst Ant System).....	183

**CAPÍTULO 4.****MÉTODOS PARA EL TRATAMIENTO DE LA INCERTIDUMBRE**

4.1.	INTRODUCCIÓN.....	189
4.2.	INCERTIDUMBRE: TIPOLOGÍAS Y SU TRATAMIENTO.....	190
4.2.1.	Incertidumbre probabilística .....	192
4.2.2.	Incertidumbre lingüística.....	193
4.2.3.	Tratamiento de la incertidumbre.....	194
4.3.	SUBCONJUNTOS BORROSOS.....	195
4.3.1.	Consideraciones generales.....	195
4.3.2.	Operaciones básicas con subconjuntos borrosos.....	199
4.3.3.	Otras operaciones con subconjuntos borrosos.....	206
4.4.	NÚMEROS BORROSOS.....	210
4.4.1.	Consideraciones generales.....	210
4.4.2.	Operaciones con números borrosos .....	214
4.4.3.	Tipos de números borrosos.....	224
4.4.3.1.	Números borrosos triangulares .....	224
4.4.3.1.1.	Operaciones con números borrosos triangulares .....	227
4.4.3.2.	Números borrosos trapezoidales.....	234
4.4.3.2.1.	Operaciones con números borrosos trapezoidales .....	236
4.5.	VARIABLES LINGÜÍSTICAS.....	239
4.5.1.	Consideraciones generales.....	239
4.5.1.1.	Elección del conjunto de términos lingüísticos .....	243
4.5.1.2.	Semántica de un conjunto de términos lingüísticos .....	245
4.5.2.	Utilización de las variables lingüísticas: Modelado de preferencias.....	250
4.5.2.1.	Modelos basados en el Principio de Extensión .....	252
4.5.2.2.	Modelos simbólicos .....	258
4.5.3.	Operadores de agregación de información lingüística .....	262
4.5.3.1.	Operadores para información lingüística no ponderada .....	263
4.5.3.2.	Operadores para información lingüística ponderada .....	267
4.6.	MODELO DE REPRESENTACIÓN LINGÜÍSTICA CON 2- TUPLAS.....	269
4.6.1.	Operadores de la representación con 2-tuplas .....	271
4.6.1.1.	Operadores de agregación simbólicos extendidos para 2-tuplas lingüísticas.....	272
4.6.1.2.	Operadores de agregación para 2-tuplas basados en operadores de agregación numéricos .....	274
4.6.2.	Agregación de información lingüística multigranular.....	278

## CAPÍTULO 5.

### LA CONSTRUCCIÓN DE MODELOS BIO-INSPIRADOS PARA LA OPTIMIZACIÓN DE INFORMACIÓN SOBRE NUEVOS PRODUCTOS

5.1.	INTRODUCCIÓN .....	287
5.2.	MODELOS DE DESARROLLO DE NUEVOS PRODUCTOS CON ALGORITMOS GENÉTICOS .....	291
5.2.1.	En condiciones de certidumbre: El modelo AG-DNP-Crisp.....	291
5.2.1.1.	Tratamiento de la información exógena: Voz del cliente.....	293
5.2.1.1.1.	Importancia de los requerimientos desde la perspectiva del cliente .....	294
5.2.1.1.2.	Evaluación comparativa con productos concurrentes.....	296
5.2.1.1.3.	Correlación entre los requerimientos.....	299
5.2.1.1.4.	Tasa de cubrimiento de las características por parte de los requerimientos.....	300
5.2.1.1.5.	Ordenación de los requerimientos.....	302
5.2.1.2.	Tratamiento de la información endógena: Voz del ingeniero.....	310
5.2.1.2.1.	Importancia de las características .....	311
5.2.1.2.2.	Situación actual de las características técnicas .....	313
5.2.1.2.3.	Importancia técnica de las características.....	314
5.2.1.2.4.	Correlación entre las características .....	316
5.2.1.2.5.	Tasa de cubrimiento de los requerimientos por parte de las características.....	316
5.2.1.2.6.	Ordenación de las características.....	318
5.2.1.2.7.	Coste de desarrollo de las características .....	322
5.2.1.3.	Aplicación del modelo AG-DNP-Crisp a situaciones de restricción presupuestaria .....	324
5.2.1.3.1.	Codificación (alfabeto y longitud) .....	324
5.2.1.3.2.	Selección de la población inicial y tratamiento de los indivi- duos no factibles.....	325
5.2.1.3.3.	Cálculo de la adecuación de las soluciones iniciales .....	329
5.2.1.3.4.	Operador de selección.....	344
5.2.1.3.5.	Operador de cruce.....	346
5.2.1.3.6.	Operador de mutación.....	350
5.2.1.3.7.	Evaluación de las soluciones generadas tras los operadores genéticos.....	352
5.2.1.3.8.	Criterio de terminación o parada .....	353
5.2.1.3.9.	Parámetros de funcionamiento del algoritmo genético .....	355
5.2.1.4.	Aplicación del modelo AG-DNP-Crisp a situaciones de características sustitutivas.....	357
5.2.1.4.1.	Codificación (alfabeto y longitud).....	358



5.2.1.4.2.	Selección de la población inicial y tratamiento de individuos no factibles .....	358
5.2.1.4.3.	Cálculo de la adecuación de las soluciones iniciales .....	359
5.2.1.4.4.	Operador de selección.....	360
5.2.1.4.5.	Operador de cruce.....	360
5.2.1.4.6.	Operador de mutación.....	362
5.2.1.4.7.	Evaluación de las soluciones generadas tras los operadores genéticos.....	363
5.2.1.4.8.	Criterio de terminación o parada .....	367
5.2.1.4.9.	Parámetros de funcionamiento del algoritmo genético .....	368
5.2.2.	En condiciones de incertidumbre.....	370
5.2.2.1.	Modelo basado en el Principio de Extensión: el modelo AG-DNP-Fuzzy .....	372
5.2.2.1.1.	Tratamiento de la información exógena: Voz del cliente.....	375
5.2.2.1.2.	Tratamiento de la información endógena: Voz del ingeniero .....	391
5.2.2.1.3.	Aplicación del modelo AG-DNP-Fuzzy a situaciones de restricción presupuestaria .....	400
5.2.2.1.4.	Aplicación del modelo AG-DNP-Fuzzy a situaciones de características sustitutivas .....	417
5.2.2.2.	Modelo basado en la representación mediante 2-tuplas: el modelo AG-DNP-2-tuplas .....	419
5.2.2.2.1.	Tratamiento de la información exógena: Voz del cliente.....	419
5.2.2.2.2.	Tratamiento de la información endógena: Voz del ingeniero .....	428
5.2.2.2.3.	Aplicación del modelo AG-DNP-2-tuplas a situaciones de restricción presupuestaria .....	435
5.2.2.2.4.	Aplicación del modelo AG-DNP-2-tuplas a situaciones de características sustitutivas .....	439
5.3.	MODELOS DE DESARROLLO DE NUEVOS PRODUCTOS CON SISTEMAS DE HORMIGAS.....	441
5.3.1.	En condiciones de certidumbre: El modelo SH-DNP-Crisp.....	449
5.3.1.1.	Aplicación del modelo SH-DNP-Crisp a situaciones de restricción presupuestaria.....	450
5.3.1.1.1.	Fase de inicialización.....	450
5.3.1.1.2.	Regla de transición de estados .....	452
5.3.1.1.3.	Regla de actualización de feromona .....	456
5.3.1.1.4.	Parámetros de funcionamiento del sistema de hormigas.....	459
5.3.1.2.	Aplicación del modelo SH-DNP-Crisp a situaciones de características sustitutivas .....	461

5.3.2.	En condiciones de incertidumbre .....	466
5.3.2.1.	Modelo basado en el Principio de Extensión: el modelo SH-DNP-Fuzzy .....	466
5.3.2.1.1.	Aplicación del modelo SH-DNP-Fuzzy a situaciones de restricción presupuestaria .....	467
5.3.2.1.2.	Aplicación del modelo SH-DNP-Fuzzy a situaciones de características sustitutivas.....	470
5.3.2.2.	Modelo basado en la representación mediante 2-tuplas: el modelo SH-DNP-2-tuplas .....	472
5.3.2.2.1.	Aplicación del modelo SH-DNP-2-tuplas a situaciones de restricción presupuestaria .....	472
5.3.2.2.2.	Aplicación del modelo SH-DNP-2-tuplas a situaciones de características sustitutivas.....	475

## **CAPÍTULO 6.**

### **CONCLUSIONES**

6.1.	RESULTADOS OBTENIDOS .....	477
6.2.	TRABAJOS FUTUROS .....	487

<b>REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> .....	489
---	-----

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. INTRODUCCIÓN

Esta Memoria de Tesis Doctoral presenta una nueva metodología de diseño de modelos de gestión aplicando heurísticas basadas en la naturaleza para el desarrollo de nuevos productos.

El interés por llevar a cabo tal investigación parte de la constatación de que en la actualidad las organizaciones operan en un mundo de incertidumbre creciente debido a una realidad cambiante, donde prolifera la diversidad, caracterizada por los cambios abruptos en las políticas comerciales, la competencia doméstica e internacional, las contracorrientes de cambio en el mercado y crecientes costes laborales.

Bajo estas condiciones, la información es uno de los principales instrumentos para la gestión eficaz de las organizaciones económicas, pues, en este contexto, para evitar el fracaso, sobrevivir y lograr el éxito, las organizaciones deben explotar las dimensiones de la oportunidad que se encuentra en la búsqueda de la tan ansiada ventaja competitiva.

Por tanto, la información es básica para el proceso de dirección. De hecho, se puede afirmar que es el fluido vital de la administración, pues ninguno de los elementos significativos en la conducción de negocios (planificación, organización, dirección

y control) existe en un sentido práctico sin ella, lo que conduce a considerar que para ser competitivos en una economía global y abierta se requiere disponer de herramientas informativas capaces de responder a las inquietudes de la unidad económica.

La Contabilidad forma parte de los sistemas de información que integran, a su vez, una disciplina de contenido general y amplio, la Administración o Gestión; y en este orden representa un importante trabajo de campo para la planificación y el control de los negocios. En virtud de esta naturaleza de funciones, se puede considerar que la Contabilidad es un método de trabajo intelectual aplicado, pues constituye un ordenamiento para obtener, a partir de fundamentaciones matemáticas y lógicas, su producto formal: información para la toma de decisiones.

De acuerdo con lo anterior, en esta investigación se intentará evidenciar, en primer término, la necesidad de impulsar estudios interdisciplinarios que permitan desarrollar una concepción de la Contabilidad de Gestión que responda a las exigencias de un nuevo modelo organizacional, plano y flexible, en el que la utilidad, confiabilidad y oportunidad de la información se traduzca en herramienta imprescindible para el proceso descentralizado de toma de decisiones y el consecuente aprovechamiento de ventajas competitivas.

En el pasado se consideraba a los sistemas de información más como manipuladores de números que como armas competitivas, dado que su función era de recolección, procesamiento y análisis de datos que daban cuenta de funciones, eventos y cadenas de actividades que podrían afectar el sentido y resultado de las actividades de la organización para el proceso inmediato de toma de decisiones. El análisis que se hacía entonces comprendía la reducción de los problemas por resolver en subproblemas independientes; entonces la solución del todo no era más que la suma de la solución de sus partes.

Históricamente, la presentación de informes a la administración era periódica sólo para actividades rutinarias. El procesamiento de datos se hacía, en gran parte, en la modalidad por lotes después del cierre de un ciclo operacional; el ejemplo más evidente se refiere a los períodos contables. Se procesaban las transacciones y se actualizaban por completo los archivos para así determinar las condiciones en que operaba la organización. El tiempo necesario para determinar dichas condiciones hacía que, por lo común, los informes se encontraran disponibles después de la conclusión del período contable sobre el que giraba el informe y cuando el siguiente ciclo operacional estaba ya bastante avanzado.

A partir de la década de los años setenta del siglo XX se avizora un cambio radical que impacta a la industria y a los servicios, en donde ya no es posible mantener un sistema productivo que lanza al mercado contingentes masivos de productos homogéneos y estandarizados ante una demanda que se diversifica y globaliza, se hace

más exigente y requiere de un aparato productivo ágil y flexible que responda con una oferta diferenciada para cada segmento o nicho de mercado, manteniendo bajo el nivel de costes, que permita responder a la aceleración en la innovación tecnológica. De hecho, el incremento de la innovación y el cambio de los productos fija los términos de la “nueva economía”.

El acortamiento del ciclo de vida de los productos es un resultado directo de la conocida “ley de Moore”, propuesta por el fundador de la empresa Intel, que predice que la capacidad de procesamiento de los “chips” del ordenador se iría duplicando cada dieciocho meses, mientras que el coste de producción de tales chips se mantendría constante o disminuiría. Tal predicción se ha ampliado para incluir gran cantidad de productos.

Así, por ejemplo, la empresa Chrysler necesitó 54 meses, con 3.100 trabajadores, para desarrollar y fabricar su automóvil modelo K a comienzo de los ochenta. Pocos años después, la misma compañía desarrolló su automóvil Neon en menos de 33 meses y utilizando solamente 700 personas. En la actualidad, el departamento de investigación y desarrollo de cualquiera de las grandes compañías automovilísticas puede desarrollar un nuevo modelo de automóvil en menos de dos años, incluso tales fabricantes consideran factible que antes de diez años puedan construir y entregar un automóvil a punto y según los requerimientos del consumidor en un plazo de tres días.

Ante tales condiciones, se plantea la necesidad de propiciar una actividad económica que integre valor con conocimiento, pero sobre todo que genere condiciones que favorezcan el despliegue de la creatividad y la innovación. Con lo cual el conocimiento, o más precisamente, la extracción de conocimiento, se convierte en el elemento decisivo para la generación de un nuevo valor, obligando a que la naturaleza del sistema de información, sus objetivos y funciones, cambien su enfoque.

A este respecto, conviene poner de manifiesto que el empleo de la informática ha hecho posible el acceso inmediato a bancos de datos que brindan información procesada y analizada con la finalidad de reducir la información flotante, acelerando la velocidad de respuesta ante el exterior. De esta forma, surge una nueva fuente de ventaja competitiva para aquellas empresas que sean capaces de adquirir, elaborar y utilizar información y conocimiento en modo diferencial respecto a la competencia.

Al objeto de ser competitivas y asegurar su presencia y permanencia en el mercado, las organizaciones requieren desarrollar una ventaja, una diferencia frente a la competencia, de acuerdo con las condiciones bajo las cuales operan, la tecnología que manejan y la calidad y los procesos, más una gestión eficiente. La ventaja competitiva se vuelve fundamental en la estrategia de la organización para participar en su mercado, atendiendo a las nuevas condiciones de apertura, del proceso de globalización de los negocios y de la constante innovación en los países desarrollados, con lo cual la

labor directiva se debe referir al mañana, no al ayer, pues el mañana tiene que ver con lo que hay que hacer, no con lo que ya se ha hecho.

Ante este esquema, la nueva realidad económica plantea entonces nuevas demandas informativas, a saber: (i) mayor significado informativo en menor volumen de información y reportes; (ii) interpretación y significado práctico en los informes acerca de fenómenos y tendencias del entorno; (iii) la información con una orientación hacia el mercado y hacia el cliente, que contenga tratamientos creativos con la finalidad de hacerla más objetiva y funcional, y hacer así mercadotecnia sobre las bases de datos de dichos clientes; (iv) diseñar las estructuras de la organización basándose en flujos de información, más que en la forma tradicional de las tareas o actividades que deben desempeñarse en un puesto.

Surge así una de las interrogantes que orientan el esfuerzo investigador de la presente Memoria: ¿cómo participa la Contabilidad de Gestión ante estos fenómenos y tendencias?.

Cuando el hombre descubre ante sí los bienes materiales que se encuentran en la naturaleza para satisfacción de sus necesidades, establece un orden económico y jurídico que regule su intercambio. Para ello requiere la cuantificación de los recursos que posee con la finalidad de conocer la equivalencia entre los diferentes bienes. La unidad de medida que adopta para asignar valor es la moneda. Una vez cuantificados los bienes, surge la necesidad de expresar ese valor de una manera clara y accesible para controlar e informar acerca de los recursos que maneja una comunidad, y con ello estar en posibilidad de tomar decisiones.

La expresión escrita que describe los bienes materiales que posee la sociedad, y su correspondiente valor expresado en términos de moneda, recibe el nombre de información financiera, por lo que ésta puede definirse como la comunicación de sucesos relacionados con la obtención y aplicación de recursos materiales expresados en unidades monetarias. Con base en lo anterior, se puede apreciar que los servicios que ha prestado la Contabilidad a través de la información financiera que produce, se han basado en enfocar a las organizaciones desde el punto de vista interno, como un sistema cerrado; es decir, la información que proporciona ha estado enfocada al sistema operativo interno y orientada a hechos pasados, esto es, los informes contables tradicionales generalmente presentan efectos de decisiones tomadas con anterioridad, sin explicar sus causas y mucho menos revelar oportunidades.

En este sentido, resulta necesario replantear la utilidad y oportunidad de tal información en un entorno de aguda competencia, en el que las organizaciones se orientan a servir a un mercado y a generar valor, para lo cual requieren de sistemas de información confiables y significativos, y poder así enfrentar los retos que imponen tales mercados globalizados.

Precisamente, en el nuevo modelo organizativo de estructura plana y flexible, el análisis, procesamiento y distribución de datos e información son la esencia de la mayoría de las actividades, profesiones e industrias en general. De hecho, entre las causas principales por las que muchas empresas e instituciones no crecen, pierden competitividad o desaparecen se encuentra el que continúan utilizando instrumentos, prácticas o conceptos tradicionales u obsoletos. La flexibilidad y la adaptabilidad como directrices de la práctica óptima en producción, comercialización e inversión ponen en tela de juicio las viejas nociones de una escala óptima única y de una configuración ideal para la fabricación del producto.

A este respecto, conviene tener en cuenta que en aras de facilitar la toma de decisiones estratégicas se deben satisfacer nuevas necesidades informativas que implican otros atributos, a saber: (i) análisis de fenómenos externos que tengan un efecto en las operaciones de la empresa y en cada uno de sus factores estratégicos clave; (ii) conceptos sobre la empresa vista en su totalidad (no en partes o detalles) que destaquen sus fuerzas y debilidades; (iii) proyecciones financieras a corto y largo plazo, explicando no sólo el qué, sino también el porqué de lo que se incluye; (iv) efectos económico-financieros de programas o acciones que se pretendan llevar al cabo; y (v) orientación hacia el futuro, no tanto para predecir eventos futuros como para identificar las probables trayectorias de ciertas tendencias.

El desafío es proveer información relevante y necesaria, que facilite hallar las respuestas correctas a las preguntas adecuadas, lo que implica utilizar algo más que las técnicas financieras tradicionales y datos esencialmente históricos, lo cual es consistente con las dos propuestas que, en relación a los retos actuales en el desarrollo futuro de la investigación científica de la Contabilidad de Gestión, han sido enunciadas en los trabajos de JONES, CURRIE, y DUGDALE (1993) y DRURY y TAYLES (1995), donde se plantean las siguientes consideraciones, respectivamente: "...mejor que concentrar los estudios en la comprensión de nuevas técnicas o su reemplazo por prácticas contables convencionales, nosotros necesitamos estudiar cómo se usa realmente la información contable, cómo los diferentes modos de pensamiento contable se involucran en la gestión, describiendo las diferencias encontradas dentro de diferentes contextos societarios u organizacionales. Esto nos permitirá obtener una mejor comprensión de las relaciones entre la Contabilidad y la tecnología y su significado en el desempeño productivo" (JONES, CURRIE, y DUGDALE, 1993, pág. 134) y "...en el futuro se deberían realizar investigaciones empíricas que exploren cómo se emplea la información contable en la práctica, para observar si los contables de gestión entienden o no los fracasos de los sistemas tradicionales realmente... explicando las prácticas observadas, con el propósito de examinar su papel dentro de los sistemas de información usados en cada tipo de organización" (DRURY y TAYLES, 1995, pág. 278).

## **1.2. OBJETIVOS Y PROPOSICIONES DE LA INVESTIGACIÓN**

La presente Memoria de Tesis Doctoral se centrará en un doble propósito general: analizar los retos con los que se enfrentan las organizaciones en el entorno actual en referencia a las decisiones que afectan al desarrollo de nuevos productos y construir una serie de modelos operativos de gestión de la información consistentes con dicho marco.

La dualidad del propósito principal plantea que el esfuerzo investigador se estructure en varios objetivos parciales que configuran el principal ámbito de actuación del trabajo, a saber:

En primer lugar, y ante las necesidades de información actuales en las organizaciones en referencia a las decisiones que afectan al desarrollo de un nuevo producto, se plantea el objetivo de analizar tanto las técnicas matemáticas que permiten el tratamiento de la información en ámbitos de incertidumbre como las herramientas que facilitan la resolución de problemas de alto nivel combinatorio.

El logro de este objetivo se llevará a cabo mediante el estudio de la Teoría de los Subconjuntos Borrosos, como rama de la matemática que se ocupa del tratamiento de la incertidumbre, y su posible utilidad en la resolución del problema que constituye el campo de aplicación que suscita el desarrollo de nuevos productos.

Asimismo, será preciso realizar un análisis de las herramientas que permiten abordar el tipo de problemas citado, centrando el interés investigador en las heurísticas basadas en la naturaleza, entendidas como algoritmos de búsqueda y optimización aplicables a problemas de gran complejidad.

En segundo lugar, se plantea el objetivo de construir modelos operativos acordes con las consideraciones anteriores, suscitándose entonces la utilidad de los algoritmos genéticos en el proceso de búsqueda y optimización de la información disponible respecto al desarrollo de nuevos productos, donde se tratará de distinguir entre diferentes métodos de tratamiento de la incertidumbre.

De forma análoga, se considerará como otro objetivo particular la posibilidad de construir modelos similares a los anteriores utilizando algoritmos basados en colonias de hormigas.

En todo caso, los objetivos anteriores se integran en el doble propósito de analizar la posibilidad de aplicar los modelos construidos ante las decisiones de abordar el desarrollo de un nuevo producto tanto ante la premisa de una restricción presupuestaria en dicho desarrollo como ante la posibilidad de optar entre características sustitutivas a incorporar en el nuevo producto.



Los objetivos anteriores se pueden concretar en una serie de proposiciones a las que durante el desarrollo de la labor investigadora se tratará de dar respuesta y que configuran el marco de desarrollo de la presente Memoria de Tesis Doctoral.

En este sentido, en primer término se puede establecer la siguiente proposición inicial:

### **Proposición Principal**

En los mercados actuales, caracterizados por una incertidumbre creciente y un acortamiento en el ciclo de vida de los productos, la información se convierte en uno de los principales instrumentos para la gestión eficaz de las organizaciones. En este sentido, si bien la contabilidad representa un importante trabajo de campo para la planificación y el control del desarrollo de un nuevo producto, el entorno descrito plantea cuestiones con difícil respuesta en los modelos tradicionales, cuestionándose entonces el concurso de metodologías y técnicas alternativas que faciliten tal operativa, con información incierta y compleja, que permitan la elaboración de información relevante, flexible y adaptable a las condiciones cambiantes del entorno.

El propósito principal sugiere que el esfuerzo investigador se estructure en varios objetivos parciales que configuran el principal ámbito de actuación del trabajo y que se han recogido en las siguientes proposiciones parciales:

### **1ª Proposición**

Las metodologías empleadas hasta la actualidad en el desarrollo de nuevos productos, y especialmente el Despliegue de la Función de Calidad (DFC), presentan ciertas limitaciones, tanto en su concepción como en su aplicación al entorno actual, lo que conlleva la necesidad de su adecuación o reformulación, al objeto de facilitar la adopción de decisiones en un corto espacio de tiempo y adaptar las mismas a situaciones de cambio continuo.

### **2ª Proposición**

La flexibilidad y adaptabilidad como características inherentes a la elaboración de información que facilite la adopción de decisiones en entornos altamente cambiantes, hacen preciso la utilización de herramientas matemáticas y computacionales que permitan el tratamiento de la información y su procesamiento de una forma robusta y rápida.

### **3ª Proposición**

El comportamiento no lineal de las variables relevantes en la toma de decisiones sobre el desarrollo de nuevos productos exige que los métodos cuantitativos empleados para asistir a dicha toma de decisiones sean adecuados a tales situaciones. A su vez, el volumen e interrelación de tales variables hace preciso la incorporación al modelo de algoritmos de búsqueda y optimización que sean resolutivos ante problemas de gran complejidad combinatoria, lo que suscita el interés por considerar la aplicación de heurísticas basadas en la naturaleza, y más específicamente, los Algoritmos Genéticos y los Sistemas de Hormigas.

### **4ª Proposición**

La información de que disponen las empresas para afrontar la decisión sobre el desarrollo de un nuevo producto, en cuanto proviene en su mayor parte de opiniones emitidas por personas (clientes e ingenieros) no debería ser deformada para adecuarla a las necesidades de los métodos matemáticos utilizados tradicionalmente en su tratamiento, debiéndose procurar mantenerla en los términos en los que ha sido expresada, surgiendo entonces la necesidad de contemplar como posible alternativa la aplicación de la Teoría de los Subconjuntos Borrosos.

### **5ª Proposición**

La necesidad de realizar operaciones con información establecida mediante variables lingüísticas precisa la aplicación de técnicas computacionales que tengan definidos los operadores básicos para el tratamiento de este tipo de información. En este sentido, se plantea la utilidad de los modelos basados en el Principio de Extensión que operan con la información mediante las funciones de pertenencia asociadas a los términos lingüísticos.

### **6ª Proposición**

Los modelos simbólicos, basados en el orden que ocupa una etiqueta lingüística en su conjunto de términos, pueden resultar de interés como herramienta para afrontar el tratamiento de la información lingüística que se utiliza en el modelo de desarrollo de nuevos productos. En particular, el modelo que utiliza como base de representación un par de valores o 2-tupla, en su aplicación a problemas en los que las valoraciones que se utilizan para resolverlos pertenecen a distintos dominios de expresión puede resultar una representación válida para la construcción de un modelo de desarrollo de nuevos productos.

### **7ª Proposición**

Los Algoritmos Genéticos pueden resultar una poderosa herramienta en el proceso de optimización de la información susceptible de ser considerada en la decisión acerca de las acciones a desplegar en el desarrollo de un nuevo producto, ya que los operadores propios de este tipo de algoritmos, al actuar sobre las variables del modelo, permiten realizar una exploración y una explotación del espacio de búsqueda a través de las distintas posibilidades de combinación entre las características que debería contener el nuevo producto.

### **8ª Proposición**

La necesidad conjunta de aplicar mecanismos que permitan procesar la información en términos inciertos con herramientas que faciliten los procedimientos de búsqueda y optimización en problemas de gran complejidad como el que constituye el objeto de estudio, plantean el interés por construir un modelo que, utilizando un algoritmo genético, procese información expresada en variables lingüísticas. A este respecto, puede resultar de interés construir un modelo que actúe con las funciones de pertenencia de las variables lingüísticas así como un modelo que se base en la representación mediante 2-tuplas lingüísticas.

### **9ª Proposición**

Los Algoritmos Basados en Colonias de Hormigas, por la sencillez en los métodos que utilizan en los procesos de búsqueda y la rapidez que ofrecen en la consecución de soluciones pueden considerados como algoritmos válidos en la ayuda a la toma de decisión sobre la combinación óptima de características a desplegar en un nuevo producto.

### **10ª Proposición**

La aplicación al modelo de un Sistema de Hormigas como mecanismo de optimización de la información expresada en términos lingüísticos puede plantar la necesidad de construir un modelo basado en el principio de extensión para operar con las etiquetas lingüísticas así como un modelo que represente la información mediante 2-tuplas para las variables lingüísticas.

### **1.3. JUSTIFICACIÓN DE LA METODOLOGÍA UTILIZADA: EL ENFOQUE CONSTRUCTIVO EN LA CONTABILIDAD DE GESTIÓN**

La Contabilidad de Gestión, como campo de investigación fundamentalmente práctico, se enfrenta constantemente con nuevos retos. De hecho, como señalan JOHNSON y KAPLAN “el espíritu innovador, evidente hace cien años en los inicios del movimiento científico de gestión, puede ser recuperado por gestores innovadores e investigadores académicos comprometidos en el desarrollo de nuevos conceptos para diseñar importantes sistemas de Contabilidad de Gestión” (JOHNSON y KAPLAN, 1988, págs. 17-18), con lo cual se anima a los contables de gestión a construir nuevos sistemas de información de gestión que se enfrenten mejor a los nuevos retos.

El interés por el “enfoque constructivo” en la Contabilidad de Gestión puede estar basado en tres conceptos principales, a saber:

- las construcciones hacen referencia en términos generales a entidades que producen soluciones para problemas explícitos. Al desarrollar una construcción, se crea algo que difiere profundamente de todo lo anterior: las construcciones tienden a crear nuevas realidades, lo cual está en línea con la idea de que la Contabilidad juega un papel significativo en la construcción de la realidad (entre otros, HOPWOOD, 1983; HINES, 1988 y LUKKA, 1990);
- una característica importante de las construcciones es que su utilización se puede demostrar mediante la puesta en práctica de la solución, siendo la demostración de la capacidad de uso de la construcción un aspecto esencial para su valoración científica;
- las construcciones relevantes hacen referencia a entidades que resuelven problemas que surgen en el funcionamiento normal de las organizaciones empresariales.

De acuerdo con lo anterior, se plantea que el enfoque constructivo es un procedimiento de investigación para crear constructos, de forma que en la Contabilidad de Gestión este enfoque de investigación se dirige a la creación de constructos, sistemas, modelos, prototipos gerenciales. De ahí que en esta sección se tratará de mostrar que el enfoque constructivo, cimentado en la teoría de la Contabilidad de Gestión y dirigido al funcionamiento de “construcciones gerenciales”, satisface los requerimientos de una investigación aplicada válida, permitiendo así la justificación de la metodología seguida en el desarrollo de la presente Memoria de Tesis Doctoral.

A este respecto, en primer término, cabe poner de manifiesto que intuitivamente no resulta difícil comprender lo que quiere se decir por enfoque constructivo de

investigación: solución de problemas gerenciales mediante la construcción de modelos, esquemas, planes, etc. Muchos ejemplos de estudios constructivos aplicados se encuentran en las ciencias técnicas, en la medicina clínica y en operaciones de investigación, aunque también es posible encontrar algunos en Contabilidad de Gestión.

Sin embargo, no todos los ejercicios de solución de problemas se consideran investigación constructiva, de hecho una parte esencial del enfoque constructivo radica en la vinculación del problema y su solución con el conocimiento teórico acumulado. La novedad y el funcionamiento real de la solución también deberán ser demostrados.

Por otro lado, el funcionamiento práctico de una construcción no es en absoluto un asunto evidente como puede parecer en principio y más aún por el papel activo de los participantes de la organización, futuros receptores de un modelo gerencial. De hecho, procesos organizativos complejos que se manifiestan en formas tales como la resistencia al cambio y la movilización de poder suelen estar presentes al principio y en otras etapas de la puesta en práctica. Por tanto, una construcción que se considere adecuada en estrictos términos técnicos no tiene por que funcionar en la práctica. En ocasiones es muy difícil, si no imposible, valorar la adecuación operativa de cualquier construcción nueva antes de su puesta en práctica.

El enfoque constructivo se puede describir dividiendo el proceso de investigación en fases, cuyo orden puede, por supuesto, variar según los casos:

1. Buscar un problema práctico importante con un potencial de investigación.
2. Obtener una idea general y una comprensión global del tema.
3. Innovar, por ejemplo, construir una idea de solución.
4. Demostrar que la solución funciona.
5. Mostrar las conexiones teóricas y la contribución investigadora del concepto de solución.
6. Examinar el alcance de la aplicabilidad de la solución.

De las anteriores fases, conviene destacar la particularidad que presenta la fase de innovación, pues a priori es heurística por naturaleza; una justificación teórica más estricta y la comprobación de la solución normalmente vienen después. La fase de innovación es el elemento central de un estudio constructivo satisfactorio, por la mera razón de que si el investigador no es capaz de aportar ninguna solución nueva para el problema en cuestión, obviamente no tiene sentido continuar con el estudio (DUNK, 1989).

Por otro lado, la investigación constructiva se puede contemplar como una forma de estudios aplicados. Una característica de los estudios aplicados es la producción de nuevo conocimiento en forma de aplicaciones normativas. En este sentido, puede distinguirse tanto de los estudios básicos que tratan de incrementar el conocimiento y comprensión del mundo sin ningún propósito normativo explícito como del desarrollo de técnicas que simplemente tratan de mejorar las habilidades y medios.

La investigación constructiva difiere esencialmente de la construcción del modelo analítico que también representa estudios aplicados. El objetivo principal de la construcción del modelo analítico es producir una solución a un problema, demostrada de forma brillante y que funciona en principio, pero cuya auténtica adecuación no queda normalmente explícita.

A su vez, resulta muy difícil trazar una línea entre la investigación constructiva y la solución de problemas científicos, donde el que toma las decisiones fija los objetivos y el investigador le ofrece una única recomendación para actuar. De hecho, es razonable considerar que la resolución de problemas científicos, debido a su singularidad, no produce auténtico conocimiento científico, aunque utilice métodos científicos para desarrollar su recomendación.

Sin embargo, es difícil imaginar una solución para un problema de Contabilidad de Gestión en el mundo real que se ajuste perfectamente a la empresa en cuestión pero no a otras similares. De hecho, la utilidad real de una construcción gerencial nunca se demuestra hasta que supera un test práctico. Por ello, el criterio inicial para evaluar los resultados de los estudios aplicados es su utilidad práctica, lo que plantea los temas de relevancia, simplicidad y facilidad de operación de tales resultados.

A este respecto, cabe poner de manifiesto uno de los intentos reconocidos para integrar los diferentes puntos de vista metodológicos, como lo es la clasificación de BURRELL y MORGAN (1979) que ha sido citada en la literatura sobre Contabilidad posterior (HOPPER y POWELL, 1985), donde una de las funciones más importantes de dicha clasificación es la ubicación de los enfoques radicales en el campo de los estudios sociales. Merece la pena destacar, sin embargo, que esta clasificación, como cualquier otra discusión sobre el positivismo y sus alternativas, no incluye ninguna referencia explícita al enfoque constructivo, suscitándose entonces la cuestión de si el enfoque constructivo es o no científico.

En efecto, una de las tareas de la filosofía de la ciencia es fijar los criterios que hacen que una investigación sea considerada científica. Esto significa que esas condiciones necesarias y suficientes que distinguen la ciencia de la no-ciencia y de la pseudo-ciencia deben ser fijadas. Sin embargo, y debido a que la ciencia es algo abierto y

en desarrollo, no se pueden fijar unos criterios estrictamente categóricos, de forma que retengan su validez para siempre. De hecho, la apertura y la variabilidad se presuponen como características de la ciencia. A pesar de que existen diferentes enfoques y escuelas de metaciencia, la lista de criterios que aparece a continuación, apenas encuentra oposición entre los científicos, a saber: objetividad, criticidad, autonomía y progresividad.

Para que la investigación científica sea fructífera, tiene que ser capaz de resolver problemas y plantear nuevas cuestiones. En consecuencia, la progresividad deberá ser contemplada en referencia tanto al crecimiento del conocimiento (mediante la resolución de problemas) como a la difusión de nuevos problemas (RESCHER, 1984; SII-TONEN, 1984).

Más aún, con relación a los estudios constructivos, se tienen que considerar los criterios de las ciencias aplicadas, a saber, que sus resultados sean relevantes, simples y fáciles de usar. Además, todas estas consideraciones deberán relacionarse con la tradición de la investigación metodológica en Contabilidad de Gestión.

Antes de analizar estos criterios, cabe poner de manifiesto el carácter del enfoque constructivo más detalladamente. Los rasgos característicos del método constructivo son en general los siguientes: (i) es un procedimiento paso a paso, de forma que la naturaleza de los pasos se especifica en el sistema marco en el que se aplica el método; (ii) existe la posibilidad de controlar cada paso, o cada etapa de la construcción; y (iii) el procedimiento en su totalidad sirve a unos propósitos definidos. Así la creación de construcciones es una actividad dirigida a un objetivo.

De acuerdo con lo anterior, es posible entonces entrar a analizar el método de construcción a la vista de los criterios generales de la ciencia que han sido previamente mencionados, a saber:

La posibilidad de controlar los pasos de una construcción unida a los criterios de objetividad, criticidad y autonomía contribuye a la cuestión de que cualquiera puede poner a prueba la construcción obteniendo los mismos resultados que la persona que hizo la original. Al controlar la construcción también se puede criticar la forma en que fue realizada.

Por otro lado, conviene tener en cuenta que la realización de construcciones, aunque dirigida hacia un objetivo, es en sí misma, y en gran medida, una actividad autofinanciada y como tal independiente de consideraciones económicas, políticas, etc. Sin embargo, un proceso global de investigación constructiva está por supuesto,

cargado de valor y las preferencias de los directivos vinculados al mismo suelen jugar un papel importante en este sentido.

La realización de construcciones tiende a facilitar la liberación de prejuicios debido a que las construcciones muestran de una forma concreta las soluciones que funcionan y las que no. Así, la realización de construcciones se conecta con los criterios de progresividad y criticidad. Más aún, las construcciones gerenciales no sólo resuelven problemas sino que a menudo muestran también nuevos problemas. De hecho, una construcción que funciona tiende a plantear nuevas cuestiones.

La primera condición de validez para las construcciones es claramente que funcionen (por ejemplo, resolver los problemas). Parece sensato asumir que alternativas impracticables, sean en ingeniería, Contabilidad o en cualquier otra materia, queden eliminadas del mercado de ideas que ofrecen soluciones, en el transcurso del tiempo. En la mayoría de los casos la idea más simple suele ser la más adecuada, por lo que se puede afirmar que una construcción que funciona es relevante, simple y fácil de utilizar.

Por otro lado, es importante tener en cuenta que se pueden extraer conclusiones teóricas de la utilización de las construcciones. A este respecto, la opinión más radical es la del pragmatismo norteamericano que considera la utilidad práctica como el principal criterio de veracidad (JAMES, 1955), y que las construcciones son los medios básicos del pensamiento teórico en general.

De hecho, según el pragmatismo, la construcción de un esquema equivale a utilizar el método correcto, en matemáticas y también en otras materias. De ahí, que no resulte extraño que científicos de la talla de Peirce consideren que el método de construcción es un procedimiento autojustificativo (PEIRCE, 1955, pág. 46).

No obstante, para demostrar que el método constructivo es científico, no es suficiente mostrar que un cierto modelo gerencial funciona en su propio contexto. También se debe mostrar que la construcción tiene conexiones teóricas, por ejemplo, que forma parte de un marco teórico determinado. Además de contribuir a la validez científica del método, la exposición de las conexiones teóricas apoya la afirmación de que la construcción en cuestión, también funcionaría en otras situaciones distintas de las de su campo original. El desarrollo de las matemáticas y de las ciencias experimentales facilita ejemplos significativos de una cooperación fructífera entre las construcciones y la teoría.

Con relación a la tradición de investigación metodológica en la Contabilidad, los criterios científicos previamente expresados podrían no ser plenamente satisfacto-



rios, ya que para ser científicos, los resultados de la investigación deben ser también generalizables. De acuerdo con el positivismo, la ciencia tiene la tarea de detectar los rasgos no variantes de la naturaleza y de la sociedad (McCLOSKEY, 1983).

A este respecto, cabe poner de manifiesto que la generalización no es una condición evidente en sí misma para la ciencia, ya que existen ejemplos de esfuerzos científicos que, claramente, ni siquiera tratan de cumplir este criterio (la Historia, en particular). Además, y quizá sorprendentemente, es posible argumentar que cuando un modelo ha sido diseñado, este objetivo ya ha sido conseguido: las construcciones que funcionan adecuadamente son en sí mismas aptas para conducirnos a conexiones de tipo legal entre los fenómenos en cuestión. Si, por ejemplo, se crea una solución para un problema de Contabilidad de Gestión de una empresa y funciona, es probable que esta solución sea también aplicable a otras empresas del mismo tipo.

Además, conviene tener en cuenta que la cuestión de la generalización en el caso de los estudios constructivos difiere significativamente de los problemas respectivos en estudios explicativos, basados en pequeñas muestras, donde, en ocasiones, se producen inferencias estadísticas injustificadas. De hecho, la generalización de construcciones gerenciales se puede contemplar como un proceso de difusión de las innovaciones que se produce entre los profesionales, a menudo con la ayuda de los académicos (investigación y enseñanza). Aunque, hasta cierto punto, se pueda predecir la rapidez y el alcance de este proceso basándose en el éxito preliminar de un modelo, la prueba decisiva tiene lugar en el mercado de innovaciones. Este proceso de difusión, por su propia naturaleza, difiere profundamente de la noción de generalización en los estudios de muestras, donde se basa simplemente en ciertas suposiciones sobre las probables distribuciones de las variables estudiadas.

Por último, cabe señalar que de acuerdo con lo anterior, cabría entonces plantearse si la auténtica cuestión es el reverso de aquella asumida por la afirmación de generalización: tras diseñar una construcción gerencial que funciona, se puede empezar a considerar cuáles son los rasgos más generales que se manifiestan en la creación de una nueva realidad.

Por tanto, el análisis llevado a cabo en este apartado permite sugerir que la escasa incidencia del enfoque constructivo en la investigación de la Contabilidad de Gestión se puede comprender mejor si se tienen en consideración las razones siguientes:

1. Los ideales científicos de la Contabilidad se han adoptado de las ciencias naturales o sociales mientras que disciplinas como la ingeniería o la medicina, que se caracterizan por sus estrechas conexiones con la solución de problemas, han quedado, en gran medida, fuera de la discusión metodológica.

2. El diseño de construcciones gerenciales útiles tiende a crear una relación de asesoramiento entre el investigador y la empresa. De ahí que los resultados de investigación a menudo tengan un gran valor comercial y son considerados como secretos de empresa, por lo que su publicación se ve seriamente limitada.

En relación con otros enfoques de investigación más tradicionales, la investigación constructiva estaba localizada en el área normativa, comprendiendo tanto un análisis teórico como un análisis empírico. Un estudio orientado a la decisión que englobe una fase de puesta en práctica satisfactoria (positiva), y una opción de investigación del enfoque orientado a la acción pueden acercarse en la práctica al enfoque constructivo.

En lo que se refiere a los posibles méritos científicos del enfoque constructivo se pueden distinguir condiciones a tres niveles: (i) características generales de la ciencia; (ii) rasgos típicos de las ciencias aplicadas; y (iii) tradición de investigación metodológica en Contabilidad.

En este apartado se ha argumentado que un estudio constructivo satisfactorio (en el que se produce una solución innovadora a un problema real, se demuestra su utilización específica y sus conexiones teóricas, y se examina su potencial para una adecuación más general) es apto para cumplir las características más significativas y generales de la ciencia, por ejemplo, objetividad, criticidad, autonomía y progresividad.

El hecho de que un estudio constructivo satisfactorio cumpla las necesidades típicas de las ciencias aplicadas, por ejemplo, relevancia, simplicidad y facilidad de uso, se deduce de los pragmáticos puntos de partida del problema y de la necesidad de asegurar el funcionamiento de la solución.

Por otro lado, la discusión metodológica contable, influenciada principalmente por la tradición positivista, plantea la cuestión de la generalización como uno de los criterios más importantes exigidos a los resultados de la investigación científica. Esto puede ser considerado como un problema para el enfoque constructivo, donde simplemente se resuelve un problema real. Con respecto a este tema, conviene poner de manifiesto dos puntos, a saber: (i) la generalización no es una condición evidente en sí misma para la ciencia, ya que existen ejemplos de empresas científicas que claramente no cumplen este criterio, y (ii) la generalización es un problema menor para el enfoque constructivo frente a lo que la misma supone para los estudios positivos basados en pequeñas muestras, de hecho, es bastante probable que una solución que funciona en una empresa sea útil en muchas otras empresas similares.

En todo caso, las bases para la generalización en el caso de un estudio constructivo difieren radicalmente de un intento de hacer inferencias estadísticas a partir de una muestra pequeña. Una construcción gerencial es un producto que compite en el mercado de las soluciones, no una afirmación estadística. Siguiendo las principales ideas del pragmatismo, la utilización práctica es la característica principal que muestra la veracidad de una construcción gerencial. Quizá el punto de vista más interesante aquí es que toda la cuestión de la generalización puede dar la vuelta: cuando se crea una construcción que funciona adecuadamente, ha llegado el momento de considerar cuáles son los rasgos más generales que se hacen visibles en esa construcción.

Finalmente, y a un nivel más general, cabe considerar la aceptación del enfoque constructivo como un paso más en un proceso en el que la Contabilidad de Gestión busca su identidad como una disciplina de prestigio. Hasta ahora esta búsqueda se ha basado en los ideales científicos de las ciencias sociales y las ciencias naturales. A pesar de los indiscutibles méritos de este desarrollo, resulta razonable considerar que se ha alcanzado un punto en el que existe una pequeña interacción entre investigación de Contabilidad de Gestión y práctica de gestión. Esta situación es problemática ya que la Contabilidad de Gestión es, al final, un campo práctico donde la teoría sin implicaciones pragmáticas está vacía.

La idea aquí propugnada es que se debe realizar un esfuerzo para utilizar las ideas metodológicas de otros campos aplicados en la investigación de la Contabilidad de Gestión. Precisamente es aquí donde el enfoque constructivo surge como una opción metodológica natural para los estudios de la Contabilidad de Gestión.

#### **1.4. ESTRUCTURA DEL TRABAJO**

La estructura del trabajo de investigación que conforma el contenido de la presente Memoria de Tesis Doctoral es la siguiente:

En el Capítulo 2 se tratará de realizar una aproximación a las necesidades de información para la gestión en el desarrollo de un nuevo producto, con el objetivo de conocer el estado del arte en este tipo de decisiones, así como los métodos propugnados por la literatura al respecto en este ámbito de decisión.

En la primera sección se analizará la repercusión que en el entorno actual plantea la decisión de destinar o no recursos a un determinado programa de desarrollo de un nuevo producto, haciendo especial mención a las condiciones actuales del entorno empresarial así como a los métodos propugnados por diferentes autores al respecto.

El estudio de las consideraciones anteriores llevará a la necesidad de analizar el modelo de despliegue de la función de calidad (DFC) como metodología básica reconocida para abordar este tipo de decisiones y que se desarrollará en el segundo apartado de este Capítulo. El análisis anterior permitirá poner de manifiesto las limitaciones inherentes a este método, principalmente en su aplicación al entorno actual, presidido por los continuos cambios, lo que implica la necesidad de considerar nuevos métodos que permitan tomar decisiones en un corto espacio de tiempo y adaptar las mismas a situaciones de cambio continuo.

Las consideraciones efectuadas en el Capítulo 2 sobre las limitaciones planteadas en el modelo del DFC en su aplicación al desarrollo de nuevos productos, derivadas de la complejidad del problema, planteará el interés por analizar nuevos procedimientos de búsqueda y optimización que permitan afrontar este problema.

En este sentido, en el Capítulo 3 se realizará una aproximación conceptual a heurísticas basadas en la naturaleza con el propósito de analizar su interés en la aplicación de las mismas en la construcción del modelo de desarrollo de nuevos productos que se pretende realizar en la presente Memoria de Tesis Doctoral.

Para ello, en primer término se analizarán los problemas de búsqueda y optimización en general, con la finalidad de establecer las características que serían deseables que se incluyeran en los mismos en su aplicación a problemas complejos. Dentro de los mecanismos de búsqueda y optimización, se estudiará el interés creciente en la comunidad científica por el reconocimiento de sistemas complejos existentes en la naturaleza y la posibilidad de simular sus mecanismos de comportamiento para su aplicación a otro tipo de problemas. En este sentido, si bien se describirán los algoritmos más generales, por el interés que presentarán en el desarrollo de la presente Memoria, se analizarán con profundidad las heurísticas basadas en Algoritmos Genéticos y en Sistemas de Hormigas, a saber:

Los Algoritmos Genéticos (AGs), introducidos por Holland en 1975, son algoritmos de búsqueda que utilizan la metáfora de las poblaciones de genes. En su desarrollo en las últimas décadas se han modificado y mejorado los mecanismos de funcionamiento de los mismos, incorporándose variaciones en los mismos que precisan de un estudio detallado. En este sentido, el segundo epígrafe de este Capítulo se destinará al análisis en profundidad de los AGs, exponiendo su fundamentación teórica, la analogía con los principios básicos de la evolución en los que se asientan, los elementos básicos de funcionamiento y los métodos y criterios necesarios para implantar un algoritmo de este tipo.

Los Algoritmos basados en Colonias de Hormigas (ACOs) fueron propuestos por Marco Dorigo en 1992, razón por la cual su fundamentación si bien hasta la actualidad no ha sufrido grandes modificaciones sí es posible encontrar desarrollos del mismo que constituyen por sí mismos nuevos algoritmos. Asimismo, la utilidad de los mismos ha quedado manifiesta en numerosos trabajos, con buenos resultados, lo que ha suscitado el interés por estudiar su utilidad en el modelo que se pretende construir en la presente Memoria. En este sentido, el tercer apartado de este Capítulo se dedicará a analizar la fundamentación teórica, así como los distintos algoritmos que utilizan en su planteamiento la analogía con dichas colonias naturales.

Por otra parte, entre las limitaciones que presenta la metodología del DFC apuntadas en el Capítulo 2, se encuentra el hecho de que este método utiliza informaciones de naturaleza cualitativa, expresada en general mediante variables lingüísticas a las que se le aplica un tratamiento numérico similar al utilizable en casos de informaciones numéricas. Este planteamiento implica transformar valoraciones cualitativas en valores numéricos, con la consiguiente pérdida de información que todo proceso de transformación conlleva. Asimismo, provoca que la incertidumbre inherente a las manifestaciones lingüísticas, así como a hechos que se suponen se realizarán en el futuro, se simplifique con el único objetivo de poder utilizar herramientas matemáticas tradicionales que sólo permiten operar con valores numéricos. Esta circunstancia conllevará la posibilidad de analizar mecanismos o técnicas matemáticas que permitan el tratamiento de este tipo de información sin necesidad de transformarla, entre los que destaca la Teoría de los Subconjuntos Borrosos y sus variantes.

La consideración anterior implicará que el Capítulo 4 se dedique al estudio de los distintos métodos para el tratamiento de la incertidumbre, analizando en primer término los principales tipos de incertidumbre existentes y su posible tratamiento, para a continuación pasar a analizar los subconjuntos borrosos y la operativa básica con este tipo de conjuntos, necesaria para poder formular un modelo matemático en ambientes de incertidumbre.

Los números borrosos, como un tipo especial de subconjuntos borrosos, serán objeto de atención posterior, haciendo referencia asimismo a las operaciones básicas que se pueden llevar a cabo con los mismos. La utilidad y aplicación práctica que presentan tanto los números borrosos triangulares como los números borrosos trapezoidales, lleva a dedicar parte de este apartado a su análisis y operativa, en especial por la posibilidad de su aplicación en el modelo desarrollado.

Asimismo, y como se comentó con anterioridad, en el proceso de optimización de información para el desarrollo de nuevos productos es posible que la información disponible se encuentre expresada en términos lingüísticos. De ahí que en el modelo

que se pretende construir presente interés analizar las posibilidades para el tratamiento de dicho tipo de información, a cuyo objeto se dedicará el epígrafe 5 de este Capítulo.

Las variables lingüísticas son una herramienta para procesar lenguaje natural, impreciso y borroso, que a diferencia de las variables numéricas, sus valores no son números sino expresiones del lenguaje natural que describen alguna cantidad abstracta de interés. El tratamiento de la información expresada mediante variables lingüísticas precisa de la utilización de técnicas computacionales que tienen definidos distintos operadores, siendo los modelos más extendidos los basados en el principio de extensión y los modelos simbólicos. En este sentido, se describirán asimismo ambos tipos de modelos, al objeto de analizar las ventajas e inconvenientes que su uso puede representar en el modelo que se desea construir.

En el desarrollo del apartado 6 del Capítulo 4 se pondrá de manifiesto las limitaciones existentes en modelos tradicionales que operan con información lingüística, planteándose en consecuencia la posible utilidad que puede tener en el modelo que se pretende desarrollar la representación lingüística con 2-tuplas.

Asimismo, y dado que la información precisa para adoptar la decisión sobre las características a desplegar en un nuevo producto se obtiene de distintas fuentes (cliente, ingeniero, etc.), ésta puede venir dada en distintos dominios de expresión, siendo precisa su normalización en un mismo dominio de expresión. En este sentido, para finalizar este Capítulo, se analizarán las posibilidades existentes para la agregación de información lingüística multigranular, propugnando el método que se utilizará en el desarrollo del modelo que constituye el objetivo de la presente Memoria de Tesis Doctoral.

Los desarrollos efectuados en los capítulos anteriores tendrán su consecución práctica en el Capítulo 5, en el que se abordará la construcción de diversos modelos para la optimización de la información sobre nuevos productos, en circunstancias presididas por la incertidumbre con heurísticas basadas en la naturaleza e implementados utilizando el lenguaje de programación informática conocido como "Visual Basic", por lo que a efectos ilustrativos se incluirá el pseudocódigo aplicado en cada procedimiento.

Asimismo, se abordará la construcción de dichos modelos ante dos perspectivas distintas de decisión: en primer lugar, se realizará un modelo que permita abordar la decisión sobre las características óptimas a incluir en un nuevo producto desde la perspectiva de la existencia de un volumen de recursos limitados para afrontar dicho desarrollo. Posteriormente, se establecerán las modificaciones necesarias en el modelo para abordar el problema en situaciones en las que la elección de las acciones a des-

plegar en el nuevo producto se puedan tomar entre grupos de características sustitutivas entre sí.

De acuerdo con lo anterior, este Capítulo comenzará con un análisis de las posibilidades que ofrecen los algoritmos genéticos en su aplicación a la resolución del problema de optimización de información sobre nuevos productos desde distintas perspectivas, a saber:

En una primera aproximación se abordará el desarrollo de un modelo en ambientes de certeza, es decir, cuando los valores asociados a las variables que se incorporan al mismo están establecidos en términos numéricos. En este contexto, se describirán los procedimientos necesarios a realizar en el tratamiento de la información disponible sobre las variables del modelo, analizando las dos perspectivas fundamentales de dicha información, la voz del cliente y la voz del ingeniero.

Posteriormente, se abordará la aplicación de un modelo desarrollado en condiciones de incertidumbre, es decir, en circunstancias en que la información viene establecida en términos lingüísticos, mediante la construcción de dos nuevos modelos. En el primer caso, la información lingüística será tratada mediante las funciones de pertenencia asociadas a las etiquetas lingüísticas, utilizando las operaciones sobre las mismas basadas en el principio de extensión. En el segundo caso, se planteará la utilidad de la representación mediante 2-tuplas lingüísticas aplicando en consecuencia los operadores descritos en el Capítulo 4 para este tipo de representación. Asimismo, ambos modelos se construyen en los dos ámbitos de decisión anteriormente citados: existencia de una restricción presupuestaria y situaciones con características sustitutivas.

Para finalizar, en el tercer apartado del Capítulo 5, se abordará la construcción de los modelos anteriores, tanto en ambientes de certeza como de incertidumbre, utilizando algoritmos de optimización basados en sistemas de hormigas.

A este respecto, en ambientes de certeza, se tratará de elaborar un modelo donde la información disponible se tratará en los mismos términos que en el modelo realizado con la incorporación de un AG. De ahí que, en primer término describirán los parámetros específicos del sistema de hormigas, en concreto el procedimiento utilizado para iniciar el recorrido de cada agente en su construcción de la solución, la regla de transición de estados para determinar el paso de un punto a otro del recorrido, y la regla de actualización de feromona aplicable una vez que se realiza cada iteración. Finalmente, se expondrán los aspectos específicos del modelo en su aplicación a los dos ámbitos de decisión (restricción presupuestaria y características sustitutivas), utilizando como ejemplo de aplicación práctica el descrito en los casos anteriores.

En su aplicación en ambientes de incertidumbre se construirán dos nuevos modelos, con la finalidad de establecer su utilidad en la toma de decisiones con información incierta. En ambos casos, el tratamiento de los valores lingüísticos de la información sólo se precisará desarrollar las modificaciones pertinentes para poder aplicar un sistema de hormigas a la información expresada en dichos términos.

Finalmente, los análisis realizados en los Capítulos anteriores, permitirán poner de manifiesto las conclusiones obtenidas en el desarrollo de esta investigación y que se recogerán en el Capítulo 6, conjuntamente con las líneas de investigación y futuros desarrollos apuntados en relación con el tema de estudio.



## Capítulo 2

# Información para la Gestión y Desarrollo de Nuevos Productos

### 2.1. INTRODUCCIÓN

El entorno actual en el que se desarrollan las empresas se caracteriza por un enorme dinamismo, que implica grandes cambios en las condiciones económicas y del mercado, unido a avances tecnológicos cada vez más rápidos. En estas condiciones, las empresas deben adaptar continuamente su cartera de productos, modificando y abandonando productos existentes y lanzando al mercado nuevos productos. De este modo, el desarrollo e introducción de nuevos productos se convierte en un elemento clave para la supervivencia y el crecimiento de las empresas, como lo demuestra entre otros el estudio realizado por PAGE (1993), en el que establece que el 32% de las ventas realizadas por las empresas proceden de nuevos productos introducidos en los 5 años previos al estudio.

En consecuencia, los responsables de la gestión se enfrentan a menudo con el dilema de destinar o no recursos a un determinado programa de desarrollo de un nuevo producto (DNP).

En este entorno, en el que los cambios en las condiciones económicas y tecnológicas, unidos al incremento del nivel de competitividad tanto local como global, las

variaciones en las necesidades de los clientes, la rápida obsolescencia de los productos y la emergencia de nuevos mercados, se precisa de una rápida respuesta por parte de las empresas en el desarrollo de nuevos productos (BOWER y HOUT, 1988; GRIFFIN, 1992; GUPTA y WILEMON, 1990 y ROSENAU, 1988). En general se mantiene que una rápida respuesta al mercado puede proporcionar una ganancia sustancial en la cuota de mercado futura, como lo reflejan los resultados de distintos estudios (entre otros, URBAN, CARTER, GASKINS y MUCHA, 1986; GOLD, 1987; DAY y WENSLEY, 1988).

Por otra parte, la incertidumbre inherente a los mercados y a la tecnología implica asimismo que estos procesos deban realizarse de forma flexible (SÁNCHEZ, 1995; WIND y MAHAJAN, 1988), con la finalidad de minimizar el riesgo del proyecto, ya que todo proceso de innovación lleva asociado un riesgo inherente al mercado y un riesgo tecnológico (LAMBIN, 1991). El riesgo de mercado se deriva del grado de originalidad y complejidad del concepto de nuevo producto, mientras que el riesgo tecnológico viene determinado por el grado de innovación de la tecnología utilizada, en ambos casos tanto desde la perspectiva del mercado como desde la perspectiva de la propia empresa. Ambos tipos de riesgo pueden ofrecer una explicación de las elevadas tasas de fracaso en el desarrollo de nuevos productos (EDGETT, SHIPLEY Y FORBES, 1992; GRIFFIN, 1997).

En la literatura se pueden encontrar diversos estudios que tratan de identificar los factores determinantes del éxito de los nuevos productos en el mercado, con la finalidad de mejorar la eficiencia del proceso de desarrollo de nuevos productos (entre otros, MAIDIQUE y ZIRGER, 1984; MONTOYA-WEISS y CALANTONE, 1994; SANTOS y VÁZQUEZ, 1997).

El proceso de desarrollo de un nuevo producto implica dos actividades diferenciadas: desarrollo del producto (conceptualización, diseño preliminar, diseño detallado, pruebas y fabricación) y lanzamiento del producto. Si bien es cierto que la segunda etapa consume un mayor volumen de recursos que la actividad de desarrollo propiamente dicha, la mayoría de los estudios realizados tratan de avanzar en la primera, debido a la mayor importancia que se le asigna en el éxito o fracaso del nuevo producto.

Tradicionalmente, el desarrollo de un nuevo producto se realiza de forma secuencial (KOTLER y ARMSTRON, 1989), mediante el desarrollo de una serie de tareas previas al proceso de lanzamiento y comercialización. En cada fase intervienen distintas funciones de la empresa, y los responsables de la gestión deben revisar el resultado obtenido en cada fase antes de que el proceso de desarrollo pueda seguir su curso.

Sin embargo, se han realizado numerosos análisis de este proceso, debido principalmente a la falta de rapidez y flexibilidad del proceso secuencial, características que en la actualidad se consideran indispensables si se desea que este proceso responda a las necesidades planteadas por un entorno cambiante.

En este sentido, TAKEUCHI y NONAKA (1986) plantean un método holístico, en consonancia con el creciente interés recogido en la literatura al respecto sobre la importancia de la integración entre funciones como el marketing, investigación y desarrollo y fabricación (CRAWFORD, 1980; GUPTA, RAJ y WILEMON, 1986; HAUSER y CLAUSING, 1988; SOUDER, 1988; CLARK, 1989; GOMORY, 1989; HISE, O'NEIL, PARASURAMAN y McNEAL, 1990; NARVER y SLATER, 1990).

A este respecto, TAKEUCHI y NONAKA reconocen que el proceso de desarrollo de nuevos productos incluye diferentes estadios y en ese sentido se podría analizar como un proceso secuencial, si bien estos autores centran su atención en el hecho de que dichos estadios o etapas interactúan unos con otros, de forma que su método de DNP se construye bajo la premisa de una comunicación interactiva entre los especialistas de cada función pero con un desarrollo paralelo de cada tarea. De esta forma, el hecho de que el departamento responsable de una tarea se retrase en el tiempo, no implica el retraso en el resto del proceso, lo que proporciona al mismo las condiciones de flexibilidad y efectividad que se precisan en el entorno actual.

El método holístico proporciona por tanto una mejora sobre el proceso secuencial tradicional, pero carece de criterios sobre el grado de integración necesario para su implantación, lo que puede implicar la imposibilidad de su utilización en la práctica (GUPTA, RAJ y WILEMON, 1986). Asimismo, este método no refleja la incertidumbre inherente al mercado y a la tecnología, ni recoge de forma explícita el momento en el que se considera coherente abandonar un proyecto o llevar a cabo el lanzamiento del producto.

Los motivos anteriores provocan el interés por el estudio de otros métodos aplicables al desarrollo de nuevos productos. Entre estos, el "Despliegue de la Función de Calidad (DFC)" o "Quality Function Deployment (QFD)" constituye otra aproximación al problema, que se basa asimismo en el desarrollo simultáneo de las distintas funciones (GRIFFIN, 1992; GRIFFIN y HAUSER, 1992; HAUSER Y CLAUSING, 1988). Este método utiliza las percepciones de los clientes sobre las características físicas del producto y sus requerimientos con la finalidad de obtener el nuevo producto final.

La utilidad del DFC en el problema de desarrollo de nuevos productos hace que el mismo haya sido considerado como uno de los métodos más aplicados como metodología para aproximación a este problema, razón por la cual en los apartados siguientes se realiza un análisis más detenido del mismo.

## **2.2. EL MODELO DE DESPLIEGUE DE LA FUNCIÓN DE CALIDAD (DFC)**

### **2.2.1. Consideraciones generales**

El proceso de desarrollo de nuevos productos (DNP) comienza con las expectativas del cliente y concluye con la salida del producto acabado, esto es, el problema radica en traducir las expectativas del cliente en especificaciones internas de la empresa y transmitir fielmente dichas especificaciones a las distintas funciones implicadas. De hecho, tanto la traducción de las expectativas del cliente en especificaciones como la transmisión de dichas especificaciones a las distintas funciones se lleva a cabo no sin dificultades, tropezando normalmente con numerosos obstáculos, ya sea por la estructura, los modos de funcionamiento de la empresa o por la naturaleza misma del proceso de desarrollo.

A su vez, convertir los requerimientos del cliente en especificaciones técnicas de diseño bien detalladas puede ser una tarea difícil, pues, con frecuencia, los requerimientos del cliente son “borrosos o vagos”, y en muchos casos, contradictorios. Como las especificaciones técnicas del producto se expresan en un “lenguaje” bastante diferente del de las necesidades de los clientes, a menudo la voz del cliente no se escucha y el resultado final es un producto que no satisface por completo las necesidades de los clientes.

En efecto, las expectativas del cliente, punto de partida del ciclo y del proceso de desarrollo, pueden verse deformadas y retrasadas antes de llegar a aquellos que tengan que convertirlas en tareas concretas para realizar el producto acabado, de ahí que la transmisión integral de la información asociada al producto, la rapidez de su circulación y la colaboración sin reservas de todas las funciones de la empresa con un mismo objetivo y en un mismo instante, sean factores que dan una medida de la agilidad y la capacidad de reacción de la unidad económica.

El despliegue de la función de calidad (DFC), conocido en el mundo anglosajón con la denominación de Quality Function Deployment (QFD), es un método para que los equipos interfuncionales conviertan los requerimientos del cliente en requerimientos apropiados de diseño en cada etapa del proceso de desarrollo del producto, por tanto, garantiza que el cliente sea el centro de todas las actividades del diseño y que “inspire” todos los cambios del diseño, en otras palabras, se trata de un método para desarrollar una calidad de diseño enfocada a satisfacer al consumidor, de forma que se conviertan los requerimientos del consumidor en objetivos de diseño y elementos esenciales de aseguramiento de la calidad a través de la fase de producción.

Por tanto, con el DFC se intenta facilitar la conversión de las demandas de los consumidores en características de calidad y el desarrollo de una calidad de diseño para el producto acabado mediante el despliegue sistemático entre demandas y características, comenzando con la calidad de cada componente funcional y extendiendo el despliegue de la calidad a cada parte y proceso, con lo cual la calidad global del producto se formará a través de esta red de relaciones.

El DFC supone una inversión en el proceso de desarrollo de nuevos productos, pues si tradicionalmente es la ingeniería, en base a sus propias percepciones, la que dirige (empuja) las actividades de desarrollo, con el DFC el proceso es desencadenado por las necesidades reales del consumidor, que son ahora las que orientan tales actividades. La lógica subyacente es aproximar los productores a los consumidores, como antiguamente el artesano conocía los deseos de su clientela.

El número de publicaciones sobre DFC es muy amplio (entre los que cabe destacar, entre otros, a KOGURE y AKAO, 1983; HAUSER y CLAUSING, 1988; SULLIVAN, 1986; FORTUNA, 1988; CLAUSING, 1994; WASSERMAN, 1991; GRIFFIN, 1992 y EUREKA y RYAN, 1994). No obstante, la metodología del DFC todavía no ha madurado, ni siquiera en Japón su país de origen. De hecho, en la actualidad existe una gran diversidad de enfoques en su empleo, dependiendo de las limitaciones de su propio entorno y, sobre todo, del proyecto en cuestión, ya que se trata de un método ad hoc, adaptable y flexible.

De acuerdo con lo anterior, en este apartado se presentará una propuesta de metodología que intenta recoger la línea general de este procedimiento, válido para sus distintas adaptaciones, si bien en algunos aspectos se efectuará un desarrollo más profundo o particular, proponiendo también nuevos enfoques de desarrollo futuro.

La metodología tradicional del DFC suele aplicarse en cuatro fases del proceso, tal como se muestra en la Figura 2.1., las cuales llevarán a la obtención del producto, desde su planificación y diseño hasta la planificación de la producción y sus procesos. Estas fases son las siguientes:

1. Planificación del producto.
2. Desarrollo del diseño.
3. Planificación del proceso.
4. Planificación de la producción.

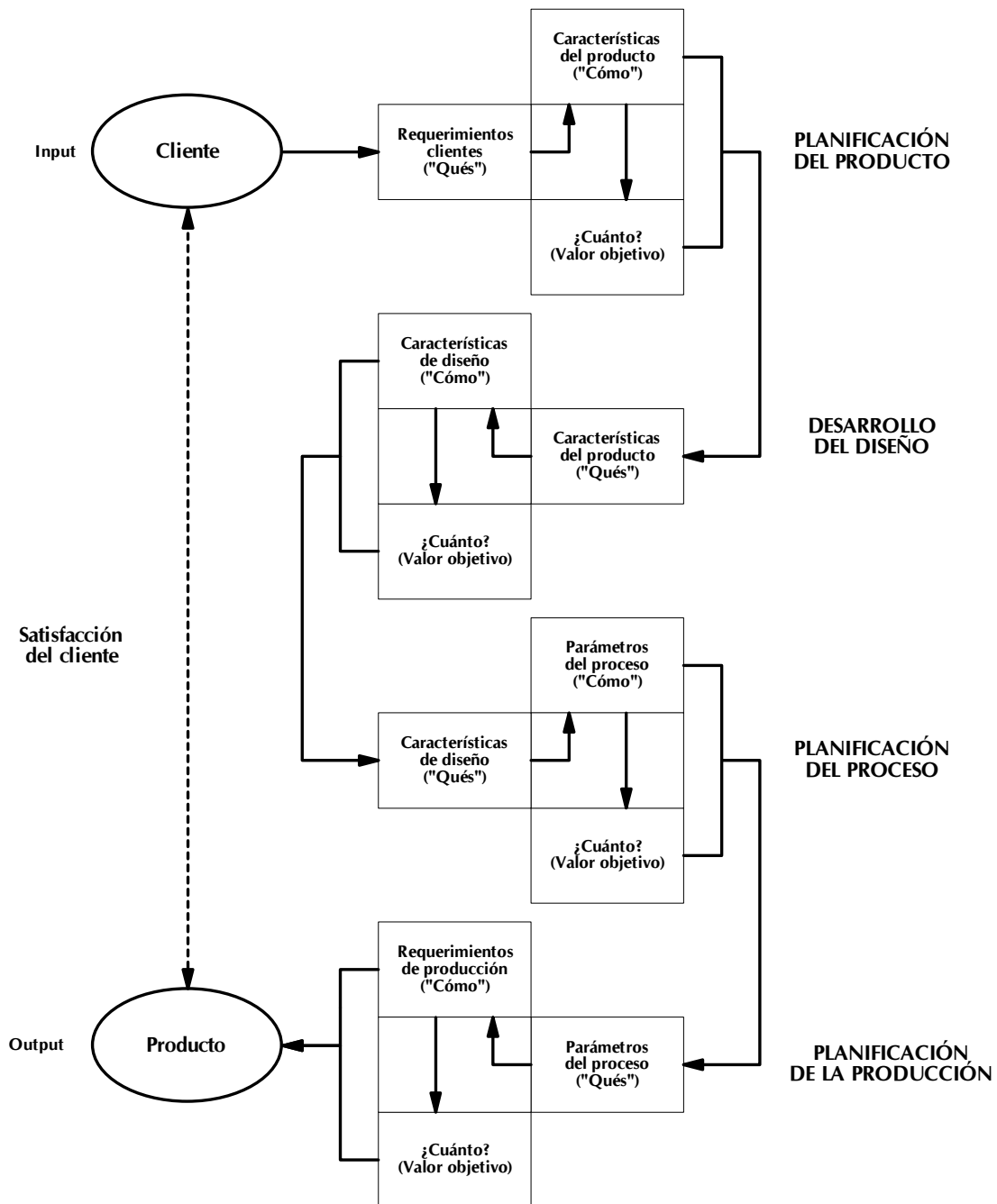


Figura 2.1.

### FASE 1: Planificación del producto o servicio

Para llevar a cabo la planificación del producto y su diseño se comienza por el conocimiento del cliente y del mercado, recogiendo las características y requerimientos de la demanda, siempre teniendo en cuenta la estrategia de la empresa y sus propios recursos; se trata, pues, de una etapa de definición del producto, pudiéndose dividir a su vez esta fase en otras tres etapas a abordar de forma sucesiva:

- a. Despliegue de la calidad demandada.
- b. Despliegue de las características o diseños alternativos para la calidad.
- c. Desarrollo del gráfico de calidad.

**a. Etapa de despliegue de la calidad demandada (voz del cliente)**

La operativa con el DFC empieza con la recogida, análisis y tratamiento de las expectativas y requerimientos del consumidor, pues una profunda y clara comprensión de las demandas del mismo y del mercado en general es la clave para el éxito del desarrollo de un nuevo producto.

De acuerdo con lo anterior, es preciso comenzar por identificar tanto a los clientes actuales como a los potenciales para los que se pretende desarrollar el producto. El resultado de esta operación debe materializarse en una lista que contenga los tipos de cliente y sus especificidades relacionadas con el producto que se quiere desarrollar, donde es posible que ante la diversidad de clientes sea preciso una jerarquización de los mismos, generalmente adoptando un criterio económico para ello.

A partir del conocimiento del cliente se podrá conocer sus demandas, sus requerimientos hacia el producto de la unidad económica, en definitiva, sus expectativas, las cuales se tendrá que satisfacer si se pretende tener éxito. La información conseguida de los consumidores respecto a las calidades demandadas deben analizarse sistemáticamente para que sea útil para el desarrollo del producto.

Debe determinarse de algún modo la importancia relativa de las diversas demandas de calidad que hacen los consumidores, convirtiendo la información en bruto de los clientes actuales o potenciales en información que pueda ser utilizada en una matriz de planificación, conocida con la denominación de "casa de la calidad", que facilite su traducción en características de calidad o satisfacción de los clientes.

Para ello es conveniente, una vez recogida toda la información bruta, es decir, con las propias palabras del cliente, convertirla en expresiones sencillas, sin perder el significado inicial, agruparlas en elementos de información afines entre sí y detallarlos cada vez más hasta un último nivel en el cual el elemento de información sea claro y preciso, aunque sea expresado en términos lingüísticos, pero representando lo más fiel posible a las expectativas del cliente. De esta forma, se podrá disponer de una lista detallada de elementos de información, que no son otra cosa que la voz del cliente.

El segundo paso a llevar a cabo será la jerarquización de estos elementos de información ponderando el valor de cada uno de ellos, basándose en la importancia que otorga el cliente a sus propios requerimientos, con lo que la empresa, al contar con recursos limitados, podrá concentrar los mayores esfuerzos en aquellas expectativas primordiales que demanda el cliente.

**b. Etapa de diseños alternativos o características de los productos (voz del ingeniero)**

En esta etapa se desplegarán las alternativas de diseño aplicables a los requerimientos de los consumidores o “qué”, para lo cual interesa utilizar un gráfico de despliegue de las mismas. Por ejemplo, en el DFC aplicado a un servicio de información turístico, un plano de una zona geográfica será un “diseño” alternativo, y su nivel de detalle (cantidad de poblaciones que contiene, distancias kilométricas especificadas, etc.) será una característica de calidad.

La forma como cada unidad económica analiza, describe e interpreta un conjunto dado de características de calidad es generalmente una función de la capacidad de ingeniería disponible. Por tanto, cuanto más familiar sea un producto para la compañía y conocida su tecnología, mejor se describirán las características de calidad.

El punto de partida será la lista de las demandas de calidad (los “qué”) obtenidas en la fase anterior, a las cuales se debe dar respuesta. El equipo debe saber qué hacer y, en esta fase, se debe decidir cómo hacerlo, es decir, se trata de un proceso de traducción o despliegue, en el cual se obtenga para cada “qué” inicial uno o más “cómo” operativos (maneables) y expresados en el lenguaje de ingeniería utilizado por la propia empresa. A su vez, estos “cómo” se pueden ir detallando cada vez más, esto es, pueden existir varios subniveles de especificación.

Por tanto, en esta fase se trata de relacionar los “qué” (la voz del cliente) con los “cómo” (la voz del ingeniero) que le puedan corresponder, de forma que se tendría una primera aproximación de las exigencias del producto (los “qué”) y la forma de satisfacerlos (los “cómo”); esta forma simple y directa de relacionar ambos puede resultar, sin embargo, demasiado confusa. De hecho, la multiplicidad y la interdependencia de los “cómo” con los “qué” hacen que el despliegue conduzca a una representación cada vez más compleja, cuya representación en forma de listas no parece ser la más adecuada para su mejor comprensión y tratamiento, lo cual da lugar a que se utilicen matrices, que consiguen dar una mayor claridad y optimizar los esfuerzos.

**c. Desarrollo del gráfico o “casa” de la calidad**

Este gráfico, tal como se muestra en la Figura 2.2. trata de ilustrar las relaciones antes citadas, esto es, entre la calidad demandada por el cliente y las características de calidad. En definitiva, se trata de una herramienta práctica y completa para relacionar los requerimientos del consumidor o “qué” con las alternativas de diseño previstas o



“cómo”; de aquí se obtendrá la medida de los “cuántos” que permitirá evaluar las relaciones entre ambos que expresa la “matriz de relaciones”, elemento central del gráfico de calidad.

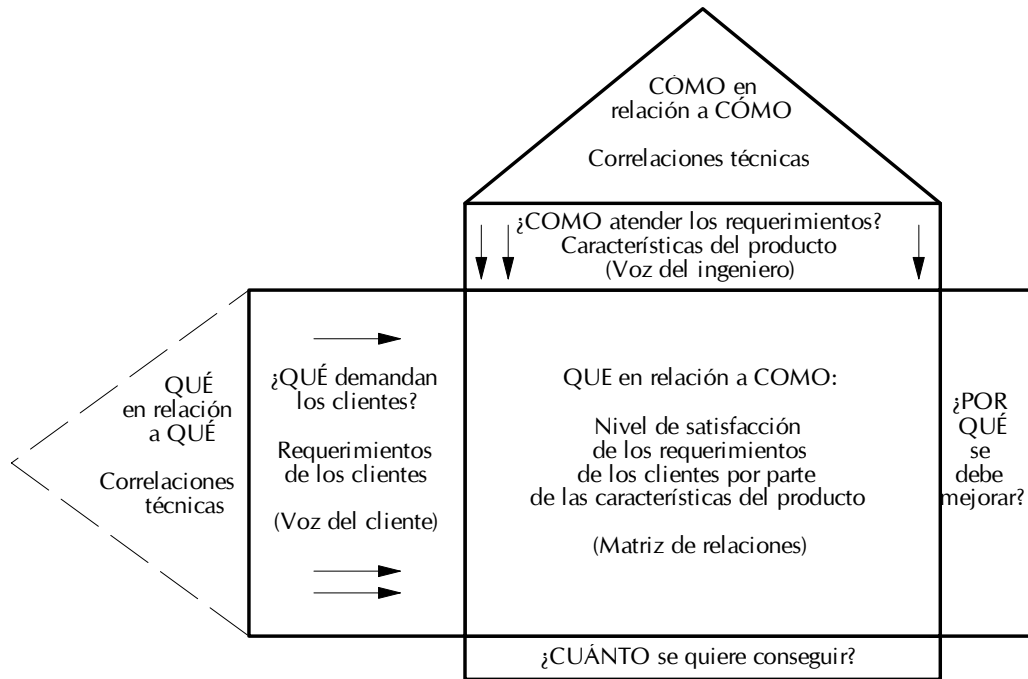


Figura 2.2.

La importancia de esta fase ha llevado a que el DFC se entienda como un mecanismo gráfico que facilita: (a) el análisis sistemático de las estructuras de las calidades demandadas por los clientes según sus propias palabras, (b) el conocimiento de las relaciones entre estas calidades demandadas y ciertas características de calidad, (c) la conversión de las demandas de los clientes en características de producto y (d) el desarrollo de una calidad de diseño.

### FASE 2: Desarrollo del diseño: despliegue de componentes o partes

En la fase de diseño detallado es importante clarificar las relaciones entre la calidad demandada por el producto final y las características de calidad necesarias para cada uno de los componentes. Este proceso parte de las características de calidad, sus especificaciones y objetivos, para convertirlos en especificaciones técnicas de los componentes del producto o servicio. Los “cómos” de la matriz de planificación de producto se convierten en los “qué” de la matriz de despliegue de partes. Estos “qué” se emplean para desarrollar y comparar los conceptos alternativos de diseño.

Una vez que se selecciona el mejor diseño, se estudian las partes que conforman el producto. Las características esenciales que permiten a cada parte cumplir su propósito se convierten en los “cómo” seleccionados de la matriz de planificación del producto se expresan más detalladamente y conforman los “qué” de la matriz de despliegue de partes.

A la lista de despliegue de partes se le añade una lista de requerimientos funcionales que son muy importantes para el diseño del producto, aunque no hayan sido identificados por los clientes. Los equipos también pueden agregar requerimientos del producto que deleiten al cliente con características que no esperan y que satisfagan necesidades no expresadas por ellos.

A este respecto, cabe poner de manifiesto que los miembros del equipo utilizan los requerimientos de diseño a medida que desarrollan los conceptos alternativos de diseño de producto. De hecho, y a menudo, en esta etapa se lleva a cabo un examen detallado (ingeniería inversa) de los productos de la competencia para ayudar a que el equipo genere más alternativas y mejores diseños y entonces se identifican las características esenciales que permiten que cada parte o ingrediente cumpla su propósito. Estas características –de cada parte del producto- se denominan características críticas de las partes y se transforman en los “cómo” de la matriz de despliegue de partes.

Por tanto, en esta etapa, el gráfico de calidad estará constituido, por un lado, por los “cómo” de la etapa anterior y, por otro, por las especificaciones técnicas de los componentes del producto de la empresa. De esta forma, se mantiene la fidelidad (herencia) a los requerimientos iniciales del cliente y adicionalmente se hace lo propio con la priorización de los “cómo”.

El objetivo del despliegue de componentes es clarificar las funciones de los componentes, sus características de calidad y sus especificaciones técnicas. Para ello, puede ser de interés tener en cuenta las reclamaciones que se hayan recogido referentes a cada componente, o bien del producto global (de productos actuales o similares), así como las cuestiones relacionadas con la seguridad y responsabilidad medio ambiental del producto y así no sólo se asegura que el producto sea robusto, sino que también se minimizan puntos críticos de diseño.

Por último, se concluye con la determinación de los parámetros de diseño del producto, quedando determinadas las características técnicas del producto y de todos sus componentes.

### **FASE 3: Planificación del proceso**

En esta fase, al objeto de llevar a cabo la planificación de los procesos operativos, las características críticas de partes seleccionadas conforman los “qué” de la matriz de planificación del proceso, esto es, los “qué” se transforman en un conjunto de parámetros críticos de proceso. Por tanto, el objetivo de esta fase es diseñar un proceso con la solidez suficiente para fabricar productos cuyas partes satisfagan las metas propuestas.

En esta etapa, que es transitoria entre el diseño del producto y sus componentes y la organización y planificación de la producción, recae todo el peso del diseño del proceso, ya que en esta fase se traducirán las características de los subsistemas de la etapa anterior a procedimientos y operaciones necesarios para la producción de dichos componentes y, por consiguiente, la del producto. En efecto, el mejor diseño se escoge después de comparar y analizar los diseños alternativos del proceso. Se identifican los elementos básicos del proceso y se utiliza un diagrama de flujo maestro (por ejemplo, IDEF) para ilustrar las relaciones entre los materiales que entran y los elementos básicos del proceso que permiten a los equipos de diseño identificar los parámetros de proceso que son críticos para cada operación.

Como característica común en la metodología DFC se usará también un gráfico de despliegue de funciones. En este caso, se parte de las características técnicas de los componentes para obtener procedimientos y operaciones asociadas a ellos.

### **FASE 4: Planificación de la producción**

En esta etapa, partiendo de los procedimientos y operaciones diseñados en la fase anterior, se obtendrán los medios y especificaciones adecuados a la producción, utilizando el mismo procedimiento de trasladar las características de diseño del último nivel de DFC (procesos) a entradas del correspondiente a la planificación de la producción.

Por tanto, en esta etapa última se llevará a cabo un análisis de todo el proceso, en el cual se incluirán las siguientes funciones:

1. Asegurar la conversión de los requerimientos transmitidos por el departamento de diseño de las fases anteriores en elementos de control del proceso de producción.
2. Determinar la capacidad de proceso requerida e implantarla.

3. Identificación de puntos críticos del proceso para controlarlos y marcarse como objetivo la política de cero errores.
4. Aseguramiento de la calidad de producto y proceso.

Los parámetros de proceso seleccionados en la matriz anterior se convierten en los “qué” de la matriz de planificación de producción y luego se evalúan la dificultad de controlar cada “qué”, la frecuencia y severidad de los problemas esperados y la capacidad para detectarlos. A continuación se examinan los requerimientos de la planificación y la información de operación correspondientes a cada “qué”, como los diagramas de control de calidad y las exigencias de entrenamiento, que se convierten en instrucciones para la planta de producción. De esta forma, la lista de requerimientos del cliente se ha convertido de modo gradual en diseño de producto, en diseño de proceso y en un conjunto de instrucciones para la planta de producción.

En resumen, la estructura descrita del DFC presenta como características básicas las tres siguientes: jerarquía, priorización y herencia.

Dentro del DFC el proyecto de estudio está estructurado como una jerarquía, seguida por un proceso de priorización. Las cuatro matrices que componen el DFC forman una estructura jerarquizada, desde la primera que trata de detectar cuales son las características que maximizan la satisfacción del cliente hasta la última que afronta el problema de determinar los métodos de control de gestión de la calidad que deben ser utilizados para asegurar que tales características han sido atendidas en un determinado proceso. De hecho, las matrices pasan de más general y menos controlable por parte de la empresa hasta más específica y controlable.

Adicionalmente, entre las matrices existe un proceso de priorización sin el cual no sería posible concluir las cuatro matrices, pues en la primera matriz se seleccionan las características del producto más relevantes, en la segunda son las características de los componentes y así sucesivamente hasta la cuarta matriz.

Finalmente, las características priorizadas en una determinada matriz heredan de la matriz precedente los pesos relativos, garantizándose así la propagación de la voz del cliente.

De acuerdo con lo anterior, y a los efectos de la presente Memoria, se dará mayor énfasis en la primera matriz, ya que uno de los propósitos del mismo es plantear un modelo de DFC como una herramienta de toma de decisiones, y es precisamente en este contexto donde la “casa de la calidad” presenta la estructura más compleja, pudiéndose extender al resto de las matrices del modelo de DFC por simple analogía.

### 2.2.2. La Matriz de Planificación del producto: la Casa de la Calidad

La matriz de planificación del producto, también conocida con la denominación de la casa de la calidad, presenta gran trascendencia en el ámbito del DNP, dado que en la misma se plantean cuestiones como las siguientes:

¿Cómo interpretar las necesidades de los consumidores expresadas en lenguaje natural?.

¿Cómo seleccionar aquellas que maximizan la satisfacción del consumidor?.

¿Cómo priorizar alguno de los requisitos conciliando los diferentes criterios?.

¿En cuáles de las características de calidad del producto deben concentrarse los esfuerzos de ingeniería y los recursos disponibles para el desarrollo?.

¿Según la percepción del cliente, el producto de la empresa es mejor o peor que los productos concurrentes?.

¿Cómo establecer metas cuantitativas para las características de calidad?.

El objetivo de esta matriz es detallar los requisitos del consumidor, priorizando aquellos que maximicen la satisfacción del consumidor, y relacionar estos requisitos con las características de calidad del producto que los traduzcan. Por tanto, en esta matriz se establecerán las metas para las características o alternativas de diseño del producto y las estrategias de desarrollo que señalarán los demás pasos del método propugnado por el DFC.

Al objeto de facilitar la descripción de los componentes y el funcionamiento de la matriz de planificación del producto, se realiza un análisis de los mismos en base a la representación recogida en la Figura 2.3., donde se indican con números las partes de dicha matriz conforme van apareciendo en la metodología del DFC.

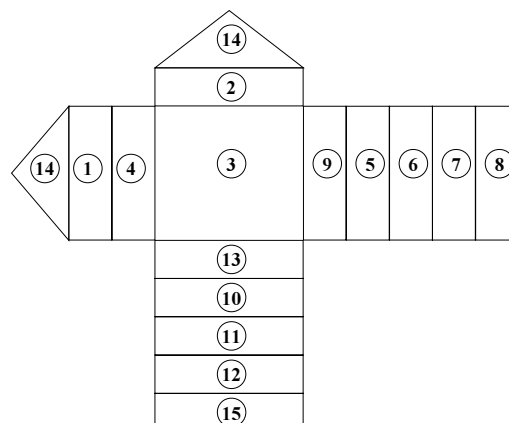


Figura 2.3.

Las consideraciones anteriores sobre el modelo de DFC se pueden analizar desde una representación matemática del mismo, como se refleja a continuación:

$$\begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1n} \\ & \gamma_{22} & \dots & \cdot \\ & & & \gamma_{jk} \\ & & \dots & \cdot \\ & & & \gamma_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_j & \dots & x_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_i \\ \cdot \\ \cdot \\ y_m \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix} g_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ g_i \\ \cdot \\ \cdot \\ g_m \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & r_{ij} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r_{m1} & r_{m2} & \dots & r_{mn} \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & b_{il} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mp} \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix} m_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ m_i \\ \cdot \\ \cdot \\ m_m \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix} t_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ t_i \\ \cdot \\ \cdot \\ t_m \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix} v_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ v_i \\ \cdot \\ \cdot \\ v_m \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix} w_1^{\%} \\ \cdot \\ \cdot \\ w_i^{\%} \\ \cdot \\ \cdot \\ w_m^{\%} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & b_{lj} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{p1} & b_{p2} & \dots & b_{pn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} w_1^{\%} & \dots & w_j^{\%} & \dots & w_n^{\%} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} m_1 & \dots & m_j & \dots & m_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c_1 & \dots & c_j & \dots & c_n \end{bmatrix}$$

La representación matemática anterior, así como el desarrollo teórico que se expone a continuación, se ha realizado siguiendo la simbología que se recoge en el Cuadro 2.1. con la consideración del significado aplicado a cada uno de los símbolos que representan cada variable.

Símbolo	Significado
$Y_i$	Requisitos del consumidor, para $i = 1$ a $m$
$x_j$	Características de la calidad del producto, para $j = 1$ a $n$
$r_{ij}$	Relación del requisito del consumidor $i$ con la característica $j$ de la Matriz de Relaciones
$\gamma_{jk}$	Correlación entre las características $j$ y $k$ de la Matriz de Correlación
$g_i$	Grado de importancia del requisito del consumidor $i$
$b_{il}$	Evaluación competitiva del requisito del consumidor $i$ para el producto $l$ , para $l = 1$ a $p$ , de la Matriz de Benchmarking Externo
$bl_j$	Evaluación competitiva de la característica $j$ del producto $l$ , para $l = 1$ a $p$ , de la Matriz de Benchmarking Interno
$m_i$	Objetivo o meta para el requisito del consumidor $i$
$t_i$	Tasa de mejora planeada para el requisito del consumidor $i$
$v_i$	Punto de venta del requisito del consumidor $i$
$w_i$	Peso absoluto del requisito del consumidor $i$
$w_i^{\%}$	Peso relativo del requisito del consumidor $i$
$w_j$	Peso absoluto de la característica $j$
$w_j^{\%}$	Peso relativo de la característica $j$
$m_j$	Meta para la característica $j$
$c_j$	Factor de coste para la característica $j$
$A_j$	Acciones a desplegar para la característica $j$

**Cuadro 2.1.**

### ① Los requerimientos de los consumidores (RC<sub>i</sub> o los “Qué”)

La primera etapa del método consiste en captar la voz del consumidor, esto es, los atributos que influyen en la percepción del consumidor para la calidad del producto. De hecho, la planificación del producto empieza en el cliente. ¿Qué influye para que el cliente desee o no un producto?, ¿qué tan bien satisfacen los productos corrientes de las empresas los requerimientos del cliente?, ¿cuál es la importancia de cada requerimiento?, ¿qué tan bien satisfacen los productos de los competidores las necesidades de los clientes?.

Para ayudar a que los equipos de diseño resuelvan estos interrogantes pueden emplearse una variedad de técnicas de investigación de mercado, como encuestas a los clientes, grupos de enfoque y clínicas a los clientes, empleando la retroalimentación del cliente para elaborar una lista de sus requerimientos; es decir, una lista de los “qués” deseados. En este sentido, conviene tener en cuenta a la hora de su enumeración, la necesidad de utilizar la misma terminología que el propio cliente con el objeto de evitar interpretaciones erróneas. Para lo cual es preciso, en primer término, organizar y agrupar toda la información aportada por el cliente, desde niveles más genéricos a otros más detallados. Posteriormente, la información del último nivel deberá ponderarse su importancia, previamente a su vinculación con los “cómo”, utilizando habitualmente la escala de LIKERT (valores de 1 a 5) o en porcentajes.

Este paso es decisivo para el DFC, una vez que el resto de los estadios del método son una traducción en lenguaje técnico de las informaciones obtenidas del consumidor expresadas en lenguaje natural.

## ② **Las características o alternativas de diseño del producto/servicio (CQ<sub>i</sub> o los “Cómo”)**

Eventualmente, los requerimientos de los clientes pueden transformarse en especificaciones detalladas de diseño. El primer paso para conseguirlo es convertir los “qué” en “cómo”, o en características medibles del producto. Se trata, pues, de los requerimientos de diseño del producto o servicio para poder satisfacer las necesidades expuestas en los “qué”.

El desafío en este paso radica en traducir la voz del consumidor en lenguaje técnico, para lo cual se deben contemplar aquellas características que están directamente relacionadas con los requisitos del consumidor anteriormente establecidos. Resulta de gran importancia que todas las características que figuren en esta sección tengan alguna incidencia real, como mínimo, sobre alguna de las necesidades de los clientes, de forma que éstas queden cubiertas suficientemente por alguna característica.

## ③ **La matriz de relaciones (R<sub>ij</sub>)**

Esta matriz indica la relación entre requerimientos del cliente y requerimientos amplios de diseño. Cuando los “qué”, los “cómo” y las relaciones se combinan en una matriz, las personas que trabajan en diversas áreas de la empresa pueden leerlos con facilidad y entenderlos, aunque tengan experiencias diferentes.



Los “qué” se colocan en el lado izquierdo de la matriz, los “cómo” en la parte superior, y la fuerza de la relación entre cada qué y cada “cómo” se suele contemplar en términos de relación Débil (1 punto), Media (3 puntos) y Fuerte (9 puntos). Si no existe relación, el espacio se deja en blanco, estableciendo entonces que el requerimiento deseado por los clientes, correspondiente a dicha línea, no se habrá cubierto con ninguna característica del producto o servicio (situación que se debería corregir). De igual forma, si se encuentra alguna columna vacía, indicará que la característica del producto o servicio en cuestión no influye en modo alguno sobre la satisfacción de ninguna de las demandas de los clientes y se puede eliminar.

Determinar las relaciones entre los “qué” y los “cómo” es muy importante. Estas relaciones son muy complejas, pues cada “cómo” puede afectar a más de un requerimiento del cliente, y puede darse el caso de que el “cómo” vinculado a un “qué” específico puede tener un impacto adverso sobre otro “qué”. Así, por ejemplo, en el caso de una empresa dedicada a la fabricación de galletas rellenas de chocolate, la cantidad de chocolate por pulgada cúbica puede afectar a dos de los requerimientos del cliente: “lotes de relleno de chocolate” y “sabor dulce”. Sin embargo, la cantidad de relleno de chocolate por pulgada cúbica puede tener un impacto adverso sobre un posible requerimiento del cliente del tipo: “bajo en calorías”. Como estas relaciones son tan complejas, el producto puede fracasar en el mercado si no se identifica y comprende la interacción qué-cómo.

#### ④ **Grado de importancia para el cliente (g<sub>i</sub>)**

Denota la trascendencia que el cliente otorga a cada una de las necesidades o deseos que requiere. Se suele establecer un baremo numérico del 1 al 5, de menor a mayor importancia respectivamente. Este concepto es uno de los más importantes para el desarrollo del DFC, ya que define cuáles son las expectativas especialmente prioritarias para conseguir una satisfacción máxima del cliente.

#### ⑤ ⑥ y ⑦ **Evaluación competitiva o benchmarking externo (b<sub>i</sub>; m<sub>i</sub>; t<sub>i</sub>)**

Es una representación gráfica de la percepción que el consumidor o mercado tiene de cómo quedan cubiertas cada una de las necesidades, esto es, aquellos “qué” del producto o servicio por parte de la propia empresa, como por parte de la competencia. Se representa generalmente de forma gráfica mediante una escala de valores numéricos, en la que los clientes posicionan los productos de la empresa respecto a los

de la competencia. Así, se puede apreciar la situación de la empresa desde la óptica de los clientes.

El análisis competitivo externo comprende los tres aspectos siguientes para cada requerimiento: (a) la evaluación comparativa de los principales productos concurrentes que existen en el mercado, (b) la meta u objetivo para el requisito de los consumidores y (c) la tasa de mejora.

La evaluación comparativa del producto con sus principales concurrentes se realiza atendiendo al grado de importancia o satisfacción de un determinado requerimiento, en la escala de LIKERT, con lo que la tasa de mejora se obtiene entonces conforme a la ecuación siguiente:

$$t_i = \frac{m_i}{b_i}$$

donde:

- $t_i$       tasa de mejora del  $RC_i$ , para  $i = 1$  a  $m$
- $m_i$       meta para el  $RC_i$
- $b_i$       valor actual del  $RC_i$  del producto de la empresa

Estas matrices permiten distinguir los puntos fuertes y débiles y será de gran ayuda a la hora de establecer otras secciones y tomar las decisiones acertadas en los aspectos a mejorar con mayor prioridad. Constituye una visión externa elaborada por los clientes.

A su vez, la matriz de la tasa de mejora junto con la relativa a la de punto de ventas y el grado de importancia de los requerimientos correspondientes en la matriz de relaciones, todas ellas obtenidas con información procedente de los clientes, constituyen la base informativa que permitirá descubrir aspectos como:

1. Oportunidades de venta y promoción, en aquellas demandas con un índice de importancia alto y una buena posición delante de la competencia.
2. Requerimientos que pueden proporcionar ventaja competitiva, con un alto índice de importancia para los clientes, y que están mal considerados en la valoración competitiva tanto para la competencia como en la propia empresa. Potenciando estos requisitos se obtendrá una cómoda ventaja por delante de la competencia.

**8 Puntos de venta ( $V_i$ )**

Una consecuencia directa de la evaluación competitiva de las necesidades del producto o servicio es que permitirá descubrir aquellos deseos del cliente en los que se dispone de una ventaja considerable respecto a la competencia. Estas ventajas competitivas se aprovecharán para establecer los puntos fuertes en la venta del producto o servicio, potenciándolos mediante campañas de promoción, campañas publicitarias, etc. Por tanto, los puntos de venta son los requisitos enfatizados en algún segmento particular a tenor de la estrategia de la empresa. En general, se utiliza una escala 1.5 para los puntos fuertes de venta, 1.2 para el resto de los puntos de venta y 1.0 para los items que no son puntos de venta.

**9 Impacto de los requerimientos del cliente ( $W_i$ )**

La síntesis de los datos recolectados del consumidor se lleva a cabo a través de los pesos absoluto y relativo de cada requerimiento, conforme a las ecuaciones siguientes:

$$w_i = g_i \cdot r_{ij} \cdot t_i \cdot v_i$$

donde:

- $w_i$  peso absoluto del RC<sub>i</sub>
  - $g_i$  grado de importancia del RC<sub>i</sub>
  - $r_{ij}$  relación del RC<sub>i</sub> con la CQ<sub>j</sub>
  - $t_i$  tasa de mejora para el RC<sub>i</sub>
  - $v_i$  valor del punto de venta para el RC<sub>i</sub>
- $i = 1$  a  $m$

$$w_i^{\%} = w_i \cdot \frac{100}{\sum_{i=1}^m w_i}$$

donde:

- $w_i^{\%}$  peso relativo del RC<sub>i</sub>

**10 Evaluación competitiva técnica o benchmarking interno (B)**

Se trata, nuevamente, de una representación gráfica que permite evaluar los requerimientos de diseño o características del producto o servicio. De forma similar al apartado anterior, se comparan en una escala numérica cada uno de los requerimientos de diseño con los de los competidores, con la salvedad de que esta vez es la propia empresa la que evalúa y realiza este posicionamiento, de acuerdo con los estudios realizados sobre la competencia. Se trata de una visión interna desde el punto de vista de la propia compañía.

### 11) **Objetivos (valores nominales) de las características de calidad ( $M_i$ )**

Para cada “cómo” debe establecerse un valor objetivo preliminar mensurable que guíe el diseño del producto y permita que los diseños se evalúen con objetividad. En este aspecto, los resultados del benchmarking competitivo son muy útiles. La evaluación de ingeniería de los productos de la competencia y los propios productos de la empresa permiten que ésta pueda comparar su desempeño con el de sus competidores y establecer objetivos que reflejen un desempeño de clase mundial.

En este sentido, será preciso realizar una medición de manera objetiva de las características que definen alternativas de diseño a fin de poder establecer unos valores como objetivos a cumplir. Se trata, por tanto, de una operación esencial para el gráfico de calidad y uno de los outputs importantes del DFC: la determinación de los “cuántos” sobre la base de la importancia técnica, tendrá una necesaria comparación con los objetivos fijados, al objeto de poder evaluar la propia validez.

### 12) **Coste o dificultad técnica ( $C_i$ )**

Mide el grado de dificultad técnica en el cumplimiento de los objetivos definidos sobre cada uno de los requerimientos de diseño del producto o servicio. Es usual utilizar una tabla numérica que identifique el nivel de dificultad que abarca desde el 1 (mínima dificultad) hasta el 5 (máxima dificultad).

### 13) **Importancia técnica de las características ( $W_i$ )**

Consiste en una ponderación de la importancia relativa de cada característica (cómo) según la influencia que tenga sobre todas las necesidades de los clientes. En efecto, con base a la matriz de relaciones y el peso relativo de los requisitos del consumidor, es posible establecer los pesos absoluto y relativo de las características de la calidad, conforme a las ecuaciones siguientes:

$$w_j = g_i \cdot r_{ij}$$

donde:

$w_j$  peso absoluto de la  $CQ_j$

$g_i$  grado de importancia del  $CQ_j$

$r_{ij}$  relación de la  $CQ_j$  con el  $RC_i$

para  $i = 1$  a  $m$ ; y para  $j = 1$  a  $n$

$$w_j^{\%} = w_j \cdot \frac{100}{\sum_{j=1}^m w_j}$$

donde:

$w_j^{\%}$  peso relativo de la CQ<sub>i</sub>

Dicha importancia se puede evaluar siguiendo el proceso que se expone a continuación:

1. En primer término, cabe otorgar unos pesos numéricos a los símbolos que se utilizan en la matriz de relaciones. En el caso de tener una casilla en blanco el valor es nulo. Son muy corrientes los pesos de los tres símbolos ya definidos para la matriz de relaciones: relación Débil (1 punto), relación Media (3 puntos) y relación Fuerte (9 puntos).
2. A continuación, se multiplica, para cada uno de los “qué”, el peso del símbolo que le relaciona con el “cómo”, por el grado o índice de importancia que el cliente otorga al “qué”.
3. Se realiza el sumatorio de todos los productos anteriores realizados para el “cómo” correspondiente y su total equivale a la importancia técnica de ese “cómo” en particular.
4. Este proceso se repite de igual forma para cada requerimiento de diseño o “cómo”.

La importancia técnica (los “cuántos”) aporta una visión de la importancia global que poseen cada una de las características del producto o servicio sobre el conjunto de las demandas de los clientes, es decir, sobre la voz del cliente, esto es, facilita una directriz para la selección de las características a desplegar en las subsiguientes matrices del DFC. Las características seleccionadas serán aquellas que maximizan la satisfacción del consumidor, por lo que serán aquellas donde se deberán concentrar los esfuerzos de la ingeniería de la empresa.

#### **14** Matriz de correlaciones o tejado de la casa de la calidad ( $\gamma_{jk}$ )

Está relacionada directamente con las características de diseño o “cómos”. Se emplea gráficamente una tabla triangular que relaciona todos los “cómo”, estableciendo la posible correlación existente entre ellos, esto es, en la parte superior de la matriz

debe añadirse una matriz de correlación que muestre la relación entre cada par de “cómo”, mostrando las dependencias positivas y negativas mediante una simbología determinada, como podría ser la siguiente:

Correlación Negativa	×
Correlación Positiva	○
Correlación Fuertemente Absoluta	●

Si ocurre que una característica del producto o servicio tiene una dificultad técnica o económica importante, puede ser aconsejable buscar alguna otra característica que tenga menor dificultad y cuyo cumplimiento o desarrollo tenga un efecto positivo indirecto en el cumplimiento de la característica que, en un principio, se deseaba desarrollar. La forma de apreciar estas dependencias indirectas se realiza a través de esta matriz de correlaciones. Y aquí radica la importancia.

Así, por ejemplo, si existe una fuerte relación positiva entre dos o más “cómo”, es posible eliminar uno de ellos, mientras que si la relación es negativa entre dos o más “cómo” indica que los requerimientos de diseño no son compatibles, de ahí que sean necesarios esfuerzos de innovación para resolver estas incompatibilidades (que con frecuencia generan progresos importantes y nuevas ventajas competitivas). Sin embargo, si no se resuelven las incompatibilidades, quizá sea necesario introducir cambios.

Por otro lado, conviene hacer notar que de forma similar cabe considerar la existencia de correlaciones técnicas entre los requerimientos del cliente, lo que daría lugar a una matriz numerada como 14’.

## 15 Características a desplegar (A<sub>i</sub>)

Una vez que la matriz de planificación esté completa se seleccionan, de entre todas, aquellas características del producto o servicio que pasarán a ser desplegadas en las fases siguientes a la matriz de planificación, basándose en el análisis de las diversas secciones: matriz de planificación, matriz de relaciones, índices de importancia, análisis competitivos, dificultades técnicas, etc.

Debido a la imposibilidad de centrarse en todas las características, en principio es preferible centrar los esfuerzos en aquellas en las que la empresa se encuentre en desventaja respecto a la competencia y, a su vez, sean de máximo interés para los clientes y provoque en ellos la máxima satisfacción. De esta forma, es posible enfocar el estudio en aquello que realmente aporte valor al producto o servicio de la empresa y trasladarlo a las sucesivas fases para asegurarse que las principales demandas de los clientes sean realmente tenidas en cuenta.

El diagrama de flujo de la Figura 2.4. permite visualizar el proceso de desarrollo y establecer el orden de realización de las diferentes tareas y secciones para completar la elaboración de la primera fase en el desarrollo de nuevos productos (DNP) a tenor de la metodología sugerida por el modelo de despliegue de la función de calidad.

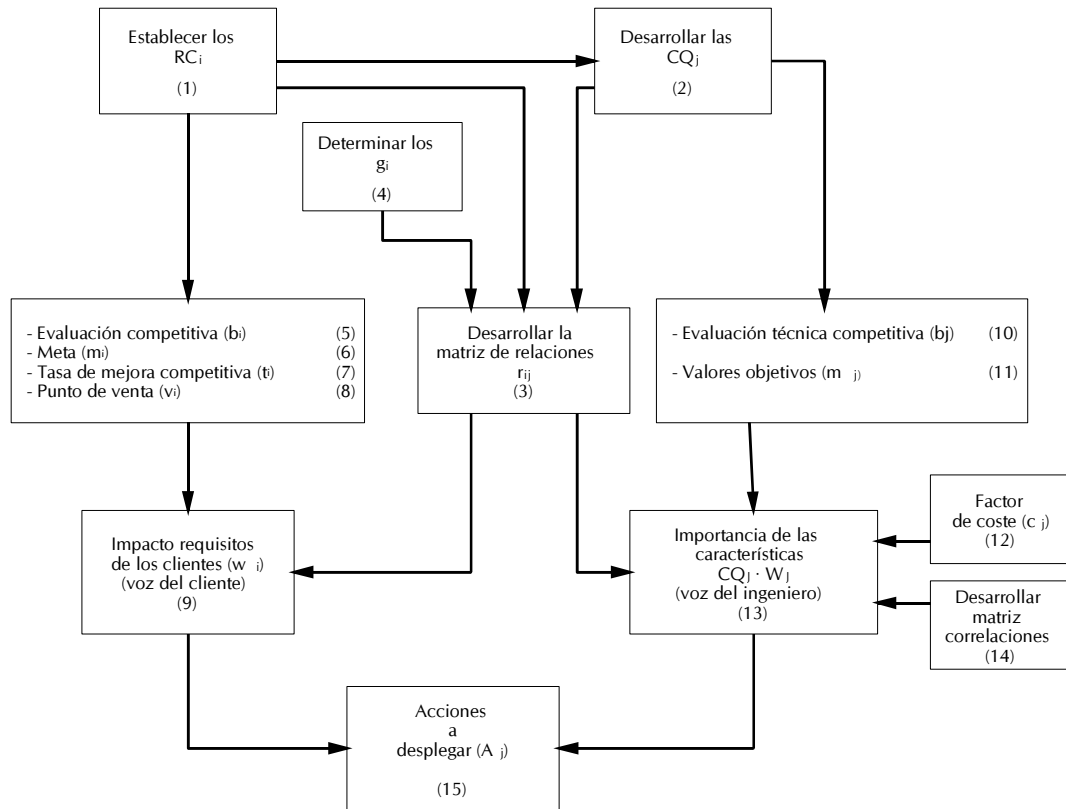


Figura 2.4.

### 2.2.3. Evaluación y diagnóstico del modelo de Despliegue de la Función de Calidad (DFC) para el Desarrollo de Nuevos Productos (DNP)

La evaluación de la primera fase del desarrollo de nuevos productos (DNP) a través de la matriz de relaciones del modelo de despliegue de la función de calidad (DFC) permite asumir un primer objetivo muy importante: jerarquizar las alternativas de diseño (“cómo”) a partir de los pesos de los requerimientos de los consumidores (“qués”).

Sin embargo, completar una matriz de relaciones no siempre constituye una operación fácil, muy al contrario, se trata de una operación compleja; si bien es relativamente fácil identificar los “cómo” relativos a un “qué”, el problema radica en saber el grado de relación con el mismo. Muy a menudo este grado de relación se basa tanto en la experiencia como en la intuición.

A este respecto, en los epígrafes anteriores quedó patente que el DFC es un mecanismo sencillo, exhaustivo y potente para tener en cuenta todas las expectativas del cliente, asegurando que no se dediquen demasiados esfuerzos a aquellas características que interesan poco o nada a los clientes y así garantizar que el personal trabaje con problemas reales. Al objeto de poder jerarquizar los “cómo” (voz del ingeniero) se precisa distinguir entre los distintos niveles de relación y su ponderación, con lo que no se pierde vista la jerarquización de los “qué” (voz del cliente), respetándose de esta forma las expectativas de los clientes y favoreciendo la estrategia de la empresa.

Por otro lado, conviene poner de manifiesto que los distintos “cómo” son elementos de un mismo sistema, por lo cual es factible que existan múltiples relaciones entre ellos, siendo el conocimiento del grado de estas relaciones de gran utilidad, para lo que se construye la matriz de correlación o “tejado” del mismo. En efecto, la existencia de una correlación positiva entre dos “cómo” puede significar una redundancia; basta con llevar a cabo uno de los mismos para que se cumplan ambos, es decir que al actuar sobre uno de ellos automáticamente se actúa sobre el otro, por lo que es posible evitar el desdoblamiento de esfuerzos.

El mayor inconveniente se encuentra cuando no se pueden resolver independientemente las dos características, lo que obliga a considerar ambas como un único conjunto y a buscar un punto óptimo en el sistema. Por otra parte, la existencia de una correlación negativa entre dos características significa una incompatibilidad entre ambas, obligando a encontrar una solución de compromiso.

El análisis de esta matriz de correlaciones permitirá identificar redundancias y puntos conflictivos donde hay que buscar un compromiso adecuado, que concierne a varias funciones de la empresa, exigiendo una fuerte colaboración y trabajo en equipo. También sirve como instrumento de verificación y mejora, es decir, este análisis permite observar que las relaciones entre los “qué” y los “cómo” son las adecuadas o bien que puede existir algún error.

Por último, cabe poner de manifiesto los aspectos a destacar respecto de las evaluaciones competitiva y la competitiva técnica, que son fruto de la comparación del producto de la empresa con los productos de la competencia.

El DFC permite realizar esta confrontación de manera sencilla y eficaz: la primera se efectúa sobre las demandas de los clientes (los “qué”), mientras que la segunda se realiza sobre las especificaciones funcionales y objetivas (los “cuántos”), es decir, las funciones técnicas. Esta comparación permite a la empresa situar su producto, característica a característica, respecto al resto de los productos de la competencia, considerando los objetivos fijados. De esta forma, la empresa puede tomar conciencia de



cuáles son sus puntos débiles y fuertes y adoptar entonces la adecuada estrategia para el plan de nuevos productos.

De hecho, en el desarrollo de nuevos productos se precisa disponer de la información relativa a las diversas demandas de calidad realizadas por los clientes, que junto a los datos que se incluyen a través del gráfico de calidad permitirá establecer la estrategia a desarrollar. Para lo cual, convendría realizar un análisis detallado de los requerimientos del producto que tienen mayor peso específico para el cliente y cómo la empresa está posicionada en estos requerimientos respecto a la competencia.

La medición del impacto de los requerimientos de los clientes (la voz del cliente) es una herramienta de gestión esencial porque se puede utilizar para realizar un seguimiento de la ejecución empresarial en el tiempo, benchmarking respecto a los competidores, diagnósticos sobre iniciativas en calidad, y para dirigir la retención del cliente construyendo una base de clientes leales (RYAN, BUZAS y RAMASWAMY, 1995), así como para facilitar la planificación de la estrategia integral de la empresa, lo cual puede promover la estabilidad económica de la misma (FORNELL, 1995).

Por tanto, parece conveniente desarrollar herramientas de análisis que, de forma conjunta con otras técnicas y herramientas, faciliten la gestión estratégica de la relación con los clientes de la empresa, si bien previamente será preciso delimitar el propio concepto de satisfacción, pues el otro gran problema a la hora de comparar las conclusiones y utilidades de los diferentes estudios es la diversidad de enfoques existentes sobre este fenómeno en la literatura referente al comportamiento del consumidor.

Tal situación no resulta extraña pues constituye un fiel reflejo de las características del comportamiento del consumidor (heterogeneidad de consumidores, diversidad de decisiones de consumo, distintos contextos de consumo y compra, conceptos multidisciplinarios). No obstante, y a pesar de haber sido reflejada de múltiples formas por cada una de las teorías existentes, parece que la conceptualización tradicionalmente más extendida es aquella que la considera como un "juicio posterior a una selección específica de compra" (DAY, 1984) o "grado de conformidad o disconformidad generado una vez acabado el proceso de compra" (CÁMARA, 1995).

En todo caso, parece evidente que la modelización de la satisfacción depende del concepto de satisfacción que se admita como punto de partida. De ahí que en este apartado se tomará en consideración el punto de vista de autores como BERNÉ (1997) o SPRENG, MACKENZIE y OLSHAVSKY (1996), quienes consideran a la satisfacción en sí misma como una respuesta emocional al juicio de disparidad entre el resultado global de un producto o servicio y el estándar normativo de comparación.

De esta forma, cabría plantear la satisfacción y la insatisfacción como un único constructo de respuesta afectiva, procedente del proceso subjetivo de revisión agregada de una experiencia de consumo.

En este sentido, y de acuerdo con SINGH (1988), los dos grandes grupos de consecuencias del fenómeno de la satisfacción son la lealtad y los comportamientos de queja, a saber: los comportamientos de queja del consumidor son el conjunto de respuestas (de comportamiento o no) provocadas por la insatisfacción con la experiencia de compra, mientras que la lealtad es una respuesta de comportamiento de compra, no aleatoria, expresada a lo largo del tiempo por una unidad de decisión, respecto a una o varias marcas alternativas de un conjunto de tales marcas, y que es función de un proceso psicológico de toma de decisiones, resultante en un compromiso con la marca elegida (JACOBY Y KYNER, 1973). Dicha lealtad se diferencia de la compra por inercia en que esta última no es resultado de un proceso psicológico.

Sin embargo, existen diversos estudios empíricos en los que esa relación entre la satisfacción y sus efectos no es tan perfecta como se esperaba (JONES y SASSER, 1995). Así, por ejemplo, cabría plantearse por qué consumidores que se consideran satisfechos no muestran ningún comportamiento de lealtad, lo que ratifica la existencia de otros factores que pueden incidir en la explicación de las relaciones de la satisfacción con sus consecuencias, como pueden ser los costes de cambio de proveedor, si bien, es posible también considerar que una razón importante de la desviación de los resultados empíricos respecto a las relaciones teóricas se derive de la existencia de distintos tipos de satisfacción/insatisfacción, surgiendo entonces la consideración de la existencia dos tipos de satisfacción: latente y manifiesta (BLOEMER y KASPER, 1995). Así se explican que haya consumidores satisfechos leales (satisfacción manifiesta) y no leales (satisfacción latente).

Aunque en la literatura se pueden encontrar diversas definiciones conceptuales y operativas de la satisfacción, la mayoría de ellas parten de la noción de comparación, esto es, son las propias comparaciones el objeto de estudio; pues la satisfacción varía, entre otras cosas, con las condiciones bajo las cuales se realizan esas valoraciones o comparaciones.

No obstante, los clientes/consumidores pueden evaluar tales experiencias de distintas formas y con diferentes métodos. Si el cliente/consumidor no conoce el producto, ni tiene experiencias alternativas que le puedan servir de punto de referencia, ni está motivado ni es capaz de comparar las diferencias entre alternativas y resultados, será muy complicada la elaboración de una evaluación. Cuando el cliente/consumidor tiene la capacidad y la motivación para comparar resultados y expectativas, es más consciente del resultado de su evaluación y de su nivel de satisfacción, mientras que si, por falta de capacidad y/o motivación, es difícil o imposible realizar una comparación, el consumidor puede no ser muy consciente de sus niveles de satisfacción.

Por tanto, una investigación sobre comportamientos de los consumidores debería permitir medir tal satisfacción, a partir de la distinción básica entre una expresión de algo que está solamente latente en el presente frente a una expresión de una satisfacción manifiesta actualmente experimentada, a saber:

Por un lado, la satisfacción y/o insatisfacción MANIFIESTAS son una respuesta afectiva, procedente del proceso subjetivo y explícito de revisión agregado de una experiencia de consumo. En este caso el consumidor tiene la capacidad y la motivación necesarias para realizar la valoración de su experiencia de consumo. Se trata, por tanto, del resultado de una evaluación explícita y elaborada de cuyo resultado el consumidor es completamente consciente, esto es, se encuentran claramente ligadas al comportamiento de lealtad y a los comportamientos de queja, respectivamente.

Por otro lado, la satisfacción y/o insatisfacción LATENTES son una respuesta afectiva, procedente del proceso subjetivo e implícito de revisión agregado de una experiencia de consumo, es decir, son el resultado de una evaluación implícita y no elaborada. Al consumidor le falta motivación y/o capacidad y no está completamente consciente sobre su nivel de satisfacción, y por ello no tiene por qué relacionarse inequívocamente tal satisfacción con la lealtad (más bien lo hará con la recompra por inercia), ni tampoco debería vincularse con los comportamientos de queja más severos.

Genéricamente, los individuos motivados y capaces de comparar presentan estructuras de satisfacción manifiesta; mientras los que no quieren y/o no pueden evaluar la experiencia de consumo presentan estructuras de satisfacción latentes.

El significado de los resultados de tales comparaciones también puede ser diferente. Los clientes con estructuras manifiestas de respuesta son aquellos que tienen una alta relevancia con el producto o servicio, han realizado procesos detallados de evaluación, mostrando las relaciones más fuertes y consistentes con las consecuencias tanto de la satisfacción (fidelidad) como de la insatisfacción (quejas más severas). Por el contrario, los clientes con estructuras latentes de respuesta son aquellos que tienen escasa o nula relevancia con el producto o servicio, no han realizado procesos detallados de evaluación, presentando las relaciones más débiles con las consecuencias tanto de la satisfacción (recompra por inercia) como de la insatisfacción (quejas poco severas).

Derivada de tales consideraciones se plantea entonces una matriz que establezca el "impacto de los requerimientos de los clientes", tal como muestra el Cuadro 2.2., la cual se propone como herramienta de análisis estratégico de la satisfacción de los clientes/consumidores, la Matriz de la Voz del Cliente. Tal matriz está compuesta por dos ejes: un eje de ordenadas que mide el *grado de importancia de los requerimientos* o de satisfacción experimentada, y un eje de abscisas que representa la *evaluación*

competitiva de los clientes, lo que permitiría establecer la relación existente entre la evaluación competitiva (benchmarking externo) y el grado de importancia (ponderación) de las relaciones entre los requerimientos de los consumidores y las alternativas de diseño o características del producto.

IMPACTO DE LOS REQUERIMIENTOS DEL CLIENTE		<u>Grado de importancia de los requerimientos</u>	
		Bajo	Alto
<u>Evaluación</u>	Alta	i. Dormidos	ii. Ganadores
<u>Competitiva</u>	Baja	iv. Cuestionables	iii. Oportunidades

**Cuadro 2.2.**

De la intersección de los ejes se obtienen cuatro cuadrantes, en cada uno de los cuales se sitúan los distintos tipos de requerimientos del cliente/consumidor que demandan acciones diferentes por parte de la unidad económica, a saber:

- **GANADORES** (“qués” altamente ponderados con evaluación competitiva elevada): Son requerimientos del consumidor sobre los que la empresa tiene un cierto poder de mercado, es decir, son requerimientos cuya satisfacción conlleva lealtad.

La oferta de la empresa se identifica con las necesidades de las personas, por lo que el consumidor se siente satisfecho y es consciente de ello, esto es, la relevancia personal con el producto/servicio llevó al cliente a esforzarse en la evaluación de la experiencia, de ahí que el resultado positivo (satisfacción) es la antesala de la recompra por lealtad.

No obstante, se debe seguir invirtiendo en ellos para mantener la posición de ventaja, pues hay que mantener satisfecho al cliente para que su fidelidad sea una relación estable y duradera. En este lugar, la labor de la unidad económica consiste en mantener los buenos resultados y afianzar en el tiempo la relación de fidelidad con el cliente.

- **DORMIDOS** (“qués” ponderados a la baja con evaluación competitiva elevada): En el cuadrante I se encuentran aquellos requerimientos para los que si bien la empresa cuenta con una buena posición en el mercado se trata de requerimientos de estancados o de bajo interés, esto es, podrían proporcionar volumen pero no crecimiento de las actividades. Se trata de clientes latentemente satisfechos, aquellos que suelen contradecir los estudios porque no muestran

lealtad a pesar de estar satisfechos. Por tanto, sus niveles de satisfacción no son significativos ya que cualquier estímulo de la competencia (oferta, rebaja, novedad, etc.) puede romper la inercia de recompra (actitud temporal) que mantenían hacia la empresa.

Aquí la empresa debería tratar de aumentar la relevancia personal del cliente con el producto o servicio, mediante la estimulación de su capacidad y motivación para evaluar su elección de compra. Esto puede hacerse de varias formas: aumentando la relevancia situacional y/o la relevancia intrínseca del producto/servicio, proporcionando información clara y adecuada, diferenciando las ofertas, y relacionándose continuamente con el cliente.

- CUESTIONABLES (“qués” ponderados a la baja con evaluación competitiva baja): En este caso ni el requerimiento presenta una oportunidad de negocio futuro ni la empresa está especialmente bien situada en el mercado, con lo que se trata de posibles candidatos a ser eliminados, subcontratados o a no invertir más en ellos, dependiendo del rol que tengan en el producto final.

La empresa no debe malgastar excesivos recursos en aumentar la satisfacción de estos individuos pues, aunque estuviesen satisfechos, tampoco se obtendría lealtad. De todas formas también hay que evitar que la insatisfacción se agrave por falta de atención y el cliente pase a estar, en mayor o menor grado, manifiestamente insatisfecho.

- OPORTUNIDADES (“qués” altamente ponderados con evaluación competitiva baja): A diferencia que el caso anterior, se denota una mala posición por parte de la empresa, lo que supone un punto crítico u oportunidad de mejora prioritaria.

Por otro lado, la unidad económica debería evitar que sus clientes fieles se conviertan en “enemigos”, pues los enemigos normalmente son clientes muy satisfechos que sufren uno o varios fallos con el producto o servicio. El gran error de la empresa sería perder estos clientes, pues una adecuada gestión de las quejas puede devolverlos a la categoría de clientes “fieles”; y una vez que el consumidor pasa a ser definitivamente enemigo es muy difícil recuperarlo como cliente.

En definitiva, con esta matriz se podría obtener información de cuáles son los ítems donde la empresa debería enfocar sus esfuerzos o recursos, centrándose especialmente en aquellos que suponen importantes oportunidades de crecimiento, pero donde todavía no se tiene una cuota de mercado similar a otros requerimientos también demandados por los consumidores (mala posición de mercado).

Igualmente, se pueden conocer aquellos ítems, los denominados dormidos, donde se están desarrollando esfuerzos en una dirección estéril, ya que se encuentran estancados o de interés decreciente para los consumidores, por lo que la necesidad de inversión puede ser menor.

De forma similar, también es posible realizar el diagnóstico de cuáles son las características de los productos o alternativas de diseño a desplegar (“cuántos”), para lo cual, como en el caso anterior, se puede definir una matriz cuyos ejes principales se correspondan ahora con los resultados de la evaluación comparativa técnica (benchmarking interno) y la ponderación de las características o alternativas de diseño. De esta forma, igualmente, los puntos críticos de oportunidades de mejora volverían a situarse en el cuadrante indicativo de que la empresa se haya mal capacitada (benchmarking interno bajo) mientras que las alternativas de diseño presentan una alta ponderación.

Como en el caso anterior, también se podría establecer la relación entre el benchmarking interno y la importancia de las características, como sigue a continuación:

<u>Ponderación de los “Cómo”</u>	<u>Evaluación Comp. Técnica</u>	<u>Importancia Características</u>
Alto	Alta	Ganadores
Alto	Baja	Oportunidades
Bajo	Alta	Dormidos
Bajo	Baja	Cuestionables

Finalmente, con respecto al plan de acción a seguir, con la información de los dos apartados anteriores la unidad económica podrá enfocar sus esfuerzos en aquellas alternativas de diseño que suponen oportunidades o puntos críticos con evaluación de las alternativas de diseño o características del producto (los “cuántos”) elevadas. Las alternativas seleccionadas se deberán llevar a cabo actuando sobre la mínima cantidad de ellas para lograr el máximo efecto de mejora, para lo cual se priorizará la actuación que presente menor dificultad técnica o con menor coste para la obtención de las metas previstas.

#### **2.2.4. Limitaciones del modelo de Despliegue de la Función de Calidad**

Ante las distintas alternativas de diseño de nuevos productos, dado que es preciso atender a las necesidades de los consumidores, surge la dificultad de agregar las diferentes preferencias de los consumidores y distinguir entre aquellas que maximizan su satisfacción. De hecho, el principal inconveniente radica en el tratamiento tanto de

la incertidumbre como de la complejidad inherentes a esta fase de desarrollo, tal como se puede observar al plantearse cuestiones como las siguientes:

¿Cómo interpretar las necesidades de los consumidores expresadas por variables lingüísticas?.

¿Cómo seleccionar aquellas que maximizan la satisfacción del consumidor?.

¿Cómo conciliar los distintos enfoques del personal de ingeniería, marketing, producción, etc.?.

¿Cuáles son los puntos en que se debe concentrar los esfuerzos de ingeniería y en cuáles no se debe invertir más dinero?.

¿Según la percepción del cliente, el producto de la empresa es mejor o peor que el producto de los concurrentes?.

La metodología del DFC, tal como se ha descrito en los epígrafes anteriores, trata en varios aspectos de dar respuesta a estas preguntas, pero en su desarrollo operativo se pueden encontrar diversas limitaciones, entre las que cabe destacar las siguientes:

La casa de la calidad puede contener muchos requisitos y características (líneas y columnas), lo que supone que el proceso de análisis y diagnóstico para la toma de decisiones se alargue en el tiempo y sea bastante complejo, una vez que existen muchas variables vinculadas junto con distintos criterios posibles para la selección de las características que serán desplegadas.

Asimismo, cabe señalar que si por un lado la aparente utilización del método asociada a la adopción de símbolos visuales es un factor positivo, por otro lado, la ausencia de mecanismos formales de toma de decisión que promuevan un mayor rigor matemático supone cuando menos el cuestionamiento de los resultados obtenidos.

Finalmente, otra de las limitaciones que presenta radica en el hecho de que este método utiliza informaciones de naturaleza cualitativa, expresadas por variables lingüísticas, aplicando desarrollos matemáticos como si se tratase de información precisa, no ambigua o vaga.

En definitiva, es posible afirmar que la deficiencia más significativa del DFC radica tanto en el propio proceso de toma de decisión como en el tratamiento de la incertidumbre inherente al mismo.

Con respecto al proceso de decisión, el DFC no propone ninguna estructura formal de toma de decisiones, ni en lo que concierne a la priorización de los paráme-

tros críticos del proyecto ni en el establecimiento de metas para tales parámetros, ya que, en primer término, dicho proceso de priorización está restringido al índice de importancia relativa para los clientes, mientras que las acciones a desplegar o metas se establecen generalmente a través de la confrontación de los datos disponibles del análisis competitivo interno, el cual es llevado a cabo de una forma subjetiva, sin una estructura formal ni rigor matemático, adoptándose procedimientos ad-hoc, buscando el consenso a través de exhaustivas discusiones entre los miembros del equipo de DNP.

De hecho, la alta complejidad que presenta el mismo se puede asimilar a los conocidos problemas de asignación cuadrática, lo que obliga a que en su desarrollo se tenga que tener en consideración la aplicación de aquellas técnicas de búsqueda y optimización que sean relevantes en dichas cotas de complejidad.

Por otro lado, en cuanto al tratamiento de la incertidumbre, puede ser necesario incorporar informaciones sobre las variables del DFC que aún cuando no sean mensurables en términos ciertos y precisos sí son susceptibles de estimación, comparación, gradación, relación, etc., ya que si una situación no puede ser precisada pero se puede afirmar que es mejor que otra se pasa a un estado superior de conocimiento, esto es, cuando se dice que un futuro acontecimiento es más "posible" que otro se está abriendo un campo fundamental en las perspectivas del razonamiento y de la decisión, pues el conocimiento subjetivo puede ser sometido, prácticamente, a todos los mecanismos de la lógica.

De hecho, si el conocimiento que se tiene del comportamiento de las variables de interés en el proceso de toma de decisiones es impreciso, se debe incluir entonces la noción de nivel de presunción y, en consecuencia, se necesita un acercamiento a aquellas herramientas matemáticas que permitan procesar esa información imprecisa vaga o subjetiva (KAUFMANN y GIL ALUJA, 1986).

En efecto, los números borrosos han sido creados para reflejar la vaguedad de la percepción humana y con ello la noción de presunción. De esta forma, la Teoría de los Subconjuntos Borrosos, como rama de la matemática que se ocupa del tratamiento tanto de lo subjetivo como de lo incierto, constituye un intento de recoger un fenómeno tal cual se presenta en la realidad y realizar su tratamiento sin intentar deformarlo para hacerlo preciso y cierto (ZADEH, 1965).



## Capítulo 3

# Técnicas de búsqueda y optimización con Heurísticas Basadas en la Naturaleza

### 3.1. INTRODUCCIÓN

Los términos “búsqueda” y “optimización” hacen referencia a un mismo concepto, si bien la denominación de “búsqueda” hace hincapié en el proceso en sí mientras que el término “optimización” pone énfasis en el resultado que se persigue con dicho proceso. En muchos casos los procesos de búsqueda están guiados por una función que indica lo buena que es la solución, el coste de la misma, o lo cerca que se está de la solución final, si ésta se conoce. El problema se convierte entonces en un problema de optimización, pudiendo decir que los procesos de optimización tratan de resolver el problema de encontrar la solución que maximiza la función objetivo o que minimiza el coste.

En términos formales, dada una función  $F$  de  $n$  variables  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , optimizar la función consiste en encontrar la combinación de valores  $x_i$  tales que:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \text{Máximo}$$

Los candidatos a solución  $x$  son estructuras (conjuntos, formaciones, árboles, grafos, etc.) de objetos, los cuales se pueden caracterizar inequívocamente a través de  $m$  atributos en cierto orden. Al dominio del problema se le denota por  $X$  y no necesariamente coincide con el espacio de búsqueda del algoritmo, que se denota por  $X$ . Sin pérdida de generalidad se puede admitir que se resuelve una maximización, pues para minimizar basta con cambiarle el signo a la función  $F$ .

De modo general, las soluciones obtenidas a través de los distintos procedimientos de optimización se pueden clasificar atendiendo a los siguientes criterios:

1. En función de la naturaleza de las soluciones:
  - a. Optimizaciones numéricas, es decir, cuando la solución queda especificada en términos de un conjunto de  $m$  parámetros o atributos.
  - b. Optimizaciones combinatorias, en las cuales además de especificar el conjunto de  $m$  parámetros que forman la solución, éstos deben estar ordenados (total o parcialmente).
2. En función del grado de aleatoriedad que se da al proceso de búsqueda:
  - a. Optimizaciones deterministas o dirigidas, para las cuales el procedimiento de búsqueda es completamente determinista, es decir, para unas mismas condiciones de partida el resultado es idéntico.
  - b. Optimizaciones aleatorias o al azar, que son el resultado de procedimientos de búsqueda completamente aleatorios. Su aplicación se realiza delimitando una región de búsqueda y tomando puntos al azar dentro de ella para posteriormente, mediante argumentos estadísticos establecer una estimación de máxima verosimilitud para el valor óptimo.
  - c. Optimizaciones estocásticas u orientadas, que combinan en proporción variable la búsqueda determinista con la búsqueda aleatoria de forma que la componente determinista orienta la dirección de búsqueda y la aleatoria se centra en la búsqueda local.
3. En función de la dirección preferente de búsqueda:
  - a. Optimizaciones en profundidad o explotadoras, en las cuales la búsqueda da prioridad a la explotación de las soluciones disponibles antes que a la exploración de nuevas soluciones.

- b. Optimizaciones en anchura o exploradoras, en las que la búsqueda prioriza la exploración de nuevas soluciones frente a la explotación de las soluciones disponibles.
4. En función del número de candidatos a la solución que se mantienen simultáneamente:
  - a. Búsquedas simples, en las cuales se mantiene un solo candidato a ser solución que se va actualizando sucesivamente tratando de proporcionar soluciones cada vez más exactas del problema.
  - b. Búsquedas múltiples, cuando mantienen simultáneamente varios candidatos a ser solución con los cuales se va acotando cada vez con mayor precisión la región (o regiones) donde se encuentra el/los óptimo/s.
5. En base a la información disponible sobre la función a optimizar:
  - a. Búsquedas ciegas, cuando el proceso a optimizar funciona como una caja negra que ante ciertos valores de los parámetros devuelve un valor del objetivo, es decir, no se dispone de información sobre la aplicación. Su ventaja reside en que proporcionan algoritmos de búsqueda de propósito general y por tanto fácilmente adaptables a un problema específico.
  - b. Búsquedas heurísticas, cuando se dispone de cierta información explícita (conocimiento específico) sobre el proceso que se desea optimizar, y por tanto esta información puede servir de guía para la búsqueda. En consecuencia, si bien son más eficaces, proporcionan un algoritmo válido para un problema concreto y, por tanto, difícilmente adaptable a cualquier otro.

Por otro lado, en cuanto a su resolución, los problemas de optimización deben ser polinómicamente programables, es decir, que existan procedimientos de resolución que tras realizar un número de operaciones que es a lo sumo una función polinómica del tamaño del problema proporcionen una solución al mismo. Esto es así en la medida en que si un problema no es de estas características todos los métodos de resolución serían inútiles para tamaños crecientes del mismo, pues difícilmente un ordenador sería capaz de afrontarlos en tiempo razonable.

Sin embargo, muchos de los problemas de optimización no sólo no son polinómicamente programables sino que incluso se entiende que ésta es una característica intrínseca de tales problemas, de ahí la dificultad de encontrar un procedimiento polinómico de búsqueda que los resuelva. En tales condiciones cabe plantearse distintas alternativas, a saber:

- a. Modificar el problema para hacer posible la aplicación de un algoritmo que si bien no garantice la solución mejor, proporcione una buena solución a la que se denomina cuasióptima.
- b. Desarrollar algoritmos específicos que en algunos casos encontrarán la solución mejor y en otros no, con la esperanza de que el problema a resolver se encuentre entre los primeros.
- c. Disminuir las restricciones del problema para que se ajuste a un algoritmo de resolución en tiempo polinómico y obtener varias soluciones escogiendo aquéllas que más se ajusten a las restricciones originales.
- d. Investigar el intervalo de algoritmo "cuasi-polinómicos".

Por otra parte, la principal característica de un método de búsqueda es su fortaleza, entendida como la eficiencia para llevar a cabo su tarea. No obstante, un postulado fundamental de la teoría de optimización afirma que la eficiencia y la generalidad son objetivos contrapuestos, es decir, cuanto más fuerte sea un método, menor será el número de problemas a los que se podrá aplicar y viceversa. De ahí que, en general, se admita la preferencia de la eficiencia a la generalidad, lo que supone un notable interés por los métodos heurísticos. No obstante, debido al incremento en la complejidad de los problemas y admitiendo que, para los procedimientos tradicionales de búsqueda, la relación generalidad vs. eficiencia es constante, se plantea la posibilidad de encontrar otros procedimientos de búsqueda para los que dicho producto sea mayor.

El razonamiento anterior cuestiona la fortaleza como característica para evaluar la calidad de un método de búsqueda y establece una nueva característica, denominada "robustez", de modo que un método de búsqueda es tanto más robusto cuando mayor sea la relación generalidad  $\times$  eficiencia. Desde esta perspectiva, se trata de determinar si existen procedimientos de búsqueda más robustos que los tradicionales.

Por tanto, a partir de la premisa anterior las investigaciones se centraron en la búsqueda de procedimientos robustos, relativizando la existencia de fortaleza y tratando de aprovechar las cualidades en términos de robustez que en general viene proporcionada por el no determinismo y la opacidad, es decir, la no utilización de conocimiento específico. Entre estos procedimientos se encuentran aquellos que toman como punto de referencia para su desarrollo los procedimientos inspirados en el comportamiento de la naturaleza.

En la última década se ha producido, en prácticamente todos los campos del quehacer científico, una importante transformación conceptual y metodológica ligada íntimamente al estudio de los llamados fenómenos no-lineales cuyo análisis se englo-

ba, parcialmente, dentro de las llamadas ciencias de la complejidad o de los sistemas complejos. Como parte de esta nueva visión, se ha puesto en evidencia que diversas propiedades espacio-temporales de los sistemas complejos surgen espontáneamente a partir de interacciones entre los elementos constituyentes, en escalas de tiempo y longitud considerablemente mayores que las escalas en las que ocurren dichas interacciones. Estas propiedades, denominadas propiedades emergentes, han comenzado a ser estudiadas con una familia nueva de herramientas y conceptos originadas en la interacción interdisciplinaria de varios campos de la ciencia, desde la física, la biología, la química, la economía, la sociología, etc.

Los sistemas complejos están formados por un conjunto grande de componentes individuales que interactúan entre sí y que pueden modificar sus estados internos como producto de tales interacciones. Tales sistemas pueden ser estructuralmente simples, aunque tal simplicidad no impide que exhiban comportamientos dinámicos diversos y no triviales.

Los sistemas complejos pueden situarse en regímenes críticos caracterizados por la presencia de fluctuaciones espaciales y temporales en todas las escalas posibles. Esta situación crítica puede alcanzarse espontáneamente y sin la intervención de factores o fuerzas externas al sistema, estableciendo entonces lo que se denomina “proceso autoorganizado”.

El proceso de interacciones puede generar comportamientos colectivos y globales, es decir, conductas que no están definidas en los elementos individuales, pero que emergen como un proceso colectivo y que no pueden ser reducidas ni explicadas tomando aisladamente a los elementos constituyentes.

En la naturaleza existe un elevado de ejemplos de sistemas complejos que van desde las reacciones químicas autocatalíticas, hasta los procesos sociales y culturales. La naturaleza posee una fuerte tendencia a estructurarse en forma de entes discretos excitables que interactúan y que se organizan en niveles jerárquicos de creciente complejidad; por ello, los sistemas complejos no son de ninguna manera casos raros ni curiosidades sino que dominan la estructura y función del universo. Tales sistemas constituyen y se manifiestan en la inmensa mayoría de los fenómenos observables.

Sin embargo, y aquí radica una de sus propiedades más interesantes, la abundancia y diversidad de los sistemas complejos (sean de tipo físicos, químicos, biológicos, sociales, etc.) no implica una innumerable e inclasificable diversidad de conductas dinámicas diferentes. Todo lo contrario, los sistemas complejos poseen propiedades genéricas, independientemente de los detalles específicos de cada sistema o de la base material del mismo.

Debido a la gran cantidad de sistemas complejos existentes en la naturaleza, en los últimos años, una parte de la comunidad científica ha desarrollado el interés por el estudio y aplicación simulada a otro tipo de problemas, de los mecanismos existentes en la naturaleza que se enfrentan a determinados problemas (KAUFMANN y GIL ALUJA, 1995).

Uno de los más importantes y prometedores campos de investigación han sido las denominadas "Heurísticas basadas en la Naturaleza" (HBNs) (COLORNI, DORIGO, MAFFIOLI, MANIEZZO, RIGHINI y TRUBIAN, 1996) o "Algoritmos Bioinspirados", un área cuya denominación surge debido a que simulan los mecanismos de la naturaleza para plantear la resolución de problemas, esto es, se basan en emplear analogías con sistemas naturales o sociales, al objeto de diseñar heurísticos no determinísticos de "búsqueda", "aprendizaje", "comportamiento", etc., al considerar la naturaleza como fuente de ideas para el desarrollo técnico y científico.

A los efectos de la presente Memoria, en este apartado se pretende describir las principales características de estos modelos, un área colindante entre la Investigación Operativa y la Inteligencia Artificial, con aplicación a los "problemas de optimización combinatorial" (POC) por encuadrarse en este ámbito el problema que representa el diseño de nuevos productos.

De acuerdo con lo anterior, a continuación se propondrá una taxonomía que pudiera presentar alguna utilidad para entender mejor las direcciones que siguen las actuales líneas de investigación.

Conviene, no obstante, poner de manifiesto previamente que en la definición de este tipo de algoritmos, la metáfora "natural" hace referencia a los sistemas derivados de las ciencias físicas, biológicas y sociales. Por su parte, las heurísticas se obtienen:

- Realizando un cierto número repetido de experimentos.
- Utilizando uno o más "agentes" (partículas, cromosomas, hormigas, etc.).
- Operando (en el caso de múltiples agentes) con un mecanismo de competición-cooperación.
- Incluyendo procedimientos de automodificación de los parámetros de la heurística o de la representación del problema.

Una aproximación a la evolución natural permite establecer los mecanismos básicos de la misma, a saber: la selección que premia a los individuos más fuertes y penaliza a los más débiles, y la mutación, que introduce elementos aleatorios y permite el nacimiento de nuevos individuos. En las HBNs se plantea una situación similar: la

selección es la idea básica para la optimización mientras que la mutación es la idea básica para la búsqueda no determinística.

Las características de las HBNs se pueden resumir en las siguientes:

1. Modelan (de forma aproximada) un fenómeno existente en la naturaleza.
2. Son no determinísticas.
3. A menudo presentan implícitamente una estructura paralela (múltiples agentes).
4. Son adaptativas, entendiendo por este término la capacidad del sistema para utilizar realimentación de la información a través de la modificación de sus parámetros y su modelo interno.

Las características anteriores facilitan un “comportamiento razonable” para el sistema, que se podría definir como “inteligente” (capacidad para resolver problemas difíciles) que, en otros términos, significa la producción de buenas soluciones para un problema de optimización combinatorial.

Algunos de los problemas de optimización combinatorial (POC) más importantes son NP-duros. Todas las aproximaciones para resolver este tipo de problemas de manera exacta están basados en una enumeración implícita de las soluciones factibles y, por tanto, requieren, en el peor de los casos, un número exponencial de pasos.

No obstante, hay estudios complejos que están fuertemente motivados en el desarrollo de heurísticas para los problemas de optimización combinatorial duros. En este epígrafe se pretende llevar a cabo un análisis de algunas de las heurísticas utilizadas en este tipo de problemas. El uso de pasos aleatorios sirve como herramienta para la exploración del espacio de soluciones y, consecuentemente, para ganar seguridad en la optimalidad de la solución encontrada.

Las ideas anteriores han planteado la construcción de un conjunto de algoritmos cada vez más sofisticados, entre los que destacan las siguientes heurísticas:

- a. Algoritmos Genéticos (AGs) (HOLLAND, 1975; GOLDBERG, 1989).
- b. Enfriamiento Simulado o Simulated Annealing (SA) (VAN LAARHOVEN y AARTS, 1987).
- c. Búsqueda Tabú o Tabu Search (BT) (GLOVER, 1989, 1990).
- d. Sistema de Hormigas o Ant System (AS) (COLORNI, DORIGO y MANIEZZO, 1991).

Entre las principales características que se persiguen equilibrar en la construcción de algoritmos heurísticos son:

El grado de explotación, es decir, la cantidad de esfuerzo empleado por la búsqueda local en la región actual del espacio de búsqueda (si una región es prometedora, la búsqueda se hace más a fondo).

El grado de exploración, esto es, la cantidad de esfuerzo gastado por la búsqueda en regiones distantes del espacio (algunas veces se elige una solución en una región lejana y acepta una solución peor para tener la posibilidad de descubrir nuevas soluciones mejores).

Las dos posibilidades anteriores presentan un conflicto en la construcción de este tipo de algoritmos, de forma que es preciso tratar de establecer un equilibrio entre ambas el cual se debe ajustar en cada algoritmo.

Asimismo, la construcción de algoritmos heurísticos debe estar presidida por un equilibrio entre el esfuerzo requerido o eficiencia (entendido como número de iteraciones) y la eficacia (valor final de la solución). En este sentido, el diseño de un buen método heurístico, es una cuestión multiatributo con dos objetivos principales en conflicto, esfuerzo y eficacia, lo que plantea la necesidad de llevar a cabo un estudio de las propiedades asintóticas de los algoritmos, cuyas ideas generales se exponen a continuación:

- En algunos algoritmos existe un parámetro (ya sea de control, aprendizaje o equilibrio) que varía lentamente con el propósito de evitar un óptimo local y permitir la exploración del espacio.
- Cuanto más lentamente varíe este parámetro, más alta es la probabilidad de que la solución final obtenida sea un óptimo global.

Es posible diseñar “metaheurísticas” que contengan, como característica, búsquedas locales específicas para el valor óptimo de este parámetro de control.

#### **a. Algoritmos Genéticos**

Los Algoritmos Genéticos (AGs) fueron introducidos por HOLLAND (1975) como algoritmos de búsqueda que utilizan la metáfora de las poblaciones de genes. En la comunidad de los AGs, un problema de optimización se traslada al problema de encontrar la mejor adaptación de un individuo (llamado cromosoma) dentro de una población. La adaptación se mide por una función de fitness o función de adaptación (bondad), que está relacionada con la función objetivo del problema que se desea re-



resolver. Los individuos son el equivalente a las soluciones y una población es un conjunto de  $N$  individuos. Cada individuo consiste en una colección (generalmente una cadena) de elementos atómicos llamados genes. Cada gen puede tomar valores dentro de un conjunto predefinido. El AG opera sobre la población modificando sus componentes. Las modificaciones ocurren de acuerdo a unas reglas genéticas implementadas a través de los operadores genéticos (cruce y mutación).

Por la relevancia que posee este tipo de algoritmos en el desarrollo de la presente Memoria, en el apartado 2 de este Capítulo se realiza una descripción con mayor detalle del funcionamiento de los mismos.

### b. Enfriamiento Simulado o Simulated Annealing

En este tipo de algoritmo, en lugar de aplicar un procedimiento de búsqueda local a un problema de optimización combinatorial, se define una vecindad  $N(i)$  de una solución factible  $i \in S$ , de forma que se establece que  $N(i)$  es un subconjunto de  $S$  alcanzable desde  $i$  a través de un algoritmo de exploración de vecindad: se denomina GEN( $i, j$ ) a este procedimiento de generación de todos los vecinos  $j \in N(i)$  en un determinado orden. La salida de un procedimiento de búsqueda local, que usa GEN( $i, j$ ) se le llama mínimo local con respecto a  $N(i)$ , ya que para todos los  $j \in N(i)$  se tiene que  $f(i) \leq f(j)$ .

Hay diferentes formas de aumentar la calidad de la solución. El algoritmo Simulated Annealing (SA) es uno de ellos, introduce un modo más sofisticado de moverse de la solución actual a alguna de sus vecinas, aceptando, con una cierta probabilidad, una nueva solución de peor calidad que la inicial.

El origen del algoritmo SA data de 1953 cuando fue usado para simular el proceso de enfriamiento de cristales en un computador, aplicando esta metodología con posterioridad a los POCs (KIRKPATRICK, GELATT y VECCHI, 1983). Esta técnica asume que el procedimiento GEN( $i, j$ ) genera aleatoriamente  $j \in N(i)$  con una distribución uniforme sobre todos los miembros de  $N(i)$ . Sea  $\Delta$  la diferencia  $f(j) - f(i)$ : la probabilidad de que el algoritmo acepte  $j$  como una nueva solución factible actual está dada por la ecuación:

$$\text{Prob}\{j \text{ después de } i\} = \begin{cases} 1 & \text{si } \Delta < 0 \\ e^{-\Delta/t} & \text{si } \Delta \geq 0 \end{cases}$$

En el algoritmo clásico del SA este proceso debería continuar hasta que se alcanzase el equilibrio, de forma que el parámetro de control  $t$  (habitualmente denominado "temperatura", recordando los orígenes del SA) se decrementa y comienza otra secuencia de iteraciones. El procedimiento completo para cuando  $t$  es tan pequeña que

(en la práctica)  $j$  se acepta sólo si  $\Delta < 0$ , en tal caso el SA no difiere de un procedimiento de búsqueda local.

Se utiliza asimismo una regla de actualización (esquema de enfriamiento) para el parámetro  $t$ , a menudo simplemente  $t := \alpha t$  para alguna constante  $\alpha < 1$ . El flag lógico  $\lambda$  permanece sólo si no se ha aceptado ningún movimiento durante una secuencia entera de iteraciones a la misma temperatura  $t$ . Asimismo se debe establecer un punto de equilibrio para decidir cuándo ha sido actualizado  $t$ . La verificación de una condición de equilibrio verdadera es, con frecuencia, bastante difícil. Un modo simple es introducir otro parámetro  $H$ , que fije el número máximo de iteraciones que han de llevarse a cabo para cada valor de  $t$  (dependiendo del número de variables del POC que se consideren).

Hace tiempo que se ha reconocido que el comportamiento del SA puede modelarse como una sucesión de cadenas de Markov, una para cada valor de  $t$ . Aunque teóricamente resulta muy atrayente, las condiciones para la convergencia del SA ante la obtención de un óptimo global en este sentido dicen muy poco sobre el modo en que el algoritmo se comportará en la práctica. En efecto, en vez de tomar probabilidad 1 en la convergencia a un óptimo global, se debería atener a las cadenas de Markov con un número infinito de transiciones y con una función  $g(t)$  para la actualización de la temperatura (una parte de la llamada estrategia de enfriamiento) que se aproxima a cero en un orden menor que  $O(1/\log n)$ . Estas condiciones son imposibles de satisfacer en la práctica.

Dada la situación resumida anteriormente, así como el entendimiento teórico del algoritmo SA, se puede considerar este método como una búsqueda local aleatorizada, cuyos parámetros de control tienen que elegirse cada vez que se desea aplicarlos a una instancia de un POC. A este conjunto de parámetros se le denomina estrategia de enfriamiento y contiene los siguientes elementos: el valor inicial de la "temperatura"  $t_0$ ; la regla  $g(t)$  para la actualización de  $t$ ; la longitud  $H$  de cada cadena de Markov. A menudo se especifica un cuarto elemento, cuando el procedimiento se simplifica en su criterio de parada, y usa, en vez de la variable lógica  $\lambda$ , el simple hecho de que la temperatura sea lo suficientemente baja: en este caso será preciso también especificar el valor final de la temperatura,  $t_f$ .

Hay extensas experimentaciones (VAN LAARHOVEN y AARTS, 1987) que señalan que la elección de la estrategia de enfriamiento es crucial para el éxito del algoritmo del SA, que puede llegar a alcanzar muy buenas soluciones, a expensas del tiempo de computación, bastante largo, que necesita. Estos autores sugieren un esquema de enfriamiento de tiempo polinomial y especifican cómo obtener los valores de los parámetros una vez que se ha decidido el problema y su función de vecindad.

### c. Búsqueda Tabú

La Búsqueda Tabú (BT) (GLOVER, 1989 y 1990) es una metaheurística que está relacionada con la imposición de restricciones para guiar el proceso de búsqueda. Estas restricciones operan de varias formas, tanto con la exclusión directa de las alternativas de búsqueda, clasificadas como “tabú”, como por la modificación de las evaluaciones y las probabilidades de selección de tales alternativas. Si bien en este caso se caracteriza la BT como un método de optimización de búsqueda local, se debe tener presente que los procedimientos constructivos están guiados por este enfoque.

Sea  $S$  el conjunto de soluciones factibles de una instancia de un POC, y  $n: S \rightarrow 2S$  y  $f: S \rightarrow \mathfrak{R}$  denotan un vecindario y una función de coste sobre  $S$ , respectivamente. En el contexto de la BT, la función  $N$  se da definiendo un conjunto de modificaciones (movimientos) de una solución factible que guía a las otras soluciones factibles, es decir:

$$N(i) := \{j \mid j \in S, \text{ existe un movimiento de } i \text{ a } j\}$$

El elemento fundamental que hay que subrayar en la BT es el uso de memoria flexible. Teniendo en cuenta la historia del proceso de búsqueda, tomando nota de la novedad, frecuencia y la calidad de los movimientos aplicados a la iteración actual, las estructuras de memoria operan a través de la modificación del vecindario  $N(i)$  de la solución actual  $i$  y el coste  $f(j)$ , asociado a cada elemento  $j \in N(i)$ : el enfoque de optimización opera seleccionando, en cada iteración, la mejor solución evaluada con el vecindario modificado.

El mecanismo principal para la explotación de memoria en la BT consiste en clasificar un subconjunto de movimientos, a través de definir el vecindario  $N(i)$  de una solución actual  $i$ , como prohibida (tabú): el método prohíbe moverse con ciertos atributos, con el objetivo de prevenir ciclos y guiar la búsqueda hacia regiones de  $S$  que aún no han sido exploradas o que son prometedoras.

El principal concepto de la memoria basada en la novedad de la BT, estriba en la tenencia tabú de un atributo que identifica el número de iteraciones que un atributo permanece en estado tabú activo (donde un movimiento es clasificado como tabú si un número específico de sus atributos, o un subconjunto de los mismos, se encuentran en estado tabú activo). La tenencia tabú puede variar de acuerdo al papel que el atributo juegue en el movimiento. Por ejemplo, habitualmente los atributos que restringen fuertemente los movimientos disponibles, cuando son tratados como tabú activos, se consideran durante una tenencia más corta que aquéllos que restringen débilmente los movimientos disponibles. A menudo, la tenencia tabú se puede modificar alrededor de un “valor central preferente” (que depende del tipo de atributo considerado), permi-

tiendo una desviación pequeña de este valor, generado determinísticamente o aleatoriamente, cuando el atributo pasa a un estado tabú activo.

Las estructuras de memoria sólo necesitan, para guardar la tenencia tabú actual de un atributo, especificar la mayor iteración hasta la que el atributo estará en estado tabú activo, ya que comparando este valor con la iteración actual se revela inmediatamente el estado tabú activo actual. Se pueden considerar vectores de correspondencia para almacenar distintas informaciones frecuentísticas asociadas a los atributos para ser empleados en una memoria de términos más larga. Cuando existen muchos atributos es costoso mantener una tenencia de memoria separada para cada uno de ellos, por eso a menudo se utiliza una estructura llamada lista tabú. Esta lista contiene precisamente los atributos que están actualmente en estado tabú activo, junto con la iteración en que salen de este estado. La información sobre las iteraciones puede borrarse si todos los atributos reciben la misma tenencia, ya que entonces los atributos podrán añadirse y borrarse de la lista de forma rotatoria.

Las restricciones tabú pueden violarse bajo ciertas circunstancias. Por ejemplo, cuando un movimiento tabú pueda obtener un resultado mejor que cualquiera de los obtenidos hasta ahora, su clasificación tabú podrá ignorarse. A estas condiciones se les denomina criterios de aspiración.

La combinación de la memoria basada en la antigüedad con la memoria basada en la frecuencia añade una componente que opera sobre un horizonte mayor. Uno puede memorizar para cada atributo su frecuencia relativa, es decir, cuántas veces un atributo pertenece a movimientos aplicados: en todas las ocasiones donde no existen movimientos admisibles que mejoren, la información de frecuencia modificará la evaluación  $f(j)$  de los elementos  $j \in N(i)$  añadiendo a  $f(j)$  una penalización que depende de las veces que el movimiento de  $i$  a  $j$  haya sido aplicado anteriormente. Este es un modo de implementar una estrategia de diversificación, dejando que la búsqueda converja hacia regiones más prometedoras.

Un enfoque híbrido que combina ideas del SA y de la BT fue propuesto por FAIGLE y KERN (1989), en el cual se combina la información de frecuencia con el muestreo aleatorio y el criterio de aceptación basado en la temperatura del SA. El uso del muestreo aleatorio en el SA puede contrastar con el uso de las probabilidades en la variante de la BT llamada búsqueda tabú probabilística (BTP). Este enfoque conserva la estrategia de examinar los elementos de una lista de candidatos (en vez de elegir los elementos aleatoriamente y aceptarlos o rechazarlos sin hacer comparaciones explícitas sobre otros elementos), y además influyen las probabilidades a favor de elegir aquellos que reciben mejores evaluaciones. Por tanto, BTP no hace referencia a la temperatura pero sí tiene en cuenta la memoria de la BT, trasladando los estados tabú a penali-

zaciones que reducen las evaluaciones de los movimientos considerados. Los criterios de aspiración permiten sobrecribir las probabilidades, produciendo una elección determinística cuando el “movimiento ganador” es suficientemente atractivo.

Un enfoque híbrido simple que combina ideas de los AGs y la BT se obtiene de este modo: primero se aplica en un marco paralelo una búsqueda tabú a un conjunto de soluciones iniciales, de manera que se genere un conjunto de buenas soluciones; después se aplica el AG para recombinar los elementos así generados. El proceso completo se aplica repetidamente usando las soluciones recombinadas como comienzo de otras (NORMAN y MOSCATO, 1991). Un segundo tipo de híbrido se consigue a través de la observación de los alelos del AG, que pueden ser comparados con los atributos de la búsqueda tabú: se puede crear un método híbrido introduciendo, en el AG, memoria basada en la frecuencia para marcar la historia de los alelos sobre las poblaciones.

La búsqueda tabú se ha aplicado con éxito a numerosas áreas: planificación, transporte, diseño y disposición de circuitos, telecomunicaciones, grafos, sistemas expertos, etc.

#### **d. Sistema de Hormigas**

Los algoritmos basados en colonias de hormigas fueron introducidos por primera vez por COLORNI, DORIGO y MANIEZZO (1991 y 1992) con la denominación de “Sistema de Hormigas” (Ant Systems - AS). La idea básica subyacente de esta heurística es la simulación del comportamiento de un conjunto de agentes que cooperan para resolver un problema de optimización a través de comunicaciones muy simples. La metáfora natural que utiliza es la de las colonias de hormigas.

Las hormigas reales parecen ser capaces de encontrar su camino (del hormiguero a la fuente de comida y regresar, o rodear un obstáculo) con relativa facilidad, pese a estar prácticamente ciegas. Estudios entomológicos descubrieron que esta capacidad es el resultado de la interacción debido a la comunicación química entre las hormigas, a través de una sustancia llamada feromona, y un fenómeno emergente causado por la presencia simultánea de muchas hormigas. El sistema de hormigas intenta reproducir este mecanismo en una colonia de hormigas artificial.

Debido al interés que presentan este tipo de algoritmos en el desarrollo de la presente Memoria, en el apartado 3 de este Capítulo se analiza con mayor detenimiento el funcionamiento de los mismos así como los distintos tipos de sistemas de hormigas desarrollados hasta la actualidad.

### 3.2. ALGORITMOS GENÉTICOS

Los algoritmos genéticos (AGs) son métodos basados en el proceso genético de los organismos vivos que se utilizan en la resolución de problemas de búsqueda y optimización.

Los AGs usan una analogía directa con el comportamiento natural, en el que los individuos de una población compiten entre sí, de forma que aquellos individuos con mayor éxito para sobrevivir tienen mayor probabilidad de generar un gran número de descendientes mientras que los pocos dotados darán lugar a un número de descendientes menor. En definitiva, esto significa que los genes de los individuos mejor adaptados se propagan en las generaciones siguientes hacia un número de individuos creciente, provocando que los individuos posteriores (“hijos”) tengan una adaptación mayor que la de sus progenitores (“padres”). De esta forma, las especies evolucionan logrando unas características cada vez mejor adaptadas al entorno en que se desarrollan.

La Evolución es un proceso no-dirigido, esto es, no existen pruebas científicas de que el proceso evolutivo esté encaminado a la consecución de un objetivo final. Más bien, puede verse como un proceso *reactivo*, en virtud del cual los organismos cambian en respuesta a las variaciones del entorno.

En este sentido, cabe recordar que los principios básicos de la evolución de los seres vivos surgen a mediados del s. XIX, los cuales se asientan en la *Teoría de la Selección Natural* de DARWIN (1859) y los trabajos sobre *Herencia Genética* de MENDEL (1865), destacando entre otros los siguientes aspectos:

- El proceso de la evolución se desarrolla sobre los cromosomas que componen los individuos, no directamente sobre los organismos. Este proceso utiliza los cromosomas como instrumento orgánico mediante el cual se codifica la estructura de un ser vivo, pues los cromosomas contienen información que pasa de una generación a otra mediante los procesos reproductivos.
- La evolución propiamente dicha tiene lugar durante la etapa de reproducción, la cual puede llevarse a cabo mediante una serie de mecanismos reproductivos, siendo los más básicos la *mutación* (que modelan la variabilidad del material genético de los individuos) y la *recombinación* (que combinan los materiales genéticos de los padres para producir el de los descendientes).
- La relación entre los cromosomas y la eficiencia de las entidades que representan se realiza a través de la selección natural, la cual facilita que aquellos orga-

nismos eficaces y adaptados al medio se reproduzcan con mayor probabilidad que aquellos que no lo están. Este mecanismo provoca en consecuencia la extinción de los organismos inadaptados o poco eficientes.

Estos principios se engloban dentro de la más ortodoxa teoría de la Evolución: la *Teoría Sintética* (HUXLEY, 1942), si bien en la actualidad se han propuesto escenarios alternativos, tales como la *Teoría Neutralista* (KIMURA, 1968) y, muy notablemente, la *Teoría de los Equilibrios Interrumpidos* (GOULD y ELREDGE, 1977). Sin embargo, debido a la simplicidad de los principios sobre los que se asienta y a la potencia desbordante que el desarrollo y expansión de nuevas formas de vida exhibe, la Teoría Sintética de Huxley ha sido analizada por muchos investigadores con el afán de intentar obtener sistemas de análogas características que sean trasladables al campo de la algoritmia.

El comportamiento natural traducido en los AGs presenta las siguientes fases:

En primer término, se genera una población de individuos cada uno de los cuales representa una solución factible al problema que se desea resolver.

En función de la bondad de la solución que representa cada individuo, se le asigna una valoración que en definitiva establece el grado de efectividad del individuo para competir por unos determinados recursos. Cuanto mayor sea la adaptación de un individuo mayor será la probabilidad de que dicho individuo sea seleccionado para reproducirse y, en consecuencia, para que su material genético se propague en sucesivas generaciones.

El proceso de reproducción se realiza cruzando el material genético del individuo con el de otro individuo seleccionado de igual forma, generando una nueva población que reemplaza a la anterior con la ventaja de que esta población contiene una mayor proporción de buenas características que la población anterior.

A través de sucesivas generaciones las nuevas poblaciones estarán mejor adaptadas que las poblaciones de las que provienen sin más que favorecer el cruce de los individuos con mejores características, ya que de esta forma se van explorando las áreas más prometedoras del espacio de búsqueda.

Si el AG está bien diseñado, en un tiempo razonable la población convergerá hacia una solución óptima del problema.

En consecuencia, las fases de un AG se pueden resumir en el esquema que muestra la Figura 3.1.

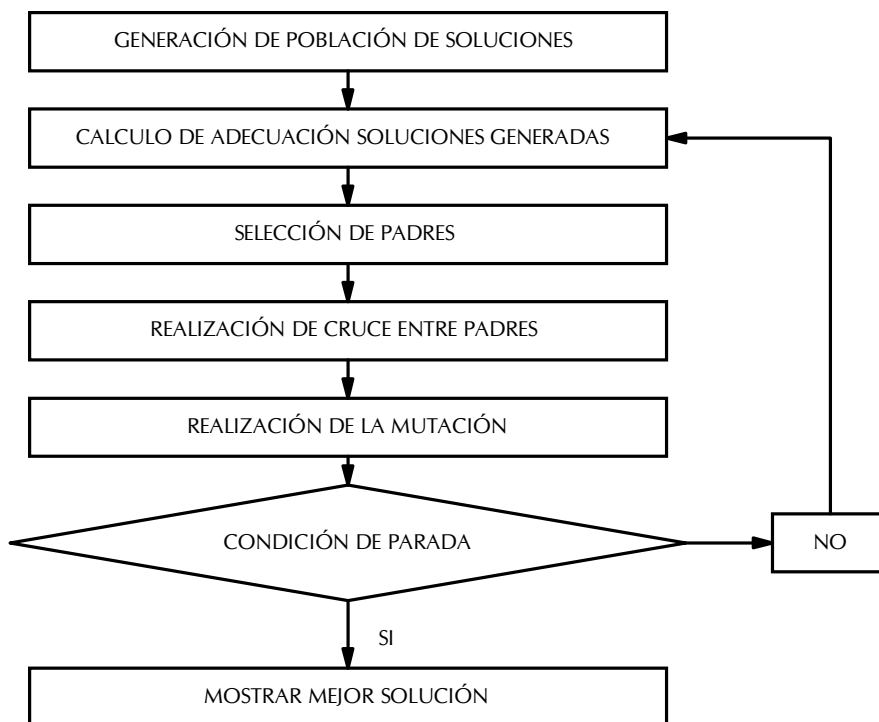


Figura 3.1.

La principal ventaja de los AGs es que se tratan de técnicas robustas que se pueden utilizar con éxito en una gran variedad de problemas incluso en casos en que otras técnicas plantean dificultades. Por otra parte, si bien no se puede garantizar que un AG proporcione una solución óptima, empíricamente se ha demostrado que encuentran soluciones aceptables en un tiempo competitivo con el resto de algoritmos de optimización combinatoria.

Sin embargo, en problemas en los que existen técnicas especializadas para resolverlos, en general los AGs serán menos eficaces y/o menos rápidos. De ahí que el campo de aplicación de los mismos sea en problemas en los que no existen técnicas específicas, si bien aún en estos casos pueden efectuarse mejoras en las mismas con la hibridación con los AGs.

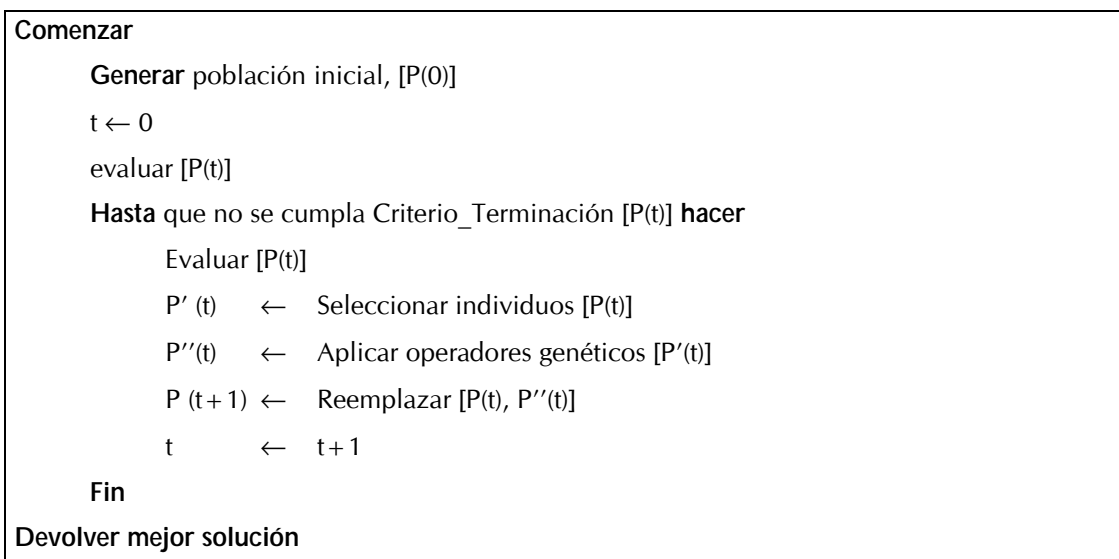
### 3.2.1. Elementos básicos de un Algoritmo Genético

Como se indicó en el epígrafe precedente, un algoritmo genético comienza con una codificación o representación del problema que resulte adecuada para el mismo. Para determinar la bondad de los individuos que componen dicha población con respecto al problema al que se desea aplicar, es necesario establecer una función de adaptación que asigne una valoración a cada posible solución codificada.



La ejecución del algoritmo consiste en seleccionar los individuos que actuarán como padres en el proceso de reproducción, los cuales se cruzarán generando dos hijos sobre los cuales actuará un operador de mutación. El resultado de estas operaciones será un conjunto de individuos que representarán nuevas posibles soluciones al problema y que constituirán la siguiente población.

Por tanto, la operación básica de un AG puede ilustrarse a través del pseudocódigo indicado en el Cuadro 3.1.



Cuadro 3.1.

De forma similar, la Figura 3.2. muestra el proceso de actuación de los distintos operadores en un AG en el proceso de cambio de una generación a otra.

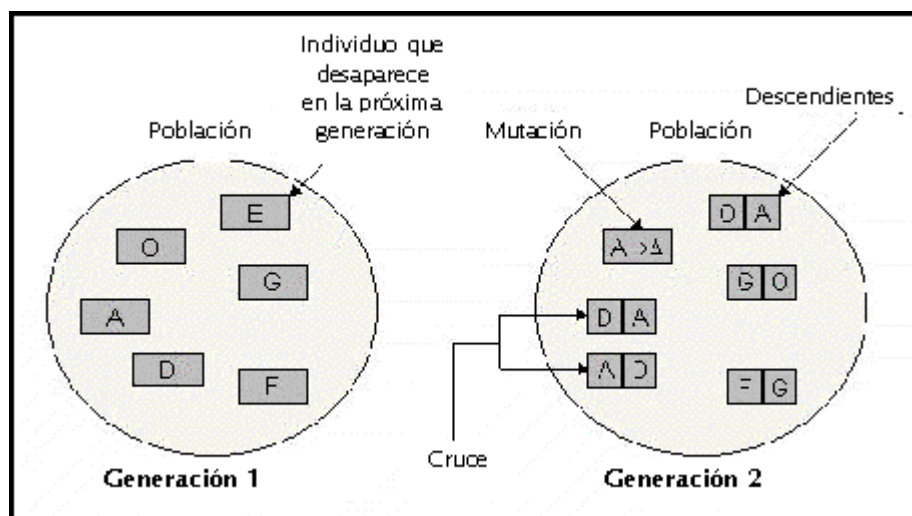


Figura 3.2.

De acuerdo con lo anterior, para poder aplicar un algoritmo genético se requieren los siguientes componentes básicos:

- Una representación de las soluciones potenciales del problema.
- Una forma de crear una población inicial de posibles soluciones.
- Una función de evaluación que juegue el papel del entorno o ambiente, clasificando las soluciones en términos de su “aptitud”.
- Operadores genéticos que alteren la composición de los hijos que se producirán para las siguientes generaciones.
- Valores para los diferentes parámetros que utiliza el AG, entre los que cabe destacar el tamaño de la población, la probabilidad de cruce, la probabilidad de mutación, el número de generaciones, etc.

El algoritmo genético básico representa los individuos (posibles soluciones del problema) mediante un conjunto de parámetros a los que se denominan genes, los cuales se agrupan constituyendo una cadena de valores que se define como cromosomas. Si bien existen distintas posibilidades de llevar a cabo la codificación de los individuos, las cuales se comentarán con posterioridad, en general la codificación más utilizada se basa en el alfabeto binario  $\{0, 1\}$ .

El conjunto de parámetros representando un cromosoma particular se denomina fenotipo, el cual contiene la información requerida para construir un organismo, el cual se denomina genotipo. Por tanto, la adecuación de un individuo a un problema depende de la evaluación del genotipo, la cual puede inferirse a partir del fenotipo, es decir, puede ser computada a partir del cromosoma mediante la función de evaluación.

Por su parte, la función de evaluación debe ser específica para cada problema y servirá para asignar un valor a cada cromosoma en particular, el cual reflejará el nivel de adaptación al problema del individuo representado por el cromosoma. Los principales problemas derivados de la formulación del modelo son la convergencia prematura y la finalización lenta.

Para constituir la siguiente generación de individuos se realiza un proceso de reproducción que consiste, en primer término, en seleccionar los individuos para someterlos al operador de cruce y constituir los descendientes, para posteriormente realizar sobre los descendientes un proceso de mutación.

La selección de individuos que van a actuar como “padres” se realiza normalmente al azar, utilizando un procedimiento que favorezca a los individuos mejor adap-

tados, para lo cual se asigna a cada individuo una probabilidad que es proporcional a su función de adaptación. A este procedimiento se le conoce con la denominación de “ruleta sesgada” cuyo objetivo es que los individuos mejor adaptados sean seleccionados, incluso varias veces por generación, mientras que aquellos individuos con una adaptación pequeña se crucen en muy pocas ocasiones. No obstante, existen distintas posibilidades para realizar la selección de los individuos que se considerarán “padres” para la siguiente generación que se analizarán más adelante.

A partir de los individuos seleccionados, se procede a combinar sus cromosomas utilizando principalmente los operadores de cruce y mutación.

- **Operador de cruce.** Si bien existen distintas variantes, el proceso de cruce más utilizado es el que se conoce como “cruce en un punto”, lo que supone tomar dos individuos de los seleccionados como “padres” y cortar sus cromosomas en una posición elegida al azar para producir dos segmentos anteriores y dos posteriores que se intercambian entre sí dando lugar a dos nuevos cromosomas completos. En consecuencia, ambos descendientes (“hijos”) heredan genes de cada uno de los progenitores (“padres”). El proceso de cruce en un punto se recoge en la Figura 3.3.

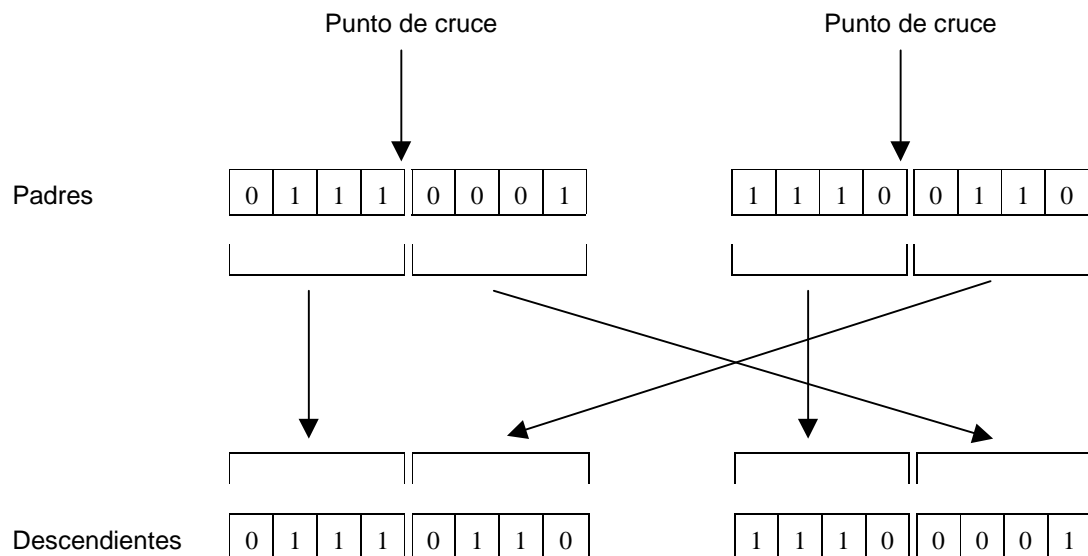
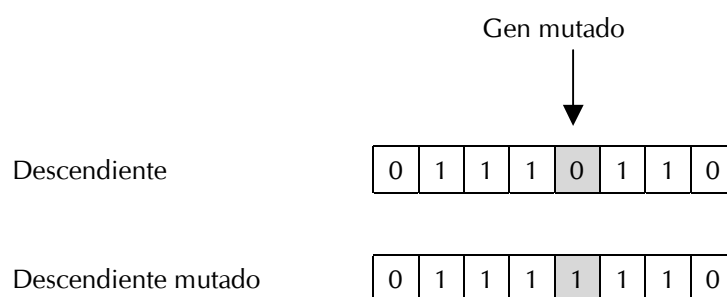


Figura 3.3.

Sin embargo, habitualmente no se aplica el operador de cruce a todos los individuos que han sido seleccionados para emparejarse, sino que se establece de manera aleatoria una probabilidad (normalmente, entre 0'5 y 1) de que se produzca el cruce. En el caso contrario, la descendencia se produce simplemente por duplicación de los “padres”.

- Operador de mutación. Al igual que en el caso del operador de cruce, la mutación se puede llevar a cabo de formas distintas, incluso es posible en algunas ocasiones que no se someta a los descendientes obtenidos mediante el cruce a este operador.

El operador de mutación actúa de manera individual sobre los descendientes y consiste en alterar de forma aleatoria con una probabilidad muy pequeña uno o más genes de los que componen el cromosoma. En el caso de codificación binaria, la representación de la mutación puede ser la mostrada en la Figura 3.4.



**Figura 3.4.**

El operador de cruce proporciona una exploración más rápida del espacio de búsqueda, de ahí que suele considerarse más importante que el operador de mutación. Sin embargo, la finalidad de este último es garantizar que ningún punto del espacio de búsqueda tenga probabilidad cero de ser examinado, lo que resulta de especial importancia para asegurar la convergencia del AG.

De acuerdo con lo anterior, los principales términos utilizados en los AGs en relación con la terminología propia de la evolución natural se puede resumir como muestra el Cuadro 3.2.

Naturaleza	AGs
Individuo	Solución al problema
Genotipo	Individuo, solución
Población	Conjunto de soluciones
Aptitud (Fitness)	Calidad de la solución
Cromosoma	Representación de la solución
Fenotipo	Cromosoma, representación
Gen	Parte de la representación de la solución
Cruce, mutación	Operadores de búsqueda
Selección natural	Reutilización del mejor individuo

**Cuadro 3.2.**

En este caso, y por criterios prácticos, resulta muy útil la definición de convergencia introducida por DE JONG (1975), donde se establece que si el AG ha sido correctamente implementado, la población evolucionará a lo largo de sucesivas iteraciones o generaciones de forma que la adaptación del mejor y el promedio general se incrementarán hacia el óptimo global.

La convergencia es en consecuencia la progresión hacia la uniformidad: se establece que un gen ha convergido cuando el 95% de la población tienen el mismo valor para dicho gen. Por tanto, se plantea que la población converge cuando todos los genes de cada individuo lo hacen. La Figura 3.5. muestra como varía la adaptación medida y la mejor adaptación en un AG simple típico.

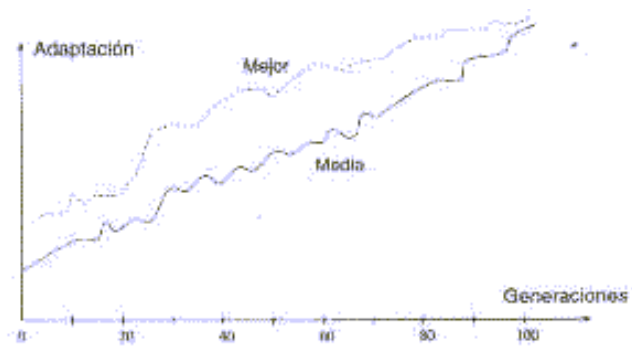


Figura 3.5.

De acuerdo con lo anterior, son muchas las posibilidades para formular los distintos operadores, así como para establecer los parámetros de funcionamiento de un algoritmo genético. De ahí que antes de analizar en profundidad las distintas alternativas así como las consecuencias de las mismas, en el primer término interesa exponer, aunque de forma somera, los componentes básicos de un algoritmo genético tradicional, donde el espacio de cromosomas está constituido por todas las cadenas de una determinada longitud  $L$  construidas a partir de los símbolos de un alfabeto  $V$ . A partir de esta representación de las soluciones, se deriva todo el aparato matemático que justifica y, hasta cierto punto, explica el funcionamiento de estas técnicas.

Los componentes básicos de un AG tradicional pueden ser definidos como una tupla que contenga los siguientes elementos:

$$\text{AG} (V, L, f, I, S, R, X, K_x, M, K_M, t)$$

Cada parámetro tiene el significado que se indica a continuación:

- $V$  y  $L$  son el alfabeto empleado para construir los cromosomas y la longitud de los mismos. Dichos cromosomas forman el espacio de genotipos. Como se ha comentado, en su versión más ortodoxa, el alfabeto es binario ( $V = \{0,1\}$ ).
- $f$  es la función de adecuación que relaciona los cromosomas con la bondad de las soluciones que representan. Dado que la adecuación corresponde en última instancia a dichas soluciones, debe asumirse la existencia de una función de codificación/decodificación  $r$  internamente usada en  $f$ . No obstante, en muchas ocasiones dicha función de decodificación no existe como tal, encontrándose dentro la función de adecuación.
- $I$  es el operador de inicialización, es decir, el operador que genera los individuos que constituyen la población inicial. Normalmente, dichos individuos se generan de manera totalmente aleatoria, aunque es posible considerar otras alternativas, a saber:
  - Inicialización Sistemática: La población inicial es generada mediante un proceso pseudoaleatorio que asegura que todos los posibles valores de cada gen se hallan presentes en la misma (REEVES, 1993b).
  - Inicialización Heurística: La población inicial se crea utilizando las soluciones producidas por un cierto heurístico de construcción.
- $S$  es el denominado operador de selección, cuya función es determinar qué cromosomas de los presentes en la población pasan a la fase reproductiva. Dicha selección está guiada por los valores de adecuación de dichos cromosomas, de forma que aquéllos cuya adecuación sea mayor tendrán una mayor probabilidad de ser seleccionados. Tradicionalmente pueden considerarse tres mecanismos fundamentales de realizar esta selección: selección proporcional a la adecuación, selección por ranking y selección por torneo, que serán objeto de un estudio más detallado con posterioridad.
- $R$  es el operador de reemplazo. Su misión es formar una nueva población a partir de la ya existente y de los nuevos individuos creados durante la fase reproductiva. Al igual que el operador de selección, el reemplazo puede realizarse de diversas formas, a saber:
  - Reemplazo del peor: Los nuevos individuos creados substituyen a los peores individuos de la población actual.
  - Reemplazo aleatorio: Selección al azar los individuos que serán reemplazados.
  - Reemplazo por torneo: Consiste en seleccionar un subgrupo de  $t$  individuos y sustituir al peor de éstos.

- Reemplazo directo, inmediato o al vuelo: Cada pareja de descendientes reemplaza a sus progenitores.

Una práctica habitual consiste en forzar la permanencia de los  $k$  mejores individuos de la población ( $k$ -elitismo). Así, se asegura que las mejores soluciones encontradas no se pierden, ya que el mejor individuo de la población final es el mejor individuo generado durante toda la ejecución del algoritmo.

- $X$  y  $K_x$  son un operador de cruce y los parámetros del mismo, respectivamente. La misión del operador de cruce es producir nuevas soluciones a partir de la combinación de porciones de soluciones ya existentes:

$$X: G^{k_1} \times K_x \rightarrow G^{k_2}$$

En las versiones más clásicas del operador,  $k_1 = k_2 = 2$ , reduciéndose  $K_x$  a una probabilidad que determina si se realiza el cruce o no.

Cabe señalar que la versión más común del operador de cruce y sus posibles variantes hasta principios de los 90 se basaban en linealidad de los cromosomas y, generalmente, en la ortogonalidad de los mismos, siendo el más generalizado el cruce de un punto (*one-point crossover* o *single-point crossover*) que consiste en seleccionar una posición interior de las cadenas e intercambiar los segmentos de ambas cadenas a la izquierda del mismo.

- $M$  y  $K_M$  son un operador de mutación y los parámetros del mismo, respectivamente. La misión del operador de mutación es producir nuevas soluciones a partir de la modificación de un cierto número de posiciones de una solución ya existente:

$$M: G \times K_M \rightarrow G$$

En las versiones más clásicas del operador,  $K_M$  indica la proporción de posiciones de la cadena que sufrirán modificación. Esta modificación se considera necesaria para introducir nuevo material genético en la población.

- $t$  es el criterio de terminación. Es el mecanismo que determina cuando se debe concluir la ejecución del algoritmo, para lo cual existen numerosas posibilidades, entre las que destacan:
  - Establecer un número máximo de evaluaciones de la función objetivo.
  - Establecer la condición de parada cuando tras un determinado número de iteraciones no se ha obtenido ninguna mejora global de la solución.

- Establecer la finalización de la ejecución cuando se obtiene una solución cuya calidad se estima suficiente.

Sin embargo, los criterios anteriores pueden combinarse entre sí, de forma que se determina la finalización de la ejecución del algoritmo cuando se cumpla un subconjunto determinado de las condiciones de parada indicadas.

La elección de los operadores de selección y reemplazo determina uno de los parámetros fundamentales del algoritmo, el modelo de evolución, lo que plantea que puedan considerarse tres opciones principales, a saber:

- a. Modelo generacional: en cada iteración del algoritmo se renueva completamente la población del algoritmo.
- b. Modelo de estado estacionario: en cada iteración del algoritmo únicamente se generan uno o dos individuos nuevos, los cuales son reinsertados en la población siguiendo el mecanismo de reemplazo elegido.
- c. Modelo gradual: este modelo generaliza los dos anteriores. En cada iteración se genera un porcentaje  $g$  de la población (*gap*), el cual es acto seguido reinsertado en la población.

En general, cuanto menor sea el porcentaje de solapamiento, esto es, cuantos menos individuos se generen en cada iteración, más rápida será la convergencia del algoritmo. Esto puede ser ventajoso, aunque debe tenerse en cuenta que puede redundar en una prematura degeneración de la población.

A efectos ilustrativos del funcionamiento de un AG básico cabe plantear un ejemplo de aplicación práctica, de fácil resolución y cuyo resultado sea conocido: El problema a resolver consiste en localizar un número entre 0 y 255 que maximice, en un proceso de representación binaria, el número de transiciones de 0 a 1 en su codificación.

Además del proceso de codificación, a priori es necesario establecer otra serie de parámetros, que para el ejemplo propuesto son los siguientes:

- Número de cromosomas: 8 bits
- Procedimiento de inicialización: al azar
- Procedimiento de decodificación: transformación de binario a decimal
- Función de adecuación: conversión de decimal a binario y determinar el número de transiciones de 0 a 1 para cada individuo
- Población: 10 individuos
- Selección: utilizar los 5 individuos de mayor adecuación



- Cruce: cruce en un punto al azar
- Mutación: no se aplica

La solución, conocida a priori, será el número 85 cuya representación será:

0	1	0	1	0	1	0	1
---	---	---	---	---	---	---	---

La población inicial estará compuesta por los 10 individuos generados de forma aleatoria cuya representación y adecuación a efectos ilustrativos puede ser la que se recoge en el Cuadro 3.3.

Individuos	Representación binaria (cromosoma)	Representación decimal (solución)	Adecuación
A	10010111	151	2
B	01010100	84	3
C	11101010	234	2
D	00101001	41	3
E	11011011	219	2
F	10111110	190	1
G	01001110	78	2
H	10010010	146	2
I	00100011	35	2
J	11110100	244	1
Media			2

**Cuadro 3.3.**

El proceso de selección consiste, en función de los parámetros establecidos para el desarrollo del ejemplo, en seleccionar los 5 individuos con mayor adecuación, es decir:

Individuos	Cromosoma	Solución	Adecuación
B	01010100	84	3
D	00101001	41	3
A	10010111	151	2
C	11101010	234	2
E	11011011	219	2
Media			2'4

**Cuadro 3.4.**

El paso siguiente consistirá en someter a los individuos al operador de cruce. Si se suponen los siguientes emparejamientos y puntos de cruce aleatorios, los descendientes originados tras el cruce serán los que refleja el Cuadro 3.5.

Individuos	Punto	Cromosoma	Solución	Adecuación
B	3	010 10100	84	3
A		100 10111	151	2
B+A		01010111	87	3
D	6	001010 01	41	3
B		010101 00	84	3
D+B		00101000	40	2
A	2	10 010111	151	2
C		11 101010	234	2
A+C		10101010	170	3
B	7	0101010 0	84	3
E		1101101 1	219	2
B+E		01010101	85	4
E	5	1101 1011	219	2
D		0010 1001	41	3
E+D		11011001	217	2

**Cuadro 3.5.**

De forma que, dado que no se somete a los individuos al operador de mutación, la nueva población estará constituida por los siguientes individuos recogidos por orden de adecuación en el Cuadro 3.6.

	Cromosoma	Solución	Adecuación
B+E	01010101	85	4
B	01010100	84	3
B+A	01010111	87	3
D	00101001	41	3
A+C	10101010	170	3
A	10010111	151	2
C	11101010	234	2
E	11011011	219	2
D+B	00101000	40	2
E+D	11011001	217	2
		Media	2'6

**Cuadro 3.6.**

En el Cuadro anterior se puede comprobar que la mejor solución factible aparece ya en la primera generación, si bien habitualmente se precisa de un mayor número de iteraciones. Asimismo, se puede observar que la adecuación media de la población incrementa de una generación a otra y que las mejores soluciones tienen bloques similares (por ejemplo, el bloque 010101 es el mismo en las 4 primeras soluciones).

### 3.2.2. Fundamento teórico de los Algoritmos Genéticos tradicionales

Las bases teóricas de los AGs tradicionales se asientan en el concepto de esquema y el paralelismo intrínseco o implícito existente en el procesamiento de éstos.

El desarrollo inicial de los AGs se debe a HOLLAND (1975), quien observó que los mejores individuos de una población guardaban entre sí ciertas similitudes y que a medida que el proceso de búsqueda y selección avanzaba, las mejores cadenas persistían en mayor medida en la población, aquéllas que se mantenían en la media estabilizaban su presencia y las peores tendían a desaparecer. De esta forma, los esquemas permiten explorar las similitudes entre cadenas con la finalidad de mejorar las direcciones de búsqueda del algoritmo.

Un esquema es una entidad definida sobre el espacio de genotipos y que representa un subconjunto de éste. Es decir, un esquema es un patrón de similitud que se construye introduciendo el signo "\*" de indiferencia en el alfabeto de alelos, de forma que representa a todos los individuos que encajan en su representación. De esta forma, los esquemas se obtienen fijando los valores de ciertas posiciones de un cromosoma y dando libertad al valor de las restantes.

En consecuencia, un esquema se trata de un conjunto de cromosomas que tienen una serie de características comunes entre ellos: las posiciones fijas. Así, por ejemplo, partiendo de un alfabeto binario  $V = (0,1)$  se puede construir un esquema ampliando el alfabeto anterior por medio del símbolo de indiferencia "\*" de la siguiente forma:  $V' = (0, *, *, 1)$ .

El esquema anterior representa las cuatro cadenas binarias siguientes:

0, 0, 0, 1      0, 1, 0, 1      0, 0, 1, 1      0, 1, 1, 1

es decir, un esquema representa a  $2^n$  cromosomas, en alfabeto binario.

Por otro lado, se define como orden de un esquema H, conocido como  $[o(H)]$ , al número de posiciones fijas (por ejemplo con 0 o 1) que contiene dicho esquema, es decir, el número de cromosomas menos los signos de indiferencia.

Por su parte, el número de posiciones (dígitos) o longitud de una cadena se denota por  $L$ , siendo la longitud característica de un esquema  $[\delta(H)]$  la distancia en dígitos entre las posiciones fijas extremas, de forma que un esquema con una única posición fija tiene longitud característica cero, con independencia de la longitud total de la cadena.

El número total de esquemas de longitud característica  $n$  en un alfabeto binario es  $(2+1)^n$ , debido a que en cada posición puede haber un 0, un 1 o un signo de indiferencia. Sin embargo, el espacio de búsqueda se reduce a  $2^n$ , pues el asterisco no representa un valor de las cadenas reales, únicamente es una herramienta para describir semejanzas. Para otros alfabetos será  $c^n$  donde  $c$  es la cardinalidad del alfabeto y  $n$  el número de símbolos de indiferencia contenidos en el esquema en ambos casos.

A efectos ilustrativos el Cuadro 3.7. muestra el orden y la longitud característica de varios esquemas, definidos en cadenas de longitud 8.

H	$o(H)$	$\delta(H)$
1 * * * * * * *	1	0
* * 0 1 1 * * *	3	2
* 1 * 1 1 * * *	3	3

**Cuadro 3.7.**

En consecuencia, el esquema anterior ( $V'$ ) será de orden 2 y de longitud 4. Evidentemente, el esquema (0,0,0,1) sólo representa una cadena mientras que el esquema (\*, \*, \*, \*) representa a todas las cadenas con longitud 4.

Por otra parte, la frecuencia del esquema  $H$  en la generación  $t$ , denotado por  $[m(H, t)]$ , es el número de veces que aparece dicho esquema en esa generación. La frecuencia para la generación  $(t+1)$  cambiará en función de los efectos de la selección, reproducción y operadores genéticos.

Otra propiedad de un esquema es su calidad media que suele representarse como  $[\text{eval}(H, t)]$  y que establece la calidad media de todos los cromosomas representados por el esquema  $H$  y que están presentes en la generación  $t$ . Partiendo de que existen  $p$  cromosomas pertenecientes al esquema  $H$ , la calidad media estará representada por:

$$\text{eval}(H, t) = \sum_{j=1}^p \frac{f_j}{p}$$

Dado que un esquema  $H$  representa a  $2^n = 2^{L-o(H)}$  cadenas, cuanto mayor sea el orden del esquema menor será el número de cadenas a que represente. De ahí que se establezca el orden de un esquema como una medida de su especificidad. En concreto, el orden servirá para calcular la probabilidad de supervivencia de un esquema frente al operador de mutación.

Por su parte, la longitud característica de un esquema es una medida de la compacidad de la información contenida en el esquema. De esta forma, en un esquema con una sola posición especificada tiene una longitud característica de cero. La noción de longitud de un esquema es un concepto útil a efectos de calcular la probabilidad de supervivencia de un esquema frente a los cruces.

Desde el punto de vista geométrico, un esquema equivale a un hiperplano en el espacio de búsqueda, de forma que si se considera el espacio de genotipos como un hiperespacio  $\lambda$ -dimensional, al fijar el valor de  $k$  posiciones de una cadena se está definiendo un hiperespacio  $(\lambda-k)$  dimensional o esquema de orden  $k$  como muestra la Figura 3.6.

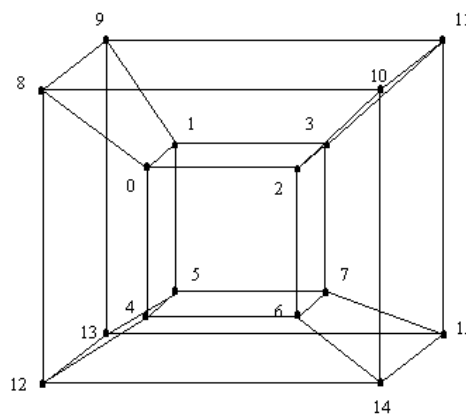


Figura 3.6.

Cada individuo de la población (es decir, cada punto en el hiperespacio  $\lambda$ -dimensional) pertenece a numerosos hiperplanos (es decir, a numerosos esquemas), en concreto a  $2^k$ , es decir, el número total de hiperplanos  $(\lambda-k)$ -dimensionales con  $0 \leq k \leq \lambda$  definibles que se intersectan en un punto común.

Si se asume que dichos esquemas definen particiones homogéneas del espacio de cromosomas, es decir que los individuos pertenecientes a un mismo esquema tienen características similares y, por tanto, una calidad parecida, cuando se evalúa un individuo se obtiene información relativa a todos los individuos que comparten pertenencia a los mismos esquemas. Desde esta perspectiva, el algoritmo no procesa individuos sino esquemas, de forma que en una población de  $n$  individuos se procesan  $O(n^3)$  esquemas por generación (GOLDBERG, 1989). Esta propiedad es denominada "paralelismo implícito".

De esta forma, la representación geométrica se puede realizar como muestra la Figura 3.7., así como un ejemplo numérico incluido en la Figura 3.8.

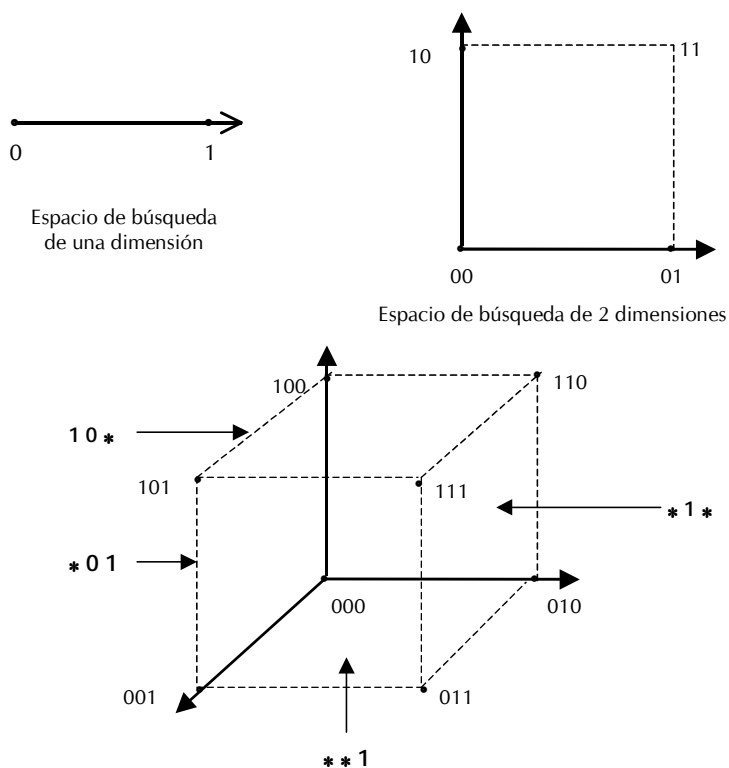


Figura 3.7.

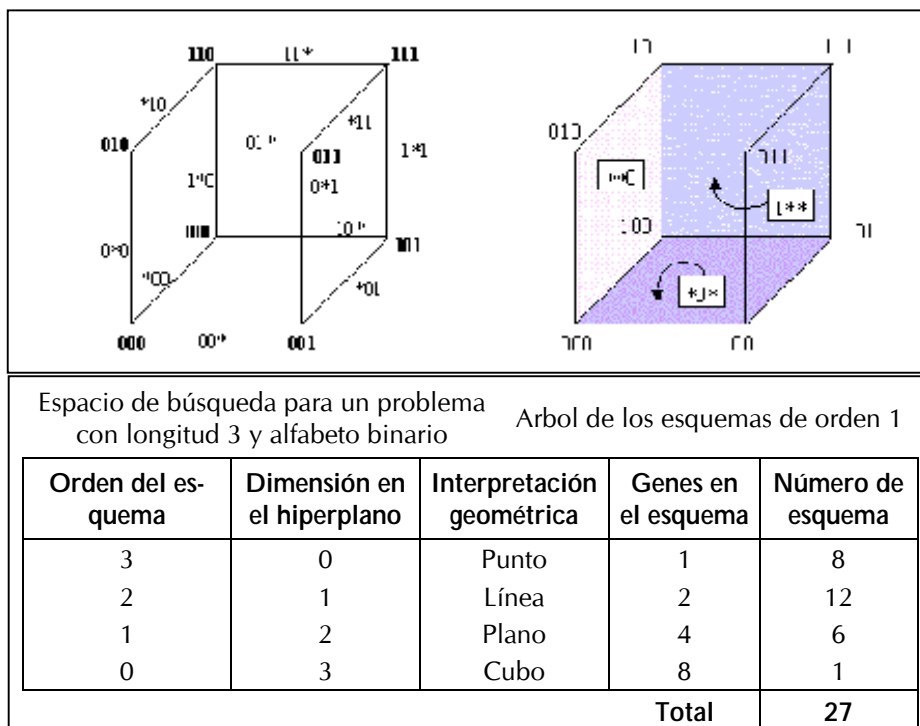


Figura 3.8.

A partir de las consideraciones anteriores es posible formular la ecuación que muestre cómo evoluciona en promedio un esquema dentro de la población de un algoritmo genético, permitiendo comprender el modo de operación de los AGs a través de la actuación de los distintos operadores.

**a) Los esquemas en la fase de selección**

El proceso de selección afecta a los esquemas en distinta forma dependiendo del mecanismo utilizado para la misma. Considerando la utilización de un mecanismo de selección en el que la probabilidad de seleccionar un individuo sea proporcional a su adecuación, es decir, durante la selección un cromosoma es copiado en la población padre de acuerdo a su calidad, se podrá apreciar entonces cómo aquellos esquemas cuya adecuación media observada sea superior a la media de la población incrementan su número de instancias, esto es, el número de puntos que pertenecen al hiperplano correspondiente.

En consecuencia, en la generación siguiente se espera tener  $m(H, t + 1)$  representaciones del esquema H:

$$m(H, t + 1) = m(H, t) * \frac{\text{eval}(H, t)}{\sum_{i=1}^N f_i} * N$$
$$m(H, t + 1) = m(H, t) * \frac{\text{eval}(H, t)}{\bar{f}}$$

donde N es el tamaño de la población, ya que en la selección proporcional el valor esperado de copias de un cromosoma es igual a la probabilidad de ser seleccionado por el número de padres que se elijan, de forma que al estar en el caso de reemplazo generacional el número de padres es N.

Como se ha expuesto anteriormente, el número de esquemas crece o disminuye según sea la calidad del esquema respecto a la calidad media de la población  $\bar{f}$ . Si la calidad es superior a la media, el número de copias será mayor que 1 y, por tanto, la cantidad de esquemas del tipo H aumentará y viceversa.

Si se representa la frecuencia del esquema en la generación t + 1, respecto al ratio  $\varepsilon$  se tiene que:

$$\varepsilon = \frac{(\text{eval}(H, t) - \bar{f})}{\bar{f}} \Rightarrow m(H, t + 1) = m(H, t) \times (1 + \varepsilon)$$

De la expresión anterior se puede extraer que si la calidad media del esquema es mayor que la calidad media de la población,  $\varepsilon$  tiene un valor mayor que cero, y por tanto la frecuencia aumentará.

Si se analiza la evolución desde la generación inicial, se puede comprobar que es exponencial, tal como se comprueba en la ecuación:

$$m(H, t + 1) = m(H, t) \times (1 + \varepsilon)^t$$

En consecuencia, se demuestra que la selección proporcional favorece el aumento de los individuos mejor adaptados, pero los métodos de ordenación también cumplen este teorema aumentando el número de individuos adaptados de una generación a las siguientes.

A efectos ilustrativos se plantea el siguiente ejemplo: Sea una población con la correspondiente adecuación individual y adecuación media recogida en el Cuadro 3.8.

Población	Adecuación (f)
1 0 1	5
1 0 0	1
0 1 0	2
1 1 0	3
Media $\bar{f}$	2'75

**Cuadro 3.8.**

La adecuación de distintos esquemas posibles considerados a efectos ilustrativos se refleja en el Cuadro 3.9.

Esquemas (H)	F (H,t)
* * *	$(5 + 1 + 2 + 3)/4 = 2'75$
* * 0	$(1 + 2 + 3)/3 = 2$
* * 1	$5/1 = 5$
* 0 *	$(5 + 1)/2 = 3$
* 0 0	$1/1 = 1$
* 0 1	$5/1 = 5$
* 1 *	$(2 + 3)/2 = 2'5$
(...)	(...)

**Cuadro 3.9.**



De forma que aplicando la función anteriormente descrita, es posible establecer la frecuencia de cada uno de los esquemas en la generación (t + 1) como sigue:

- Para el esquema (\* \* \*):

$$m(* * *, t) = 4$$

$$f(* * *, t) = 2'75$$

$$m(* * *, t + 1) = m(* * *, t) \cdot \frac{f(* * *)}{\bar{f}} = 4 \cdot \frac{2'75}{2'75} = 4$$

- Para el esquema (\* 1 \*):

$$m(* 1 *, t) = 2$$

$$f(* 1 *, t) = 2'5$$

$$m(* 1 *, t + 1) = m(* 1 *, t) \cdot \frac{f(* 1 *)}{\bar{f}} = 2 \cdot \frac{2'5}{2'75} = 1'82$$

De forma similar, se podría establecer para el resto de esquemas, obteniendo la frecuencia con que un esquema aparecerá en las generaciones posteriores.

A continuación, se analiza el efecto de los distintos operadores genéticos sobre los esquemas, dado que en ausencia de cruce y mutación sería imposible incluir nuevos esquemas en la población, lo que implicaría la convergencia hacia el mejor esquema de los generados en la población inicial.

## b) Los esquemas en la fase de cruce

La actuación del operador de cruce pretende combinar dos buenos esquemas con el fin de encontrar uno mejor. Sin embargo, el operador de cruce introduce la posibilidad de romper el esquema al actuar sobre los cromosomas seleccionados, disminuyendo la frecuencia de ocurrencia en posteriores generaciones. Por ejemplo, la cadena 101 tiene dos posibles puntos de cruce:

1	0	1
---	---	---

1	0	1
---	---	---

1	0	1
---	---	---

El efecto en los ocho esquemas posibles, en función del punto de cruce elegido, se muestra en el Cuadro 3.10., en el que se puede comprobar la posibilidad de que el operador de cruce afecte al esquema.

	Cruce punto 1	Cruce punto 2
* * *	Factible	Factible
1 * *	Factible	Factible
* * 1	Factible	Factible
* 0 *	Factible	Factible
1 0 *	Roto	Factible
* 0 1	Factible	Roto
1 * 1	Factible	Roto
1 0 1	Factible	Roto

**Cuadro 3.10.**

La cuantificación de esta ruptura depende de la longitud del esquema, de la longitud de la cadena y de la probabilidad de aplicar el operador de cruce. La probabilidad de supervivencia del esquema H después del operador de cruce se puede escribir como sigue:

$$p_{S_{cruce}} = 1 - p_c \times \frac{\delta(H)}{L-1}$$

donde:

$p_c$  probabilidad de aplicar el operador de cruce

$\delta(H)$  Longitud del esquema

$L$  Longitud de la cadena

La frecuencia del esquema H en la generación  $t+1$  se obtendrá multiplicando el ratio  $\epsilon$  anteriormente expuesto por la anterior expresión, como se recoge a continuación:

$$m(H, t+1) = \frac{\text{eval}(H, t) - \bar{f}}{\bar{f}} \cdot \left( 1 - p_c \cdot \frac{\delta(H)}{L-1} \right)$$

Normalmente se asume un valor mayor o igual en lugar del signo igual contenido en la expresión anterior, debido a que se debe recoger la posibilidad de obtener nuevos esquemas H por medio del cruce de una cadena que lo contenga con otra que no o bien mediante el cruce de dos cadenas que en la generación  $t$  no contenían dicho esquema pero sí incluían partes del mismo.

En el ejemplo anterior, suponiendo para mayor simplicidad una probabilidad de cruce igual a la unidad, se puede cuantificar la supervivencia de los esquemas, por ejemplo para los esquemas siguientes:

$$(10^*) \rightarrow p_{s_{\text{cruce}}} = 1 - p_c \cdot \frac{\delta(H)}{L-1} = 1 - \frac{1}{3-1} = 0'5$$

$$(1^*1) \rightarrow p_{s_{\text{cruce}}} = 1 - p_c \cdot \frac{\delta(H)}{L-1} = 1 - \frac{2}{3-1} = 0$$

lo que permite comprobar los resultados mostrados en el Cuadro 3.10. anterior.

### c) Los esquemas en la fase de mutación

En lo referente al operador de mutación, su actuación puede provocar también la ruptura de un esquema, en el caso concreto en que el bit a mutar sea uno de los que permanecen fijos en el esquema. Sin embargo, y dado que el porcentaje de mutación normalmente es bajo, la influencia de este operador en la frecuencia de un esquema en ningún caso será significativa.

La probabilidad de supervivencia frente a la mutación será función de la probabilidad de mutación y del número de posiciones fijas en el esquema (orden del esquema), y se puede expresar como sigue:

$$p_{s_{\text{mutación}}} = (1 - p_m)^{o(H)} \quad \text{como } p_m \ll 1 \Rightarrow p_{s_{\text{mutación}}} \approx 1 - o(H) \times p_m$$

donde:

$p_m$  probabilidad de mutación

$o(H)$  orden del esquema H

De esta forma, si se establece una probabilidad de mutación de 0'001 y se parte de los esquemas siguientes:

$$\begin{aligned} H_1 &= * * 0 * 1 * & o(H_1) &= 2 \\ H_2 &= 0 1 * 0 * 1 & o(H_2) &= 4 \end{aligned}$$

La probabilidad de supervivencia tras la mutación se puede calcular:

$$p_{s_{\text{mutación}}}(H_1) = 1 - o(H_1) \cdot p_m = 1 - 2 \cdot 0'001 = 0'998$$

$$p_{s_{\text{mutación}}}(H_2) = 1 - o(H_2) \cdot p_m = 1 - 4 \cdot 0'001 = 0'996$$

De acuerdo con lo anterior, se puede concluir que los esquemas de bajo orden tienen más posibilidad de sobrevivir que los de orden alto.

Para finalizar, si bien se debería considerar el efecto conjunto del operador de cruce y el de mutación, en general este efecto se considera despreciable, de forma que la frecuencia del esquema H en la generación t + 1, después de todo el proceso anteriormente descrito, puede representarse como sigue:

$$m(H, t + 1) \geq m(H, t) \times \frac{\text{eval}(H, t)}{\bar{f}} \times \left[ 1 - p_c \times \frac{\delta(H)}{L - 1} - o(H) \times p_m \right]$$

La expresión anterior es conocida como *Teorema de los Esquemas*, cuyo desarrollo completo puede encontrarse en GOLDBERG (1989). Suponiendo el uso de un operador de cruce de un punto y de un operador de mutación que altere el valor de un gen, y asumiendo que la adecuación media observada de un esquema es una buena estimación de su adecuación media real, se observa que los esquemas de bajo orden y pequeña longitud de definición (número de posiciones existentes entre la primera y última de las posiciones definidas) cuya adecuación media sea superior al resto de la población son los que más aumentan su número de instancias. Por tanto, el funcionamiento del algoritmo genético será óptimo si es posible combinar estos esquemas cortos para formar soluciones cada vez mejores. A esta suposición se la denomina "Hipótesis de los Bloques de Construcción" (*Building Block Hypothesis*).

En consecuencia, la presencia de un esquema H en una población evoluciona en promedio según la siguiente fórmula:

$$\bar{\xi} m(H, P[t + 1]) = \bar{\xi} m(H, P[t]) \cdot \kappa_g \cdot \kappa_E$$

siendo:

$\kappa_g$  factor de crecimiento de H en la población, que mide la tendencia del esquema a aumentar su presencia en la población intermedia

$\kappa_E$  factor de supervivencia, que mide la probabilidad de que pase a la siguiente generación

El elemento que hace aumentar la presencia de los esquemas en la población intermedia es la selección tal y como se ha descrito con anterioridad. Por su parte, la posibilidad de que los esquemas sean destruidos por los operadores genéticos antes de pasar a la próxima generación viene recogida por el factor de supervivencia, el cual como se ha demostrado, si bien es difícil de calcular exactamente, sí que es posible acotarlo.

De acuerdo con las consideraciones precedentes, se puede establecer el teorema fundamental de los AGs en los siguientes términos: En las sucesivas generaciones de un AG, la presencia de un esquema H en la población evoluciona estadísticamente de modo exponencial según la ecuación anteriormente descrita.

Asimismo, de dicha ecuación se pueden extraer varias consecuencias prácticas:

- La presencia de un esquema en una población evoluciona estadísticamente en progresión geométrica, cuyo factor está determinado por la aptitud relativa del esquema, su longitud característica y su orden. En concreto, los esquemas con una aptitud por encima de la media (esquemas aventajados) incrementan exponencialmente su presencia en sucesivas generaciones ( $\kappa_g > 1$ ), mientras que esquemas con aptitud por debajo de la media decrecientemente su presencia en la población ( $\kappa_g < 1$ ).
- La tendencia de los esquemas aventajados a incrementar su presencia en las generaciones sucesivas se acentúa cuando el esquema es corto y de bajo orden, es decir, cuando ( $\kappa_E \approx 1$ ).

A modo de resumen, y en relación con el Teorema Fundamental de los AGs, la introducción de los tres operadores se puede explicar entonces como sigue:

1. Operador de selección. La selección se encarga de incrementar geométricamente la presencia de los esquemas aventajados y reducir la presencia del resto de esquemas. No obstante, la selección no introduce nuevos esquemas.
2. Operador de cruce. El cruce permite el intercambio estructurado de información útil (esquemas cortos, de bajo orden y aventajados) entre individuos. Desde esta perspectiva el cruce es un operador esencial para el funcionamiento eficaz de un AG.
3. Operador de mutación. La mutación introduce variedad en el juego de esquemas de la población y proporciona un mecanismo de seguridad frente a posibles pérdidas de información valiosa, de ahí que se pueda considerar a la mutación como un operador secundario frente al anterior.

Las consideraciones precedentes permiten deducir que los AGs exploran el espacio de búsqueda a través de la yuxtaposición de esquemas aventajados, cortos y de bajo orden, los “bloques constructivos” antes citados.

Por tanto, el funcionamiento de los AGs se basa en facilitar la proliferación exponencialmente creciente de los esquemas más aptos y exponencialmente decreciente para los esquemas menos aptos. De hecho, en un sentido amplio, los AGs procesan

esquemas y, en particular, procesan de modo útil bloques constructivos. En consecuencia, cuanto más intervenga la construcción por bloques más eficaz será el funcionamiento del AG.

Esta eficacia se puede cuantificar a través de la propiedad del Paralelismo Implícito de los AGs. En efecto, como se comentó con anterioridad, en una generación de  $n$  individuos binarios de tamaño  $L$  existen entre  $2^L$  y  $n \times 2^L$  esquemas distintos. Algunos de dichos esquemas, en particular los bloques constructivos, serán procesados de modo útil, es decir, no alterados por los operadores genéticos y, por tanto, reproducidos exponencialmente.

El mecanismo subyacente que da eficacia a los AGs a pesar de su generalidad se basa en el hecho de que, aunque el AG sólo procesa  $n$  estructuras en cada generación, se puede demostrar que bajo hipótesis muy generales se procesan de modo útil  $n^3$  esquemas. En concreto, la robustez de los AGs frente a otros sistemas de optimización se asienta en que implícitamente realizan una búsqueda en paralelo. Dicho paralelismo implícito, ya comentado, se obtiene sin ningún requerimiento añadido de memoria o potencia de cálculo.

Por último, conviene poner de manifiesto que las consideraciones anteriores se basan en la ecuación de crecimiento reproductivo de un esquema en una población definida previamente, la cual a niveles prácticos introduce varios requisitos o limitaciones, a saber:

- Por motivos técnicos, se debe imponer que la función de aptitud devuelva siempre valores no negativos. Al objeto de solventar esta limitación se distingue la función de aptitud de la función de evaluación a través de un reescalado.
- Se admite que el número de generaciones es infinito. Esta limitación se puede obviar considerando un número de generaciones lo suficientemente grande como para que los valores esperados sean útiles en la práctica o bien ejecutando el AG varias veces para resolver un mismo problema.
- Se supone implícitamente que la codificación es perfecta, es decir, que a cada punto del dominio le corresponde uno y sólo un individuo codificado en el espacio de búsqueda. Sin embargo, esta circunstancia no se da siempre por lo que se deberán habilitar procedimientos auxiliares de discriminación que de un modo u otro perjudicarán la eficacia del AG.
- Asimismo, se admite que el número de individuos de la población es infinito. Esta limitación se admite asumiendo que los operadores funcionan de manera razonablemente inesgada con respecto a los valores esperados y que el tama-

ño es lo suficientemente grande como para mantener una población variada. No obstante, el problema de trabajar con número finito de individuos presenta el riesgo de que debido al proceso de selección, desaparezca un cierto individuo que pudiera ser importante en posteriores etapas, siendo esto más probable cuanto más sesgado esté el proceso de selección hacia los más aptos. Por tanto, se pone en peligro la variedad de la población lo que puede ocasionar una serie de problemas en el funcionamiento del AG. Asimismo, al utilizar poblaciones finitas es inevitable introducir errores estadísticos en la aplicación de los operadores, especialmente en los muestreos, de forma que si no se corrigen se acentúa aún más la pérdida de diversidad.

El teorema de los esquemas anteriormente mostrado ha sido considerado durante largo tiempo como una explicación convincente del funcionamiento de los AGs. Sin embargo, en la última década ha surgido una fuerte corriente crítica cuestionando la validez de dicho teorema y de distintos resultados que emanaban de él. Entre los argumentos que justifican esta actitud se encuentran los siguientes:

- a. Desconexión entre el procesamiento de esquemas y la construcción de soluciones válidas (ALTENBERG, 1995): el teorema de los esquemas afirma que los esquemas cuya adecuación media observada sea superior a la media aumentarán su número de ocurrencias en la población. Sin embargo, esto no guarda relación directa con que dichos esquemas permitan construir mejores soluciones. Por supuesto, la hipótesis de los bloques de construcción sí garantiza esto, pero dicha hipótesis es lógicamente independiente del teorema, el cual se debe seguir verificando incluso cuando la hipótesis no es válida.
- b. Inadecuación de los esquemas (RADCLIFFE, 1992): los esquemas permiten agrupar conjuntos de soluciones con similitud léxica en sus codificaciones. No obstante, el número de posibles agrupaciones con relevancia para el problema en cuestión es astronómicamente mayor que el número de esquemas posibles, lo que implica que ciertos subconjuntos no podrán ser así agrupados.
- c. Generalidad del teorema de los esquemas: el teorema de los esquemas continúa siendo válido si  $x$  es un subconjunto arbitrario de soluciones en lugar de ser un hiperplano definido por un esquema (VOSE, 1991). Por tanto, la caracterización de un algoritmo genético como un manipulador de esquemas ha de ser replanteada.

Si bien estos tres puntos presentan serias objeciones al funcionamiento de los AGs, la crítica más fuerte, no simplemente en contra del teorema de los esquemas, sino

contra la presunta robustez de los AGs es el denominado “Teorema de *No Free Lunch*”, desarrollado por WOLPERT y MACREADY (1995; 1997), cuya argumentación demuestra que el desarrollo original de HOLLAND (1975) estaba equivocado, al concluir la superioridad de un AG sobre la búsqueda aleatoria. Dicho resultado surgía del análisis de la relación exploración/explotación en el “problema del bandido de dos brazos”, y sugería que el algoritmo era capaz de aprovechar de manera óptima o cuasi-óptima la información que iba obteniendo sobre la distribución de los valores de adecuación de las soluciones al problema considerado. Sin embargo, tal como el mencionado Teorema de *No Free Lunch* demuestra, cualquier algoritmo ofrece los mismos resultados medios si se promedia sobre todos los problemas posibles.

Este resultado ha sido más recientemente reelaborado dando lugar al denominado *Lema de Conservación* (ENGLISH, 1997), el cual muestra la incapacidad de explotar información referente a la distribución de los valores de adecuación en el espacio de soluciones, dado que dicha distribución es mutuamente independiente de la distribución de los valores de adecuación de las soluciones visitadas.

El principal corolario de estos resultados es la necesidad de introducir conocimiento del problema en consideración dentro del algoritmo de búsqueda, como se propugnará explícitamente en el desarrollo constructivo propuesto en la presente Memoria, ya que de ello dependerá el rendimiento de éste. Esta necesidad puede parecer obvia para los investigadores de numerosos campos, pero sorprendentemente no lo ha sido para muchos investigadores en computación evolutiva.

### 3.2.3. Métodos y criterios necesarios para la implantación de un Algoritmo Genético

Para implementar un AG será necesario definir a priori una serie de métodos y/o criterios que regirán el funcionamiento del mismo, entre los que cabe destacar como más significativos los siguientes:

- Criterio de codificación.
- Criterio de tratamiento de individuos no factibles.
- Criterio de selección de la población inicial.
- Criterio de parada o solución aceptable.
- Función de evaluación y función de aptitud.
- Operadores genéticos.
- Criterios de selección.
- Parámetros de funcionamiento del AG.



A efectos ilustrativos, con el objeto de facilitar la exposición del funcionamiento operativo de los distintos criterios y operadores de un AG simple se plantea el seguimiento de un problema muy conocido como es del viajante de comercio (TSP), para un listado 5 ciudades a las que, como es sabido, el viajante debe visitar, no pudiendo estar en más de una ciudad a la vez, y realizando un recorrido que permita visitar todas las ciudades en una sola ocasión, minimizando el recorrido total (la distancia total del recorrido).

En los epígrafes siguientes se analizan cada uno de los métodos y/o criterios anteriormente enumerados y se realiza un seguimiento de cada uno de ellos para el problema anteriormente citado.

### **3.2.3.1. Criterio de codificación**

Los algoritmos genéticos procesan esquemas, es decir, patrones de similitud. Esta circunstancia provoca que, con la finalidad de realizar la búsqueda más eficiente, los puntos del espacio de búsqueda se representen mediante cadenas binarias, consiguiendo de esta forma la mayor variedad de esquemas para una longitud determinada.

En consecuencia, en una primera aproximación se puede establecer que los AGs operan exclusivamente con cadenas binarias (representación) y, por tanto, se debe especificar el procedimiento (codificación) con el que se hace corresponder cada punto del dominio con una cadena, es decir, el mecanismo que permita traducir el genotipo en fenotipos.

Como se comentó con anterioridad, la representación más genérica es la binaria, de forma que la cadena de unos y ceros puede ser asimilada a una estructura de tipo cromosomático, manteniendo de esta forma el paralelismo con la biología. Sin embargo, esta representación no resulta útil en la mayoría de los problemas de búsqueda, ya que no es posible encontrar una codificación que de sentido a cada una de las posiciones de que consta el genotipo. Incluso, en algunos casos en los que sí es posible dicha codificación, ésta no garantiza que represente con fidelidad el dominio del problema, lo cual plantea la necesidad de establecer posibles soluciones al problema de representación o codificación que se ajusten a los problemas planteados.

Por tanto, las buenas propiedades de los AGs no dependen del uso del alfabeto binario, razón por la cual en muchos casos se han utilizado codificaciones no binarias, más naturales para los problemas particulares a los que se desee aplicar. Entre estas codificaciones se pueden destacar la utilización de vectores de números reales, vecto-

res de números enteros, listas ordenadas, expresiones en lenguaje lisp, matrices bidimensionales, etc.

En cuanto a la no representación fideligna del dominio del problema es necesario exponer que, desde el punto de vista de los objetos, una representación es adecuada cuando cumple las siguientes propiedades:

1. Poder representar todos los objetos de la clase indicada (completitud).
2. Representar únicamente los objetos de esa clase (coherencia).
3. Todos los objetos deben estar representados por la misma cantidad de codificaciones (uniformidad).
4. Debe ser fácil de aplicar el mecanismo de codificación objeto-individuo en ambos sentidos (sencillez).
5. Pequeños cambios en los individuos deben corresponder con pequeños cambios en los objetos (localidad).

Por su parte, FANG (1994) establece que las normas básicas a tener en cuenta para el diseño de una codificación óptima se pueden resumir en:

1. Cada solución del problema tendrá su codificación.
2. Para cada codificación producida mediante los operadores genéticos existirá su correspondiente solución.
3. Codificación y solución se corresponderán una a una.
4. La codificación deberá permitir heredar de padres a hijos las características inherentes a los primeros.

En la práctica, la codificación binaria no se traduce en representaciones perfectas del dominio, razón por la cual la utilización de dicha representación introduce diferencias entre lo que se está buscando y lo que se quiere buscar.

En lo referente al problema de la utilidad de la representación, es necesario poner de manifiesto la importancia de que las posiciones de que consta el fenotipo tengan algún significado concreto, de forma que si se ordenan apropiadamente dichas posiciones los bloques constructivos serán cortos y compactos, lo que dará eficacia a la búsqueda genética.

Como consecuencia de los dos problemas mencionados se suele establecer que la elección de la representación debe basarse en dos principios:

1. Principio de los bloques constructivos con significado. Las zonas del espacio de búsqueda relevantes para el problema deben poder representarse mediante esquemas cortos y de bajo orden (bloques constructivos).
2. Principio del alfabeto de símbolos mínimo. Se debe elegir el alfabeto de símbolos más pequeño (preferentemente binario) que permita una expresión natural del problema.

Por otro lado, en cuanto a la codificación, cabe señalar que los AGs sólo pueden operar en dominios discretos, de ahí que al enfrentarse a problemas en dominios continuos será necesario discretizarlos previamente.

En el caso de problemas de optimización paramétrica, la discretización es sencilla: para determinar el espacio de búsqueda  $X$  se eligen dos vectores,  $u$  y  $v$ , tales que el dominio  $X$  esté contenido en el paralelepípedo determinado por esos dos vectores:

$$X \subseteq X = [u_1, v_1] \times [u_2, v_2] \times \dots \times [u_m, v_m]$$

De forma que para una tolerancia  $T$  cada parámetro  $x_j$  se codifica en  $L_j$  bits, donde:

$$L_j = \left\lceil \log_2 \left( 1 + \frac{u_j - v_j}{T} \right) \right\rceil \quad \forall j = 1, \dots, m$$

Por otra parte, y dado que no todos los individuos del espacio de búsqueda representan soluciones factibles, será preciso establecer un mecanismo que permita considerar las restricciones. De hecho, esta metodología presenta problemas en aquellas situaciones en que el espacio de búsqueda  $X$  venga definido por inecuaciones, en cuyo caso la determinación de los valores límite de  $u$  y  $v$  no son fáciles de determinar. En este caso, no es conveniente acotar por exceso, ya que esta situación generaría individuos muy largos que consumirían muchos recursos de computación y el AG utilizaría mucho tiempo en procesar individuos no factibles.

Asimismo, la codificación binaria incumple el requisito de localidad de forma que individuos muy próximos tienen codificaciones muy distintas, es decir, con frecuencia dos enteros binarios consecutivos coinciden en muy pocos de sus respectivos dígitos lo cual provoca que una mutación en un individuo genere cambios drásticos en los puntos representados. La explicación gráfica de este fenómeno se conoce con el nombre de "acantilados de Hamming".

Para afrontar este problema existen posibles soluciones entre las que destaca la conocida como “codificación de Gray” (CARUANA y SCHAFFER, 1988), la cual se basa en utilizar codificaciones binarias que mantengan la condición de adyacencia, es decir, que codifiquen enteros consecutivos como cadenas binarias que difieran en un solo bit.

La codificación de Gray asocia a cada entero de la sucesión  $0, 1, \dots, 2^N - 1$  una cadena de bits de longitud  $N$  que se construye aplicando sucesivamente el siguiente procedimiento: se comienza por la cadena  $0\dots 0$ , en cada iteración se conmuta el bit menos significativo que produzca una nueva cadena.

Por ejemplo, en la sucesión,  $0, 1, \dots, 7 = 2^3 - 1$ , se tendría la siguiente codificación de Gray:

000    001    011    010    110    111    101    100

En este caso, la separación que existe en el espacio codificado entre soluciones adyacentes en el espacio decodificado siempre es 1, como se puede observar en el Cuadro 3.11., utilizando la distancia de Hamming como medida de separación.

Soluciones	Código binario	Código Gray
1	00	00
2	01	01
3	10	11
4	11	10

**Cuadro 3.11.**

Como se puede observar en el Cuadro anterior, para las soluciones adyacentes 2 y 3, la distancia es de 2 en código binario, mientras que en el código Gray es de 1. La importancia fundamental de la codificación de Gray es que se reduce la frecuencia de aparición de los acantilados de Hamming y cuando aparecen tienen más amplitud. Ambas circunstancias potencian el funcionamiento de los AGs, pues, interesa que la mayoría de las veces que se apliquen las mutaciones proporcionen ligeros cambios y una pocas veces originen cambios drásticos.

Por su parte, en el caso de problemas con parámetros en dominios continuos resulta especialmente útil la codificación real, la cual consiste en que considerar cada cromosoma como un vector de números reales cuyo tamaño es igual a la longitud del vector solución del problema. De esta forma, cada gen representa una variable del problema. Los valores de los genes deben permanecer en el intervalo establecido para las variables a las cuales representan, de forma que la utilización de este tipo de codificación implica que los operadores genéticos deberán preservar este requerimiento.

Por otro lado, en los problemas de programación dinámica, los objetos buscados son funcionales, es decir, aplicaciones sobre un dominio real, de ahí que una forma sencilla de discretizar los funcionales sea a través de listas de puntos, pero normalmente resulta preferible discretizarlos a través de  $\beta$ -esplines y codificarlos indirectamente mediante los parámetros de dichos  $\beta$ -esplines.

Por último, conviene detenerse en el análisis de la mejora evolutiva de la codificación, pues, como se comentó con anterioridad, en base al principio de los bloques constructivos con significado es importante que las regiones del espacio de búsqueda con gran aptitud se puedan representar con esquemas cortos y compactos, ya que, en caso contrario, el AG tendrá dificultades para converger, corriendo el riesgo de desorientación y extravío.

Para estimular la formación de este tipo de bloques se puede utilizar un nuevo operador unitario denominado "inversión", cuyo objetivo es someter a la propia distribución de posiciones al proceso de evolución. De hecho, la forma de actuar del operador de inversión consiste en seleccionar dos puntos en una cadena e invertir el orden de las posiciones intermedias recordando el significado de cada una, de forma que se obliga a identificar los bits en las cadenas lo cual se lleva a cabo colocando a cada alelo una etiqueta en su posición.

Por ejemplo, para invertir la cadena siguiente entre los puntos 4 y 7:

0<sub>1</sub> 1<sub>2</sub> 1<sub>3</sub> | 0<sub>4</sub> 0<sub>5</sub> 0<sub>6</sub> 1<sub>7</sub> | 1<sub>8</sub> 0<sub>9</sub> 0<sub>10</sub>

se obtendría:

0<sub>1</sub> 1<sub>2</sub> 1<sub>3</sub> | 1<sub>7</sub> 0<sub>6</sub> 0<sub>5</sub> 0<sub>4</sub> | 1<sub>8</sub> 0<sub>9</sub> 0<sub>10</sub>

De acuerdo con lo anterior, la segunda cadena sigue representado al mismo individuo pero con otra estructura. De ahí la denominación de "mutación estructural" con la que también se conoce al operador de inversión.

Sin embargo, la utilización de etiquetas hace que no siempre sea posible aplicar el operador de cruce por lo que en este caso será necesario habilitar criterios con los que evitar cruces erróneos.

Asimismo, el operador de inversión facilita que el AG no sólo busque el mejor contenido (fenotipo), sino también la mejor estructura (genotipo), lo cual es especialmente útil cuando el mecanismo de formación de bloques constructivos no funciona, ya que en muchas situaciones con la introducción del operador de inversión se consigue desbloquear dicho mecanismo.

La utilización del operador de inversión proporciona una ayuda limitada en el caso de problemas en los cuales la representación mediante cadenas binarias sea demasiado pobre y, en consecuencia, sea imposible encontrar una ordenación de las posiciones que verifique mínimamente el principio de bloques constructivos con significado. En estos casos será necesario encontrar otras opciones como puede ser la incorporación de conocimiento específico o bien utilizar una variedad de AGs diseñada para resolver este tipo de problemas que se conocen con la denominación de “algoritmos genéticos tramados” (GOLDBERG, 1993).

El ejemplo ilustrativo que se está desarrollando (TSP), se pretende sea lo más genérico posible, de forma que se plantea una codificación binaria que resulta ser fácilmente traducida en cromosomas, utilizando una matriz binaria para representar cada posible solución cuyas entradas vienen dadas por la expresión:

$$V_{ct} = \begin{cases} 1 & \text{si la ciudad } c \text{ es visitada en el lugar } t \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

De esta forma, la matriz que se construya para representar la solución contendrá un cero y sólo uno en cada fila y en cada columna de la misma.

La Figura 3.9. muestra los caminos que representan las soluciones siguientes:

$$V_1 = 1 \ 2 \ 5 \ 4 \ 3$$

$$V_2 = 3 \ 5 \ 4 \ 2 \ 1$$

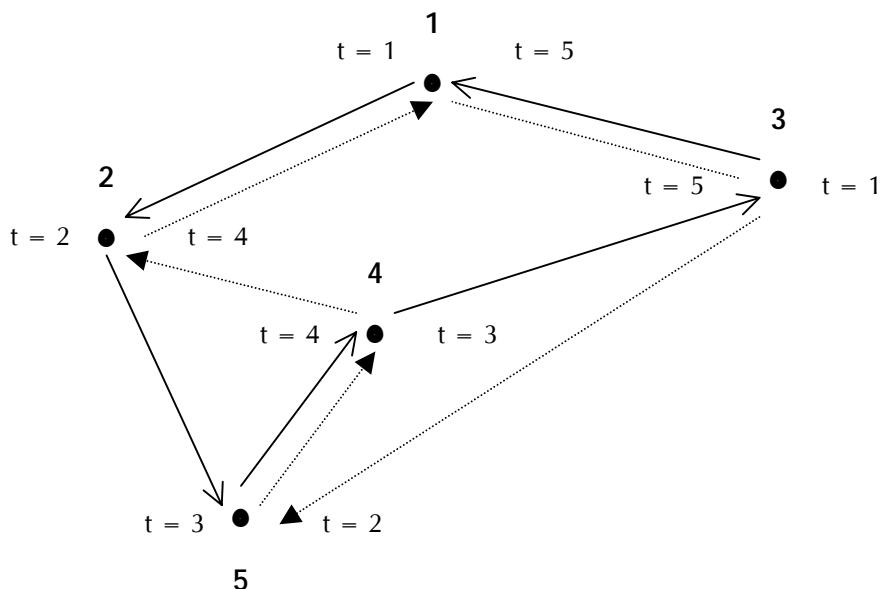


Figura 3.9.

Las matrices representativas de las soluciones anteriores son recogidos en los Cuadros 3.12. y 3.13. siguientes.

Ciudad (c)	Momento (t)
1	1 0 0 0 0
2	0 1 0 0 0
3	0 0 0 0 1
4	0 0 0 1 0
5	0 0 1 0 0

**Cuadro 3.12.**

Ciudad (c)	Momento (t)
1	0 0 0 0 1
2	0 0 0 1 0
3	1 0 0 0 0
4	0 0 1 0 0
5	0 1 0 0 0

**Cuadro 3.13.**

De forma que las matrices anteriores se pueden representar mediante los cromosomas siguientes:

$$V_1 = 1000001000000010001000100$$

$$V_2 = 0000100010100000010001000$$

Este tipo de representación permite que un recorrido con el mismo orden, pero con puntos de origen diferentes estén representados por matrices diferentes y, por tanto, por cromosomas diferentes. Por ejemplo, la matriz siguiente representa el recorrido  $V_3 = 25431$ , tal como se muestra en el Cuadro 3.14.

Ciudad (c)	Momento (t)
1	0 0 0 0 1
2	1 0 0 0 0
3	0 0 0 1 0
4	0 0 1 0 0
5	0 1 0 0 0

**Cuadro 3.14.**

Conviene observar como dicho recorrido representa el mismo que  $V_1 = 12543$ , pero con puntos de partida diferentes.

### 3.2.3.2. Criterio de tratamiento de individuos no factibles

La necesidad de establecer en ciertos casos un mecanismo que facilite el tratamiento de individuos no factibles ha quedado puesta de manifiesto en el apartado an-

terior, de ahí que en este epígrafe se analice con mayor detenimiento las posibilidades que existen en este aspecto.

Como en principio los AGs son mecanismos de búsqueda sin restricciones, para poder utilizar una codificación binaria será necesario codificar sobre un superconjunto del dominio del problema, cuya elección viene condicionada por dos factores: fácil codificación y que dicho superconjunto no sea mucho mayor que el dominio, debido a que obligaría al AG a utilizar mucho tiempo en el proceso de individuos no factibles.

La solución a este problema reside en la incorporación de forma directa o indirecta de conocimiento específico del problema, para lo cual se utilizan básicamente tres tipos de técnicas, a saber:

- Técnicas de penalización.
- Técnicas de reparación o corrección.
- Técnicas de decodificación.

#### **a. Técnicas de penalización**

Como indica su denominación, estas técnicas tratan de afrontar el problema penalizando a los individuos no factibles. Los AGs generan individuos sin tener en consideración su factibilidad reduciendo la aptitud de los que resulten ser no factibles.

En principio, se puede plantear la posibilidad de desechar del proceso a los individuos no factibles que se vayan generando (técnica de filtrado), es decir, establecer un sistema de penalización extremo. Sin embargo, la idea de utilizar funciones de penalización se basa en la posibilidad de que el camino hacia buenos individuos factibles pase por la producción de individuos no factibles como estructuras intermedias.

Si la función de penalización es muy fuerte la población avanzará rápidamente hacia individuos factibles y el AG no tendrá tiempo de analizar el paso intermedio. De ahí que se establezcan técnicas de penalización con un cierto grado. El problema de estas técnicas radica en establecer la medida del grado de “no-factibilidad” con la finalidad de penalizar más a aquellos puntos más alejados del dominio del problema.

En el caso de problemas de optimización paramétrica se suele definir el dominio del problema implícitamente a través de un conjunto de  $n$  restricciones expresadas como inecuaciones de la forma siguiente:

$$g_i(x) \geq 0$$



en cuyo caso se puede establecer el grado de violación de la  $i$ -ésima restricción de la siguiente manera:

$$h_i(x) = \begin{cases} -g(i) & \text{sii } g_i(x) < 0 \\ 0 & \text{sii } g_i(x) \geq 0 \end{cases} \quad (\forall i = 1, \dots, p)$$

e incluir los  $h_i$  en la función de evaluación:

$$E(v) \leftarrow E(v) - K \cdot P [h_1(v), \dots, h_p(v)]$$

donde:

- $p$       número total de restricciones
- $h_i$      grado de violación de la  $i$ -ésima restricción
- $K$       coeficiente global de penalización

La función  $P$  es una función positiva y creciente que debe ser definida para cada problema en particular.

Las funciones de penalización muy severas, como el caso de la comentada técnica de filtrado, no son recomendables en problemas fuertemente restringidos, es decir, en problemas en que hay muchas probabilidades de generar individuos no factibles. Esto es así debido a que no sólo se corre el riesgo de pérdida de tiempo en procesar este tipo de individuos, sino que también es probable que en estos casos, cuando se encuentre un individuo factible, éste sobresalga en demasía sobre los demás por el hecho de ser factible y provoque a su vez una convergencia prematura, evitando las ventajas que se pretendían con el hecho de introducir individuos no factibles.

Por su parte, las funciones de penalización muy flexibles provocan que en ciertas circunstancias dejen prosperar a individuos no factibles por tener una aptitud neta mayor que individuos factibles.

Por otro lado, conviene señalar que, frente a la utilización de las funciones de penalización, algunos autores se muestran más favorables a premiar a los individuos factibles. Las técnicas con este tipo de funcionamiento se conocen como "técnicas de gratificación" y su análisis es similar al expuesto para las técnicas de penalización.

**b. Técnicas de reparación o corrección**

Estas técnicas se basan en establecer un procedimiento que permita corregir las posibles soluciones no factibles que se generen. Si bien en principio podría ser una técnica aceptable, en la práctica se plantea el problema de encontrar un procedimiento de corrección específico para cada problema y que no consuma excesivos recursos de computación.

**c. Técnicas de decodificación**

Estas técnicas consisten en procurar un sistema de codificación que haga prácticamente inviable la generación de soluciones no factibles. Es decir, se pretende modificar el superconjunto del dominio a través del proceso de codificación de forma que se aproxime lo máximo posible al dominio. Su aplicación implica modificar los operadores genéticos para que tras su utilización se conserve la factibilidad de los individuos.

Por último, cabe destacar el denominado “paradigma del recuerdo del comportamiento”, que es una técnica de consideración de restricciones desarrollada para los AGs que consiste en encadenar dos AGs, en el primero la función de aptitud únicamente mide el grado de satisfacción de las restricciones, de forma que el segundo toma como población inicial la población final del primero (la cual recuerda las restricciones) y evoluciona según la aptitud neta del problema que deberá ser modificada para que el valor de salida sea cero cuando no se satisfagan las restricciones.

El procedimiento de codificación utilizado para el ejemplo de ilustración práctica (TSP), precisa introducir un mecanismo para tratar los individuos no factibles (recorridos no posibles), ya que el problema presenta restricciones que se deberán tener presentes, tanto en la generación de la población inicial como en las poblaciones obtenidas tras los operadores genéticos, con la finalidad de eliminar y no evaluar soluciones no factibles. De hecho, el tratamiento de individuos no factibles en el caso del ejemplo precisa formular el problema teniendo en cuenta dichas restricciones, lo cual se puede realizar como sigue:

Encontrar la combinación  $V_{ct}$ , para  $c = 1, \dots, C$  y  $t = 1, \dots, C$ , tal que minimice la función:

$$U(V_{11}, V_{12}, \dots, V_{cc}) = \sum_{t=1}^C \sum_{c=1}^C \sum_{\zeta=1}^C V_{ct} \cdot V_{\zeta} (t+1) \cdot D_{c\zeta}$$

donde:

$D_{cc}$  distancia entre la ciudad  $c$  y la ciudad  $c'$

sujeto a las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} \sum_c V_{ct} = 1 & \text{para } t = 1, \dots, C \\ \sum_t V_{ct} = 1 & \text{para } c = 1, \dots, C \end{cases}$$

Operando de la forma anterior, se puede verificar la factibilidad del recorrido  $V_1 = 12543$  de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} V_{11} = V_{22} = V_{53} = V_{44} = V_{35} &= 1 \\ V_{ct} &= 0 \end{aligned}$$

pudiendo simplificarse como sigue:

$$U(V_{11}, \dots, V_{55}) = D_{13} + D_{21} + D_{52} + D_{45} + D_{34}$$

De esta forma, utilizando las restricciones como función de penalización se puede plantear la función objetivo de tal forma que aquellos individuos que no cumplan las mismas no sean considerados.

### 3.2.3.3. Criterio de selección de la población inicial

Como parece evidente, la población inicial del AG debería ser lo más variada posible, pues la distribución de aptitudes debe ser uniforme para evitar convergencias prematuras y posibilitar la variedad de esquemas. En este sentido, según MICHALEWICZ (1992a), la forma más empleada para obtener los individuos que formarán la primera iteración es la generación aleatoria, en la que las soluciones iniciales estarán distribuidas de manera uniforme en el espacio de búsqueda. En este ámbito, la capacidad de exploración inicial dependerá de la relación entre el número de soluciones potenciales totales y el número de individuos utilizados en cada iteración, de forma que cuanto menor sea este ratio mayor será el poder exploratorio del AG.

Sin embargo, al disminuir dicho valor se disminuye la velocidad de búsqueda con el consiguiente retraso en la convergencia del proceso, lo que implica la necesidad de un mayor número de generaciones y en consecuencia de tiempo de proceso. Por tanto, se trata de un conflicto entre exploración y explotación del espacio de búsqueda,

de ahí que en la aplicación práctica existan dos opciones en función de la información de que se disponga, a saber:

1. Elegir la población inicial al azar.
2. Elegir una población inicial factible y/o próxima al óptimo utilizando el conocimiento específico.

La población inicial debe contener el mayor número posible de elementos factibles, pero, en algunos casos, especialmente en problemas con un número elevado de restricciones, es difícil encontrar puntos factibles y se debe comenzar a funcionar con una cantidad reducida. En este caso, se debe procurar que el tamaño de la población no sea muy pequeño, ya que perjudicaría el requisito de diversidad. Tampoco es conveniente introducir un número muy grande de soluciones no factibles, porque se reduciría la eficiencia del AG.

Una de las propuestas que ha sido muy utilizada en estos casos, consiste en repetir en la población inicial los puntos factibles, de forma que si bien no se eliminan los inconvenientes anteriores sí se ve reducida su potencialidad, aunque también este problema cabe afrontarlo desde otra perspectiva que consiste en comenzar con una población pequeña e ir aumentándola según progresa su evolución, como se detallará con posterioridad.

En lo que respecta a la elección de la población inicial resulta de interés poder analizar la incidencia de la misma en la convergencia del AG al óptimo, es decir, establecer si es posible modificar el AG de forma que converja siempre en el óptimo, con independencia de la población inicial. Para asegurar la convergencia es necesario añadir un mecanismo denominado "prueba de contractividad", el cual consiste en adaptar el AG para que cumpla las condiciones del denominado "Teorema del punto fijo de Banach", con el cual se garantiza la convergencia.

El Teorema de Banach afirma que toda aplicación contractiva  $f: H \rightarrow H$  sobre un espacio métrico completo  $(H, \delta)$  tiene un único punto de fijo  $x_f \in H$  el cual verifica que:

$$(\forall x_0 \in H) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} f^{[t]}(x_0) = x_f$$

donde:

$$f^{[0]}(x) = x \quad f^{[k]}(x) = f(f^{[k-1]}(x)) \quad (\forall k = 1, 2, \dots)$$

De esta forma, con independencia de la población inicial, si se encuentra un espacio métrico apropiado en el que el bucle básico del AG fuera contractivo quedaría demostrada la convergencia del algoritmo hacia el mismo punto fijo. Asimismo, es posible demostrar que existen dichos espacios métricos en los que el bucle básico del AG es contractivo, basta con hacer una imposición adicional al bucle que consista en considerar como válida una iteración, si y sólo si hay una mejora absoluta en la aptitud media de la población, es decir:

$$\text{AveFitn}(P[t]) < \text{AveFitn} ( P[t + 1] )$$

En consecuencia, se puede concluir que con la prueba de contractividad la elección de la población inicial sería indiferente, ya que el AG convergerá en cualquier caso. Sin embargo, la importancia de la elección de la población inicial reside en su incidencia en la velocidad de convergencia si bien no es posible establecer a priori si cierta población inicial proporcionará mayor o menor velocidad de convergencia.

En la práctica es posible que el algoritmo se “atasque” en cierto valor de la población, debido a que los operadores genéticos no son capaces de mejorar la aptitud media. En estos casos, se suele recurrir a eliminar la prueba de contractividad temporalmente, de forma que si sigue ocurriendo será debido a que se debería recurrir a otros criterios de contractividad, la mayoría de los cuales dependerán del problema.

En el ejemplo de aplicación práctica (TSP), se puede utilizar para generar la población inicial un criterio aleatorio, imponiendo el cumplimiento de las restricciones para evitar que individuos que representen soluciones no factibles provoquen pérdida de tiempo en el proceso de optimización. Para ello, en el momento de generar la población aleatoriamente, se establece que la matriz representativa de cada recorrido (cada individuo) contenga un 1 y solo uno en cada fila y en cada columna.

#### **3.2.3.4. Criterio de convergencia, parada o solución aceptable**

En principio, el criterio de terminación de un AG se plantea en términos de un determinado número de iteraciones, asumiendo que en base a la hipótesis de construcciones de bloques y con una población inicial adecuada, los mejores individuos de la población se acercarán cada vez más al óptimo, de forma que al llegar a un cierto número de iteraciones a efectos prácticos el algoritmo habrá convergido en el óptimo.

Otra forma de establecer el criterio de convergencia es mediante el concepto de “sesgo”, definido como la distancia o desviación entre la población. Así, para un elemento de la cadena en codificación binaria, el sesgo se puede medir como tanto por ciento de ceros o unos que hay en una posición en la cadena. En consecuencia, para

las cadenas en su conjunto, el sesgo será el tanto por ciento de ellas que son iguales y de este modo, si sólo hay dos cadenas iguales en una población de 100, el sesgo sería del 2%.

Por otro lado, conviene tener en cuenta que el factor de convergencia guarda una estrecha relación con el método de selección, de forma que si éste es fuerte, la población convergerá rápidamente. No obstante, en muchas situaciones estos criterios de parada son excesivamente arbitrarios, razón por la cual cabe considerar la existencia de otra serie de criterios de terminación entre los que cabe destacar los siguientes:

- a. Criterio de terminación enfocado al coste (criterio tipo MAX). Este criterio supone limitar a priori el número máximo de iteraciones. Una variación de este criterio se plantea en situaciones en las que la función de evaluación es complicada y consiste en establecer a priori el número máximo de evaluaciones. Si bien son criterios sencillos de aplicar, ambos presentan el mismo inconveniente que viene dado por la forma de establecer dicho valor máximo. En efecto, no existe ninguna manera lógica de determinar dichos valores de forma que es posible que el AG no llegue, es decir, al finalizar el número máximo no se encuentre lo suficientemente cerca del óptimo, o bien que el AG consuma recursos inútilmente estando ya lo suficientemente cerca del óptimo.
- b. Criterio de terminación enfocado a la calidad (criterios incrementales de terminación o criterios de tipo TOL). Este criterio consiste en establecer ciertos criterios de convergencia de forma que el AG termina cuando se alcanzan los mismos. En función del criterio que se utiliza para evaluar la convergencia se pueden distinguir dos tipos principales, a saber:
  1. Enfocados a la estructura. La forma de evaluar la convergencia de la población es en función de la cantidad de genes que han convergido. Para ello, se establece que un gen del genotipo ha convergido cuando cierto porcentaje de la población (aproximadamente el 90%) tiene los alelos iguales en dicho gen. La búsqueda termina cuando el número de genes que han convergido excede cierto porcentaje (sobre el 95%) del total de genes de que consta el genotipo.
  2. Enfocados al contenido. Se establece un cierto grado de tolerancia  $T$  de forma que se mide el progreso del AG en un cierto número de iteraciones. La búsqueda finaliza cuando el progreso del AG es menor que dicho  $T$ . La medición del progreso realizado por el AG se determina como el incremento relativo de la aptitud total de la población, si bien es posible utilizar la aptitud máxima o mínima en función del problema.

Asimismo, también resulta posible utilizar un criterio híbrido que utilice el grado de tolerancia y un criterio tipo MAX para cuando el proceso de búsqueda se alargue en el tiempo.

No obstante lo anterior, el método más comúnmente utilizado para la convergencia de los AGs es el conocido con la denominación de “elitismo”, el cual consiste en realizar una selección en dos partes: en primer término, del total de la población inicial se establece una élite de  $r$  miembros que se incorporan a la solución final sin pasar por la población intermedia. Normalmente, el tamaño de la élite suele ser pequeño y el tipo de muestreo puede ser directo o por sorteo. Posteriormente, la población auxiliar de criadores se muestra de entre los  $(n-r)$  miembros restantes de la población inicial.

En este sentido, la Figura 3.10. muestra cómo se modifica el bucle básico del funcionamiento de un AG al introducir el elitismo.

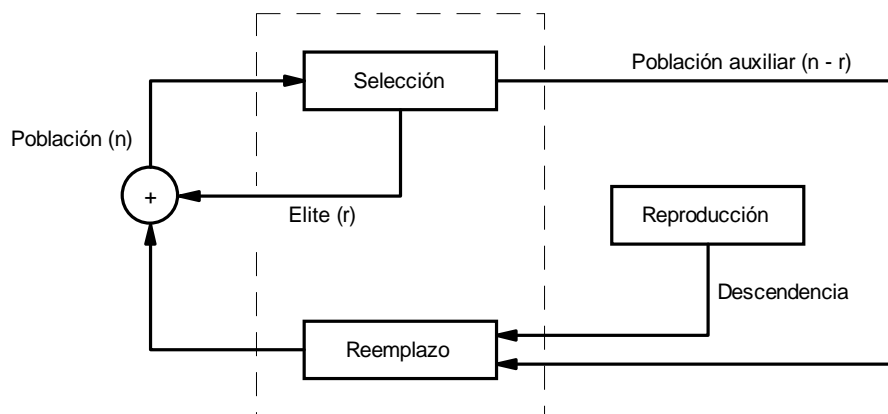


Figura 3.10.

En ciertas condiciones, la introducción del elitismo garantiza la convergencia teórica al óptimo global, si bien en la práctica simplemente mejora la velocidad de convergencia de los AGs cuando la función de evaluación es unimodal, es decir, no existen subóptimos. Por el contrario, la velocidad de convergencia empeora cuando se trata de funciones fuertemente multimodales.

En poblaciones de tamaños pequeños se consiguen resultados similares a los que proporciona el elitismo introduciendo reinicializaciones periódicas en los AGs, es decir, cada vez que el AG converge se salvan los mejores individuos, se reinician los demás y se vuelve a comenzar. La reinicialización tiene efectos beneficiosos sobre las prestaciones del método debido a que introduce diversidad, requisito especialmente importante en las poblaciones pequeñas.

### **3.2.3.5. Función de evaluación y función de aptitud**

La ejecución de un AG precisa establecer la función de evaluación para los individuos, así como una función de aptitud que se deriva directamente de ella por desplazamiento y escalado. En definitiva, la función de evaluación constituye el nexo entre el AG y el problema a resolver.

Como consecuencia de la necesidad de controlar la diversidad de la población y de posibilitar que las evaluaciones tomen valores positivos es preciso distinguir entre función de evaluación y función de aptitud.

La función de evaluación en principio se establece como el objetivo a maximizar mediante la utilización del AG. Sin embargo, en la práctica no resulta sencilla la determinación de la función de evaluación, ya que se plantean varios inconvenientes o problemas, entre los que cabe destacar los siguientes:

1. En muchas situaciones no es posible establecer de forma numérica dicho objetivo, es decir, no es factible determinar una función de evaluación natural. Por ejemplo, en situaciones de verdadero o falso, en los que la utilización de un AG debería permitir analizar los distintos “grados” con que se cumplen las situaciones que se desean maximizar (por ejemplo, los verdaderos). En este caso, el problema reside en cuantificar la calidad de los distintos individuos y por tanto la elección de la función de evaluación no es inmediata. Sin embargo, existen diversas formas para replantear problemas de este tipo en el momento de establecer la función de evaluación.
2. La función de evaluación debe ser fácilmente utilizable en la práctica.
3. Dado que los AGs maximizan aptitudes, se admite por defecto que se maximiza el objetivo. No obstante, en ciertos problemas es más sencillo plantear el mismo como un problema de minimización del objetivo. La solución en estos casos es automática, basta con considerar la función de evaluación como el inverso de la función inicial.

Una vez establecida la función de evaluación, se construye la función de aptitud mediante el desplazamiento y el escalado de la misma.

El Teorema Fundamental de los AGs exige que la función de aptitud devuelva valores positivos. Con esta finalidad se realiza el “desplazamiento” de la función de evaluación, si bien, bajo condiciones muy generales se puede demostrar que si para las evaluaciones negativas se da una aptitud nula se sigue cumpliendo dicho Teorema. Sin embargo, en la práctica este procedimiento no resulta muy útil, ya que ralentiza la convergencia del AG. En estas circunstancias, la forma más utilizada para hacer positi-



vas las evaluaciones es la denominada “ventana de desplazamiento” que consiste en desplazar las evaluaciones de la siguiente forma:

$$\text{Fitness}(v) = F - \text{Eval}(v) \quad \forall v \in P$$

donde  $F$  es una cota superior para las evaluaciones, es decir:

$$(\forall p) \quad \forall v \in P \quad \text{Fitness}(v[t]) \leq F$$

El principal problema radica en que no suele ser posible conocer a priori el rango de valores en los que se mueve la función de evaluación, de ahí que sea necesario ir adaptando el valor de  $F$  de la siguiente forma:

$$\text{Fitness}(v[t]) = F_{\max}[t] - \text{Eval}(v[t])$$

$$\forall v[t] \in P[t]$$

siendo  $F_{\max}$  la aptitud máxima de cualquier individuo evaluado hasta la iteración inmediatamente anterior ( $t-1$ ).

Asimismo, el establecimiento de las cotas para las evaluaciones de la forma descrita anteriormente plantea ciertos problemas en el caso en que el valor de  $F_{\max}[t]$  o, en su caso, el valor de  $F$  no se encuentren lo suficientemente cerca del valor de la máxima aptitud de la generación actual, debido principalmente a la pérdida de diversidad que origina, a su vez, un retardo en la búsqueda que incluso puede llegar a estancarla.

Si  $F_{\max}[t]$  es mucho mayor que cualquier evaluación actual, la capacidad de discriminación de aptitudes será muy pequeña, es decir, las correspondientes aptitudes serán muy parecidas. En consecuencia, se reducirá la presión selectiva hacia los mejores individuos y la búsqueda se estancará con el consiguiente riesgo de deriva genética. Por tanto, se considera necesario actualizar periódicamente el valor de  $F_{\max}$  cada cierto número de generaciones, tratando de evitar la pérdida de diversidad.

Otra forma de controlar la diversidad de las aptitudes es mediante el denominado “escalado” de la función de evaluación, el cual consiste en definir una función de aptitud neta distinta de la función de evaluación. El escalado facilita la convergencia prematura hacia superindividuos, es decir, el fenómeno con causas opuestas al anterior, pero con los mismos efectos. En términos generales, se trata de controlar los efectos de la presión selectiva, amortiguándolos en las fases tempranas de la evolución y acentuándolos en las fases tardías.

En este sentido, GOLDBERG (1989) describe el proceso de la siguiente forma: “desde el estudio pionero de DE JONG, el escalado de los valores de la función objeti-

vo se ha convertido en una práctica ampliamente aceptada. Se hace esto para mantener los niveles apropiados de competición a lo largo de una simulación. Sin escalado, en las fases tempranas hay una tendencia a que unos pocos superindividuos dominen el proceso de selección. En este caso, los valores de la función objetivo deben ser subescalados para evitar que tales superindividuos ocupen la población. Mas tarde, cuando la población ha convergido casi en su totalidad, la competición entre los miembros de la población es menos intensa y la simulación tiende a evolucionar erráticamente. En este caso los valores de la función objetivo deben ser sobreescalados para acentuar las diferencias entre los miembros de la población con el fin de continuar favoreciendo a los mejores miembros”.

Entre los mecanismos de escalado destacan los cuatro siguientes:

1. Escalado lineal. La aptitud se establece en función de los valores que proporciona la función de evaluación de la siguiente manera:

$$\text{Fitness}(v) = a \cdot \text{Eval}(v) + b$$

en donde los valores de  $a$  y  $b$  se calculan para cada generación considerando que se deben cumplir las siguientes condiciones:

- a. Los valores medios de la función de evaluación y de la función de aptitud de la población deben coincidir, lo cual implicará que:

$$b = \text{AveEval}(P) \cdot (1-a)$$

La finalidad es garantizar que un elemento típico de la población contribuirá en promedio con el descendiente de la próxima generación.

- b. Se debe obligar a que se cumpla que:

$$\text{MaxFitn}(P) = C \cdot \text{AveFitn}(P)$$

con la finalidad de controlar la presión selectiva. En este caso, el valor  $C$  toma valores entre 1'2 y 2'0 para tamaños de población típicos, lo cual hace que el miembro más apto de la población obtenga en promedio  $C$  descendientes en próxima generación.

Esta condición obliga a que se cumpla lo siguiente:

$$a = (C - 1) \frac{\bar{f}}{\text{MaxEval} - \bar{f}}$$

Si bien el escalado lineal cumple en principio los objetivos genéricos del escalado (subescalar las evaluaciones en las fases tempranas y sobreescalarlas en las tardías), presenta el inconveniente de que habitualmente proporciona aptitudes negativas para los peores individuos. En estas circunstancias, esta condición es posible sustituirla por la obligación de que la aptitud del peor individuo sea cero, es decir:

$$\text{MinFitn}(P) = 0$$

lo que implicará que se cumpla que:

$$a = \frac{\bar{f}}{\bar{f} - \text{MinEval}}$$

2. Truncación sigma. Trata de evitar el inconveniente de las evaluaciones negativas en las fases tardías de la evolución mediante la utilización de la desviación estándar ( $\sigma$ ) de las evaluaciones para el cálculo de la aptitud, es decir:

$$f'_i = f_i - (\bar{f} - c \cdot \sigma)$$

en donde la constante  $c$  toma valores entre 1 y 3 que sea un múltiplo de la desviación estándar y a los resultados negativos se les asigna el valor cero.

3. Escalado exponencial. En este caso, la aptitud se establece como una potencia de la función de evaluación, es decir:

$$f'_i = (f_i)^k$$

en donde el parámetro  $k$  tomará un valor distinto dependiendo del problema en particular si bien en todos los casos será próximo a 1.

MICHALEWICZ (1992) propone una estimación dinámica para  $k$  de forma que su valor sea mayor y, por tanto más fuerte el escalado, a medida que evoluciona el algoritmo.

4. Escalado basado en el orden. Estos métodos establecen la aptitud de cada individuo como una función (normalmente lineal) de la posición que ocupa cada uno en una lista ordenada. Por tanto, el problema reside en establecer los criterios de ordenación de los distintos individuos, los cuales pueden ser diversos, si bien el más utilizado es el que consiste en ordenarlos por orden decreciente de aptitudes brutas.

Estos métodos proporcionan una forma natural de controlar la diversidad de la población, permitiendo ejercer un mejor control sobre la presión selectiva y controlando la amplitud de la búsqueda. Sin embargo, al basarse en el orden relativo de los individuos se ignora la información sobre las diferencias de aptitudes con el consecuente retraso en el proceso de búsqueda.

En el ejemplo de aplicación práctica (TSP), en el momento de establecer el tratamiento de los individuos no factibles, ante la necesidad de establecer las restricciones que impone el problema, se estableció formalmente la formulación del problema. En consecuencia, la función de adecuación consistirá en medir la distancia total que aporta cada recorrido, sin más que determinar la distancia de los arcos (traslados de una ciudad a otra) en el orden en que sean establecidos en cada solución.

Dado que se trata de un problema de minimización, como se comentó con anterioridad, el mejor individuo será aquel que constituya una distancia menor. De esta forma, para establecer la bondad de las soluciones es necesario determinar la distancia para cada recorrido, en función de las distancias entre las ciudades, que para el ejemplo se recogen el Cuadro 3.15.

		Ciudad				
		1	2	3	4	5
Ciudad	1	-	10	8	14	12
	2	10	-	5	20	16
	3	8	5	-	7	11
	4	14	20	7	-	15
	5	12	16	11	15	-

Cuadro 3.15.

La matriz de distancias posibilita evaluar la bondad de cada solución, si bien, como se ha comentado, al plantearse un objetivo de minimización, el individuo mejor adaptado será aquel que posea una distancia menor y que en el ejemplo viene determinado por  $V_1$ :

	Distancia
$V_1 = 1\ 2\ 5\ 4\ 3$	56
$V_2 = 3\ 5\ 4\ 2\ 1$	64

### 3.2.3.6. Operadores genéticos

La búsqueda en los AGs clásicos se basa prácticamente en su totalidad en los operadores de cruce y mutación. El operador de cruce es útil para facilitar el intercambio estructurado de la información útil (bloques constructivos) entre los distintos individuos. Por su parte, el operador de mutación es un mecanismo que previene de la posible pérdida de información válida y facilita la exploración de zonas del ámbito de búsqueda que el cruce por sí solo no realizaría.

Sin embargo, es posible establecer mecanismos que mejoren la búsqueda genética clásica desde la perspectiva del procesamiento de esquemas. Su fundamento radica en que los operadores clásicos presentan una serie de inconvenientes, entre los que se pueden destacar:

- a. Operador de cruce. Existen combinaciones de bloques constructivos que el cruce tradicional no puede realizar. Por ejemplo, los esquemas 001\*\*\*01\*\* y \*\*\*11\*\*\*00, mediante el cruce clásico no podrían componer el esquema que los combina 00111\*0100.
- b. La asimetría existente entre el cruce y la mutación. La unidad de mutación es el gen mientras que para el cruce es el individuo. Por tanto, la probabilidad de que un individuo se cruce no depende de su longitud mientras que la probabilidad de que contenga genes mutados es más alta cuanto más largo sea.

En consecuencia, se pueden plantear alternativas que traten de mejorar dichas deficiencias, tanto para lo que se refiere al operador de cruce como para el operador de mutación, a saber:

#### a. Operador de cruce

El operador de cruce en un AG juega un papel significativamente superior al resto de los operadores genéticos. La razón se encuentra en que este operador permite el intercambio de características de una generación a la siguiente, es decir, es el responsable de evolucionar las especies.

La actuación de este operador es probabilística, es decir, se asigna una probabilidad para que se pueda llevar a cabo, cuyo valor depende entre otros factores del tipo de problema y de la representación utilizada. En un principio, GOLDBERG (1989) estableció como valor para dicha probabilidad el 60%, si bien estudios posteriores han analizado la posibilidad de adaptar dichas probabilidades al estado del proceso genético (MICHALEWICZ, 1992a).

El operador de cruce clásico es el denominado “cruce en un punto”, el cual consiste en localizar un punto al azar en la cadena de cromosomas de los padres, de forma que los descendientes se obtienen intercambiando las cadenas de los progenitores entre sí, tal como muestra la Figura 3.11.

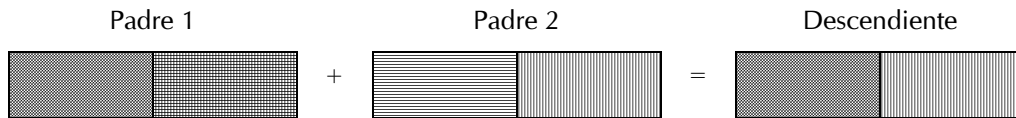


Figura 3.11.

Sin embargo, existen varias alternativas que introducen variaciones en el operador de cruce clásico, entre las más significativas se encuentran las cuatro siguientes:

1. Cruce de  $n$  puntos ( $n$ -point crossover): Este operador constituye una generalización del anterior en el que se seleccionan  $n$  puntos en el interior de las cadenas y se intercambian los segmentos entre puntos de corte alternos. Típicamente,  $n = 2$ , (cruce de doble punto o *double-point crossover*). Su representación se recoge en la Figura 3.12.

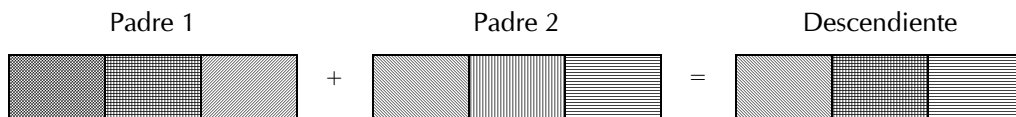


Figura 3.12.

En el operador de cruce en 2 puntos, los individuos pueden contemplarse como un circuito en el cual se efectúa la selección aleatoria de dos puntos, como se recoge en la Figura 3.13.

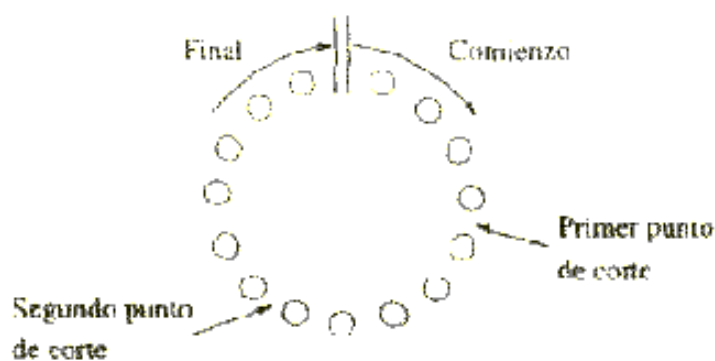
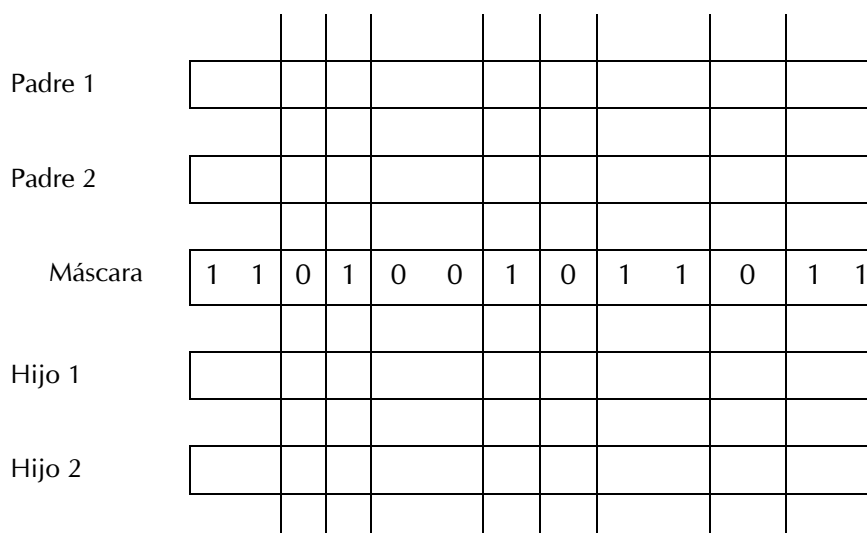


Figura 3.13.

2. Cruce uniforme (*uniform crossover*): Este operador, ideado por SYSWERDA (1989), presenta un funcionamiento similar al del cruce de  $n$  puntos con  $n = l$ . Se trata, por tanto, de una generalización del operador anterior en el que cada gen tiene una probabilidad del 50% de ser intercambiado por el correspondiente del otro padre, utilizándose para ello una máscara de cruce generada aleatoriamente. Cuando existe un 1 en la “máscara de cruce” el gen es copiado del primer padre, mientras que cuando existe un 0 el gen se copia del segundo padre.

Un ejemplo del funcionamiento de este tipo de operador de cruce es el que se recoge en la Figura 3.14.



**Figura 3.14.**

En este caso, se realiza un *test* aleatorio para decidir de cuál de los antecesores se toma cada posición de la cadena. Por tanto, se produce un intercambio de genes en lugar de intercambiar bloques constructivos; razón por la cual este tipo de cruce es especialmente útil en aquellos casos en los que se trate de atributos específicos en los que no interviene la posición en la que han sido codificados.

El término operador de cruce uniforme se relaciona con la obtención de la máscara de cruce uniforme, en el sentido de que, como se comentó con anterioridad, cualquiera de los elementos del alfabeto tenga asociada la misma probabilidad. En términos de teoría de la probabilidad, la máscara de cruce está compuesta por una muestra aleatoria extraída de una distribución de probabilidad de Bernouilli de parámetro  $1/2$ .

Sin embargo, es posible tener en cuenta el valor de la función de adecuación de cada padre en el momento de generar la máscara de cruce, de forma que cuanto mayor sea la adecuación de un individuo, más probable sea heredar sus características. En este caso la máscara de cruce se interpreta como una muestra aleatoria de tamaño 1 proveniente de una distribución de Bernoulli de parámetro:

$$p = \frac{f_i}{(f_j + f_i)}$$

donde  $i$  y  $j$  son los individuos seleccionados para ser padres.

Una representación del cruce uniforme se refleja en la Figura 3.15.

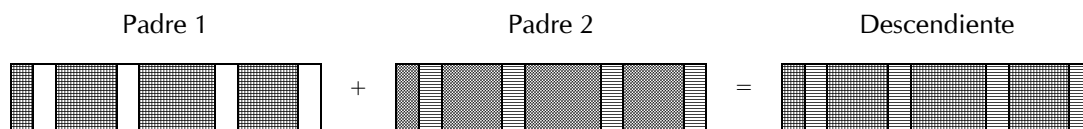


Figura 3.15.

3. Cruce segmentado: Consiste en reemplazar un número fijo de puntos de cruce por una probabilidad de segmentación que establece la probabilidad de que se produzca un cruce al llegar a cierto punto de la cadena. Su objetivo principal es eliminar la asimetría comentado con anterioridad que existe en este operador frente a la mutación.
4. Cruce cíclico: Este tipo de cruce (GOLDBERG, 1989) resulta especialmente útil en problemas de asignación en el que se imponen restricciones en cuanto al número de dígitos representados en una codificación real. El funcionamiento del mismo consiste en tomar una posición al azar en la representación de los progenitores, la cual se mantiene en los descendientes. A partir de ahí se produce un ciclo en el que se van localizando las posiciones que anteriormente ocupaban en el cromosoma los puntos fijados y se colocan respetando el puesto hasta el momento en que se encuentra un punto que ya ha sido colocado, cumpliéndose entonces un ciclo en el cruce, de forma que el resto de puntos se rellenan intercambiando las cadenas.

El principal problema de los operadores anteriores se plantea en el caso de aplicación a problemas con restricciones, en los cuales dichos operadores pueden producir individuos no factibles (individuos que representan soluciones inválidas). En este caso, existen diversas posibilidades para solucionar dicho problema, las cuales presentan ventajas e inconvenientes que en cada caso particular de aplicación será necesario



analizar para establecer las prioridades. Entre tales posibilidades destacan las tres siguientes:

- Eliminar los individuos inválidos. Esta opción tiene el inconveniente de desperdiciar el esfuerzo computacional empleado en generar dichas soluciones.
- Emplear un mecanismo de reparación para producir soluciones correctas.
- Usar una función de penalización que haga que las soluciones inválidas tengan una adecuación menor que las válidas.

Si bien ninguna de las soluciones anteriores es plenamente satisfactoria, se puede generalizar que la mejor opción consiste en modificar los operadores de cruce para que manipulen adecuadamente los individuos. De hecho, éste ha sido el enfoque clásico empleado para el diseño de operadores de cruce para permutaciones.

Por otra parte, el operador de cruce puede verse complementado con una serie de mecanismos, entre los que merecen especial mención los siguientes:

1. Cruces anulares: Tal como expresa la denominación, consiste en suponer para una representación anular de los genes que forman los individuos, es decir en forma de anillo. Este tipo de cruce consiste en cruzar los individuos en un número par de posiciones a diferencia del cruce clásico que obligaba a intercambiar segmentos a partir de una posición fija que venía establecida por los extremos.
2. Cruces externos: Se trata de obligar a que los cruces se produzcan exclusivamente en los puntos de separación entre genes, lo cual es equivalente a incrementar el alfabeto de símbolos lo cual a su vez implica una notable reducción de la propiedad de paralelismo implícito. Sin embargo, el uso de una representación más natural hace que se procesen más esquemas útiles que pueda compensar la pérdida de procesamiento en paralelo.
3. Cruce con barajado: Consiste en realizar de forma previa al cruce una relocalización aleatoria de las posiciones de ambos progenitores a la par. Una vez realizado el cruce se deshace el barajado.
4. Cruces con adaptación: El objetivo que se persigue es que si un cierto punto ocasiona descendencia de baja calidad se extinga y sólo prosperen el resto. Para ello, se sustituyen la asignación aleatoria de los puntos de cruce por asignaciones evolutivas similares a las del propio AG.
5. Cruces solitarios: Este mecanismo consiste en obligar a que no muten aquellos individuos que han sido sometidos al operador de cruce, tratando de evitar la asimetría de aplicación entre ambos operadores.

En el ejemplo de aplicación práctica (TSP), en principio se podrían utilizar varios operadores de cruce, pero dado el carácter ilustrativo del ejemplo se plantean distintas alternativas con la finalidad de analizar las ventajas, inconvenientes y modificaciones necesarias para su adecuación al problema.

El principal inconveniente en la aplicación del operador de cruce es que puede proporcionar que los descendientes representen soluciones no factibles, como se demuestra a continuación en el ejemplo práctico, y en consecuencia será preciso analizar el operador que permite generar descendientes factibles.

En primer término se plantea, por el carácter genérico del mismo, el cruce en un punto de forma que si se cruzan mediante este operador  $V_1$  y  $V_2$  de la forma siguiente, los descendientes  $V_4$  y  $V_5$  serán como sigue:

$$\begin{aligned}
 V_1 &= 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0 \mid 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0 \\
 V_2 &= 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \mid 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0 \\
 &\quad \Downarrow \\
 V_4 &= 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0 \mid 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0 \\
 V_5 &= 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \mid 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0
 \end{aligned}$$

La matriz representativa de los descendientes es la incluida en los Cuadros 3.16. y 3.17. siguientes que, obviamente, representan soluciones no válidas.

$V_4$

Ciudad (c)	Momento (t)
1	1 0 0 0 0
2	0 1 0 0 0
3	0 0 0 0 1
4	0 0 1 0 0
5	0 1 0 0 0

**Cuadro 3.16.**

$V_5$

Ciudad (c)	Momento (t)
1	0 0 0 0 1
2	0 0 0 1 0
3	1 0 0 0 0
4	0 0 0 1 0
5	0 0 1 0 0

**Cuadro 3.17.**

Este inconveniente sería similar con la representación real:

$$\begin{aligned}
 V_1 &= 1\ 2\ 5\ 4\ 3 \\
 V_2 &= 3\ 5\ 4\ 2\ 1 \\
 &\quad \Downarrow \\
 V_4 &= 3\ 5\ 5\ 4\ 3
 \end{aligned}$$

Por tanto, el procedimiento de cruce debe ser dirigido, de tal forma que se asegure que los descendientes representen recorridos válidos. Entre estas alternativas se encuentra el cruce parcialmente trazado que consiste en lo siguiente: dados los dos individuos seleccionados para actuar como padres y establecido el punto de cruce, se realiza el mismo para el primer segmento de la cadena, tal como se muestra a continuación:

$$\begin{array}{l} V_1 = 1\ 2 \mid 5\ 4\ 3 \\ V_2 = 3\ 5 \mid 4\ 2\ 1 \\ \downarrow \\ V_6 = 3\ 5 \quad \_ \_ \_ \end{array}$$

El paso siguiente consiste en añadir el segundo segmento del padre 1 ( $V_1 = \_ \_ 5\ 4\ 3$ ), comenzando el primer dígito que corresponde a la ciudad 5. Como en el descendiente  $V_6$  dicha ciudad ya está incluida (ya ha sido visitada), debido a las restricciones, se debe eliminar, incluyéndose en su lugar la que se encontraba en el progenitor en el puesto de la ciudad 5, es decir, la ciudad 2:

$$V_6 = 3\ 5\ 2 \quad \_ \_$$

Para el siguiente dígito (el 4), no se incumple ninguna restricción y con el último dígito se procede de forma similar al caso anterior. De esta forma, el descendiente quedará como sigue:

$$V_6 = 3\ 5\ 2\ 4\ 1$$

En este caso se obtienen soluciones factibles, cuya representación se muestra en la Figura 3.16.

La opción de cruce anteriormente descrita resulta válida para realizar el cruce en el ejemplo anterior, si bien no es la única opción, de ahí que se plantee analizar la posibilidad de utilizar otros operadores de cruce.

Por ejemplo, si se pretende aplicar el cruce en dos puntos, seleccionando los puntos siguientes:

$$\begin{array}{l} V_1 = 1 \mid 2\ 5 \mid 4\ 3 \\ V_2 = 3 \mid 5\ 4 \mid 2\ 1 \end{array}$$

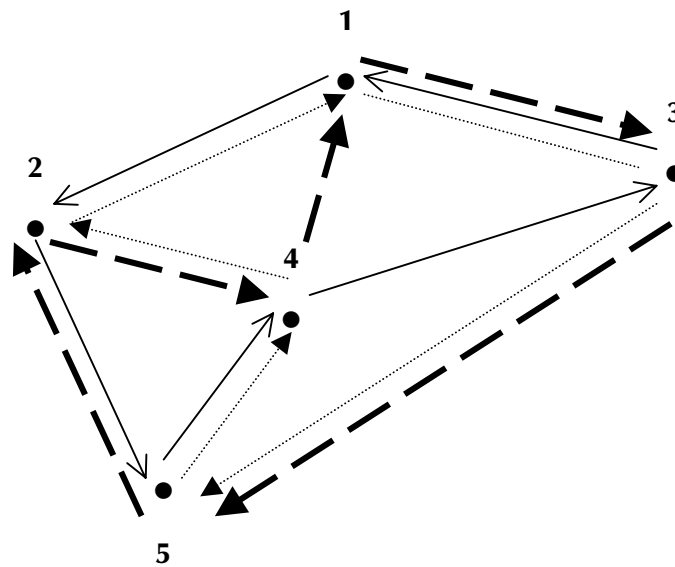


Figura 3.16.

La operativa propia del cruce en dos puntos, provocaría en la mayoría de los casos que los descendientes representaran soluciones no factibles, de forma que es necesario asimismo dirigir el proceso de cruce, por ejemplo, como se expone a continuación:

En primer lugar, el segmento intermedio del primer progenitor es copiado directamente en el descendiente:

$$V_7 = \_ 2 5 \_ \_$$

Los elementos del segundo progenitor se ordenan a partir del segundo punto de cruce, proporcionando el listado 2 1 3 5 4, del cual se eliminan las ciudades ya reflejadas en el descendiente, quedando por tanto, 1 3 4, las cuales se copian ocupando los puntos vacantes, a partir del segundo punto de cruce:

$$V_7 = 4 2 5 1 3$$

Otra posibilidad podría ser aplicar un cruce cíclico, para lo cual se toma una posición al azar, por ejemplo, la primera posición, que se mantiene en la siguiente generación de forma que se tiene:

$$V_1 = 1 2 5 4 3$$

$$V_2 = 3 5 4 2 1$$

↓

$$V_8 = 1 \_ \_ \_ \_$$

$$V_9 = 3 \_ \_ \_ \_$$

Como el primer punto en  $V_9$  es el 3, se localiza el 3 en el primer progenitor y se coloca respetando el puesto:

$$V_8 = 1 \_ \_ \_ 3$$

$$V_9 = 3 \_ \_ \_ 1$$

El lugar quinto en el segundo progenitor es el 1, de forma que se localizaría el 1 en el primer progenitor y se colocaría respetando el puesto. Sin embargo, como el 1 ya está asignado, se establece que se ha cumplido un ciclo en el cruce y el resto de puestos se rellenan intercambiando las cadenas de los progenitores:

$$V_8 = 1 5 4 2 3$$

$$V_9 = 3 2 5 4 1$$

Los procedimientos anteriores son de aplicación similar a efectos del ejemplo de ilustración práctica (TSP), por lo que se omiten desarrollos adicionales. En cualquier caso, el procedimiento deberá utilizar un operador de cruce que bien por sus características bien porque sea dirigido, proporcione individuos que sean factibles, es decir, que cumplan las restricciones que se impongan en la función objetivo.

#### **b. Operador de mutación**

El operador de mutación es el encargado de incluir la diversidad en la búsqueda, facilitando la exploración de zonas aún no tratadas. Su principal característica es permitir que todos los individuos del espacio de búsqueda tengan una probabilidad mayor que cero de ser explorados. Tal funcionamiento permite recuperar características de los individuos que por medio de la selección y el cruce podrían haber perdido, cayendo en el olvido y que, aún siendo buenas características, sería imposible recuperar sin la acción de este operador.

De acuerdo con lo anterior, si bien la mutación constituye un operador secundario, en la práctica es necesaria su aplicación por varias razones, entre las que se pueden destacar las siguientes:

- Desbloqueo del algoritmo. Si en el proceso de ejecución, el algoritmo se bloqueó en un mínimo local, una mutación puede desbloquearlo al incorporar nuevos fenotipos de otras zonas del espacio.
- Acabar con poblaciones degeneradas. Puede ocurrir que, bien por haber un cuasi-mínimo bien porque en pasos iniciales se generara un individuo demasiado bueno que acabara con la diversidad genética, la población tenga los

mismos fenotipos. A priori se pueden plantear algunas soluciones como el escalamiento de la función de adaptación. Sin embargo, si ya se ha llegado a una población degenerada, es preciso que la mutación introduzca nuevos genomas.

- Incrementar el número de saltos evolutivos. Los saltos evolutivos o aparición de un fenotipo especialmente valioso, o dicho de otra forma, la salida de un mínimo local, son poco probables en un algoritmo genético puro para un problema genérico. La mutación permite explorar nuevos subespacios de soluciones, por lo que, si el subespacio es bueno en términos de adaptación, se producirá un salto evolutivo después de la mutación que se expandirá de forma exponencial por la población.
- Enriquecer la diversidad genética. Cuando la población tiene una diversidad genética pobre, la mutación es un mecanismo que previene que la misma evolucione hacia una población degenerada.

Por tanto, si bien la mutación es beneficiosa, será necesario asimismo establecer posibles variaciones que mejoren la utilidad que proporciona el operador de mutación clásico. Entre estas se encuentran las siguientes cuatro alternativas:

1. Mutación estándar: Consiste en mutar cada bit de la cadena según una probabilidad fijada para ello, por tanto, el operador utilizado es cuando se trabaja con codificación binaria. Normalmente, la probabilidad utilizada es muy baja para no incluir demasiada diversidad en la búsqueda con el consiguiente riesgo de pérdida de dirección en la misma. En este sentido, cabe tener en cuenta que, según los estudios realizados por HOLLAND, la probabilidad aceptable sería la comprendida entre 0'1 y 1%.
2. Mutación sobre genes: Su funcionamiento afecta un gen completo (no a un bit) y desde esta perspectiva es similar al cruce externo. En este caso, la mutación se realiza sustituyendo el valor actual del gen por otro más o menos parecido. Su aplicación concreta depende de la codificación utilizada, pero, en general, se establece el nuevo valor sumando o restando con igual probabilidad una cantidad fija al entero con que se ha codificado el correspondiente alelo.
3. Mutación no estacionaria: Con este mecanismo se persigue obligar al AG a que en las fases tempranas realice una búsqueda lo más amplia posible y que se vaya reduciendo hacia una búsqueda más local en las fases tardías. Para ello, la forma más sencilla consiste en establecer que la probabilidad de mutación se vaya reduciendo cada cierto número de generaciones, si bien dependerá del caso en concreto.

4. Mutación no uniforme: Consiste en dar distintas probabilidades de mutación a cada gen (o a cada bit dentro de un gen) dependiendo de su significado. Su desarrollo se debe a MICHALEWICZ (1992a), y se basa en el hecho de que la mutación estándar actúa de forma diferente cuando se utiliza codificación binaria que en caso de codificaciones reales, de tal forma que el operador actúa de forma más aleatoria para la codificación real que para la binaria, donde cambiar un bit aleatoriamente no implica producir un valor totalmente aleatorio del dominio.

En el ejemplo de aplicación práctica (TSP) se puede plantear un procedimiento de mutación, basado en la representación real, que se desarrolle de la siguiente forma: se elige una posición al azar, por ejemplo, la cuarta y se localiza la ciudad que ocupa dicha posición (en el ejemplo, la 4). Se establece un valor aleatorio que proporcione el número de la ciudad que va a pasar a ocupar dicho lugar, por ejemplo, el 5, lo que proporcionaría una solución como la que se recoge a continuación:

$$V_1 = 1 \ 2 \ 5 \ 4 \ 3$$

↓

$$V_{10} = \_ \_ \_ 5 \_$$

↓

$$V_{10} = 1 \ 2 \ 5 \ 5 \ 3$$

La solución obtenida representará siempre una solución no factible, lo que implica la necesidad de dirigir el procedimiento de mutación, que simplemente consistirá en localizar el lugar que ocupaba la ciudad elegida aleatoriamente (la 5) y modificarla por la ciudad que ocupaba el lugar inicialmente establecido (la 4). El resultado representará una solución viable para el problema planteado:

$$V_{10} = 1 \ 2 \ 4 \ 5 \ 3$$

De forma similar a lo establecido en el caso del operador de cruce, sería factible establecer otro tipo de operadores de mutación que, en general, dependerán del problema que se esté abordando y de las restricciones que posea el mismo.

#### 3.2.3.7. Criterios de selección

Los AGs trabajan con cadenas de potenciales soluciones al problema, que gradualmente evolucionarán de generación en generación. La supervivencia por la adecuación significa que sólo los individuos con mejor comportamiento sobrevivirán a largo plazo.

El proceso de selección incide de forma directa en el resultado, de ahí que sea necesario analizar asimismo lo que se conoce como “presión selectiva”, que indica el grado con el que los mejores individuos son favorecidos para formar parte de la población padre, es decir, la presión que se ejerce en el algoritmo para dirigirlo hacia poblaciones cada vez mejor adaptadas al problema.

La importancia de la presión radica en su relación con el ratio de convergencia del AG. En efecto, con una alta presión selectiva se obtiene un ratio de convergencia mayor si bien se introduce mayor probabilidad de convergencia prematura hacia un subóptimo.

De acuerdo con GOLDBERG (1989) y MICHALEWICZ (1992a), los métodos más importantes son los siguientes:

**a. Métodos proporcionales a la calidad.** El valor esperado de los hijos depende de la calidad de los padres elegidos respecto del resto de la población, de forma que “superindividuos”, es decir, individuos con calidad muy superior a la del resto de la población, se seleccionarán como padres con un gran número de copias. Las consecuencias de este tipo de métodos son la pérdida en la diversidad de la población y la convergencia prematura.

Entre estos métodos se pueden destacar los tres siguientes:

1. Selección proporcional a la adecuación o método de la ruleta (*fitness-proportionate selection*): El desarrollo inicial se debe a HOLLAND (1975) si bien ha sido analizado en múltiples ocasiones. Este tipo de selección consiste en seleccionar  $k$  números aleatorios, comprendidos entre 0 y 1, que proporcionarán los  $k$  individuos padres, de forma que cada componente de la población seleccionada para reproducirse es escogido de la población actual de manera independiente, es decir, se realiza una selección aleatoria en la que el individuo  $i$ -ésimo, cuya adecuación o calidad es  $f_i$ , tiene una probabilidad  $p_i$  de ser seleccionado calculada como:

$$p_i = \frac{f_i}{\sum_{j=1}^N f_j}$$

En una población de  $N$  individuos este mecanismo de selección debería alojar  $n_i = N \cdot p_i$  copias del individuo  $i$ -ésimo. La implementación de este tipo de selección que más se ajusta a este ideal es el “muestreo estocástico universal” (*Stochastic Universal Sampling*) (BAKER, 1987), el cual se denomina asimismo “método de la ruleta”, porque se asemeja a una ruleta con marcador. La ruleta estará dividida en tantas áreas como individuos haya en la población y su superficie es proporcional a la probabilidad de cada individuo. La selección imita al proceso llevado a cabo mediante  $k$  tiradas a la ruleta.

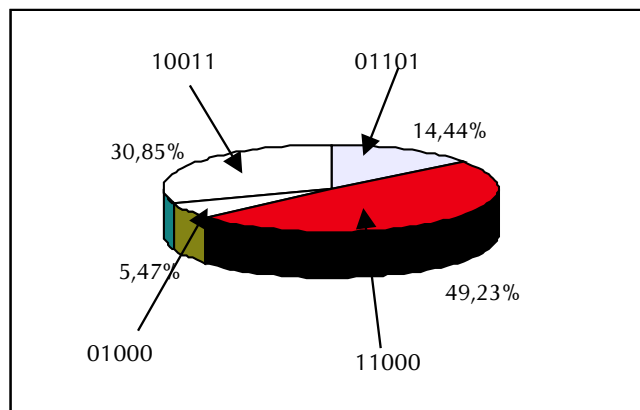


A efectos ilustrativos, supóngase el siguiente ejemplo: El problema consiste en maximizar la función  $f(x) = x^2$ . Para su resolución se tiene una población compuesta por 4 individuos con las características incluidas en el Cuadro 3.18.

Individuo	Cadena	Adecuación	% adecuación total
1	01101	169	14,44%
2	11000	576	49,23%
3	01000	64	5,47%
4	10011	361	30,85%
		1.170	100%

**Cuadro 3.18.**

Una representación gráfica de la selección basada en el método de la ruleta se recoge en la Figura 3.17.



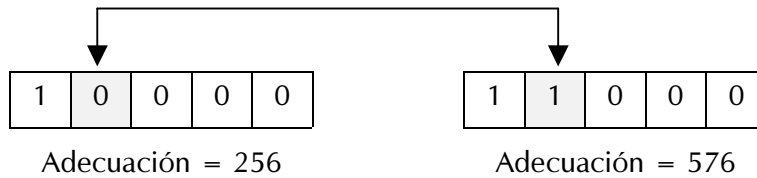
**Figura 3.17.**

La actuación de los operadores genéticos en la población anterior, una vez seleccionados los individuos a actuar como progenitores, se puede plantear como sigue a continuación:

Si se utiliza el operador de cruce clásico (por ejemplo, cruce en el punto 2), los descendientes de los individuos mejor adaptados, es decir, individuos 2 y 4, presentarían la siguiente codificación y adecuación:

Padres			Descendientes		
11	000	(576)	11011	(729)	
10	011	(361)	10000	(256)	

Si el descendiente con peor adecuación (el 2) es sometido al operador de mutación, por ejemplo, en el segundo gen, el resultado tras dicho operador sería:



De esta forma, se puede comprobar que la aplicación del método proporcional a la adecuación para establecer los individuos seleccionados para someterlos a los operadores genéticos posibilitan que los descendientes puedan con mayor probabilidad poseer una adecuación superior a la de los progenitores.

No obstante, la selección proporcional presenta una serie de inconvenientes, entre los que destacan los siguientes:

- El cálculo de la probabilidad de selección  $P_i$  de un individuo, realizada según la fórmula anterior, asume que los valores altos de adecuación son mejores que los más bajos. Esta premisa se cumple en aquellos problemas cuyo objetivo es la maximización de la solución. Sin embargo, en muchas ocasiones el objetivo es la minimización (por ejemplo, de una cierta función de coste), en cuyo caso deberá modificarse y convertirla en maximización. Este proceso se puede realizar de dos formas:

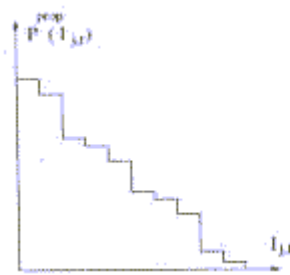
- a. Tomar como función de adecuación  $f_i$  la inversa de la función de adecuación que se desea minimizar:

$$f_i = \frac{1}{f_i}$$

- b. Tomando el valor máximo  $F$  de la función objetivo en el caso de ser conocido a priori o bien tomando para el valor  $F$  el máximo valor de la población actual:

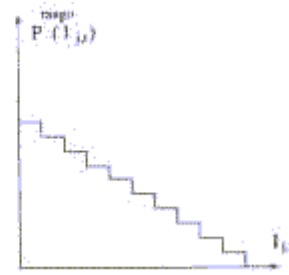
$$f_i = F - f_i$$

- La utilización como criterio de selección la medida de la adecuación puede provocar un problema de rápida convergencia, proveniente de los superindividuos. Para evitarlo es posible efectuar la selección proporcional al rango del individuo, con lo que se produce una repartición más uniforme de la probabilidad de selección, tal como se muestra en las Figuras 3.18. y 3.19.



Selección de padres proporcional a la función de adecuación

**Figura 3.18.**



Selección de padres proporcional al rango de la función de adecuación

**Figura 3.19.**

La selección basada en el rango consiste en ordenar a los individuos de la población de menor a mayor adecuación de forma que el individuo peor tiene rango 1 mientras que el individuo  $i$  tiene rango  $\lambda$ , de forma que la probabilidad de que el individuo  $i$  sea seleccionado como padre viene dada por la siguiente expresión:

$$p_i = \frac{\text{rango}(f_i)}{\lambda(\lambda+1)/2}$$

donde la suma de los rangos  $\lambda(\lambda+1)/2$  constituye la constante de normalización.

- Cuando los valores de adecuación son muy similares entre sí, el algoritmo de selección no es capaz de discriminar entre las diferentes soluciones. En efecto, la expresión del cálculo de la probabilidad de selección de un individuo  $p_i$  se puede escribir:

$$n_i = \frac{f_i}{\bar{f}} = \frac{\bar{f} + \Delta f_i}{\bar{f}} = 1 + \frac{\Delta f_i}{\bar{f}}$$

De la expresión anterior se puede extraer que si  $\bar{f} > \Delta f_i$  entonces  $n_i \cong 1$  para cualquier individuo. Esta circunstancia obliga a utilizar algún mecanismo de escalado, que provoque un aumento de la capacidad de discriminación del algoritmo, entre los que destacan el escalado lineal, el truncado sigma y el escalado exponencial, que ya fueron analizados con anterioridad.

Si bien dichos mecanismos pueden solucionar el problema del escalado, tienen el inconveniente de que la presión selectiva que ejercen sobre la población varía dinámicamente. Si se pretende mantener una presión constante, es posible utilizar otro tipo de mecanismos como los que se analizan a continuación.

2. Selección estocástica por restos: Consiste en asignar a un individuo un número de copias igual a la parte entera del número esperado de ocurrencias de dicho suceso  $[p_i \times k]$  y, con los restos, se aplica el método proporcional para obtener las copias vacantes.
3. Selección estocástica universal: Similar al método de la ruleta anteriormente descrito, pero en lugar de tener un único marcador, se tienen  $k$  marcadores igualmente distanciados, y mediante una tirada se selecciona a los  $k$  individuos. La transcripción al lenguaje matemático parte de un número aleatorio  $r$  del que se obtienen los  $r_j$  necesarios para compararlos con las probabilidades acumuladas  $p_i$  de cada individuo mediante la ecuación:

$$r_j = \frac{r + j - 1}{k} \quad j=1, \dots, k$$

El efecto de este tipo de selección depende del rango de la calidad de la población razón por la cual se asume la posibilidad de modificar dichos rangos, modificando la función de calidad.

**b. Métodos basados en el orden o métodos de ordenación.** Estos métodos seleccionan los individuos en función de la posición que se obtiene al ordenarlos según su calidad. La consecuencia inmediata es que la presión selectiva es independiente de los rangos en los que se mueve la calidad ya que el número esperado de hijos depende únicamente de la posición. Entre estos métodos se encuentran los siguientes:

1. Selección por ordenación lineal: Este método, propuesto por BAKER (1985), consiste en asignar una probabilidad para el individuo situado en la posición  $i$ -ésima de una clasificación realizada según el orden decreciente de calidad calculada, de acuerdo con la siguiente expresión:

$$p(i) = q - (i - 1) \times r$$

$$q = r \times \frac{N-1}{2} + \frac{1}{N}$$

$$r \in \left[ 0, \frac{2}{N(N-1)} \right]$$

donde:

$N$  tamaño de la población

$r$  parámetro que permite controlar la presión selectiva, de forma que para  $r = 0$  todos los individuos tienen la misma probabilidad de ser seleccionados (presión selectiva nula, número de esperado de hijos igual a 1). En el otro extremo del valor de  $r$  se tiene una presión selectiva máxima (el individuo de mayor calidad, el primero en la clasificación ordenada, tiene un valor esperado de número de hijos de 2, mientras que el peor individuo es cero), siendo la probabilidad de cada individuo:

$$p(i) = \frac{2}{N} \times \left[ 1 - \frac{i-1}{N-1} \right]$$

2. Selección por ordenación no lineal: Este método, propuesto por MICHALEWICZ (1995), consiste en que las probabilidades de selección para individuos situados en posiciones adyacentes en la clasificación no es igual a lo largo de toda la lista ordenada sino que se aplica la siguiente función:

$$p(i) = q \times (1 - q)^{i-1} \quad q \in (0, 1)$$

donde  $q$  es el parámetro que permite controlar la presión selectiva de forma que a medida que se incrementa dicho parámetro aumenta la presión y, por tanto, la diferencia entre los individuos es mayor según se desciende en la clasificación.

**c. Métodos basados en competiciones o torneos (*Tournament Selection*):** Se basan en la selección aleatoria de  $t$  individuos, eligiéndose el de mayor calidad y repitiéndose el proceso hasta que la población de padres esté completa. Frecuentemente, se toma  $t=2$  (torneo binario). Este algoritmo de selección comparte las mismas propiedades que la selección mediante ordenación. De hecho, pueden parametrizarse de manera que su comportamiento sea globalmente equivalente (BICKLE y THIELE, 1995). En caso de ser necesario aumentar la presión selectiva debe incrementarse el valor de  $t$ , es decir, aumentar los individuos que compiten por un puesto.

No obstante, los métodos basados en competiciones o torneos han sido objeto de modificaciones, especialmente en su aplicación a problemas multimodales y multiobjetivo, en los cuales es preciso controlar la cantidad de individuos a los que se les permite pasar a la siguiente población en función de su distribución en el espacio de búsqueda (HORN, NAFPLIOTIS y GOLDBERG, 1994). En este tipo de problemas es preciso controlar si en una determinada generación existe una gran cantidad de individuos en determinadas partes del espacio de búsqueda para en la generación siguiente no permitir más individuos en esas zonas. Así, se logra que el algoritmo busque de forma más amplia, limitando la posibilidad de que toda la población caiga en la misma zona de alta calidad.

A este respecto, en problemas multimodales se utiliza con frecuencia la “selección por torneo de Boltzmann” (MAHFOUND, 1994) y la “selección por torneo con participación actualizada continuamente” (OEI, GOLDBERG y CHANG, 1991).

La principal característica que debería cumplir el mecanismo de selección es ser insensible a la distribución de aptitudes y a los errores de muestreo con la finalidad de poder establecer un control apropiado de la diversidad de aptitudes de la población.

En este sentido, en el trabajo de GOLDBERG y DEB (1991) se realiza un análisis comparativo de las diferentes características de los métodos de selección, concluyendo que las recomendaciones más relevantes se pueden resumir en las siguientes:

- Utilizar en las primeras generaciones bajos ratios de crecimiento para prevenir la convergencia prematura.
- En las últimas generaciones, utilizar ratios altos de forma conjunta con algún operador de mutación, para redescubrir los bloques constructivos perdidos durante el proceso.
- Preservar la diversidad tanto espacial como temporal mediante métodos de selección que permitan la especialización.
- Eliminar el ruido en la evaluación y muestreo de individuos mediante la competición.

Por otra parte, existen estudios que analizan el comportamiento de los sistemas de selección en situaciones en que la función de adecuación no es determinista, es decir, en entornos ruidosos, presentado formas para medir el efecto del ruido en función de su origen y magnitud, y permitiendo elegir el método más apropiado (MILLER y GOLDBERG, 1997).

Para finalizar, conviene tener en cuenta que además de los métodos analizados existen otras estrategias que pretenden aumentar el rendimiento de los algoritmos genéticos mediante el fortalecimiento de los mejores individuos. Entre ellos destaca el “método elitista” propuesto por DE JONG (1975) que, como se ha comentado, consiste en incluir en la siguiente generación de forma automática al individuo mejor de la población actual, de forma que se previene su posible desaparición al llevar a cabo la recombinación.

Por su parte, MICHALEWICZ (1992a) destaca otra posibilidad denominada “modelo del valor esperado”, donde a cada individuo se le asigna un contador que se decrementa al sufrir cruce o mutación. Cuando el contado cae hasta cero dicho individuo ya no está disponible para su selección nunca más.

Otra opción que persigue mejorar el rendimiento es hibridar los sistemas de selección, es decir, en un mismo algoritmo combinar el efecto de varios métodos de selección.

En el ejemplo de aplicación práctica (TSP), por su generalidad, se plantea utilizar el método de la ruleta o método proporcional a la adecuación de las soluciones. Para ello es necesario establecer una medida de la bondad de las soluciones que, de acuerdo con la función de adecuación, estará establecida en términos de distancias para cada recorrido. Para las soluciones iniciales, la proporción en la adecuación se refleja en la Figura 3.20.

<u>Número</u>	<u>Cadena</u>	<u>Distancia</u>	<u>Adecuación</u>
1	12543	56	53,33%
2	35421	64	46,67%
		120	100,00%

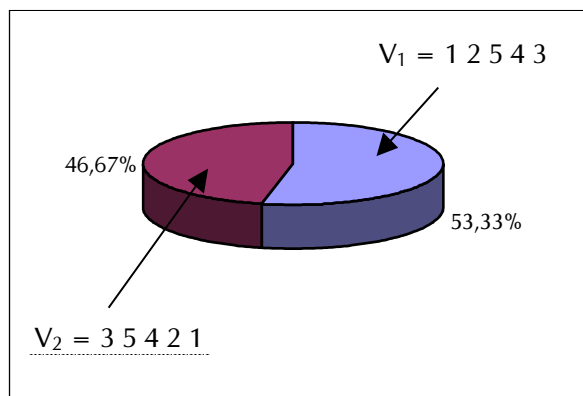


Figura 3.20.

### 3.2.3.8. Parámetros de funcionamiento

El funcionamiento de los AGs precisa del establecimiento de valores para una serie de parámetros entre los que se encuentran el tamaño de la población, la longitud de los individuos, la probabilidad de cruce, la probabilidad de mutación, el máximo número de iteraciones, la precisión el periodo de actualización de la ventana de desplazamiento, etc.

En principio, los AGs se definen como técnicas de búsqueda paramétricamente robustas, es decir, que funcionan con independencia de los criterios elegidos para establecer los valores de los parámetros. Sin embargo, en la práctica el "buen" funcionamiento de un AG depende directamente de dichos valores, razón por la cual es necesario prestar atención a la selección de los mismos.

En este sentido, existen multitud de estudios teóricos que permiten establecer ciertas conclusiones generales, si bien en la mayoría de los casos dependerán del problema en concreto que se desee afrontar. Entre dichas conclusiones cabe destacar las siguientes:

- a. Tamaño de la población: Debe moverse entre 50 y 100 individuos, ya que valores inferiores plantean problemas de convergencia prematura y valores superiores no mejoran sustancialmente la búsqueda y provocan un retraso computacional.
- b. Longitud de los individuos: La parametrización de esta variable está directamente relacionada con el criterio de representación y codificación elegida. Con generalidad se puede afirmar que, salvo que se tenga la garantía de que las posibles redundancias pueden mejorar las prestaciones, la longitud sea lo menor posible.
- c. Probabilidad de cruce: Los mejores valores oscilan entre el 20% y el 60%.
- d. Probabilidad de mutación: Los valores se establecen entre 0'1% y 5%.
- e. Número de iteraciones: Depende de la complejidad del problema lo que hace pueda oscilar entre un máximo de 50 hasta un máximo de 1000.
- f. Periodo de actualización de la ventana de desplazamiento de las evaluaciones: El valor reconocido se cifra en 5 generaciones.

En este punto cabe plantearse la cuestión acerca de si el valor de los parámetros debe optimizarse a priori y aplicarse de forma constante a lo largo de todo el proceso o si, por el contrario, es mejor adaptar de forma dinámica los valores de dichos parámetros durante el proceso.

Desde esta perspectiva existen diversos estudios entre los que se pueden destacar:

- Tamaño de la población. Dado que la elección de este parámetro resulta determinante para evitar el efecto del error de muestreo, así como para controlar el coste del proceso, se han realizado diversos estudios y simulaciones para determinar el valor óptimo de este parámetro, entre los que destacan el trabajo de GOLBERDG (1985) que plantea que el tamaño sólo depende de la longitud y que debe ser igual a:

$$N = 1'65 \cdot 2^{0'21 \cdot l}$$



Por su parte, SCHAFFER, CARUANA, ESHELMAN y DAS (1989), tras distintas simulaciones establecen este parámetro entre 20 y 30.

Con posterioridad, GOLDBERG, DEB y CLARK (1992) plantean como principal argumento para determinar el tamaño de la población la no linealidad del problema, determinando tras distintos análisis estadísticos la siguiente formulación:

$$N \approx O\left(2^k \cdot \frac{\sigma^2}{d^2}\right)$$

donde:

k      orden de no linealidad

$\sigma^2$     varianza del problema

d      diferencia en el valor de la adecuación entre una solución global y una local

Más recientemente, HARIK, CANTÚ-PAZ, GOLDBERG y MILLER (1996) han modificado la anterior expresión, estableciendo el cálculo del tamaño de la población mediante la siguiente formulación:

$$N \approx O\left(2^k \cdot \frac{\sigma}{d}\right)$$

Otros autores plantean opciones distintas como puede ser la propuesta por MICHALEWICZ (1992a) que permite que la población varíe con las necesidades del proceso. Para ello, la población final en cada generación estará formada por la población inicial más la población auxiliar menos los individuos que mueren en el proceso.

Por tanto, se utiliza un proceso de eliminación basado en la edad máxima de los individuos, la cual se puede asignar mediante una constante (con lo que se obtiene un crecimiento exponencial de la población a lo largo del proceso) o bien por medio de variables. En este último caso se consigue que el proceso se autoregule proporcionando la presión selectiva necesaria en cada punto.

Parece lógico que la edad máxima dependa de la calidad de cada individuo, a fin de que los individuos de mayor calidad tengan una mayor esperanza de vida, permitiendo mejorar la calidad de la población en sucesivas generaciones. Por el contrario, un individuo que no aporte beneficios a la población no tendría que tener una vida larga, para no consumir recursos de forma innecesaria. Es decir, la vida máxima debería depender del estado de la búsqueda genética por medio del valor de la calidad media, del valor de la calidad máxima, del valor de la calidad mínima, del valor de la calidad máxima encontrada hasta el

momento o bien del valor de la calidad mínima encontrada hasta el momento (MICHALEWICZ, 1992a).

- Probabilidades de los operadores genéticos. Otra forma de parametrizar de forma adaptativa un AG está relacionada con las probabilidades de los operadores. Así DE JONG (1975) utiliza la optimización manual, es decir, de prueba y error, en sus estudios. Las conclusiones a las que se llega son que el incremento del tamaño de la población provoca una disminución de los efectos estocásticos, mejorando el rendimiento a largo plazo a costa de disminuir la respuesta inicial. En cuanto al operador cruce, su disminución provoca un aumento del rendimiento y para el operador mutación, su incremento mejora los valores encontrados pero empeora la variabilidad de dichos valores.

GRAFENSTETTE y WEINBERG (GOLDBERG, 1989a), por separado, desarrollaron AGs paralelos a los utilizados en la búsqueda para optimizar sus valores, codificando en forma binaria los valores de los parámetros. En cada generación, con los individuos obtenidos se desarrolla un algoritmo genético, siendo el objeto de la búsqueda los mejores valores de los parámetros para aumentar la calidad de la población. Con los parámetros así optimizados se lleva a cabo la siguiente generación del algoritmo, volviendo a comenzar la búsqueda de los valores óptimos.

Otro método desarrollado por SCHAFFER, CARUANA, ESHELMAN y DAS (1989), emplea el diseño de experimentos y con un análisis ANOVA posterior, detecta y cuantifica la influencia de estos parámetros.

Los resultados obtenidos demostraron que, con pequeños tamaños de población, el rendimiento del proceso está fuertemente condicionado al ratio del operador mutación y menos al del operador cruce; así se mejoraría la exploración necesaria al tener una población pequeña. En cuanto al ratio del operador cruce se demostró que para pequeñas y medianas poblaciones el rango en el que se mueve el óptimo es mayor que para poblaciones más grandes, donde se pueden utilizar ratios más bajos.

Por su parte, DAVIS (1989) desarrolló la técnica de la ponderación adaptativa de los operadores, que divide en dos partes: en la primera se mide la realización del operador en estudio y en la segunda se realiza la adaptación de los operadores.

Los anteriores métodos adaptativos requieren más esfuerzo para encontrar los valores óptimos que para encontrar la solución del problema tratado, por lo que su utilización está restringida a buscar valores robustos para varios tipos diferentes de problemas, en lugar de hacerlo para uno específico.

### 3.2.4. Incorporación de conocimiento específico en los Algoritmos Genéticos

La ventaja principal de los AGs en cuanto a su funcionamiento es el sentido de generalidad, es decir, se establecen como métodos de búsqueda ciega en los que proceso a optimizar es una caja negra que asigna a cada individuo una aptitud sin necesidad de determinar las interioridades del proceso. De esta forma, es posible su aplicación con un conocimiento mínimo del problema, lo que redundará en su posible aplicación a una gran variedad de problemas sin más que poder determinar la función de aptitud.

Frente a esta ventaja se plantea que los AGs son métodos intrínsecamente débiles, lo que implica en determinados casos ineficiencia y poca flexibilidad en el tratamiento de los puntos no factibles. Esta circunstancia hace que en muchos problemas reales resulten métodos poco competitivos. Sin embargo, como la debilidad es intrínseca, la única forma de poder mejorarlo es mediante la incorporación de conocimiento específico del problema en cuestión.

En la práctica la incorporación de conocimiento específico provoca varios problemas entre los que destacan la pérdida de generalidad, la pérdida de robustez, incremento en la sensibilidad al ruido, etc. Además, esta información no siempre es fácil de obtener ni de incorporar al modelo. Sin embargo, la mejora en el funcionamiento pasa por establecer mecanismos que permitan incorporar dicho conocimiento sobre todo en el caso de problemas complejos y por supuesto siempre que se disponga de él. No obstante, es necesario tener presente que la incorporación de conocimiento excesivamente específico puede derivar en una convergencia prematura.

En los AGs esta incorporación se puede realizar de dos formas:

1. Mediante técnicas de hibridación.
2. Mediante la incorporación directa del conocimiento en el propio AG.

Las **técnicas de hibridación** consisten en utilizar el AG para realizar la búsqueda global y, posteriormente, a través de métodos específicos llevar a cabo la búsqueda local. La hibridación se puede realizar a su vez de dos formas:

- a. Implantación secuencial. Se deja que el AG converja suficientemente y después se ejecuta el método local sobre los mejores puntos.
- b. Implantación en paralelo. Varios procesadores subordinados realizan la búsqueda local y evalúan los individuos que se obtienen y un procesador central conectado con ellos hace evolucionar la población proporcionada.

Por tanto, el procedimiento híbrido precisa la utilización de algoritmos heurísticos para resolver las búsquedas locales y en ciertos casos la única opción que existe es utilizar técnicas ciegas de búsqueda local. Sin embargo, existen alternativas para subsanar esta limitación entre las que destaca la denominada “emulación del gradiente” propuesta inicialmente por GOLDBERG (1989), quien propuso sustituir los procedimientos locales de escalada por otros que trabajen directamente sobre los individuos codificados de la siguiente forma: se toman uno o más de los mejores individuos de la población actual, se conmutan uno por uno y sucesivamente todos los bits de los individuos interesados y se evalúan los individuos resultantes; posteriormente, se sustituyen los individuos originales por los mejores obtenidos en la evaluación anterior y se continúa la búsqueda genética.

### **3.3. ALGORITMOS BASADOS EN HORMIGAS**

Los algoritmos basados en hormigas fueron propuestos por COLORNI, DORIGO y MANIEZZO (1991, 1992) como un sistema de múltiples agentes para resolver problemas combinatoriales difíciles, como el viajante de comercio (TSP) y el problema de la asignación cuadrática (QAP).

En la actualidad existen varias propuestas que extienden y aplican los algoritmos basados en hormigas, y que se recogen bajo la denominación de “Algoritmos de Optimización mediante Colonias de Hormigas” o “Algoritmos ACO” (STÜTZLE y DORIGO, 1992a, 1992b; DORIGO y DI CARO, 1999).

Estos algoritmos están inspirados en la observación de colonias de hormigas reales: las hormigas son insectos sociales que viven en colonias y que tienen un comportamiento dirigido al desarrollo de la colonia como un todo más que a un desarrollo individual.

Una característica interesante del comportamiento de las colonias de hormigas es cómo pueden encontrar los caminos más cortos entre el hormiguero y la comida. Sobre todo por que las hormigas son prácticamente ciegas por lo que no utilizan indicaciones visuales (DORIGO y GAMBARDELLA, 1997a). Entonces, ¿cómo lo hacen?. En su recorrido, depositan una sustancia llamada feromona que todas pueden oler. De esta forma, el rastro de feromona permite a las hormigas volver al hormiguero desde la comida, y este mismo rastro puede ser utilizado por nuevas hormigas para localizar ésta.

En este sentido, y a efectos ilustrativos, cabe considerar el caso de la Figura 3.21. que sigue a continuación, donde se muestra unas hormigas reales que se mueven en una línea recta que conecta una fuente de comida con su hormiguero.



Figura 3.21.

Pero sucede que también son capaces de adaptarse a los cambios en el entorno, por ejemplo buscando un nuevo camino más corto cuando debido a un obstáculo el camino antiguo resulta más largo. Dicha adaptación se produce por el hecho de que las hormigas depositan una cierta cantidad de feromona mientras caminan y cada hormiga prefiere probabilísticamente seguir una dirección rica en feromona que otra más pobre en dicha sustancia.

Este elemental comportamiento de las hormigas puede ser utilizado para explicar como buscan el camino más corto que reconecte la línea rota que, en no pocas ocasiones, acontece ante un inesperado obstáculo que interrumpe el camino inicial, tal como se muestra en la Figura 3.22.

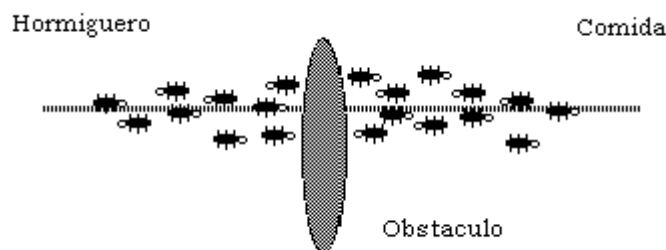


Figura 3.22.

De hecho, cuando aparece un impedimento, las hormigas que están justamente al frente no pueden continuar siguiendo la pista de feromona y entonces deben de escoger entre torcer a la derecha o a la izquierda. En esta situación, como no tienen indicaciones sobre la mejor opción, cabría esperar que eligieran de forma aleatoria: la mitad de las hormigas escogerán torcer a la derecha y la otra mitad a la izquierda, tal como se muestra en la Figura 3.23.

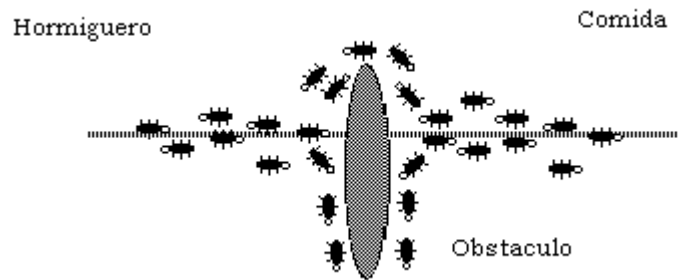


Figura 3.23.

No obstante, resulta interesante comprobar que las hormigas que han escogido, por suerte, el camino más corto del obstáculo, pueden reconstituir más rápidamente la pista de feromona comparadas con las que escogieron el camino más largo. De ahí que el camino más corto pueda recibir una mayor cantidad de feromona en la misma cantidad de tiempo, siendo ésta la causa de un que mayor número de hormigas seleccionen el camino más corto.

Debido a este proceso (autocatalítico) de retroalimentación positiva, muy pronto todas las hormigas escogen el camino más corto, tal como se muestra en la Figura 3.24.

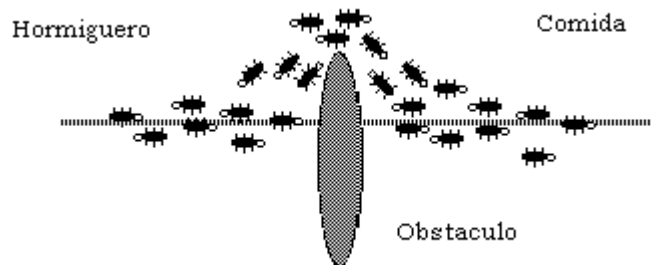


Figura 3.24.

A partir de este momento, las nuevas hormigas preferirán con mayor probabilidad elegir el camino de arriba, ya que en el punto de decisión percibirán una mayor cantidad de feromona proveniente de este camino.

El aspecto más interesante de este proceso autocatalítico radica en que la búsqueda del camino más corto alrededor del obstáculo permite la observación de una propiedad emergente entre el contorno o forma del obstáculo y el comportamiento distribuido de las hormigas: aunque las hormigas se mueven aproximadamente a la misma velocidad y depositan una tasa de feromona similar, el tardar más cuando se desplazan por el contorno más largo que por el más corto propicia que la preferencia por seguir pistas de feromona con mayor acumulación sirva para escoger este último camino.

Este procedimiento se puede generalizar para recorridos con varios puntos o nodos, de forma que cada vez que una hormiga llega a una intersección, decide el camino a seguir de un modo probabilístico. Las hormigas eligen con mayor probabilidad los caminos con un alto rastro de feromona. De esta forma, las bifurcaciones más prometedoras (más cercanas a la comida) van acumulando feromona en tanto son recorridas por más hormigas, mientras que las menos prometedoras pierden feromona por evaporación al ser visitadas por menos hormigas cada vez. Por tanto, la acción continuada de la colonia da lugar a un rastro de feromona que permite a las hormigas encontrar un camino cada vez más corto desde el hormiguero a la comida, ya que la cantidad de feromona depositada en un arco es inversamente proporcional a su longitud.

Los algoritmos de hormigas son uno de los ejemplos de sistemas “swarm” inteligentes con más éxito (BONABEAU, DORIGO y THÉRAULAZ, 1999) y han sido aplicados a diversos tipos de problemas, desde el clásico problema del viajante de comercio (mencionado anteriormente), hasta el problema de enrutamiento en redes de telecomunicaciones.

Las consideraciones anteriores permiten establecer algunas de las características generales de las colonias de hormigas (DORIGO y DI CARO, 1999):

- Aunque para una sola hormiga es muy complejo encontrar una solución que, en general, no resultará adecuada para el problema considerado, pueden surgir soluciones de buena calidad como resultado de la interacción colectiva entre las hormigas.
- Cada hormiga sólo hace uso de la información privada y de la información local del nodo que está visitando.
- Las hormigas se comunican con otras hormigas de un modo indirecto, con la información que ellas “leen y escriben” en forma de cantidad de rastro de feromona.
- Las hormigas no son adaptativas por ellas mismas, sino que son ellas mismas las encargadas de modificar de forma adaptativa la representación del problema y el modo en que las otras hormigas lo perciben.

Las hormigas de las colonias tienen las siguientes propiedades:

- Una hormiga busca soluciones de mínimo coste.
- Una hormiga  $k$  tiene una memoria que puede usar para almacenar información sobre el camino seguido hasta ahora. La memoria se puede usar (i) para construir una solución factible, (ii) para evaluar la solución encontrada y (iii) para reconstruir el camino de vuelta.

- Una hormiga  $k$  en un estado  $r$ , puede moverse a cualquier nodo  $s$  dentro de su vecindario factible.
- Las hormigas comienzan desde un nodo inicial y se mueven hacia nodos factibles, construyendo la solución de un modo incremental.
- Cuando una hormiga  $k$  situada en un nodo  $i$  se mueve a un nodo  $j$ , el movimiento se realiza aplicando una regla de decisión probabilística.
- Cuando una hormiga realiza un camino, los arcos por los que van pasando modifican su rastro de feromona, lo que también incluye la evaporación de una cierta cantidad de feromona que, desde un punto de vista práctico, evita la convergencia prematura del algoritmo hacia óptimos locales.

Una vez establecidas las consideraciones generales del funcionamiento de una colonia de hormigas, en los siguientes apartados se analizan los distintos algoritmos que utilizan en su planteamiento la analogía con dichas colonias naturales.

### 3.3.1. Sistemas de Hormigas (Ant Systems)

El Sistema de Hormigas (SH) o Ant System (AS) es el algoritmo progenitor de todos los demás estudios que se han llevado a cabo en este ámbito (DORIGO, MANIEZZO y COLORNI, 1996).

El Sistema de Hormigas fue el primero de los algoritmos ACO que modelan el comportamiento de las colonias de hormigas reales. En su aplicación a un problema real es necesario que el mismo pueda ser representado en forma de grafo, de tal manera que la Figura 3.23., representativa de una colonia de hormigas reales, puede ser representada como se refleja en la Figura 3.25.

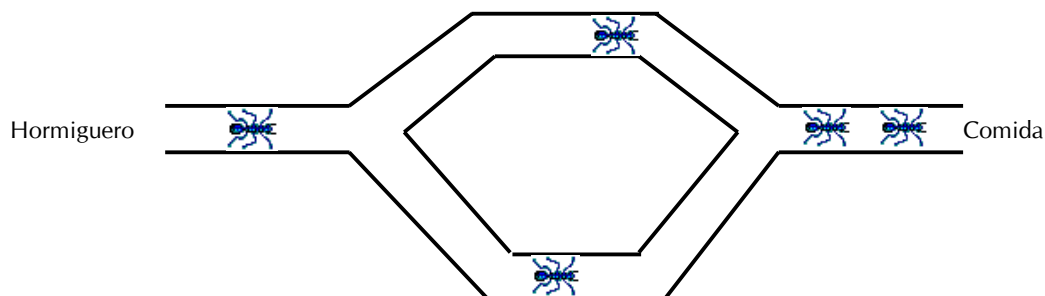


Figura 3.25.

Un ejemplo ilustrativo de este funcionamiento puede ser el que muestra el grafo de la Figura 3.26. (adaptado de DORIGO, MANIEZZO y COLORNI, 1996):



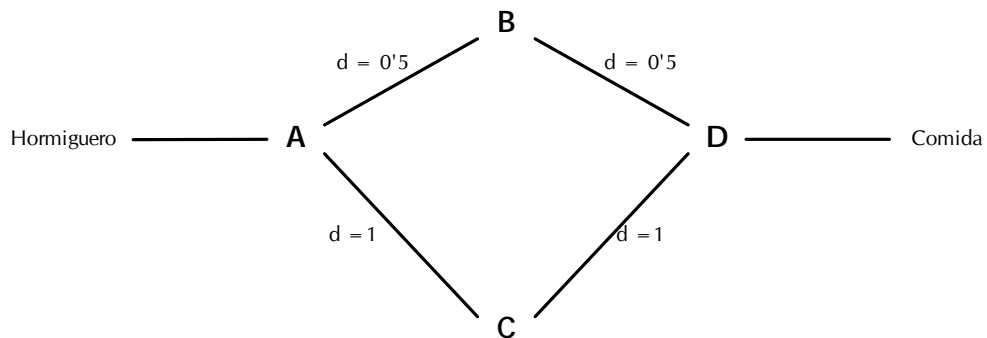


Figura 3.26.

Los arcos (AB) y (BD) suponen la mitad de distancia que la existente entre los arcos (AC) y (CD), de forma que si se supone que las hormigas caminan a la misma velocidad, tardarán la mitad de tiempo en su recorrido.

Si se supone que en el momento de tiempo  $t$ , 30 hormigas salen del hormiguero hacia la comida, y otras 30 hormigas parten en la dirección contraria, al llegar al punto de intersección correspondiente (A o D), elegirán el camino a seguir de forma aleatoria (por ejemplo, con una probabilidad del 50%), tal como recoge la Figura 3.27.

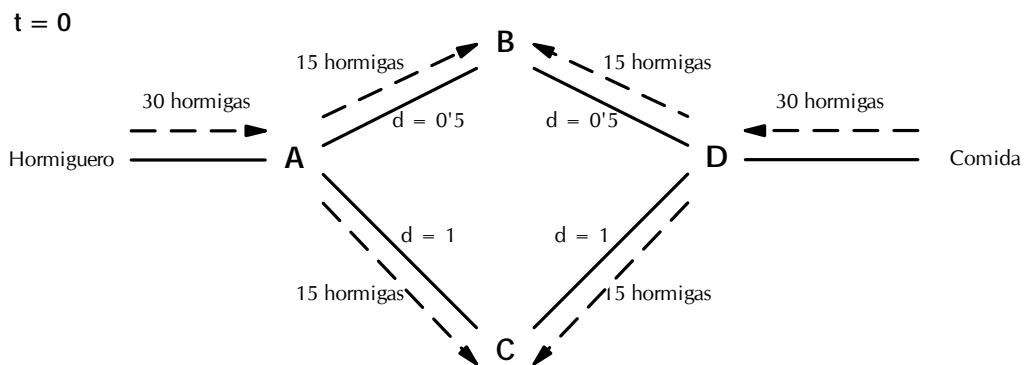


Figura 3.27.

Si se supone que cada hormiga deja un rastro de feromona igual a la unidad y que, para mayor simplicidad, la feromona se evapora de forma total en cada unidad de tiempo, en el momento  $t + 1$ , los arcos (AB y DB) habrán sido recorridos por 30 hormigas (15 en cada sentido), mientras que por los arcos (AC y DC) sólo habrán pasado 15 hormigas. De esta forma, la feromona recogida en cada arco, al considerar que cada hormiga aporta una unidad de feromona, será de 30 unidades para los arcos más cortos y 15 unidades para los arcos que representan recorridos más largos.

En el momento  $t+1$ , salen nuevamente 30 hormigas del hormiguero y de la comida. Dado que el rastro de feromona es mayor en los arcos superiores, la probabilidad de elección de los mismos será superior, de forma que se producirá una situación como la que refleja la Figura 3.28.

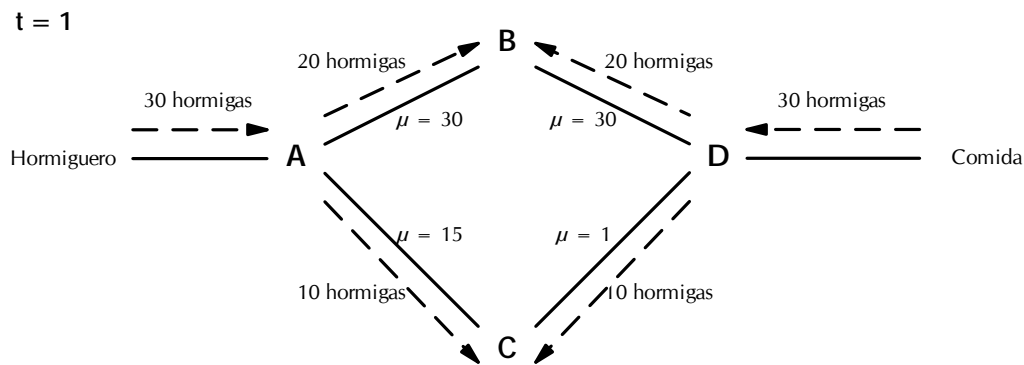


Figura 3.28.

En consecuencia, la distancia entre dos arcos establece una medida del coste dada entre dos nodos  $r$  y  $s$ ,  $\delta(r, s)$ , de tal forma que cada arco  $(r, s)$  tiene asimismo asociada una medida de deseabilidad,  $\tau(r, s)$  denominada feromona, que se actualiza por las hormigas artificiales (o, simplemente, hormigas) en tiempo de ejecución.

De esta forma, el problema puede ser representado como un grafo con pesos, en el que cada arco del grafo contiene dos tipos de información distintas y con funciones diferentes, a saber:

- Información heurística, que representa una medida del coste del arco, dependiente del caso concreto, que se calcula antes de comenzar el algoritmo y no se modifica durante la ejecución del algoritmo (en el ejemplo, la distancia entre los arcos).
- Información memorística, que proporciona una medida de la "deseabilidad" del arco, representada por la cantidad de feromona depositada en él y modificada durante la ejecución del algoritmo en función del número de hormigas que recorrieron el mismo en el pasado (en el ejemplo, la feromona). En los sistemas basados en colonias de hormigas, el aporte de feromona depende también de la bondad de las soluciones que generaron las hormigas que recorrieron cada arco.

De esta forma, se puede definir una hormiga artificial como un agente que:

- Recuerda los nodos que ha recorrido, utilizando para ello una lista tabú de nodos visitados (L).
- Tras cada iteración, esta lista contiene la solución construida por la hormiga.
- En cada paso, elige hacia qué nodo moverse (qué arista seguir) de entre los alcanzables desde el actual  $r$  que no hayan sido visitados aún ( $J(r) = \{u \mid \exists(r,u) \text{ y } u \notin L\}$ ), según una regla probabilística de transición.
- Una vez construida su solución, deja un rastro de feromona  $\tau_{ij}$  (en una cantidad que depende de la bondad de la misma) en cada arco por el que ha pasado y vacía L.
- Opcionalmente, puede también depositar feromona en cada arco que recorre mientras construye la solución.

El funcionamiento básico del Sistema de Hormigas es el siguiente: en cada iteración, una población de H hormigas construye progresivamente, según una regla de transición de estados que depende de la información existente, distintos recorridos por el grafo (soluciones al problema). Una vez evaluadas éstas, los arcos asociados a las soluciones más prometedoras son reforzados por un aporte adicional de feromona, mientras que la contenida en los demás arcos del grafo es evaporada.

De acuerdo con lo anterior, para exponer el funcionamiento del SH es preciso determinar la forma de establecer la regla de transición de estados y la regla de actualización de la feromona:

La regla de transición de estados utilizada por el sistema de hormigas, denominada regla proporcional-aleatoria, define una distribución de probabilidad para el hecho de que una hormiga  $k$  en un nodo  $r$  elija para moverse el nodo  $s$  y que viene dada por la siguiente expresión:

$$p_k(r, s) = \begin{cases} \frac{[\tau(r, s)]^\alpha \cdot [\eta(r, s)]^\beta}{\sum_{u \in J_k(r)} [\tau(r, u)]^\alpha \cdot [\eta(r, u)]^\beta}, & \text{si } s \in J_k(r) \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde:

- $\tau(r,s)$  nivel de feromona del arco  $(r,s)$
- $\eta(r,s)$  información heurística que, en el caso de venir establecida en términos de coste se determinará como  $\eta = 1/\delta$ , es decir, el inverso del coste del arco  $(\delta(r, s))$
- $J_k(r, s)$  conjunto de los nodos alcanzables desde el nodo  $r$  no visitados aún por la hormiga  $k$  (para hacer la solución factible)
- $\alpha$  y  $\beta$  parámetros que determinan la importancia relativa de la feromona en relación con la información heurística. En general  $\beta > 0$  mientras que el valor de  $\alpha$  suele ser 1, razón por la cual en ocasiones este parámetro es obviado.

En la regla de transición de estados se multiplica la feromona del arco  $(r, s)$  por el correspondiente valor heurístico  $\eta(r, s)$  con la finalidad de favorecer la elección de los arcos más prometedores (de menor coste) y con mayor cantidad de feromona.

Una vez que cada hormiga ha generado su solución, la regla de actualización global de feromona modifica el nivel de feromona de cada arco del grafo de dos formas principales, a saber:

- Evaporando feromona en los arcos que no fueron visitados por ninguna hormiga en la iteración actual (arcos poco prometedores).
- Añadiendo feromona en los visitados en función de la bondad de la solución que generó la hormiga que los visitó (arcos prometedores).

La expresión de la regla de actualización global de feromona es:

$$\tau(r, s) = \underbrace{(1 - \rho) \cdot \tau(r, s)}_{\text{EVAPORACIÓN}} + \underbrace{\sum_{k=1}^H \Delta \tau_k(r, s)}_{\text{APORTE}}$$

donde:

- $\rho$  parámetro de evaporación de feromona ( $\rho \in [0, 1]$ )
- $H$  número de hormigas

$$\Delta\tau_k(r, s) = \begin{cases} f(S_k), & \text{si la hormiga } k \text{ ha visitado el arco } (r, s) \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$f(S_k)$  cantidad de feromona directamente proporcional a la bondad de la solución generada por la hormiga  $k$

De esta forma, si la medida de la bondad de la solución se establece en función del coste de la solución obtenida por cada hormiga ( $L_k$ ), entonces:

$$\Delta\tau_k(r, s) = \begin{cases} 1/L_k, & \text{si } (r, s) \in \text{solución construida por la hormiga } k \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Como puede observarse, todas las hormigas aportan feromona a los arcos de sus soluciones en función de la bondad de éstas. Aquellos arcos que no forman parte de ninguna solución sufren la evaporación de un  $(1-p)$  por ciento de la feromona de que disponían.

Este proceso de actualización de la feromona tiene el propósito de asignar más cantidad de feromona a las soluciones de mayor bondad (menor coste). En este sentido, es similar a un esquema de aprendizaje por refuerzo en el cual las mejores soluciones obtienen un mayor refuerzo (como ocurre, por ejemplo, en los algoritmos genéticos cuando se utiliza como mecanismo de selección el método proporcional a la bondad de las soluciones).

La fórmula de actualización de la feromona controla el cambio de la cantidad de ésta sobre los arcos, tanto para añadir más cantidad de feromona en los arcos visitados como para evaporarla de los arcos no prometedores.

La acción de situar feromona sobre los arcos simula el papel de una memoria distribuida a largo plazo: esta memoria no se almacena localmente dentro de las hormigas individuales, sino que está distribuida sobre los arcos del grafo. Esto permite una forma indirecta de comunicación entre ellas.

El pseudocódigo para el algoritmo del SH puede ser como el que se recoge en el Cuadro 3.19.

1. Para cada arco  $(r,s)$   
 $\tau(r,s) := \tau_0$   
/ Todos los arcos inicialmente tienen la misma cantidad de feromona /  
Para  $k = 1$  hasta Número\_Hormigas hacer  
    Situación la hormiga  $k$  en un nodo inicial aleatorio  $r$   
    Eliminar el nodo  $r$  de la lista de nodos por visitar  
/ Fase de inicialización /
2. Para  $i = 1$  hasta Número\_Nodos hacer  
    Si  $(i < \text{Número\_Nodos})$  entonces  
        Para  $k = 1$  hasta Número\_Hormigas hacer  
            Elegir el siguiente nodo a visitar,  $s \notin L_k$ , de acuerdo a la regla de transición de estados probabilística  
            Incluir  $s$  en  $L_k$  (lista de nodos visitados por la hormiga  $k$ )  
            Incluir  $s$  en la solución realizada por la hormiga  $k$   
        Si no  
            Para  $k = 1$  hasta Número\_Hormigas hacer  
                Situación la hormiga  $k$  en un nuevo nodo de comienzo  
/ Fase en la que cada hormiga construye su solución /
3. Para  $k = 1$  hasta Número\_Hormigas hacer  
    Calcular la bondad (coste)  $S_k$  de la solución construida por la hormiga  $k$   
    Para cada arco  $(r,s)$  hacer  
        Aplicar la regla global de actualización de la feromona  
/ Fase donde se produce la actualización global de la feromona /
4. Si se da la condición de parada, entonces  
    Calcular la mejor solución y devolverla  
Si no, volver al paso 2

**Cuadro 3.19.**

### 3.3.2. Sistema de Colonia de Hormigas (Ant Colony System)

El Sistema de Colonia de Hormigas (SCH) o Ant Colony System (ACS) propuesto por DORIGO y GAMBARDELLA (1997a, 1997b), se presenta como una extensión de su predecesor el sistema de hormigas (SH), si bien difiere del mismo en tres aspectos fundamentales, a saber:

1. La regla de transición de estados proporciona un modo directo para equilibrar la exploración de nuevos arcos y la explotación del conocimiento acumulado a priori sobre el problema (información heurística).
2. La regla de actualización global se aplica solamente a los arcos que han sido visitados por la hormiga que ha generado la mejor solución.
3. Las hormigas modifican automáticamente la feromona asociada a cada arco que visitan mediante una regla de actualización local de la feromona.

El SCH opera de la forma siguiente:  $H$  hormigas se sitúan inicialmente sobre  $n$  nodos elegidos a través de alguna regla de inicialización (por ejemplo, aleatoriamente). Cada hormiga construye una solución (factible) aplicando de forma repetida una regla greedy estocástica (la regla de transición de estados). Mientras construyen su circuito, una hormiga también puede modificar la cantidad de feromona de los arcos que va visitando mediante la aplicación de la regla de actualización local.

Una vez que todas las hormigas han terminado su circuito, la cantidad de feromona existente sobre los arcos se vuelve a modificar, aplicando la regla de actualización global. Como en el caso del SH, para construir una solución, las hormigas se guían tanto por la información heurística (prefieren seleccionar arcos más prometedores o con bajo coste) como por la información de la feromona. La misión de las reglas de actualización de la feromona es proporcionar más feromona a aquellos arcos que deban ser más visitados por las hormigas.

En lo referente a la regla de transición de estados y la regla de actualización global, en el caso del SCH se establecen como sigue:

- Regla de Transición de Estados. La regla de transición de estados del SCH se realiza como sigue: una hormiga situada sobre el nodo  $r$  elige el nodo  $s$  para moverse de la forma siguiente:

$$s = \begin{cases} \arg \max_{u \in J_k(r)} \{ [\tau(r, u)]^\alpha \cdot [\eta(r, u)]^\beta \} & \text{si } q \leq q_0 \quad (\text{explotación}) \\ S, & \text{en otro caso} \quad (\text{exploración dirigida}) \end{cases}$$

donde:

- q      número aleatorio uniformemente distribuido en [0,1]
- q<sub>0</sub>    parámetro que define la probabilidad con la que se escoge determinísticamente el arco más prometedor (explotación), (q<sub>0</sub> ∈ [0, 1])
- S      nodo aleatorio seleccionado según la regla de transición del SH (exploración dirigida)

La regla de transición de estados resultante del proceso anterior se denomina “regla proporcional pseudo-aleatoria”. Esta regla de transición de estados, igual que la regla proporcional-aleatoria del SH, favorece las transiciones hacia nodos conectados por arcos prometedores (con poco coste) y con cantidades elevadas de feromona. El parámetro q<sub>0</sub> determina la importancia relativa de la explotación frente a la exploración: cada vez que una hormiga situada en el nodo *r* tiene que elegir un nodo *s* al que moverse, lanza un número aleatorio 0 ≤ q ≤ 1, de forma que si q ≤ q<sub>0</sub> entonces el nodo *s* es elegido, según la formulación anterior, el mejor arco (explotación), de otra forma el arco se elige según la regla de transición del SH (exploración dirigida).

- Regla de Actualización Global. En SCH sólo la mejor hormiga global, es decir, aquélla que representa la mejor solución desde el comienzo de la ejecución, es la que deposita feromona. Esta elección, junto con el uso de la regla proporcional pseudo-aleatoria, tiene el propósito de provocar una búsqueda más directa: las hormigas buscan en el vecindario del mejor circuito encontrado en la iteración actual del algoritmo. La actualización global se realiza después de que todas las hormigas hayan completado sus circuitos. El nivel de feromona se actualiza con la aplicación de la regla de actualización global:

$$\tau(r, s) = (1 - \rho) \cdot \tau(r, s) + \rho \cdot \Delta \tau(r, s)$$



donde:

$$\Delta \tau(r, s) = \begin{cases} f(S_{\text{mejor-global}}), & \text{si } (r, s) \in S_{\text{mejor-global}} \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- ρ      parámetro de evaporación de la feromona (0 < ρ < 1)



De forma similar al SH, si la medida de la bondad de la solución se establece en función del coste de la solución obtenida por cada hormiga ( $L_k$ ), entonces:

$$\Delta \tau(r, s) = \begin{cases} 1/L_{\text{mejor-global}}, & \text{si } (r, s) \in S_{\text{mejor-global}} \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde:

$L_{\text{mejor-global}}$  coste de la mejor solución global desde el comienzo de la ejecución.

Como en el caso del SH, la actualización global proporciona mayor cantidad de feromona a los circuitos más cortos (las mejores soluciones).

La ecuación anterior indica que sólo aquellos arcos que pertenecen a la mejor solución global recibirán un refuerzo de feromona, es decir, sólo la hormiga que generó la mejor solución en la iteración actual modifica los niveles de feromona, cuyo aporte es función de la calidad de la mejor solución encontrada hasta el momento ( $S_{\text{mejor-global}}$ ).

Si bien el sistema de actualización global más genérico es el expuesto con anterioridad, existe otro mecanismo de actualización global en el que se utiliza la mejor solución de la iteración actual (en lugar de utilizar la mejor solución global de la ejecución), pero las diferencias entre ambos esquemas son mínimas, e incluso existe una leve mejora usando la mejor solución global.

- Regla de Actualización Local. Durante la fase de construcción de la solución, es decir, a lo largo del circuito, las hormigas visitan los arcos y cambian su nivel de feromona aplicando la regla de actualización local que se representa como sigue:

$$\tau(r, s) = \underbrace{(1 - \xi) \cdot \tau(r, s)}_{\text{EVAPORACIÓN}} + \underbrace{\xi \cdot \Delta \tau(r, s)}_{\text{APORTE}}$$

donde:

$\xi$  parámetro con características similares al  $\rho$ , es decir, uniforme en  $[0, 1]$

Existen dos variantes básicas para la regla de actualización local en el SCH referidas al valor que toma  $\Delta \tau(r, s)$ , a saber:

1. SCH simple: utiliza  $\Delta \tau(r, s) = \tau_0$ , siendo  $\tau_0$  la cantidad de feromona inicial.

2. Ant-Q o aprendizaje por refuerzo (DORIGO y GAMBARDELLA, 1995): modificación inspirada en el Q-learning en el que el valor  $\Delta \tau(r, s)$  es igual a  $\Delta \tau(r, s) = \gamma \cdot \max_{z \in J_k(s)} \tau(s, z)$ , donde  $0 \leq \gamma \leq 1$ .

La posibilidad más habitual es el SCH-simple, pues el Ant-Q requiere un esfuerzo computacional extra que no suele redundar en una mejora significativa de los resultados.

El papel de la regla de actualización local del SCH es barajar los circuitos, de forma que los primeros nodos visitados por una hormiga en su circuito pueden ser explorados más tarde por otras hormigas. En otras palabras, el efecto de la actualización local es hacer que la deseabilidad de los arcos cambie dinámicamente, tratando que las hormigas hagan un mejor uso de la información que proporciona la feromona: sin la actualización local todas las hormigas buscarían en un vecindario mucho más restringido a la mejor solución encontrada previamente.

El pseudo-código para el algoritmo del SCH es el que se recoge en el Cuadro 3.20.

```
1. Para cada arco (r,s)
    $\tau(r,s) := \tau_0$  / Todos los arcos inicialmente tienen la misma cantidad de feromona /
   Para k:= 1 hasta Número_Hormigas hacer
     Situar la hormiga k en un nodo inicial aleatorio r
     Eliminar el nodo r de la lista de nodos por visitar
   / Fase de inicialización /

2. Para i=1 hasta Número_Nodos hacer
   Si (i < Número_Nodos) entonces
     Para k= 1 hasta Número_Hormigas hacer
       Elegir el siguiente nodo a visitar,  $s_k$  de acuerdo a la regla de transición de estados del SCH y del SH
       Incluir s en  $L_k$  (lista de nodos visitados por la hormiga k)
       Incluir s en la solución realizada por la hormiga k
   Si no
     Para k= 1 hasta Número_Hormigas hacer
       Situar la hormiga k en un nuevo nodo de comienzo
   / Fase en la que cada hormiga construye su solución /
```

<p>Para <math>k = 1</math> hasta Número_Hormigas hacer</p> $\tau(r_k, s_k) = (1 - \xi) \cdot \tau(r_k, s_k) + \xi \cdot \tau_0$ <p>/ Fase en la que se procede a realizar la actualización local de la feromona /</p> <p>3. Para <math>k = 1</math> hasta Número_Hormigas hacer</p> <p>Calcular la bondad (coste) de la mejor solución <math>L_{\text{mejor-global}}</math></p> <p>Para cada arco <math>(r,s)</math> hacer</p> <p>Aplicar la regla global de actualización de la feromona</p> <p>/ Fase donde se produce la actualización global de la feromona /</p> <p>4. Si se da la condición de parada, entonces</p> <p>Calcular la mejor solución y devolverla</p> <p>Si no, volver al paso 2</p>
---

Cuadro 3.20.

### 3.3.3. Modificaciones al SH y al SCH: Listas de Candidatos y Búsqueda Local

Tanto al SH como al SCH se le pueden aplicar algunas modificaciones que aumentarán su eficiencia (lista de candidatos) o su eficacia a la hora de encontrar buenas soluciones (búsqueda local).

#### 3.3.3.1. Listas de Candidatos: experimentos con instancias de gran tamaño

Para resolver problemas de gran tamaño es habitual el empleo de una estructura de datos denominada lista de candidatos (DORIGO y GAMBARDELLA, 1997a) con la pretensión de reducir el tiempo de ejecución del algoritmo.

Una lista de candidatos es una lista de los nodos preferidos para ser visitados desde el nodo actual, es decir, es una estructura de datos estática que contiene, para un nodo determinado  $i$ , los  $c/l$  nodos con menor coste o más prometedores que se alcanzan desde  $i$ , ordenados de forma creciente por costes (distancia, flujo, etc.).

Cuando se considera el empleo de la lista de candidatos, la regla de transición de estados sólo considera inicialmente aquellos nodos incluidos en dicha lista que no hayan sido visitados. Únicamente estudia el resto en el caso en que todos los nodos de la misma hayan sido visitados.

Evidentemente, al reducir en gran parte el número de nodos que se pueden elegir desde un nodo dado, hace que la velocidad del algoritmo se incremente sustancialmente. En particular, considerando  $n$  el tamaño del problema, el tiempo de ejecución pasa de un orden  $O(n^2)$ , debido a la ecuación de cambio de estado (que elige entre  $n \times n$  candidatos) a un orden lineal  $O(c \cdot n)$ , ya que entonces la elección de candidatos está restringida a  $cl$ .

### **3.3.3.2. Búsqueda local: ascensión de colinas**

Para aumentar la eficacia en encontrar buenas soluciones se puede plantear un mecanismo consistente en que, una vez que las hormigas han finalizado su circuito y, por tanto, han obtenido sus soluciones, aplicar una búsqueda local sobre cada una de ellas con el fin de encontrar, en una posición cercana al espacio de búsqueda en el que se encuentra, una solución mejor que la actual (DORIGO y GAMBARDELLA, 1997a). Con esta finalidad se pueden aplicar varias heurísticas, como la 2-opt o la 3-opt (LIN, 1965).

La ascensión de colinas parte de una solución y comenzando desde el primer nodo, se realizan todos los intercambios posibles entre los arcos, desde 1 hasta el número de nodos disponibles (cada solución tiene  $n \cdot (n-1)/2$  vecinos posibles), quedando finalmente con la mejor solución de entre todas las combinaciones. Si la solución elegida mejora a la solución de partida se continúa el mismo proceso, comenzando con la nueva solución hallada. El proceso se repite hasta que no se encuentre ninguna solución mejor a la de partida tras realizar todas las permutaciones posibles.

La búsqueda local ralentiza mucho la ejecución del algoritmo pero existen varias mejoras para aumentar la eficiencia, como por ejemplo el procedimiento 3-opt restringido (JOHNSON y McGEOCH, 1997) que incluye el uso de una estructura de datos llamada "don't look bit" (BENTLEY, 1992).

Un aspecto a considerar es el momento del algoritmo en que se ha de aplicar la búsqueda local, ya que si bien resulta evidente que debe realizarse una vez que las hormigas han finalizado su circuito, también debe cumplirse que la actualización global de la feromona (realizada tanto en SH como en SCH) se produzca tras la aplicación de la búsqueda local, porque es posible (sucede en la mayoría de los casos) que las soluciones hayan cambiado y, por tanto, la actualización de la feromona debe producirse de acuerdo a las soluciones obtenidas tras la búsqueda local (de hecho, es posible que la mejor solución global se haya actualizado tras ella). Por tanto, el 2-opt, se debe aplicar justo después de que las hormigas hayan finalizado su circuito y antes de la actualización global de la feromona.

### 3.3.4. Otros Algoritmos basados en Colonias de Hormigas

#### 3.3.4.1. Sistema de Hormigas MAX-MIN (MAX-MIN Ant System)

El Sistema de Hormigas Max-Min (SHMM) o MAX-MIN Ant System (MMAS) es una extensión del Sistema de Hormigas, inspirado en observaciones realizadas por STÜTZLE y HOOS (1997, 1998, 1999), que se plantearon la necesidad de establecer una alternativa al SH, consistente en que sólo las hormigas con muy buenas soluciones actualizaran el rastro de feromona.

Esta variación implicaba una convergencia prematura de la búsqueda que podía estar dirigida por óptimos locales, razón por la cual STÜTZLE y HOOS plantearon la posibilidad de ejercer una influencia directa en la fuerza del rastro de feromona mediante la incorporación al modelo de una limitación en los niveles de feromona de cada arco en el rango  $[\tau_{\max}, \tau_{\min}]$  y un procedimiento de reinicialización de la matriz de feromona denominado “suavización” (smoothing). Ambos mecanismos persiguen evitar el estancamiento en la búsqueda según avanza el algoritmo.

En este sistema, las variables que inciden son las siguientes:

- El límite máximo de feromona ( $\tau_{\max}$ ), siendo su valor el que viene dado por la siguiente expresión

$$\tau_{\max}(t) = n / L_{\text{mejor-global}}$$

donde:

$n$  número de nodos del problema

$L_{\text{mejor-global}}$  coste de la mejor solución global encontrada durante la ejecución del algoritmo, de forma que este valor varía según avanza el algoritmo (inicialmente  $\tau_{\max}(0) = n / L_{\text{greedy}}$ )

- El límite mínimo de feromona ( $\tau_{\min}$ ), que se establece como un valor fijo para toda la ejecución. Si bien existen diferentes versiones en cuanto a la inicialización del mismo, lo único que ha de asegurarse es que su valor sea menor que  $\tau_{\max}$  (una inicialización típica es  $\tau_{\min}(0) = \tau_{\max} / 2 \cdot n$ ).

La utilización de un límite inferior de feromona  $\tau_{\min}$  implica que la probabilidad de elegir un arco pueda llegar a ser muy pequeña, pero en ningún caso será nula, lo que conduce a un mayor grado de exploración.

- El valor inicial de feromona es  $\tau_0 = \tau_{\max}$ , de forma que los buenos arcos mantienen ese valor mientras los malos lo van decrementando.

Además de las consideraciones anteriores, el sistema SHMM difiere del SH en una característica importante: sólo se permite a la mejor hormiga actualizar la feromona en cada iteración, según la regla de actualización global de feromona del SH, de forma similar al SCH. Tras cada iteración, la evaporación reduce la fuerza del rastro de los arcos en un factor  $(1-\rho)$  y sólo los niveles de feromona de los arcos que pertenecen a la mejor solución aumentan su intensidad o la mantienen al nivel máximo. Por consiguiente, los arcos que no reciben ningún refuerzo o lo hacen con muy poca frecuencia, disminuyen progresivamente su nivel de feromona y serán elegidos con menor probabilidad por las hormigas.

La expresión de la regla de actualización global de feromona es:

$$\tau(r, s) = (1 - \rho) \cdot \tau(r, s) + \sum_{k=1}^H \Delta \tau_k(r, s)$$

donde:

$$\Delta \tau(r, s) = \begin{cases} 1/L_{\text{mejor-global}}, & \text{si } (r, s) \in \text{mejor solución global} \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

En cuanto al mecanismo de reinicialización de la feromona denominado “suavización” o “smoothing”, su funcionamiento es el siguiente: cuando se detecta que el algoritmo se ha estancado, es decir, que la información proporcionada por la feromona se ha reducido debido a algún óptimo local, se aplica una actualización en el nivel de feromona de todos los arcos, de forma que se le da la misma intensidad de feromona a todos ellos (se suaviza). De este modo, el algoritmo comienza una nueva búsqueda tratando de obtener una solución mejor que la encontrada hasta el momento.

La cantidad de feromona a la que se reinician todos los arcos es proporcional a  $(\tau_{\max} - \tau_{\min})$ , si bien estudios realizados por los creadores del algoritmo demuestran que se producen los mismos efectos si la reinicialización se hace con un valor igual a  $\tau_{\max}$ .

El proceso para determinar el momento en que se produce un estancamiento se realiza a través de una técnica denominada “ $\lambda$ -branching factor”, cuya expresión es la siguiente:

$$\lambda\text{-branching factor}(r) = s \quad \text{tales que} \quad \tau_{rs} > \lambda \cdot \delta_r + \text{MIN}(r, s)$$

donde:

MAX(r, s) y MIN(r, s)	valores máximo y mínimo de feromona de los arcos que salen de r
$\delta_r$	MAX(r,s) - MIN(r,s)
s	nodos alcanzables desde r

El valor recomendado por los autores para  $\lambda$  es 0'05, de forma que si el valor del 0'05-branching factor es muy pequeño (menor que 1'1), pone de manifiesto que se construyen muy pocos circuitos nuevos, es decir, existe muy poca exploración, siendo preciso aplicar el mecanismo de "suavización" o "smoothing".

En cuanto a la necesidad de comprobar el estancamiento del algoritmo, debido al alto coste computacional que conlleva este proceso, no se realiza en cada iteración sino que se establece su funcionamiento cada cierto número de iteraciones (generalmente 100 para el TSP y sólo si no se realiza una búsqueda local, y 5 para el QAP).

El procedimiento del SHMM queda reflejado en el Cuadro 3.21.

- |  |
|--|
| <p>1. Calcular <math>\tau_{\max}</math> y <math>\tau_{\min}</math><br/>         Para cada arco (r,s)<br/> <math>\tau(r,s) := \tau_{\max}</math><br/>         / Todos los arcos inicialmente tienen la misma cantidad de feromona /<br/>         Para k = 1 hasta Número_Hormigas hacer<br/>             Situación la hormiga k en un nodo inicial aleatorio r<br/>             Eliminar el nodo r de la lista de nodos por visitar<br/>         / Fase de inicialización /</p> <p>2. Para i = 1 hasta Número_Nodos hacer<br/>         Si (i &lt; Número_Nodos) entonces<br/>             Para k = 1 hasta Número_Hormigas hacer<br/>                 Elegir el siguiente nodo a visitar, <math>s_k</math> de acuerdo a la regla de transición de estados del SH<br/>                 Incluir s en <math>L_k</math> (lista de nodos visitados por la hormiga k)<br/>                 Incluir s en la solución realizada por la hormiga k<br/>         Si no<br/>             Para k = 1 hasta Número_Hormigas hacer<br/>                 Situación la hormiga k en un nuevo nodo de comienzo<br/>         / Fase en la que cada hormiga construye su solución /</p> |
|--|

3.	Calcular la mejor solución global y la hormiga que la ha generado Recalcular el valor de $\tau_{\max}$ (la mejor solución global ha podido cambiar) La mejor hormiga actualiza la feromona según la regla de actualización de feromona del MMAS y los límites permitidos / Fase donde se produce la actualización global de la feromona, teniendo en cuenta que los límites de feromona $\in [\tau_{\min}, \tau_{\max}]$ /
4.	Si el algoritmo se ha estancado Aplicar el <i>smoothing</i> Para cada arco (r,s) $\tau(r,s) = \tau_{\max}$ / Cada X iteraciones se comprueba si el algoritmo se ha estancado /
5.	Si se da la condición de parada, entonces Calcular la mejor solución y devolverla Si no, volver al paso 2

**Cuadro 3.21.**

Asimismo, al SHMM se le puede añadir una búsqueda local para aumentar la precisión de las soluciones, consistente en aplicar el 2-opt una vez que todas las hormigas han finalizado su circuito, y antes de que se produzca la actualización de la feromona, tal y como se ha indicado para el SH y el SCH en el apartado anterior.

### 3.3.4.2. Sistema de Hormigas Elitista (Ant System Elite)

El Sistema de Hormigas Elitista (SH<sup>élite</sup>) o Ant System Elite (ASE) es otro algoritmo de optimización mediante colonias de hormigas que establece que la calidad de las soluciones producidas por el sistema de hormigas se puede mejorar utilizando las denominadas “hormigas elitistas” (BULLNHEIMER, HARTL y STRAUSS, 2000).

La estrategia elitista, procedente del campo de los algoritmos genéticos, determina que la mejor solución de una generación tenga una probabilidad no nula de no ser incluida en la siguiente generación, si se aplican los operadores de selección, cruce y mutación, ya que en caso contrario la información genética de ese individuo se perdería. Por tanto, la idea del elitismo es preservar al mejor individuo de una generación, de forma que se confiere mayor importancia a los aspectos de búsqueda local (explotación) que a los aspectos de búsqueda global (exploración). Este razonamiento también



es válido para los sistemas de hormigas de forma que, en el contexto del SH, se utiliza para proporcionar un énfasis superior en cada iteración al mejor camino encontrado hasta el momento, de forma que cuando los niveles de feromona se actualizan según la regla de actualización global, este camino se trata como si un cierto número de hormigas, denominadas "hormigas elitistas", hubieran elegido el mismo. Como es probable que algunos arcos de este camino sean parte de la solución óptima, la pretensión es guiar la búsqueda en las siguientes iteraciones. Por tanto, la actualización de los niveles de feromona se realiza según la siguiente expresión:

$$\tau(r, s) = (1 - \rho) \cdot \tau(r, s) + \sum_{k=1}^H \Delta \tau_k(r, s) + \Delta^* \tau(r, s)$$

donde:

$$\Delta \tau_k(r, s) = \begin{cases} Q / L_k, & \text{si } (r, s) \in \text{solución generada por la hormiga } k \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

es decir, de forma similar al SH, a excepción de la introducción del parámetro Q, que representa una constante a la que los autores aconsejan dar un valor de 100, y donde:

$$\Delta \tau^*(r, s) = \begin{cases} \sigma \cdot (Q / L_{\text{mejor-global}}), & \text{si } (r, s) \in \text{a la mejor solución global} \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde:

$\sigma$  número de hormigas elitistas consideradas (generalmente  $\sigma = H$ )

$L_{\text{mejor-global}}$  coste de la mejor solución global

Por otro lado, tanto en el Sistema de Hormigas como en el Sistema de Hormigas Elitista, los niveles de feromona son actualizados por todas las hormigas (participan todos los arcos de todos los caminos realizados por todas las hormigas), si bien el nivel de contribución a esta información global depende de la calidad de la solución generada. Esta es otra similitud con los algoritmos genéticos, donde la probabilidad de que un individuo sea seleccionado para la reproducción depende de su bondad (medida de fitness o adaptación), es decir, es más probable que las mejores soluciones contribuyan en las soluciones futuras, especialmente en la selección por ruleta. Sin embargo, este procedimiento adolece de un inconveniente: si durante la evolución la calidad del conjunto de soluciones decae y las diferencias entre los individuos decrecen, las dife-

rencias en las probabilidades de selección también decrecen y, consecuentemente, la explotación no es tan alta como sería deseable.

En el ámbito de los sistemas de hormigas se produce un efecto similar: el hecho de enfatizar los mejores circuitos disminuye cuando las longitudes de los circuitos se acercan cada vez más, especialmente cuando muchas hormigas atraviesan caminos buenos pero que corresponden a óptimos locales.

Un posible esquema de selección para resolver el problema del mantenimiento de la presión selectiva en los algoritmos genéticos es el orden lineal: en primer lugar, la población se ordena de acuerdo a su adecuación para, en segundo lugar, establecer la probabilidad de ser seleccionado en función de la posición del individuo en ese orden.

En el siguiente apartado se analiza con mayor detenimiento esta opción, presentando un modelo basado en el rango para la actualización de los niveles de feromona.

En el Cuadro 3.22. se recoge el pseudocódigo para SH<sup>élite</sup>.

```
1. Para cada arco (r,s)
    $\tau(r,s) := \tau_0$ 
   / Todos los arcos inicialmente tienen la misma cantidad de feromona /
   Para k=1 hasta Número_Hormigas hacer
     Situar la hormiga k en un nodo inicial aleatorio r
     Eliminar el nodo r de la lista de nodos por visitar
   / Fase de inicialización /

2. Para i=1 hasta Número_Nodos hacer
   Si (i < Número_Nodos) entonces
     Para k=1 hasta Número_Hormigas hacer
       Elegir el siguiente nodo a visitar, sk de acuerdo a la regla de transición
       de estados del SH
       Incluir s en Lk (lista de nodos visitados por la hormiga k)
       Incluir s en la solución realizada por la hormiga k
   Si no
     Para k=1 hasta Número_Hormigas hacer
       Situar la hormiga k en un nuevo nodo de comienzo
   / Fase en la que cada hormiga construye su solución /
```

3. Para  $k = 1$  hasta Número\_Hormigas hacer  
Calcular el coste de la solución construida por la hormiga  $K$   
Calcular el coste de la mejor solución global  
Para cada arco aplicar la regla global de actualización de la feromona del SH<sup>élite</sup>, utilizando  $\sigma$  hormigas elitistas para aumentar los arcos pertenecientes a la mejor solución  
/ Fase donde se produce la actualización global de la feromona /
4. Si se da la condición de parada, entonces  
    Calcular la mejor solución y devolverla  
Si no, volver al paso 2

**Cuadro 3.22.**

Como en el resto de algoritmos analizado, el SH<sup>élite</sup> puede ser complementado con un algoritmo de búsqueda local que mejore la calidad de las soluciones obtenidas, incluyendo el 2-opt una vez que todas las hormigas han finalizado su circuito y antes de la actualización global de la feromona.

#### 3.3.4.3. Sistema de Hormigas con Estrategia Elitista y Ordenación (Rank Ant System)

El Sistema de Hormigas con Estrategia Elitista y Ordenación (SH<sub>rank</sub>) o Rank Ant System (RAS) fue propuesto por BULLNHEIMER, HARTL y STRAUSS (por aparecer) y plantea la inclusión del concepto de ranking en los algoritmos basados en colonias de hormigas, de la siguiente forma: una vez de que las  $H$  hormigas han generado su camino, se procede a realizar una ordenación de las mismas de mejor a peor solución aportada (es decir, de menor a mayor coste), de forma que la contribución de cada hormiga a la actualización del nivel de feromona se pondera de acuerdo al rango  $\mu$  de la hormiga en dicha ordenación.

Asimismo, en el Sistema de Hormigas con Estrategia Elitista y Ordenación (SH<sub>rank</sub>), sólo se consideran las  $\omega$  mejores hormigas, de forma que se puede evitar el peligro de la sobre-enfatización de los niveles de feromona causado por el hecho de que muchas hormigas recorren caminos localmente buenos (BULLNHEIMER, HARTL y STRAUSS, por aparecer; STÜTZLE y DORIGO, 1992).

Como el número de hormigas elitistas ( $\sigma$ ) determina el peso de la contribución sobre los rastros de feromona del mejor circuito encontrado hasta el momento, este

valor no debe ser excedido por ningún otro peso. Asimismo, parece razonable utilizar como peso mínimo la unidad, razón por la cual se suele aplicar el peso  $(\sigma - \mu)$  para la  $\mu$ -ésima mejor hormiga y establecer  $\omega = \sigma - 1$ , lo cual implica que el número de hormigas consideradas es excedido en uno por el número de hormigas elitistas.

Con esta combinación de parámetros, elitismo y ranking, la nueva actualización de los niveles de feromona se realiza de acuerdo a la siguiente expresión:

$$\tau(r, s) = (1 - \rho) \cdot \tau(r, s) + \Delta\tau(r, s) + \Delta^*\tau(r, s)$$

donde:

$$\Delta\tau(r, s) = \sum_{\mu=1}^{\sigma-1} \Delta\tau^{\mu}(r, s)$$

y, por su parte:

$$\Delta\tau^{\mu}(r, s) = \begin{cases} (\sigma - \mu) \cdot Q / L_{\mu}, & \text{si la } \mu \text{ mejor hormiga pasa por el arco } (r, s) \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\Delta\tau^*(r, s) = \begin{cases} \sigma \cdot (Q / L_{\text{mejor-global}}), & \text{si } (r, s) \in \text{a la mejor solución global} \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde:

$\mu$  orden de la hormiga

$L_{\mu}$  coste de la solución de la  $\mu$ -mejor hormiga

$\sigma$  número de hormigas elitistas

$Q$  constante (generalmente con valor 100)

$L_{\text{mejor-global}}$  coste de la mejor solución global encontrada

El Cuadro 3.23. muestra el pseudocódigo posible para SH<sub>rank</sub>.

1. Para cada arco  $(r,s)$   
 $\tau(r,s) := \tau_0$   
/ Todos los arcos inicialmente tienen la misma cantidad de feromona /  
Para  $k=1$  hasta Número\_Hormigas *hacer*  
    Situación la hormiga  $k$  en un nodo inicial aleatorio  $r$   
    Eliminar el nodo  $r$  de la lista de nodos por visitar  
/ Fase de inicialización /
2. Para  $i=1$  hasta Número\_Nodos *hacer*  
Si  $(i < \text{Número\_Nodos})$  entonces  
    Para  $k=1$  hasta Número\_Hormigas *hacer*  
        Elegir el siguiente nodo a visitar,  $s_k$  de acuerdo a la regla de transición de estados del SH  
        Incluir  $s$  en  $L_k$  (lista de nodos visitados por la hormiga  $k$ )  
        Incluir  $s$  en la solución realizada por la hormiga  $k$   
Si no  
    Para  $k=1$  hasta Número\_Hormigas *hacer*  
        Situación la hormiga  $k$  en un nuevo nodo de comienzo  
/ Fase en la que cada hormiga construye su solución /
3. Para  $k=1$  hasta Número\_Hormigas *hacer*  
    Calcular el coste de la solución construida por la hormiga  $K$   
    Calcular el coste de la mejor solución global  
    Para cada arco aplicar la regla global de actualización de la feromona del  $SH_{rank}$ , utilizando  $(\sigma-\mu)$  como peso para aumentar los arcos de la  $\mu$ -mejor hormiga y  $\sigma$  hormigas elitistas para aumentar los arcos pertenecientes a la mejor solución global  
/ Fase donde se produce la actualización global de la feromona /
4. Si se da la condición de parada, entonces  
    Calcular la mejor solución y devolverla  
Si no, volver al paso 2

**Cuadro 3.23.**

La incorporación de un algoritmo de búsqueda local que mejore las soluciones encontradas se puede realizar mediante la del 2-opt una vez que todas las hormigas han finalizado su circuito y antes de la actualización global de la feromona.

### 3.3.4.4. Sistema de Hormigas Rápido (Fast Ant System)

El Sistema de Hormigas Rápido (SHR) o Fast Ant System (FAS) es un algoritmo basado en colonias de hormigas propuesto por TAILLARD y GAMBARDELLA (1997) que se caracteriza principalmente por el modo en que se construyen las soluciones, es decir, la regla de transición de estados.

En este algoritmo, en la aplicación de la regla de transición de estados no se utiliza la información heurística, y la ecuación que regula este cambio se basa exclusivamente en la información proporcionada por la feromona, de forma que una hormiga  $k$  situada en un nodo  $i$  elige ir al nodo  $j$  con una probabilidad  $p$  siguiendo la siguiente expresión:

$$p_k(r, s) = \frac{\tau(r, s)}{\sum_{j \in J_k} \tau(r, j)}, \quad \text{si } r \in J_k$$

donde:

$J_k$  nodos que le quedan por visitar a la hormiga  $k$

El adjetivo que da nombre a este sistema (rápido) se debe fundamentalmente a que en el mismo hay una única hormiga, es decir, no existen hormigas que cooperan, sino que es una sola hormiga la que realiza todos los recorridos. Las dos características anteriores provocan que el SHR siempre utilice una búsqueda local que mejore las soluciones encontradas por la hormiga.

La regla de actualización de la feromona en este también difiere de los anteriores sistemas (STÜTZLE y DORIGO, 1992), principalmente en que no existe evaporación de la feromona. De esta forma, en el inicio todos los arcos poseen un nivel de feromona igual a 1 y después de cada iteración la feromona se aporta según la siguiente expresión:

$$\tau(r, s) = \tau(r, s) + r \cdot \Delta\tau(r, s) + r^* \cdot \Delta\tau^{\text{mejor-global}}(r, s)$$

donde:

$$\Delta\tau(r, s) = 1/L$$

$L$  coste proporcionado por la hormiga

$$\Delta\tau^{\text{mejor-global}}(r, s) = 1/L_{\text{mejor-global}}$$

$L_{\text{mejor-global}}$	coste de la mejor solución global desde el inicio de la ejecución del algoritmo
$r$	parámetro que inicialmente vale uno y que se puede modificar a lo largo de la ejecución
$r^*$	constante, con un valor recomendado por los autores de 4

Los dos últimos parámetros ( $r$  y  $r^*$ ) determinan el refuerzo relativo que proporciona la solución actual frente a la mejor solución global.

Sin embargo, existen dos circunstancias en las que la feromona se actualiza de forma distinta a la que se acaba de exponer, a saber:

1. Si en la iteración actual se ha mejorado la mejor solución global,  $r$  se pone a 1, al igual que toda la matriz de feromona.
2. Si la hormiga construye una solución con el mismo coste que la mejor global ( $L_{\text{mejor-global}}$ ),  $r$  incrementa en uno su valor y toda la matriz de feromona se pone a  $r$ .

El posible pseudocódigo para este sistema se recoge en el Cuadro 3.24.

<ol style="list-style-type: none"><li>1. Para cada arco <math>(r,s)</math> <math>\tau(r,s) := 1</math> / Todos los arcos inicialmente tienen la misma cantidad de feromona / Situación la hormiga <math>k</math> en un nodo inicial aleatorio <math>r</math> Eliminar el nodo <math>r</math> de la lista de nodos por visitar / Fase de inicialización /</li><li>2. Para <math>i = 1</math> hasta Número_Nodos hacer Si <math>(i &lt; \text{Número\_Nodos})</math> entonces Elegir el siguiente nodo a visitar, <math>s_k</math> de acuerdo a la regla de transición de estados del SHR Incluir <math>s</math> en <math>L_k</math> (lista de nodos visitados por la hormiga) Incluir <math>s</math> en la solución realizada por la hormiga Si no Situación la hormiga <math>k</math> en un nuevo nodo de comienzo / Fase en la que la hormiga construye su solución /</li></ol>
--

3.	Aplicar la búsqueda local a la solución generada por la hormiga / Fase de búsqueda local /
4.	Calcular el coste de la solución construida por la hormiga Actualizar el mejor coste global Para cada arco aplicar la regla global de actualización de la feromona / Fase donde se produce la actualización global de la feromona / Si la solución obtenida ha mejorado la mejor solución global, hacer $r = 1$ Para cada arco (r,s) $\tau(r,s) = 1$ Si no Si la mejor solución obtenida tiene el mismo coste que la mejor solución global $r = r + 1$ Para cada arco (r,s) $\tau(r,s) = r$ Si no Aplicar la regla de actualización de feromona establecida para SHR
5.	Si se da la condición de parada, entonces Calcular la mejor solución y devolverla Si no, volver al paso 2

**Cuadro 3.24.**

### 3.3.4.5. Sistema de Hormigas Híbrido (Hybrid Ant System)

El Sistema de Hormigas Híbrido (SHH) o Hybrid Ant System (HAS) propuesto por GAMBARELLA, TAILLARD y DORIGO (1997), si bien puede considerarse un algoritmo ACO, es el sistema que más aspectos modifica del sistema de hormigas original.

Su principal fundamento reside en la utilización de la feromona como mecanismo para modificar la solución existente y no como vía para construir soluciones, con el propósito de realizar una búsqueda de vecinos.



En el SHH las soluciones iniciales, generadas de forma aleatoria, son sometidas a una búsqueda local que permite un comienzo del algoritmo con soluciones más o menos prometedoras, de forma que a cada hormiga se le asocia una solución del problema que, primero se modifica utilizando los niveles de feromona y después se mejora usando un mecanismo de búsqueda local. Este enfoque difiere sustancialmente del SH donde las soluciones no estaban asociadas explícitamente a las hormigas, sino que eran creadas en cada iteración usando un mecanismo constructivo.

La modificación consiste en mutar la solución actual, cambiando la posición de dos nodos del circuito,  $R$  veces de la forma siguiente: se eligen de forma aleatoria dos índices ( $r$  y  $s$ ), tal que  $r \neq s$ , intercambiándose los elementos de ambos.

La elección del segundo índice se puede realizar de dos formas, a saber:

- Tratando de explotar el nivel de feromona, para lo cual, con una probabilidad  $(1 - q)$ , se elige la que maximice la siguiente función:

$$\tau(\text{pos}(r), \text{pos}(s)) + \tau(\text{pos}(s), \text{pos}(r))$$

- Tratando de explorar el espacio de soluciones, de forma que una probabilidad  $q$ , se elige el segundo índice  $s$  con una probabilidad proporcional a los valores de la feromona, es decir, se elige  $s$  con una probabilidad dada por la siguiente expresión:

$$p(r, s) = \frac{\tau(\text{pos}(r), \text{pos}(s)) + \tau(\text{pos}(s), \text{pos}(r))}{\sum_{j \neq r} \tau(\text{pos}(r), \text{pos}(j)) + \tau(\text{pos}(j), \text{pos}(r))}$$

Una vez realizado el proceso de manipulación de las soluciones se procede de nuevo a aplicar un procedimiento de búsqueda local.

En cuanto a la utilización de la feromona, ésta se puede realizar desde dos perspectivas, a saber:

- La exploración, proceso estocástico en el que la elección del nodo utilizado para construir una solución del problema se realiza de forma probabilística.
- La explotación, seleccionando el nodo que maximiza una combinación de los valores de feromona y de las evaluaciones de la función objetivo.

Después de construir una nueva solución, el SH original actualizaba los niveles de feromona disminuyéndolos para simular la evaporación de ésta, e incrementándolos en los arcos que fueron elegidos en la construcción de la solución de forma proporcional a la calidad de la solución. A diferencia de este sistema, en el SHH los rastros de feromona no se modifican por las hormigas ni directa ni localmente durante la construcción de la solución o inmediatamente después, sino que se modifican de forma global, es decir, considerando la mejor solución generada por todas las hormigas en una iteración dada o la mejor solución global. Esta forma de actuar provoca que la búsqueda sea más agresiva y requiera menos tiempo para alcanzar buenas soluciones.

Sin embargo, este procedimiento presenta un inconveniente marcado por el riesgo de una posible convergencia prematura del algoritmo, razón por la cual se añade un mecanismo de diversificación que, periódicamente, elimina toda la feromona acumulada.

El procedimiento anterior se ve reforzado por un mecanismo de intensificación: después de que todas las hormigas han modificado una solución, teniendo en cuenta sólo la información contenida en la matriz de feromona, una fase de mejora consiste en realizar, de nuevo, una búsqueda local que tenga en consideración solamente la función objetivo.

Por tanto, en el SHH, durante cada iteración, se deben definir los mecanismos de intensificación y diversificación:

- La intensificación se usa para explorar en más profundidad el vecindario de las buenas soluciones. Cuando la intensificación está activa, la hormiga regresa a la solución que tenía antes de comenzar la iteración, si ésta es mejor que la solución que obtiene al final de la iteración. Para todos los demás casos, la hormiga continúa trabajando en su solución actual. Por tanto, este mecanismo se activa cuando se produce una mejora en la mejor solución encontrada hasta la actualidad. Cuando la intensificación se activa, cada hormiga comienza su siguiente iteración con la mejor solución entre las obtenidas antes de aplicar la manipulación y la obtenida tras la segunda búsqueda local. Este mecanismo difiere del aplicado cuando la intensificación no está activa, en este caso siempre se acepta la solución generada tras la búsqueda local.

La intensificación permanece activa mientras que al menos una hormiga mejore su solución durante una iteración. La idea de la intensificación es favorecer la búsqueda en el vecindario de la nueva mejor solución encontrada.

En efecto, como la actualización de la feromona está gobernada por el valor de la mejor solución global, la distribución de los rastros de feromona está deter-

minado por las mejores soluciones globales que ha habido previamente. Cuando se encuentra una nueva mejor solución que mejora a la antigua, esta última se actualiza, de forma que la influencia de la nueva solución actualizada tarda varias iteraciones en hacer su efecto sobre la distribución de la feromona.

En cuanto al proceso de actualización de la feromona, también difiere de la realizada en el SH, donde todas las hormigas actualizaban los niveles de feromona según los circuitos generados. En este caso, y con la finalidad de aumentar la convergencia, la feromona es actualizada sólo por la mejor hormiga.

En este sistema también existe un procedimiento de evaporación del rastro, que es controlado por el parámetro  $\rho$ . El control de la actualización de feromona en el SHH se realiza mediante la aplicación de la siguiente formulación:

$$\tau(r, s) = (1 - \rho) \cdot \tau(r, s) + \Delta \tau^{\text{mejor-global}}(r, s)$$

donde:

$$\Delta \tau^{\text{mejor-global}}(r, s) = \begin{cases} 1/L_{\text{mejor-global}}, & \text{si } (r, s) \in \text{mejor solución global} \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- La diversificación implementa un mecanismo de reinicialización parcial del algoritmo cuando las soluciones no mejoran sustancialmente y que consiste en una reinicialización de los niveles de feromona. El propósito de la diversificación es obligar al algoritmo a trabajar sobre soluciones con estructura diferente. El mecanismo de diversificación se activa si durante las últimas  $S$  iteraciones no se ha mejorado la mejor solución global. La forma de actuar el procedimiento de diversificación consiste en anular toda la información contenida en los rastros de feromona a través de una reinicialización que ponga todos los arcos al mismo nivel de feromona, en concreto:

$$\tau_0 = 1/n \cdot L_{\text{mejor-global}}$$

donde:

$L_{\text{mejor-global}}$       coste de la mejor solución encontrada hasta el momento

$n$                       tamaño del problema (número de nodos)

El Cuadro 3.25. muestra el pseudocódigo para el SHH.

1. Generar  $m$  soluciones aleatorias,  $S_a(i)$ , una para cada hormiga  
Mejorar las  $m$  soluciones con una búsqueda local  
Actualizar la mejor solución global  
Inicializar la matriz de feromona  
Activar la intensificación  
/ Fase de inicialización /
  
2. *Para*  $i = 1$  hasta Número\_Máximo\_Iteraciones *repetir*  
*Para* cada solución generada *hacer*  
    Aplicar  $R$  modificaciones, basadas en los niveles de feromona, sobre cada solución  
    Aplicar la búsqueda local a las soluciones antes obtenidas y almacenarlas  
/ Fase de intensificación /  
  
    *Para* cada hormiga  $k$  *hacer*  
        Si la intensificación está activa, entonces  
            La solución aleatoria en la iteración  $(i + 1)$  = mejor solución entre la mejor solución en la iteración anterior y la solución modificada  
        Si no  
            Si para todas las hormigas la solución en la iteración  $(i + 1)$  es igual a la solución en la iteración  $i$ , se desactiva la intensificación  
            Si existe alguna hormiga que mejore la solución global, entonces  
                Actualizar la mejor solución global  
                Activar la intensificación  
/ Fase de manipulación de la solución /  
  
    Actualizar la matriz de feromona según el SH  
/ Fase de actualización de la feromona /  
  
    Si tras  $S$  iteraciones no se ha mejorado la mejor solución global, realizar una diversificación  
/ Fase de diversificación /

**Cuadro 3.25.**

### 3.3.4.6. Sistema De La Mejor y Peor Hormiga (Best-Worst Ant System)

En este apartado se analiza el algoritmo de optimización mediante colonias de hormigas denominado “Sistema de la Mejor y Peor Hormiga” (SMPH) o Best-Worst Ant System (BWAS) planteado por CORDÓN, HERRERA y MORENO (1999).

El algoritmo SMPH está basado en la incorporación de conceptos de la Computación Evolutiva al paradigma de la optimización mediante algoritmos de hormigas, en concreto, considerar la peor solución obtenida en cada iteración en la actualización de la feromona, tomado del algoritmo PBIL (BALUJA y CARUANA, 1995), la mutación de la matriz de feromona para introducir diversidad en el proceso de búsqueda, tomado también de PBIL y desarrollado según la filosofía del operador de mutación no uniforme de Michalewicz para algoritmos genéticos con codificación real y, finalmente, la reinicialización de esta matriz cuando la búsqueda se estanque, característico del algoritmo CHC.

El interés por el desarrollo de este algoritmo por parte de los autores surge al observar ciertas similitudes entre el mecanismo de trabajo de los algoritmos de hormigas y el que subyace en el funcionamiento del algoritmo evolutivo PBIL, planteado por BALUJA y CARUANA (1995), debido a las siguientes consideraciones:

- Ambos algoritmos hacen uso de una estructura memorística que se va adaptando a lo largo de la ejecución del algoritmo.
- Esta estructura es la que permite generar las soluciones posibles en cada iteración y su adaptación está guiada por la bondad de éstas.

Para una mejor comprensión del algoritmo SMPH, a continuación se establecen las líneas generales de funcionamiento del algoritmo PBIL, el cual se basa en una estructura memorística representada por un vector de probabilidades  $P$  de dimensión igual al número de variables del problema que se desea resolver. Este vector codifica una distribución de probabilidad que representa un prototipo de soluciones de buena calidad y se emplea para generar una población de posibles soluciones al problema en cada iteración. En principio, estas soluciones son vectores binarios, si bien existe una versión para problemas con variables reales.

El vector de probabilidades es el elemento que se adapta a lo largo de la ejecución del algoritmo en función de la historia de éste. Si bien existen distintas versiones de PBIL en función del modo en que se efectúe la adaptación, en el modelo más básico, el vector se actualiza en función de la mejor solución generada en la iteración actual (Mejor), de forma que:

$$P_i = (1 - LR) \cdot P_i + LR \cdot \text{Mejor}_i$$

donde:

$LR \in [0, 1]$  parámetro que controla la velocidad de convergencia

En cada iteración, las componentes del vector  $P$  sufren mutaciones con probabilidad  $P_{MUT}$  para evitar la convergencia prematura del algoritmo. La mutación se efectúa de la forma siguiente:

$$P_i = \begin{cases} (1 - \text{RangoMut}) \cdot P_i & \text{si } a = 0 \\ (1 - \text{RangoMut}) \cdot P_i + \text{RangoMut} & \text{si } a = 1 \end{cases}$$

donde:

$a$  valor aleatorio en  $\{0, 1\}$

$\text{RangoMut} \in [0, 1]$  rango de mutación considerado

Un análisis de las consideraciones anteriores permite observar la similitud de funcionamiento entre PBIL y los algoritmos ACO analizados en los epígrafes anteriores, ya que incluso la regla de actualización de  $P$  sigue la misma filosofía que la regla de actualización global de feromona del SCH.

Existen diversas extensiones al modelo básico comentado, como son actualizar  $P$  en función de los  $M$  mejores elementos generados en cada iteración (funcionamiento similar al SH<sup>élite</sup>), considerar el peor elemento para la actualización, etc. Esta última acción se pone en práctica alterando sólo aquellas componentes en las que el mejor y el peor difieren para evitar problemas en estados avanzados de la búsqueda en los que el peor y el mejor se parecen.

El Sistema de la Mejor y Peor Hormiga presenta tres características principales, a saber:

- En la actualización global de la matriz feromona se contempla la peor solución obtenida en cada iteración, de forma análoga al algoritmo PBIL, con el vector de probabilidades  $y$ , al contrario que en los modelos previos de sistemas de hormigas que sólo consideraban la mejor (o mejores) hormiga(s) (SCH y SH<sup>élite</sup>, respectivamente) o todas ellas (SH).

Con este procedimiento se pretende potenciar los arcos contenidos en las buenas soluciones y penalizar los de las malas soluciones. Con esta intención, se considera en primer lugar la regla de actualización de feromona siguiente:

$$\tau(r, s) = (1 - \rho) \cdot \tau(r, s) + \Delta \tau(r, s)$$

donde:

$$\Delta \tau(r,s) = \begin{cases} 1/L_{\text{mejor-global}}, & \text{si } (r,s) \in \text{Sol}_{\text{mejor-global}} \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

De esta forma, se potencia la feromona de los arcos de la mejor solución obtenida hasta el momento,  $\text{Sol}_{\text{mejor-global}}$ , y se evapora feromona de todos aquellos arcos no considerados en dicha solución.

Asimismo, se penalizarán aquellos arcos contenidos en la peor solución encontrada en la iteración actual,  $\text{Sol}_{\text{peor-actual}}$ , que no estén contenidos a su vez en la mejor solución global, evaporando de nuevo la feromona asociada a éstos de la forma dada por la expresión siguiente:

$$\forall (r,s) \in \text{Sol}_{\text{peor-actual}} \text{ y } (r,s) \notin \text{Sol}_{\text{mejor-global}}, \tau(r,s) = (1-\rho) \cdot \tau(r,s)$$

- El SMPH integra también una característica fundamental del algoritmo evolutivo CHC (ESHELMAN, 1991): la reinicialización del proceso de búsqueda cuando éste se estanca. En el caso de los algoritmos de hormigas, este hecho se produce cuando la matriz de feromona ha evolucionado hasta llegar a una situación en la que los niveles de feromona de los arcos pertenecientes a la mejor solución encontrada son muy altos, mientras que los de los arcos restantes son cercanos a cero. Esto provoca que las nuevas soluciones generadas en cada iteración sean muy similares a la mejor obtenida y no aporten nueva información.

Sin embargo, este aspecto ya ha sido reflejado en el campo de la optimización mediante colonias de hormigas, ya que algoritmos anteriormente analizados lo han incorporado con distintas filosofías. En el caso del sistema SMPH, se procede a la reinicialización fijando todas las componentes de la matriz de feromona a  $\tau_0$ , el valor inicial de feromona. La condición que evalúa la necesidad de una reinicialización consistirá en comprobar si el número de arcos distintos de la mejor y la peor solución generadas en la iteración actual es inferior a un cierto porcentaje, que los autores proponen de un 5% del número de arcos totales.

Por tanto, se producirá una reinicialización si se cumple:

$$|\text{Sol}_{\text{mejor-actual}} \cap \text{Sol}_{\text{peor-actual}}| > 0'05 \cdot n$$

- De forma similar al PBIL, en el cual se muta aleatoriamente la estructura memorística que genera la población de soluciones (el vector de probabilidades  $P$ ), en

SMPH se realiza una mutación en la matriz de feromona para introducir diversidad en el proceso de búsqueda.

El operador de mutación considerado por los autores de este algoritmo, está basado en la mutación no uniforme propuesta por MICHALEWICZ (1992a) para algoritmos genéticos con codificación real. La filosofía de este operador es provocar pequeños cambios en las primeras iteraciones del algoritmo, en las que aún no ha convergido a zonas prometedoras del espacio de búsqueda y el algoritmo se encuentra en la fase de exploración del mismo. Sin embargo, según avanza el algoritmo y, presumiblemente, va convergiendo hacia estas zonas, la dimensión de las mutaciones se amplía para permitirle localizar nuevas zonas que puedan contener soluciones mejores a la actual. En esta segunda etapa, el operador potencia la exploración frente a la explotación.

Para poner en práctica este comportamiento en el algoritmo SPMH se realiza una mutación en cada componente de la matriz de feromona con probabilidad  $P_m$  de la forma siguiente:

$$\tau'(r,s) = \begin{cases} \tau(r,s) + \text{mut}(it, \tau_{\text{tope}}), & \text{si } a = 0 \\ \tau(r,s) - \text{mut}(it, \tau_{\text{tope}}), & \text{si } a = 1 \end{cases}$$

donde:

$$\tau_{\text{tope}} = \frac{\sum_{(r,s) \in \text{Sol}_{\text{mejor-global}}} \tau(r,s)}{n}$$

$a$  valor aleatorio en  $\{0, 1\}$

$it$  iteración actual del algoritmo

$\tau_{\text{tope}}$  valor medio de feromona existente en los arcos que componen la mejor solución encontrada hasta el momento

$\text{mut}(\cdot)$  la función:

$$\text{mut}(it, \tau_{\text{tope}}) = \frac{it - it_r}{Nit - it_r} \cdot \sigma \cdot \tau_{\text{tope}}$$

$Nit$  número máximo de iteraciones del algoritmo

$it_r$  última iteración en la que se produjo una reinicialización



En el desarrollo de este operador es necesario destacar dos aspectos, a saber:

1. En primer lugar, se observa que el rango de mutación vuelve a su valor inicial cada vez que se produce una reinicialización de la matriz de feromona. Su valor en cada momento es, por tanto, relativo a la última iteración en la que se produjo la reinicialización. Este hecho se justifica desde la perspectiva de que tras esta acción comienza un nuevo proceso de búsqueda en el que todos los arcos tienen la misma probabilidad de ser escogidos de acuerdo a los niveles de feromona. No tiene sentido, por tanto, efectuar mutaciones de gran magnitud sobre la matriz de feromona puesto que el propio algoritmo se encuentra en una etapa de exploración.
2. Por otro lado,  $\sigma$  es un parámetro que especifica la potencia de la mutación a efectuar con respecto al número de iteraciones transcurridas. Por ejemplo, si  $\sigma$  toma el valor 4, el valor a añadir o restar equivaldrá a  $\tau_{\text{tope}}$  una vez que hayan transcurrido un 25% del número total de iteraciones restantes desde la última reinicialización.

Otra característica adicional del SMPH es que considerará búsqueda local para mejorar las soluciones generadas en cada iteración, práctica común en la mayoría de los modelos previos (SH, SCH, MMAS, SH<sub>élite</sub>, SHR, etc.) y además emplea la regla de transición de estados del SH.

En el Cuadro 3.26. se expone un pseudocódigo de este algoritmo.

```

1. Para cada arco (r,s)
    $\tau(r,s) := \tau_0$ 
   / Todos los arcos inicialmente tienen la misma cantidad de feromona /

   Para k=1 hasta Número_Hormigas hacer
       Situar la hormiga k en un nodo inicial aleatorio r
       Eliminar el nodo r de la lista de nodos por visitar
   / Fase de inicialización /

2. Para i=1 hasta Número_Nodos hacer
   Si (i < Número_Nodos) entonces
       Para k=1 hasta Número_Hormigas hacer

```

	Elegir el siguiente nodo a visitar, $s_k$ de acuerdo a la regla de transición de estados del SH
	Incluir $s$ en $L_k$ (lista de nodos visitados por la hormiga)
	Incluir $s$ en la solución realizada por la hormiga
	Si no
	Situación la hormiga $k$ en un nuevo nodo de comienzo
	/ Fase en la que la hormiga construye su solución /
3.	<i>Para</i> $k=1$ hasta Número_Hormigas <i>hacer</i>
	2-opt(solucion)
	/ Fase de búsqueda local: ascensión de colinas /
4.	Buscar
	Peor solución iteración
	Mejor solución iteración
	Mejor solución global
	/ Fase en la que se calcula la peor y la mejor solución de la iteración, así como la mejor solución global /
5.	Actualizar la feromona de la mejor hormiga
	Actualizar la feromona de la peor hormiga
	Mutación de la matriz de feromona
	/ Fase donde se produce la actualización global de la feromona /
6.	Si hay estancamiento
	Poner feromona a $\tau_0$
	/ Fase de Restart /
7.	Si la condición de parada es verdadera, hacer
	Calcular la mejor solución y devolverla
	Si no, volver al paso 2

**Cuadro 3.26.**

## Capítulo 4

# Métodos para el tratamiento de la incertidumbre

### 4.1. INTRODUCCIÓN

La matemática tradicional ha desarrollado una serie de modelos útiles para aquellos casos en los que se dispone de toda la información necesaria expresada en datos fijos y ciertos. Sin embargo, estos modelos comienzan a plantear dificultades cuando se pretende aproximarlos a la realidad y aplicarlos a situaciones y problemáticas caracterizadas por el continuo cambio y la complejidad, la cual se manifiesta a través de distintos aspectos, a saber:

- **Objetivos múltiples.** El decisor debe buscar algún criterio que satisfaga un conjunto de objetivos distintos y normalmente incompatibles.
- **Tiempo de respuesta.** Cada vez más, decisiones con consecuencias importantes a largo plazo deben de adoptarse en un breve período de tiempo, si se requiere dar respuesta a un entorno altamente competitivo. Así, los responsables de la toma de decisiones tendrán menos tiempo para consultar más fuentes de información, para analizar más alternativas.
- **Información incompleta y limitada.** Como consecuencia de ello, es imposible contar con toda la información necesaria para resolver un problema y adoptar una decisión óptima. Y aunque se dispusiese de toda la información, ésta difícilmente podría procesarse.

- Incertidumbre sobre los datos. Muchas decisiones en las organizaciones incorporan la situación previsible del entorno dentro de la información a tener en cuenta, y ésta no se puede conocer sino es en términos aproximados.

En un intento de formalizar este fenómeno la tendencia natural, basada en la representación en términos de certeza de la información disponible, parece alejarse de lo que la propia realidad demanda. De hecho, en algunas investigaciones de Contabilidad de Gestión en este ámbito, se han empleado técnicas estocásticas como una solución suplementaria ante la ausencia de otras, las cuales si bien se muestran como herramientas poderosas para determinados problemas, pierden capacidad representativa cuando la información disponible posee altos niveles de subjetividad o vaguedad. De ahí que, ante su escasa capacidad para ayudar a la toma de decisiones en entornos turbulentos, algunos autores han planteado la aplicación de la Teoría de los Subconjuntos Borrosos. Así, por ejemplo, cabe resaltar la propuesta de KAUFMANN y GIL ALUJA para quienes “La Teoría de Probabilidades se apoya en tres siglos de perfeccionamiento, pero ¿existe alguna teoría de lo incierto?. No se ve de qué manera sería posible definirla, explicitarla. Sin embargo, dado que de lo incierto también se puede obtener información, hay que aprovechar esta información por muy pobre que sea, incluso si es escasa, para mejorar el comportamiento, para obtener un comportamiento más acorde con un sistema personal de intenciones. En lugar de una teoría económica entre otras muchas que existen, proponemos un trabajo mucho más honesto: emplear de la mejor manera posible las informaciones disponibles para construir modelos matemáticos intentando engañarnos lo menos posible... a nosotros mismos” (KAUFMANN y GIL ALUJA, 1987, pág. 13).

#### **4.2. INCERTIDUMBRE: TIPOLOGÍAS Y SU TRATAMIENTO**

Con frecuencia incertidumbre y aleatoriedad son conceptos que se confunden o se utilizan de manera indistinta. Si bien es cierto que en el ámbito cotidiano dicha confusión no provoca demasiados contratiempos, en el ámbito científico es importante diferenciar ambos términos, ya que la matemática que se aplica en uno u otro caso es distinta.

De esta forma, en aquellas situaciones que se producen con regularidad, en las que el suceso que se pretende estudiar se repite en el espacio y/o en el tiempo y, por tanto, se puede medir y calcular la probabilidad de que ocurra, asignándole una variable aleatoria y conocer su distribución, es posible la utilización de técnicas estadísticas.

Por el contrario, en situaciones en las que no se puede realizar ninguna medida sobre hechos observados, debido a que no existe repetición y ante las que la información disponible es imprecisa o vaga, no se puede hablar de probabilidad sino de posi-

bilidad. La incertidumbre no posee leyes, no está estructurada o lo está de forma deficiente, y la forma de explicarla es subjetiva. Un hecho incierto es aquel que no puede situarse en el espacio ni en el tiempo, que hace referencia al futuro y sobre el que los datos pasados aportan muy poca información.

Este tipo de imprecisión se encuentra asociado con fenómenos muy comunes en el ámbito de estudio de las ciencias económicas y empresariales, dada la incertidumbre típica tanto de los propios hechos económicos como de los términos semánticos utilizados para la toma de decisiones. Así, por ejemplo, resulta común en este ámbito contemplar razonamientos como el siguiente: “si la tasa actual de inflación crece rápidamente y el paro aumenta mucho, entonces las disponibilidades de dinero serán bajas”.

La cuestión que surge entonces radica en que una gran parte de los problemas de gestión son complejos y turbulentos y, por ello, su tratamiento sistemático requiere tener en cuenta factores subjetivos, tales como juicios, opiniones e intereses personales. Por otro lado, las afirmaciones, términos y reglas utilizadas en la gestión son normalmente ambiguas. De ahí que el encargado de la toma de decisiones no es común que posea la “habilidad” de recoger todos los datos relevantes para la misma, por lo que no es capaz de convertir todos los datos en informaciones precisas. De hecho, el directivo debe tomar decisiones que conciernen al futuro de su organización, basándose en su criterio personal y subjetivo. Así, la posibilidad de que entre un conjunto de opciones exista alguna con mayor grado de ocurrencia que las otras da lugar al comienzo del proceso de toma de decisiones.

En la realidad actual del mundo empresarial, el responsable de la toma de decisiones no dispone de la posibilidad de poder observar un experimento repetidamente para eliminar la incertidumbre del mismo. Consecuentemente, mientras el criterio probabilístico es aplicable a tomas de decisiones con resultados observables, no puede utilizarse en rigor para cualquier tipo de toma de decisiones. Por ello, se precisa de métodos eficientes, no sólo para estimar el grado de verdad, sino también para construir expresiones a partir de datos que sean ambiguos por sí mismos. No obstante, existe una tendencia en la gestión a utilizar información precisa, aunque esa información es difícil de obtener en muchos casos y, por ello, puede tener un impacto adverso en la aplicación de modelos de gestión. Esta tendencia limita la aplicación de dichos modelos a problemas del mundo real. Los directivos toman decisiones sin tener un amplio número de informaciones precisas. Por ejemplo, la decisión “mejorar la calidad”, puede llevar aparejada la toma de otras decisiones por parte de diferentes empleados de la empresa, muchas de ellas precisas. La habilidad de los directivos para manejar ese tipo de situaciones les aporta una gran flexibilidad en la toma de decisiones, mayor de la que obtendrían con métodos operativos tradicionales.

La incertidumbre, en el ámbito de la gestión, se puede definir por el desconocimiento acerca del estado que va a tomar una determinada variable que afecta a una decisión económica. Por ello, se han de considerar diferentes situaciones en las cuales es posible obtener distintos resultados para cada curso de acción. No es necesariamente que exista ignorancia, sino que resulta imposible establecer la probabilidad de cada uno de los estados que pueden tomar las variables.

De lo anterior se deduce que incertidumbre y azar no corresponden al mismo nivel de información y, en consecuencia, no pueden ser tratadas con las mismas herramientas. De esta forma, el azar es la incertidumbre medida con la ayuda del concepto de probabilidad, aunque en el lenguaje popular ambos términos se utilicen de forma indistinta.

Tradicionalmente la presencia de incertidumbre ha sido manejada por medio de herramientas estándar como la teoría de la probabilidad, en particular la metodología Bayesiana y la Teoría de la Utilidad, si bien, en los últimos años, algunos científicos se han planteado alternativas ante las limitaciones que tales herramientas presentan.

Muchas disciplinas matemáticas trabajan con la descripción de incertidumbre, por ejemplo, la teoría de la probabilidad, la Teoría de la Información y la Teoría de los Subconjuntos Borrosos. Resulta conveniente analizar estas disciplinas en función del tipo de incertidumbre que manejan, para lo cual cabe considerar dos tipos de incertidumbre: probabilística y lingüística.

#### **4.2.1. Incertidumbre probabilística**

La incertidumbre probabilística maneja la incertidumbre de que ocurra un determinado evento. El evento en sí mismo está bien definido, encontrándose la incertidumbre en grado de probabilidad de que el mismo tome un estado u otro. Por ejemplo, cuando se dice que se va conseguir beneficios con un 80% de probabilidad, se está manejando una incertidumbre mensurable.

Además, este tipo de afirmaciones pueden manejarse utilizando métodos estocásticos, tales como el cálculo Bayesiano que permite medir la información de que se dispone, realizar operaciones y llegar a conclusiones sobre la misma.

Los modelos Bayesianos constituyen un cuerpo de herramientas que han sido aplicadas para manejar la incertidumbre. Aún cuando los más sencillos de ellos no consideran diferentes grados de verdad, se han desarrollado modelos más complejos que incorporan estructuras jerarquizadas de análisis de la evidencia que combinan las diversas piezas de la misma utilizando la probabilidad para representar el riesgo.

No obstante, cuando la posibilidad de ocurrencia de un determinado evento no se puede medir e influye de manera determinante la subjetividad de las apreciaciones realizadas por los seres humanos, no pueden utilizarse probabilidades, precisándose otro tipo de herramientas que sean capaces de trabajar con este tipo de información.

En este sentido, aunque con demasiada frecuencia se afirma que un evento es probable cuando no existe posibilidad de medición, se está tratando de utilizar la objetividad intentando mantener la fuerza de la teoría de probabilidades, pero si se pretende ser "honesto" se ha de manejar por medio de valuaciones que aún siendo más débiles resultan más realistas.

#### **4.2.2. Incertidumbre lingüística**

Un tipo diferente de incertidumbre es la que se plantea en aquellas situaciones en que la información de la que puede disponerse sobre una determinada variable es imprecisa y, en muchos casos estimada a través de sensaciones o juicios de expertos, de forma que no puede ser precisada pero en cambio sí se puede afirmar que una situación o un acontecimiento futuro es más "posible" que otros.

Por tanto, se está abriendo un campo fundamental en las perspectivas del razonamiento y de la decisión, pues el conocimiento subjetivo puede ser sometido prácticamente a todos los mecanismos de la lógica. Dentro de este tipo de incertidumbre se sitúa la que se encuentra en el lenguaje natural debido a la imprecisión inherente a la mayoría de las expresiones humanas. En este caso, es necesario considerar dicha imprecisión y establecer la forma de tratarla con el fin de evaluar los conceptos y derivar conclusiones.

De esta forma, conceptos tales como "precio alto", "demanda baja" o "fuerte competencia" que no se corresponden con definiciones exactas se pueden considerar dentro de este tipo de incertidumbre. Por otro lado, la consideración del precio de un artículo por un directivo como "alto" puede diferenciarse sustancialmente de la opinión que emita otro, debido a que las personas utilizan su conocimiento para elevar los juicios y por tanto éste influirá de manera determinante en ellos, siendo poco posible que dos individuos coincidan.

La ciencia que trabaja con la forma en que las personas evalúan conceptos es la Psicolingüística, estando demostrado por ella que los humanos utilizan palabras como categorías subjetivas para clasificar conceptos tales como "precio", "demanda" e "inflación". Por medio de la utilización de estas categorías subjetivas, hechos del mundo real pueden ser evaluados por el grado en que satisfacen determinados criterios, pues, incluso considerando que la mayoría de estos conceptos no están definidos de forma precisa, los individuos pueden utilizarlos para evaluar y tomar decisiones complejas que se sus-

tentan en una variedad de factores. Gracias a ello, utilizando esta abstracción y empleando analogías, unas pocas expresiones pueden describir contextos complejos que resultarían difíciles de modelar con precisión matemática.

Ante consideraciones del tipo “es posible alcanzar el objetivo”, puede parecer que la sentencia es igual que la de la incertidumbre probabilística, sin embargo, existen diferencias sustanciales, a saber: (i) el evento en sí mismo no está definido claramente, y (ii) el significado de la expresión posible en este segundo caso no lleva aparejado un sentido matemático.

A modo ilustrativo, cabe suponer, por ejemplo que  $P$  es una variable que toma sus valores en el conjunto  $X$ , la forma en que comúnmente se puede presentar la información de esta variable es por medio de expresiones del tipo  $P$  es  $x$ , donde  $x$  es algún valor en el conjunto  $X$ . Pues bien, en el trabajo seminal de Zadeh (1965) se sugirió la idea de que la variable  $P$  tome algún valor lingüístico. Con lo cual, si  $P$  define la variable precio de el artículo  $M$  se puede expresar el mismo de la forma:

*P es alto*

En consecuencia, en los casos en que la imprecisión puede ser introducida de forma lingüística, es decir, usando palabras y modificadores del propio lenguaje, su tratamiento debe ser realizado con técnicas que permitan reflejar dicha imprecisión, entre las que destaca la Teoría de los Subconjuntos Borrosos.

#### **4.2.3. Tratamiento de la incertidumbre**

En la teoría tradicional de conjuntos, la pertenencia se definía en términos binarios, un elemento pertenecía o no al conjunto. Sin embargo, la Teoría de los Subconjuntos Borrosos permite que un elemento pertenezca a varios conjuntos con un grado de verdad. Por ello, la ausencia de límites estrictos entre los conjuntos permite añadir flexibilidad en la toma de decisiones.

La intención de la Teoría de los Subconjuntos Borrosos no es la de reemplazar a la teoría de la probabilidad en la medición de la aleatoriedad probabilística, sino proporcionar una forma natural de trabajar con problemas en los que la fuente de la imprecisión radica en la ausencia de criterios estrictos más que en presencia de variables aleatorias.

No obstante, en los problemas reales se encuentran con frecuencia en un mismo caso datos aleatorios y datos borrosos sin que ello represente un obstáculo para la resolución de los mismos. La probabilidad y la posibilidad se pueden asociar en un mismo modelo, pero teniendo presente que son conceptos diferentes. Con esto se plantea que la borrosidad no excluye la probabilidad, sino que trata de enfrentarse a sucesos en los que



no es posible utilizar probabilidades, a sucesos que cada vez con más frecuencia no pueden medirse al no repetirse en las mismas condiciones.

Por consiguiente, si el conocimiento que se tiene del comportamiento de las variables del modelo es impreciso, como ocurre en el caso de la mayoría de los problemas de gestión, la técnica matemática con que se debe operar, en orden a facilitar dicha toma de decisiones, debe incluir la noción de nivel de presunción y en consecuencia será preciso un acercamiento a aquellas herramientas matemáticas que permitan procesar esa información, que permitan trabajar con valoraciones subjetivas.

En los apartados siguientes se realizará en primer término una descripción de los subconjuntos borrosos así como de las operaciones que se pueden realizar con los mismos para, en segundo lugar, describir los números borrosos y sus diferentes tipologías haciendo referencia asimismo a la operativa propia de los mismos. En tercer lugar, se procede a analizar las variables lingüísticas y su utilización para, en último lugar, describir el modelo de representación lingüística basado en 2-tuplas.

### **4.3. SUBCONJUNTOS BORROSOS**

#### **4.3.1. Consideraciones generales**

Los números borrosos han sido creados para reflejar la vaguedad de la percepción humana y con ello la noción de presunción. De esta forma, la Teoría de los Subconjuntos Borrosos, como rama de la matemática que se ocupa del tratamiento tanto de lo subjetivo como de lo incierto, constituye un intento de recoger un fenómeno tal cual se presenta en la realidad y realizar su tratamiento sin intentar deformarlo para hacerlo preciso y cierto (ZADEH, 1965). En la medida en que los responsables de la gestión de las organizaciones empresariales reconocen que su entorno y, en consecuencia la información que manejan, es incierto parece evidente que prefieran representaciones realistas, aunque imprecisas frente a modelos sólo supuestamente exactos.

A este respecto, cabe recordar que se denomina Conjunto a un grupo de objetos, distintos entre sí y perfectamente especificados. Si en lugar de considerar todos los elementos se toman sólo alguno de ellos se forma un "subconjunto". Al conjunto de referencia se le denomina frecuentemente referencial. De esta forma, dado un referencial E tal como:

$$E = \{a, b, c, d, e\}$$

se puede escribir entonces  $A = \{a, c, e\}$

donde A es un subconjunto del referencial E.

Generalmente, para expresar la pertenencia o no pertenencia de los elementos del referencial al subconjunto se utiliza el 1 y el 0 respectivamente, de modo que se puede expresar el subconjunto A de la siguiente forma:

$$A = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & a & b & c & d & e \\ \hline & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

o bien, a través de la función característica:

$$\forall x \in E \quad \mu_A(x) \in \{0, 1\}$$

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

Un conjunto ordinario está definido siempre con respecto a algún universo de discurso X, que por sí mismo es un conjunto clásico. En particular, se define un subconjunto con la ayuda de una función característica que describe la pertenencia al subconjunto. Sea X un universo de discurso y sea S un subconjunto de X. La función característica asociada con S es:

$$\mu^S = X \rightarrow \{0, 1\}$$

tal que para cualquier elemento x del universo,  $\mu^S(x) = 1$ , si x es un miembro de S mientras que  $\mu^S(x) = 0$  si x no es un miembro de S.

La Figura 4.1. muestra la idea de una función característica, siendo el eje X el conjunto de los números reales y S el subconjunto de los números reales que están entre 0 y 20, mientras la Figura 4.2. muestra un subconjunto clásico en un plano.

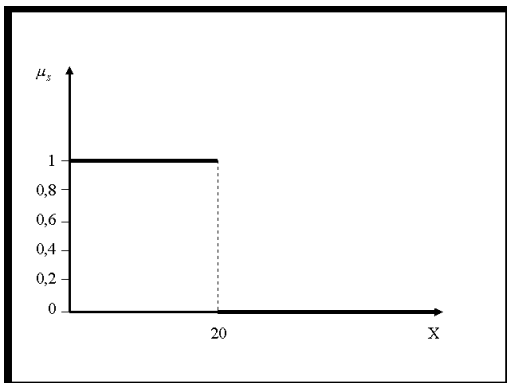


Figura 4.1.

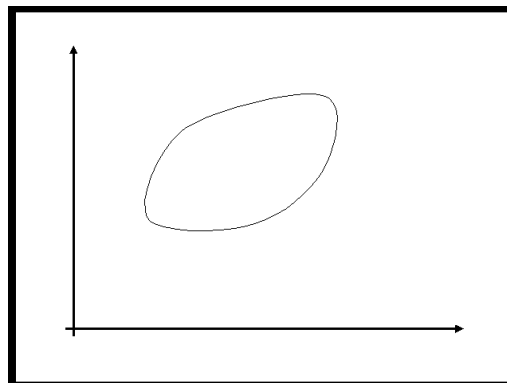


Figura 4.2.

Como es fácilmente demostrable, este planteamiento no refleja en profundidad muchos aspectos de la realidad, ya que en este caso el hecho de pertenecer o no perte-

necer a un subconjunto resulta perfectamente diferenciado, es decir, sin posibilidad de matización. Sin embargo, la realidad no siempre se plantea en estos términos, sino que con frecuencia es imprescindible introducir matizaciones de pertenencia a un conjunto dado.

En este sentido, si se considera el mismo referencial  $E$ , un subconjunto borroso del mismo, por ejemplo, podría ser el siguiente:

$$\tilde{A} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & a & b & c & d & e \\ \hline & 0'3 & 1 & 0'8 & 0'1 & 0 \\ \hline \end{array}$$

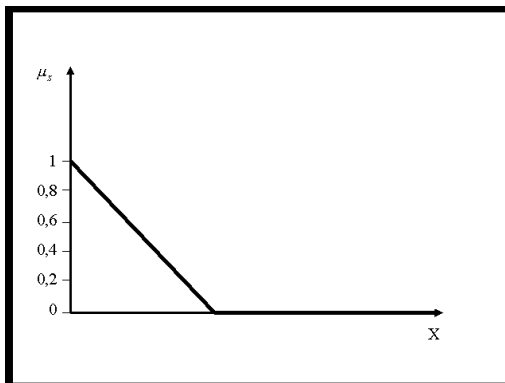
donde se puede observar que  $a$  pertenece a  $\tilde{A}$  con un grado o nivel estimado en  $0'3$ ,  $b$  con un nivel  $1$  (es decir, pertenece a  $\tilde{A}$  con toda seguridad),  $c$  pertenece con un grado  $0'8$ ,  $d$  con un nivel  $0'1$  y  $e$  no pertenece. En consecuencia, la pertenencia de un elemento al subconjunto borroso toma valores en el intervalo  $[0, 1]$ . El aspecto borroso del subconjunto se indica a través de una tilde encima de la letra mayúscula.

*Definición de Subconjunto Borroso:* Sea  $X$  un conjunto que sirve de universo. Un subconjunto borroso  $S$  asociado con la función característica:

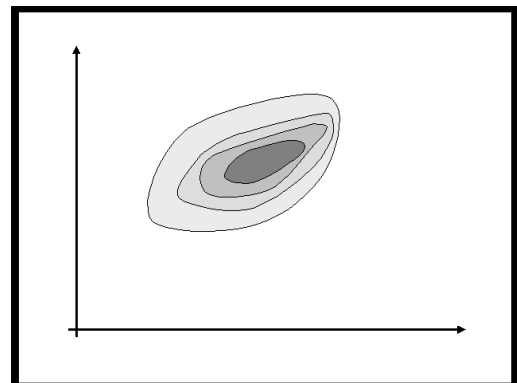
$$\mu_s : X \rightarrow [0, 1]$$

En el marco de actuación de la Teoría de los Subconjuntos Borrosos se denomina generalmente a la función característica del mismo como función de pertenencia asociada al mismo. Esta terminología conlleva la idea de que para cada  $x$ ,  $\mu_s(x)$  indica el grado en el que  $x$  es miembro del conjunto  $S$ .

En la Figura 4.3. se muestra un ejemplo de subconjunto borroso con respecto a un eje, siendo su representación en un plano la que muestra la Figura 4.4., diferenciando el grado de pertenencia mediante una escala de grises.



**Figura 4.3.**



**Figura 4.4.**

Por tanto, un conjunto borroso se puede definir asimismo a través de su función característica, o utilizando la terminología propia "función de pertenencia", la cual no es más que una extensión de la función característica definida para conjuntos ordinarios, ya que si se establece que el conjunto de pertenencia del subconjunto borroso se encuentre en  $\{0, 1\}$  entonces el mismo se reduce a un subconjunto ordinario.

De lo anterior se deduce que la teoría clásica de conjuntos es un caso particular de la teoría de conjuntos borrosos.

La representación anterior de un subconjunto borroso se puede realizar, asimismo, de la siguiente forma: siendo  $E$  el referencial  $E = \{a, b, c, d, e\}$ , el subconjunto borroso  $\tilde{A}$  será entonces el siguiente:

$$\tilde{A} = \{0'3/a, 1/b, 0'8/c, 0'1/d, 0/e\}$$

Los términos del subconjunto  $\tilde{A}$  en la forma anterior indican el grado de pertenencia al subconjunto de cada elemento del referencial. En la práctica es habitual suprimir aquellos elementos con un grado de pertenencia nulo, de forma que el subconjunto anterior se podría representar como sigue:

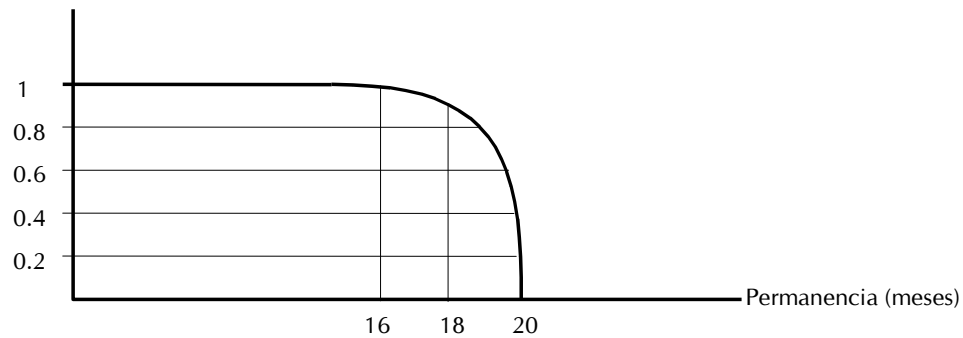
$$\tilde{A} = \{0'3/a, 1/b, 0'8/c, 0'1/d\}$$

Las consideraciones previas permiten considerar que un subconjunto borroso es aquel formado por una serie de elementos cuya pertenencia al conjunto es modulable de forma gradual. En su aplicación esta característica de graduación, de matización, es la que realmente hace posible reflejar muchos aspectos de la realidad.

Por ejemplo, si se pretende analizar la composición de una determinada gama de productos perecederos con la finalidad de determinar aquellos productos que se encuentren cercanos a la caducidad y, en principio el tiempo máximo de permanencia es de 2 años, aquellos productos cuya permanencia en la empresa sea superior a los 20 meses pueden formar un subconjunto del referencial que se puede definir como "productos próximos a caducar"; de la misma manera, pueden constituir otro subconjunto el resto de productos que se podría denominar "productos en condiciones válidas".

Si se plantea considerar el subconjunto "productos en condiciones óptimas", se puede afirmar que aquellos que superen los 20 meses de permanencia en la empresa, evidentemente no formarán parte del mismo, pero ya no es sencillo determinar si los que han permanecido entre 18 y 20 meses pertenecerían a ese subconjunto; es muy difícil admitir aquellos que hayan estado 16 meses y por debajo de ese tiempo no existiría discusión alguna sobre su pertenencia. Este razonamiento difícilmente se puede captar con la matemática tradicional de conjuntos vulgares o el álgebra booleana.

Si se pretende reflejar gráficamente esta situación, el subconjunto quedaría como muestra la Figura 4.5. siguiente:



**Figura 4.5.**

Como puede observarse en la Figura anterior, un producto con una permanencia en la empresa de 20 meses con toda seguridad no pertenecería al subconjunto, un producto por debajo de los 16 meses pertenecerá con un nivel 1 y los productos con 18 meses pertenecerán con un grado 0.8 y así sucesivamente.

El subconjunto "productos en condiciones óptimas" se representa pues como un "subconjunto borroso o difuso".

#### 4.3.2. Operaciones básicas con subconjuntos borrosos

Como se comentó con anterioridad, los subconjuntos borrosos, de forma similar a los subconjuntos tradicionales, vienen definidos por su función característica o función de pertenencia, la cual para un subconjunto borroso  $\tilde{A}$ , se suele representar por  $\mu_{\tilde{A}}$ , si bien es posible encontrar en la literatura notaciones distintas para la función de pertenencia, siendo representada en muchos casos por  $A(x)$ . En este último caso, se puede observar la utilización de un mismo símbolo para denominar al subconjunto borroso y a su función de pertenencia.

Sin embargo, según indican KLIR y YUAN (1995) no existe ambigüedad en este doble uso del mismo símbolo ya que cada subconjunto borroso queda completa y unívocamente definido por una función de pertenencia, por lo que los símbolos de las funciones de pertenencia podrían también emplearse en los conjuntos borrosos asociados.

En consecuencia, y si bien queda claro la relación biunívoca, en el sentido matemático no es una igualdad y, por tanto, no exime de ambigüedad por lo que en lo su-

cesivo se utilizará  $\tilde{A}$  para referirse al subconjunto borroso y  $\mu^A$  para la función de pertenencia de dicho subconjunto.

Por otro lado, cabe señalar que, al igual que en los conjuntos convencionales, existen definiciones específicas para combinar y especificar nuevos conjuntos borrosos. Este conjunto de funciones teóricas provee las herramientas fundamentales de la lógica. En el caso habitual, con las operaciones comunes de intersección, unión y complemento, el conjunto de conjuntos forma un álgebra booleana, es decir, se cumplen las condiciones de asociatividad, conmutatividad, elementos neutros, idempotencia, absorción, distributividad, complemento y las leyes de Morgan.

Las tres operaciones mencionadas se pueden extender de varias formas a los subconjuntos borrosos, de modo que al restringirlas a los conjuntos usuales, coincidan con las comunes. Estas extensiones resultantes satisfacen en forma general sólo algunas de las condiciones listadas anteriormente, y para mantener la vigencia de alguna será obligatorio sacrificar otras.

En general, para dos subconjuntos borrosos  $\tilde{A}$  y  $\tilde{B}$  del conjunto  $E$ , se definen las operaciones extendidas de las operaciones en el sentido clásico como sigue:

- **Intersección.** La intersección de dos subconjuntos borrosos será un subconjunto borroso definido de la siguiente manera:

$$\mu^{(A \cap B)}(x) = \min(\mu^A(x), \mu^B(x)) = (\mu^A(x) \wedge \mu^B(x)) \quad \forall x \in E$$

En general se suele utilizar el símbolo  $\wedge$  para referirse al operador Mínimo.

Así, por ejemplo si  $X = [a, b, c, d, e]$  y  $\tilde{A}$  y  $\tilde{B}$  son dos subconjuntos borrosos de  $X$  tales que:

$$\tilde{A} = [1/a, 0'7/b, 0'3/c, 0/d, 0'9/e]$$

$$\tilde{B} = [0'2/a, 0'9/b, 0'4/c, 1/d, 0'4/e]$$

su intersección será un nuevo subconjunto borroso denominado  $\tilde{C}$ , que vendrá definido como se recoge a continuación:

$$\tilde{C} = [0'2/a, 0'7/b, 0'3/c, 0/d, 0'4/e]$$

y gráficamente su representación se muestra en la Figura 4.6.

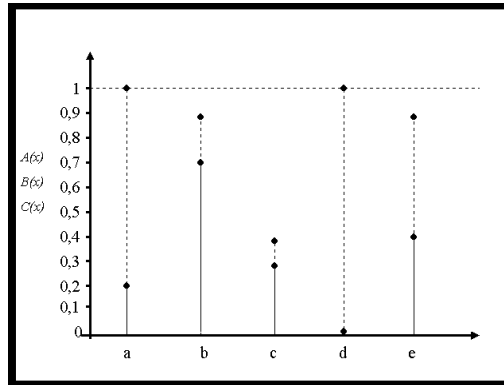


Figura 4.6.

La intersección de subconjuntos borrosos cumple las siguientes propiedades:

- Conmutativa:  $A \cap B = B \cap A$
- Idempotencia:  $A \cap A = A$
- Asociativa:  $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C$
- Distributiva:  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- Elemento neutro:  $A \cap E = A$
- Elemento absorbente:  $A \cap \emptyset = \emptyset$

- Unión.** La unión de los dos subconjuntos  $\tilde{A}$  y  $\tilde{B}$  será un nuevo subconjunto borroso calculado de la forma siguiente:

$$\mu_{(A \cup B)}(x) = \max(\mu^A(x), \mu^B(x)) = (\mu^A(x) \vee \mu^B(x)) \quad \forall x \in E$$

Asimismo es habitual en la literatura de subconjuntos borrosos la utilización del símbolo  $\vee$  para referirse al operador Máximo.

Así, de acuerdo con los subconjuntos  $\tilde{A}$  y  $\tilde{B}$  anteriores, su unión será el subconjunto borroso  $\tilde{C}$  definido como sigue:

$$\tilde{C} = [1/a, 0'9/b, 0'4/c, 1/d, 0'9/e]$$

Gráficamente la unión de los dos subconjuntos borrosos anteriores será la que muestra la Figura 4.7.

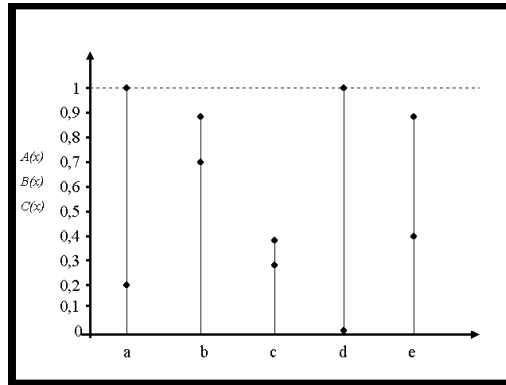


Figura 4.7.

La unión de subconjuntos borrosos cumple las siguientes propiedades:

- a. Conmutativa:  $A \cup B = B \cup A$
  - b. Idempotencia:  $A \cup A = A$
  - c. Asociativa:  $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C$
  - d. Distributiva:  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
  - e. Elemento neutro:  $A \cup \emptyset = A$
  - f. Elemento absorbente:  $A \cup E = E$
  - g. Inclusión:  $A \subset A \cup B$
- Si  $A \subset B$   $B = A \cup B$   
 Si  $A \subset B$  y  $B \subset C$ , entonces  $A \subset C$

Las operaciones de Máximo y Mínimo tienen gran trascendencia y utilidad en la aplicación de la Teoría de los Subconjuntos Borrosos, y en términos algebraicos es posible calcularlas como sigue:

$$\text{Max}(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \frac{\mu_A(x) + \mu_B(x) + |\mu_A(x) - \mu_B(x)|}{2}$$

$$\text{Min}(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \frac{\mu_A(x) + \mu_B(x) - |\mu_A(x) - \mu_B(x)|}{2}$$

- **Igualdad.** Dados dos subconjuntos borrosos  $\tilde{A}$  y  $\tilde{B}$  definidos mediante sus funciones de pertenencia, se establece que  $\tilde{A} = \tilde{B}$  si y sólo si se cumple:

$$\mu^A(x) = \mu^B(x) \quad \forall x \in E$$



- **Contenido.** Se establece que un subconjunto borroso  $\tilde{A}$  está contenido en otro subconjunto borroso  $\tilde{B}$  si se cumple:

$$\tilde{A} \subseteq \tilde{B} \quad \Leftrightarrow \quad \mu^A(x) \leq \mu^B(x) \quad \forall x \in E$$

Si solo se verifica la igualdad el contenido es estricto.

- **Complementación.** El complementario o negación de un subconjunto borroso está definido por la diferencia de cada grado de pertenencia del elemento con respecto al valor unitario:

$$\mu^{A^c}(x) = 1 - (\mu^A(x)) \quad \forall x \in E$$

En el ejemplo anterior, el complementario del subconjunto borroso  $\tilde{A}$ , sería:

$$\tilde{A} = [0/a, 0'3/b, 0'7c, 1/d, 0'1/e]$$

y gráficamente, la complementación de  $\tilde{A}$  se muestra en la Figura 4.8.

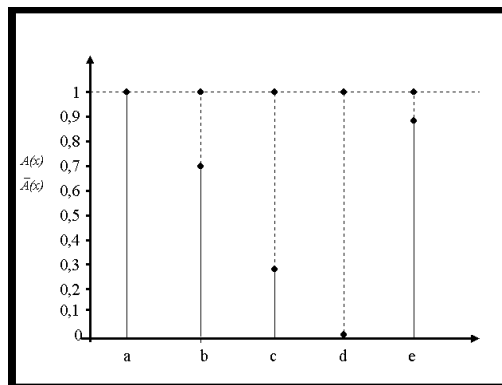


Figura 4.8.

De esta forma, se puede considerar que la negación es el complemento de un subconjunto borroso con respecto al espacio completo y además cumple las siguientes propiedades:

La complementación de subconjuntos borrosos cumple la propiedad de doble negación o involución:  $\overline{(\overline{A})} = A$

Las propiedades que relacionan las operaciones conjuntistas expuestas anteriormente son las siguientes leyes:

a. Absorción:  $A \cup (A \cap B) = A \quad A \cap (A \cup B) = A$

b. Ley de Morgan:  $\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B} \quad \overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$

c. Distributivas:  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Por otro lado, conviene observar que en los subconjuntos borrosos no se cumple la aristotélica “ley del tercio-excluido”, por lo que, en general, se tiene que:

$$A \cap \bar{A} \neq \emptyset \quad \text{y} \quad A \cup \bar{A} \neq E$$

Por ejemplo, si se tiene:

$$\mu_{(A \cap \bar{A})}(x) = \mu_{(A)}(x) \wedge \mu_{(\bar{A})}(x) = 1/2 \quad \Rightarrow \quad A \cap \bar{A} \neq \emptyset$$

$$\mu_{(A \cup \bar{A})}(x) = \mu_{(A)}(x) \vee \mu_{(\bar{A})}(x) = 1/2 \quad \Rightarrow \quad A \cup \bar{A} \neq E$$

La no verificación de la ley del tercio-excluido influye en los procesos matemáticos de manera que, por ejemplo, el método de reducción al absurdo no puede ser utilizado en esta teoría. Asimismo, el no cumplimiento de la mencionada ley afecta a todos los procesos algebraicos relacionados con la complementación. Por ejemplo, se puede observar que:

$$\mu_{(A \cap \bar{A})}(u) = \mu_{(A)}(u) \wedge \mu_{(\bar{A})}(u) = \min(\mu_{(A)}(u), 1 - \mu_{(A)}(u)) \leq 1/2$$

$$\mu_{(A \cup \bar{A})}(u) = \mu_{(A)}(u) \vee \mu_{(\bar{A})}(u) = \max(\mu_{(A)}(u), 1 - \mu_{(A)}(u)) \geq 1/2$$

La operación de complementación en el caso de los subconjuntos borrosos recupera la noción de complementación de conjuntos ordinarios, debido a que el recorrido de las funciones características de los conjuntos ordinarios es el conjunto binario  $\{0, 1\}$ .

El conjunto  $\{0, 1\}$  es ordenado para la relación  $\leq$ . Asimismo, cada par de elementos  $a$  y  $b$  de  $\{0, 1\}$  existen únicos  $c = \sup(a, b)$  y  $d = \inf(a, b)$ . Entonces, dado que  $a \in \{0, 1\}$  existen un único  $b \in \{0, 1\}$  tales que  $\inf(a, b) = 0$  y  $\sup(a, b) = 1$ . Al elemento  $b$  se le llama complemento y se simboliza por  $\bar{a}$ .

Por tanto, si se considera un conjunto ordinario  $A$  con una función característica  $\mu_A(x) = a$  y se considera su complementario ordinario  $\bar{A}$  con  $\mu_{\bar{A}}(x) = \bar{a}$  resulta que:

$$\mu_{(A \cap \bar{A})}(x) = \min(a, \bar{a}) = 0 \quad \Rightarrow \quad A \cap \bar{A} = \emptyset$$

$$\mu_{(A \cup \bar{A})}(x) = \max(a, \bar{a}) = 1 \quad \Rightarrow \quad A \cup \bar{A} = E$$

De esta forma, las propiedades de los subconjuntos ordinarios vienen inducidas por las propiedades del conjunto  $\{0, 1\}$ . Si se trata de analizar la complementación en el caso de los subconjuntos borrosos, se observa que el recorrido  $[0, 1]$  de la función característica es un conjunto ordenado por la relación  $\leq$ . Cada dos elementos  $a$  y  $b$  de  $[0, 1]$  determinan de modo único valores  $c = \sup(a, b)$  y  $d = \inf(a, b)$ . No obstante, dado un elemento  $a \in [0, 1]$  no existe un elemento  $\bar{a}$  en  $[0, 1]$  tal que  $\inf(a, \bar{a})=0$  y  $\sup(a, \bar{a})=1$ , salvo que  $a = 0$ , o bien  $a = 1$ , en cuyo caso  $\bar{a} = 1$  y  $\bar{a} = 0$ .

- **Suma Limitada.** La suma limitada se representa por  $A \oplus B$  y se define como un subconjunto borroso que es el resultado de realizar la siguiente expresión:

$$\text{Min} [ 1, (\mu^A(x) + \mu^B(x))] \quad \forall x \in E$$

A modo ilustrativo, continuando con los datos del ejemplo anterior, la suma limitada de los subconjuntos borrosos  $\tilde{A}$  y  $\tilde{B}$  vendría dado por el subconjunto borroso  $\tilde{D}$  siguiente:

$$\tilde{D} = [1/a, 1/b, 0,7c, 1/d, 1/e]$$

y su representación gráfica se muestra en la Figura 4.9.

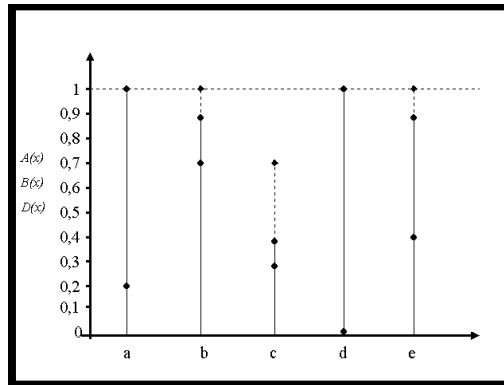


Figura 4.9.

Esta operación está relacionada con la unión de forma que en los subconjuntos clásicos se cumple que  $A \oplus B = A \cup B$ .

La descripción de las operaciones anteriores se ha realizado para referenciales finitos, resultando sencilla su generalización a referenciales infinitos. Así, gráficamente la representación de la unión, intersección, negación y suma limitada, se pueden observar en las Figuras 4.10., 4.11., 4.12. y 4.13., respectivamente.

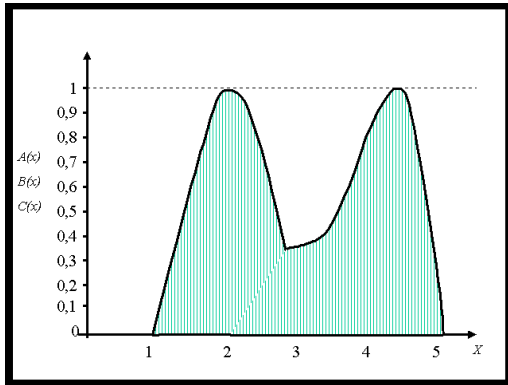


Figura 4.10.

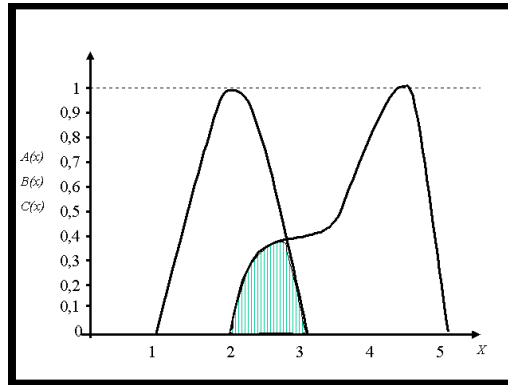


Figura 4.11.

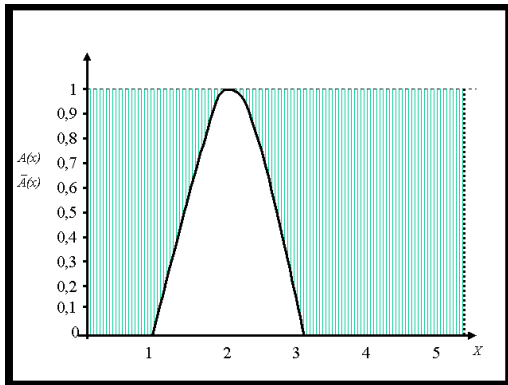


Figura 4.12.

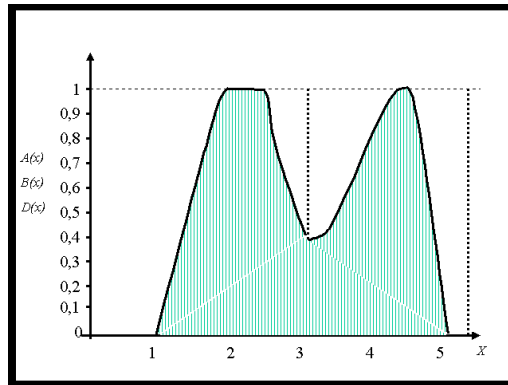


Figura 4.13.

### 4.3.3. Otras operaciones con subconjuntos borrosos

Dado que los subconjuntos borrosos no se particionan en el mismo sentido que los conjuntos booleanos, estas operaciones son aplicadas al nivel de pertenencia, como una consecuencia de los subconjuntos borrosos. Decidir si un valor es o no es miembro de cualquier subconjunto borroso en particular, requiere algunas nociones de cómo está construido el conjunto, del universo y de los límites de éste.

Por este motivo, existen operadores para los subconjuntos borrosos que no se dan en el caso de los subconjuntos ordinarios, como son (KAUFMANN y GIL ALUJA, 1990):

- **Traslación.** Dado un conjunto borroso  $\tilde{A}$  se denomina "traslación a la derecha" según un parámetro  $a \in \mathbb{R}^+$  a otro subconjunto borroso  $\tilde{B}$  tal que:

$$\forall x \in E, \quad \forall a \in \mathbb{R}^+: \quad \mu_{\tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x - a)$$

De forma similar es posible definir la “traslación a la izquierda” de un subconjunto borroso  $\tilde{A}$  según un parámetro  $a \in \mathbb{R}^+$  como otro subconjunto borroso  $\tilde{B}$  tal que:

$$\forall x \in E, \quad \forall a \in \mathbb{R}^+: \quad \mu^B(x) = \mu^A(x + a)$$

La representación gráfica de la traslación a la derecha se recoge en la Figura 4.14. y la Figura 4.15. recoge la traslación a la izquierda.

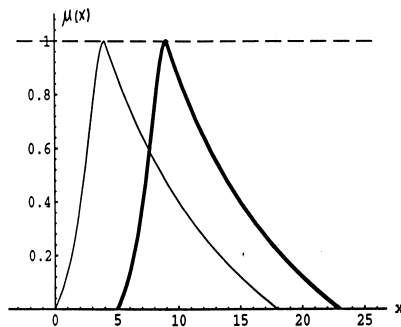


Figura 4.14

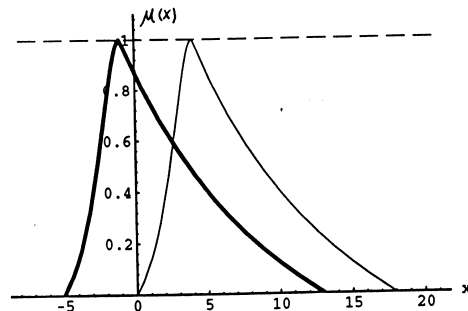


Figura 4.15

- **Normalización.** La normalización divide el grado de pertenencia de cada elemento de un determinado conjunto borroso por el valor máximo de pertenencia que exista en dicho conjunto. Está operación asegura que al menos un miembro del conjunto tendrá un grado de pertenencia igual a la unidad, es decir, permite transformar un subconjunto borroso no normal  $\tilde{A}$  en otro subconjunto borroso normal  $\tilde{A}'$ :

$$\forall x \in E, \quad \mu_{A'}(x) = \frac{\mu_A(x)}{\max \mu_A(x)}$$

Por tanto, la normalización provoca que el nivel de presunción o grado de posibilidad  $\alpha$  del subconjunto borroso normalizado  $\tilde{A}'$  varíe en el intervalo  $[0, 1]$ , siendo su representación gráfica la que se recoge en la Figura 4.16.

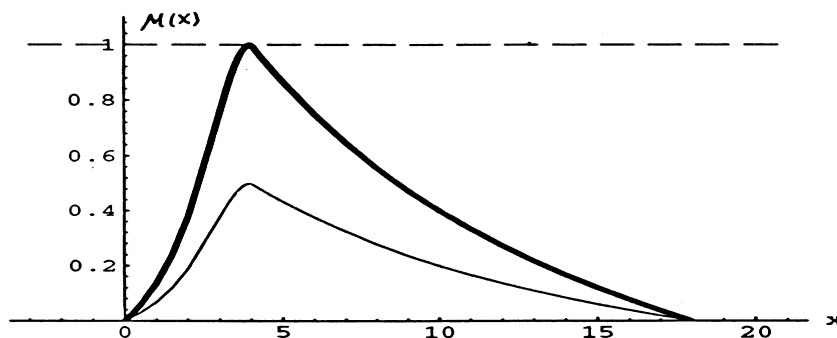


Figura 4.16.

- **Concentración o compresión.** Este operador trata de reducir el grado de pertenencia de cada elemento del conjunto borroso. Por tanto, el resultado de aplicar un concentrador a un conjunto borroso  $\tilde{A}$  es a su vez un conjunto borroso, tal que la reducción en la magnitud del grado de pertenencia de  $u$  en  $\tilde{A}$  es relativamente pequeño para aquellas  $u$  que tienen un alto grado de pertenencia en  $\tilde{A}$ , y relativamente grande para las  $u$  con baja pertenencia.

De forma específica, se asume que esta operación tiene el efecto de elevar al cuadrado la función de pertenencia de  $\tilde{A}$ , es decir:

$$\mu^{\text{CON(A)}}(x) = \mu^2_{\tilde{A}}(x), \quad \forall x \in E$$

Al elevar al cuadrado los valores de las funciones de pertenencia se cumple el efecto de la concentración, pues los valores de pertenencia grandes disminuyen relativamente poco en comparación con los pequeños. De esta forma la concentración desenfatisa los miembros centrales de un conjunto borroso.

De forma genérica se puede establecer que dado un subconjunto borroso  $\tilde{A}$  la potencia  $[\mu_{\tilde{A}}(x)]^k$  siendo  $k > 1$ , es otro subconjunto borroso  $\tilde{B}$  definido:

$$\mu_{\tilde{B}}(x) = [\mu_{\tilde{A}}(x)]^k \quad \text{con } k > 1 \quad \forall x \in E$$

La Figura 4.17. recoge la representación gráfica del operador de concentración.

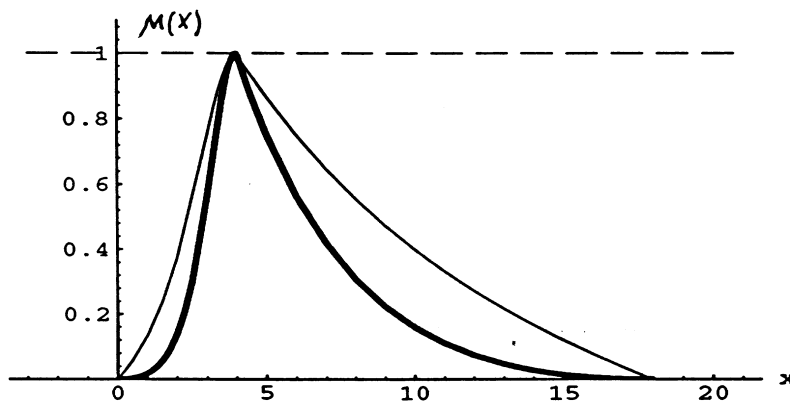


Figura 4.17.

- **Dilatación.** Esta operación tiene el efecto inverso a la concentración, es decir, el aumento en el grado de pertenencia para los elementos que tienen un grado alto es relativamente menor que para aquellos que tienen valores pequeños.

La operación de dilatación se puede expresar de la forma siguiente:

$$\mu^{\text{DIL}(A)}(x) = (\mu^A(x))^{1/2}, \quad \forall x \in E$$

Asimismo, se puede establecer de forma general que dado un subconjunto borroso  $\tilde{A}$  la potencia  $[\mu^A(x)]^k$  siendo  $k < 1$ , es otro subconjunto borroso  $\tilde{B}$  definido:

$$\mu^B(x) = [\mu^A(x)]^k \quad \text{con } 0 < k < 1 \quad \forall x \in E$$

La operación de dilatación queda reflejada gráficamente en la Figura 4.18.

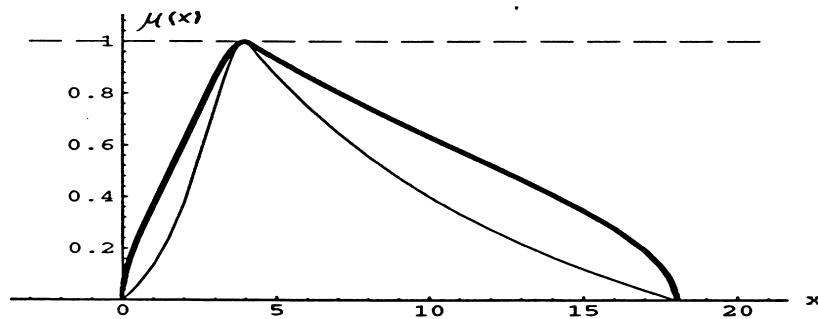


Figura 4.18.

- **Intensificación contrastante.** Este operador se emplea para intensificar el contraste existente entre los elementos que tienen un valor de pertenencia pequeño y los que tienen un valor de pertenencia grande. De forma específica, incrementa los valores de  $\mu^A(x)$  que están sobre 0'5 y disminuye los que se encuentran por debajo de dicho umbral:

$$\mu^{\text{INT}(A)}(x) \geq \mu^A(x), \text{ para } \mu^A(x) \geq 0'5$$

$$\mu^{\text{INT}(A)}(x) \leq \mu^A(x), \text{ para } \mu^A(x) \leq 0'5$$

- **Combinación convexa.** Es una operación que combina un conjunto de  $n$  conjuntos borrosos,  $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_n$ , en un solo conjunto  $\tilde{A}$  el cual es una combinación ponderada de los  $n$  conjuntos borrosos en el sentido de que la función de pertenencia de  $\tilde{A}$  está relacionada con las funciones de pertenencia de los  $n$  conjuntos mediante la expresión:

$$\mu^{(A)}(x) = w_1(x), \mu^{A_1}(x) + \dots + \mu^A(x) = w_n(x), \mu^{A_n}(x)$$

donde:

$$0 \leq w_i(x) \leq 1 \quad i = 1, \dots, n \quad \text{y} \quad w_1(x) + \dots + w_n(x) = 1 \quad \forall x \in E$$

▪ **Difusificación.** La fusificación consiste en convertir una entrada normal de un conjunto en una salida borrosa o difusa. La difusificación provoca el efecto contrario, es decir, se trata de transformar un conjunto borroso en otro convirtiendo las salidas difusas a salidas normales. En general se utiliza el símbolo “ $\sim$ ” para representar el papel de un difusificador.

Existen dos enfoques con los que proceder a realizar la difusificación de un conjunto. La base de ambos es un proceso de difusificación puntual que transforma un conjunto borroso de un solo término  $1/u$  en  $U$  en un conjunto borroso  $\tilde{\mu}$  que está concentrado alrededor de  $u$  y que se escribe como  $\tilde{\mu} = \tilde{k}$  (Kernel de difusificación). A menos que se indique lo contrario, el grado de pertenencia de  $u$  en  $k(x)$  es igual a 1.

Cuando  $\mu_i$  permanece constante se dice que la hay difusificación de soporte y se denota como  $SF(A;K)$ , cuando  $\mu_i$  es el que permanece constante se conoce como difusificación de grado y se denota  $GF(A; F)$ .

#### 4.4. NÚMEROS BORROSOS

##### 4.4.1. Consideraciones generales

Un número borroso es un subconjunto borroso sobre la recta real que cumple las siguientes propiedades:

- a. Normalidad:  $\exists x \in R \quad / \quad A(x) = 1$
- b. Semicontinuidad superior:  $\forall \alpha \in [0, 1] \{x \in R / A(x) \geq \alpha\}$  es compacto
- c. Convexidad:  $\forall \alpha, \beta \in [0, 1] \quad / \quad \alpha > \beta \quad A(\alpha) \subset A(\beta)$

Para cumplir la condición de normalidad es necesario que por lo menos un elemento del subconjunto tenga como valor la unidad en la función característica de pertenencia.

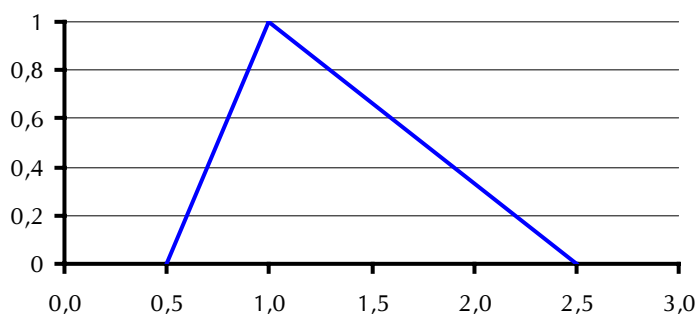
El conjunto al que hace referencia la propiedad de semicontinuidad superior se denomina  $\alpha$ -corte (alfa-corte).



A su vez, la condición de convexidad se cumple cuando los valores de la función característica de pertenencia "no aumentan" a medida que se realiza un desplazamiento, tanto a la derecha como a la izquierda, del mayor valor de esta función, al que se le denomina "máximo de presunción".

Las condiciones de semicontinuidad superior y convexidad implican que todos los  $\alpha$ -cortes sean intervalos cerrados sobre la recta real a los que se dota de una altura o grado de pertenencia sobre el conjunto borroso.

La representación gráfica de un número borroso en un eje de coordenadas podría ser la que muestra la Figura 4.19.



**Figura 4.19.**

Asimismo, los números borrosos se pueden definir como una extensión del concepto de intervalo de confianza. Para ello, en lugar de considerar el intervalo a un único nivel se considera a varios niveles dentro de  $[0, 1]$ , esto es, asignando un valor a la función característica de pertenencia a unos determinados niveles, denominados niveles de presunción y denotados por  $(\alpha)$ . Así, realizando "cortes" en la representación se consigue caracterizar el número borroso por los pares "nivel de presunción - intervalo de confianza". Cada uno de los cortes representa un " $\alpha$ -corte".

El nivel de máxima presunción ( $\alpha = 1$ ) se identifica con la pertenencia (verdadero) y el nivel  $\alpha = 0$  con la no pertenencia (falso). Sin embargo, se pueden admitir posiciones intermedias de modo que entre los valores 0 y 1 existe una gama infinita de matices a través de las que es posible captar el razonamiento humano (sin la restricción que plantea verdadero-falso, pertenece-no pertenece) expresado en términos semánticos. Para realizar las valuaciones intermedias entre 0 y 1 se toma, en general, un decimal con lo que se consiguen 11 " $\alpha$ -cortes"; de ahí que se le denomine "sistema endecario", si bien pueden tomarse tantos " $\alpha$ -cortes" como sea necesario en función de la información de que se disponga.

De esta forma, el nivel de posibilidad  $\alpha$ ,  $\alpha \in [0, 1]$ , generará un intervalo de confianza:  $A(\alpha) = [a^1, a^2]$ , el cual es una función monótona decreciente dependiente de  $\alpha$ , es decir:

$$\alpha' > \alpha \Rightarrow A(\alpha') \subset A(\alpha)$$

Esta interpretación de los números borrosos a partir de la generalización del concepto de intervalo de confianza da lugar en ciertas ocasiones a la confusión de los mismos con variables aleatorias. Sin embargo, la principal diferencia es que las variables aleatorias se definen en términos de probabilidad, mientras que los números borrosos hacen referencia a la posibilidad, es decir, mientras que una variable aleatoria es un dato subjetivo el número borroso es objetivo.

En resumen, un número borroso es la asociación de dos conceptos, intervalo de confianza asociado a la incertidumbre, y nivel de presunción, ligado a la subjetividad, de forma que se puede establecer un número borroso caracterizándolo por los siguientes elementos:

- Función característica, es decir función que devuelve para todo real el grado de pertenencia de éste al número borroso y que se puede representar por  $A(x)$  o  $\alpha(x)$ .
- Alfa-corte para un nivel  $\alpha$ , es decir, el intervalo real para el cual todos sus elementos pertenecen al número borroso con un nivel de confianza mayor o igual a  $\alpha$ , es decir:

$$\{ \forall x \in R / A(x) \geq \alpha \}$$

- Base de incertidumbre o soporte, es decir, el  $\alpha$ -corte de nivel cero representado por  $A(0)$ .
- Moda o uno-corte, el  $\alpha$ -corte de nivel uno, es decir  $A(1)$ .

La Figura 4.20. muestra la representación gráfica de las anteriores variables.

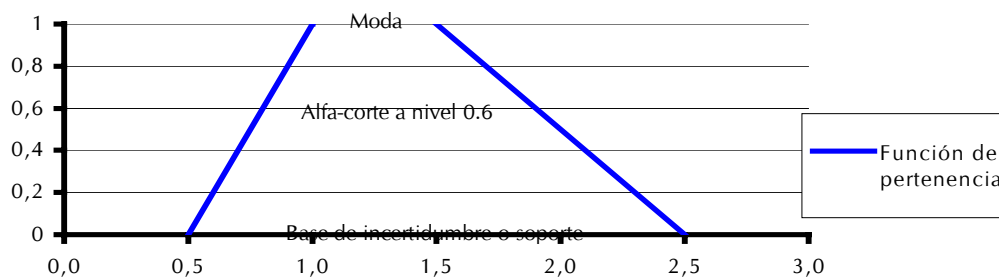


Figura 4.20.

Por tanto, las consideraciones anteriores permiten establecer que un número borroso puede ser representado de las dos formas siguientes:

1. Mediante la anterior relación intervalo de confianza-nivel de presunción:

$$\forall \alpha \in [0, 1] \quad A = [a_1(\alpha), a_2(\alpha)]$$

es decir, estableciendo para cada uno de los  $\alpha$ -cortes el intervalo correspondiente.

2. Mediante la función característica de pertenencia  $\alpha(x)$  que representa los niveles del número borroso para cada valor  $x \in \mathbb{R}$  (en casos,  $x \in \mathbb{Z}$ ). Para ello, se denomina  $\alpha^l(x)$  a la izquierda y  $\alpha^r(x)$  a la derecha, tomando una  $x$  tal que:

$$\alpha^l(x) = \alpha^r(x) = 1$$

Como puede observarse, el número borroso puede definirse como una sucesión de intervalos de confianza, de forma que a medida que el nivel de presunción  $\alpha$  disminuye, los intervalos obtenidos encajan progresivamente, es decir, cumplen las siguientes propiedades:

- a. A cada intervalo de confianza se le asigna un valor  $\alpha \in [0, 1]$ , esto es, dos intervalos no pueden tener el mismo nivel de presunción  $\alpha$ .
- b. Si se designa por  $A_\alpha = [a_1(\alpha), a_2(\alpha)]$  el intervalo de confianza de nivel  $\alpha$ , se verifica que:

$$\forall \alpha_1, \alpha_2 \in [0, 1] \quad \alpha_1 < \alpha_2$$

$$(\alpha_1, \alpha_2) \Rightarrow [a_1(\alpha_2), a_2(\alpha_2)] \subset [a_1(\alpha_1), a_2(\alpha_1)]$$

es decir, si  $\alpha$  crece el intervalo de confianza correspondiente no crece.

- c. Existe un intervalo y sólo uno que puede reducirse a la unidad.

Por tanto, y utilizando la misma simbología, las condiciones de normalidad y convexidad que ha de cumplir un subconjunto borroso para representar un número borroso se pueden escribir como sigue:

$$\text{Convexidad} = C_\alpha = \{x / \mu_C(x) \geq \alpha\} \quad \alpha \in [0, 1]$$

$$\text{Normalidad} = \text{Max} \{ \mu_C(x) / x \in \mathbb{R} \} = \bigvee_x \mu_C(x) = 1$$

Asimismo, si se consideran los niveles de pertenencia del sistema endecanario ( $\alpha = 0'1, 0'2, \dots, 0'9$  y  $1$ ), se puede especificar un número borroso entero encajando por superposición los "intervalos de confianza" tal como se muestra en la Figura 4.21.

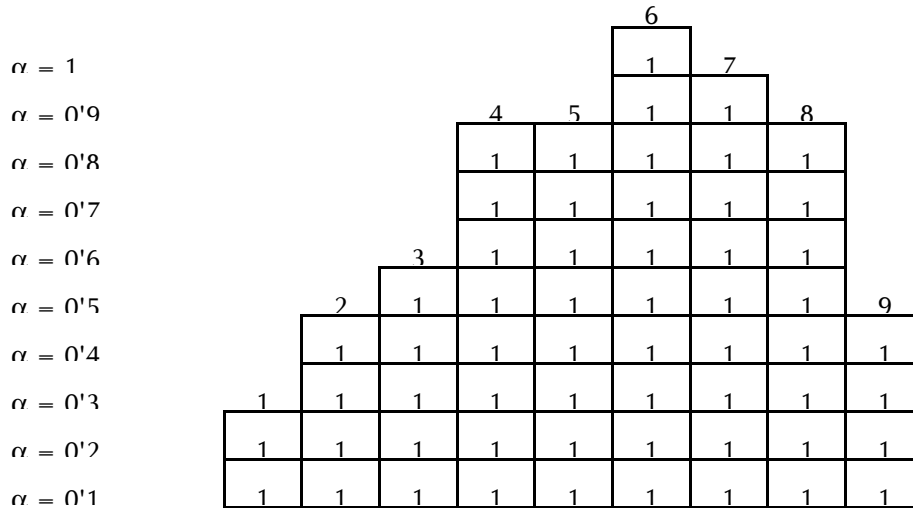


Figura 4.21.

De modo que se puede escribir:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
0'2	0'4	0'5	0'8	0'8	1	0'9	0'8	0'4

Evidentemente, para  $\alpha = 0$  es válido cualquier número entero.

Conviene poner de manifiesto que el proceso anterior es posible realizarlo en sentido inverso, esto es, a partir del número borroso conocer los intervalos de confianza para cada nivel de presunción desde  $0'1$  hasta  $1$ .

#### 4.4.2. Operaciones con números borrosos

La operativa con números borrosos se realiza de forma semejante que con números reales ordinarios, operando nivel por nivel como si se tratara de intervalos de confianza (KAUFMANN y GIL ALUJA, 1986 y 1987). De ahí que, a los efectos ilustrativos del presente apartado, en primer término se establezca la operativa propia de los intervalos para, con posterioridad, generalizar su utilización en el caso de números borrosos.

En este sentido, las operaciones básicas de suma, resta, multiplicación y división se reflejarán como sigue a continuación:

- **Suma.** La expresión matemática de la suma de números borrosos puede representarse desde los dos aspectos ya mencionados, esto es, si se considera el primer tipo de representación antes citado, se tiene que:

$$\forall \alpha \in [0, 1] \quad C = A (+) B \quad C_\alpha = A_\alpha (+) B_\alpha$$

$$[C_1(\alpha), C_2(\alpha)] = [a_1(\alpha), a_2(\alpha)] (+) [b_1(\alpha), b_2(\alpha)] = [a_1(\alpha) + b_1(\alpha), a_2(\alpha) + b_2(\alpha)]$$

Por tanto, consiste en sumar los límites inferiores entre sí y los límites superiores entre sí.

Utilizando el segundo tipo de representación de números borrosos, es decir, si los números borrosos vienen dados a través de sus respectivas funciones de pertenencia, se puede definir la suma, conocida como "convolución maxmin" (ZADEH, 1975) como sigue:

$$\mu_{A+B}(z) = \bigvee_{z=x+y} (\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)) \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$$

donde  $\wedge$  y  $\vee$  representan, respectivamente, el mínimo o límite inferior y el máximo o límite superior.

La representación gráfica de la suma de números borrosos se puede reflejar como muestra la Figura 4.22.

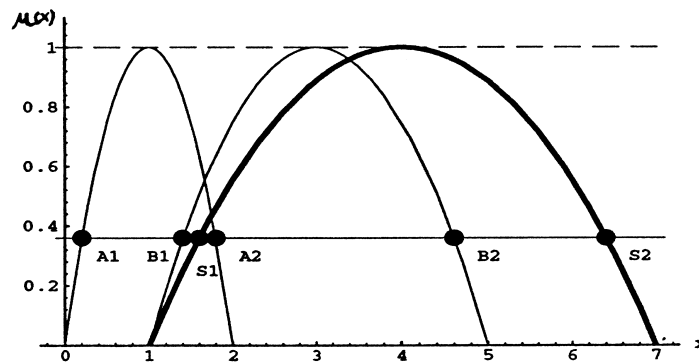


Figura 4.22.

Por ejemplo, si para un nivel de presunción  $\alpha = 0.3$  se tiene que:

$$A = [1, 4] \quad B = [3, 6]$$

la suma dará como resultado lo siguiente:

$$C = A + B = [1, 4] (+) [3, 6] = [1+3, 4+6] = [4, 10]$$

Evidentemente, la suma pone de manifiesto que el número borroso resultante tiene una base mayor, lo cual es evidente pues lo que se suman son bases de incertidumbre (anchuras). La consecuencia es un incremento de la incertidumbre en el número borroso resultante.

Las propiedades de la suma de números borrosos son las mismas que las de los intervalos de confianza, esto es:

- a. Conmutativa:  $A (+) B = B (+) A$
- b. Asociativa:  $(A (+) B) + C = A + (B (+) C)$
- c. Elemento neutro:  $A + 0 = A$  siendo  $0 = [0, 0]$

Estas propiedades confieren al conjunto de los números borrosos, con la operación de suma, estructura de semigrupo conmutativo.

Sin embargo, es necesario poner de manifiesto que el conjunto de los números borrosos no alcanza la categoría de grupo, ya que el opuesto de A (que se simboliza por  $A^-$ ) no es elemento simétrico, pudiendo considerarse como un pseudo-simétrico que se define de la siguiente manera:

$$\mu_{A^-}(x) = \mu_A(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

o bien:

$$(A_\alpha)^- = [-a_2(\alpha), -a_1(\alpha)] \quad \forall \alpha \in [0, 1]$$

De lo anterior se puede extraer:

$$\begin{aligned} A_\alpha (+) A_\alpha^- &= [a_1(\alpha), a_2(\alpha)] (+) [-a_2(\alpha), -a_1(\alpha)] = \\ &= [a_1(\alpha) - a_2(\alpha), a_2(\alpha) - a_1(\alpha)] \neq 0 \quad \forall \alpha \in [0, 1] \end{aligned}$$

y, en consecuencia se demuestra que  $A (+) A^- \neq 0$ .

▪ **Sustracción.** La diferencia de dos números borrosos A y B se puede definir como la suma de A con el pseudo-simétrico de B, es decir:

$$A (-) B = A (+) B^-$$

La sustracción puede definirse asimismo por los dos métodos de representación de números borrosos. Así, si se considera la relación intervalo de confianza-nivel de pre-

sunción, entonces es posible definir la sustracción de dos números borrosos de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} A_{\alpha} (-) B_{\alpha} &= A_{\alpha} (+) B_{\alpha}^{-} &&= [a_1(\alpha), a_2(\alpha)] (+) [-b_2(\alpha), -b_1(\alpha)] = \\ &&&= [a_1(\alpha) - b_2(\alpha), a_2(\alpha) - b_1(\alpha)] \end{aligned}$$

Por tanto, esta operación consiste en restar del extremo inferior del primer número el extremo superior del segundo y al extremo superior del primero el extremo inferior del segundo.

La sustracción se define en  $Z$  y  $R$  pero no en  $R^+$  y  $N$  ya que en estos conjuntos la sustracción de números borrosos no es una operación interna.

Asimismo, se puede representar mediante la función característica de pertenencia, entonces:

$$\mu_{A(-)B}(z) = \bigvee_{z=x-y} (\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)) \quad \forall x, y, z \in R$$

La representación gráfica de la sustracción de números borrosos se recoge en la Figura 4.23.

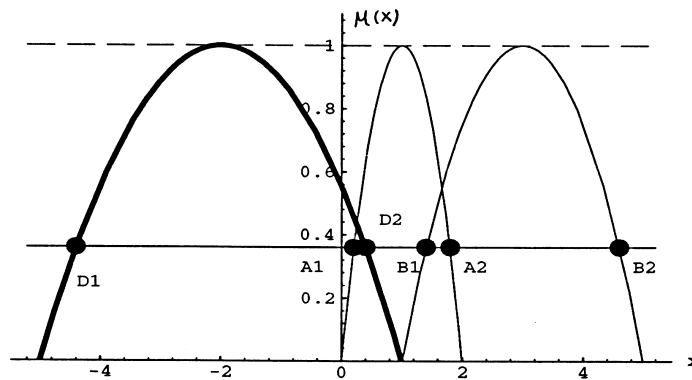


Figura 4.23.

La operación de sustracción en el ejemplo antes citado quedaría como sigue:

$$C = A (-) B = [1, 4] (-) [3, 6] = [1-6, 4-3] = [-5, 1]$$

La sustracción de números borrosos no cumple ni la propiedad asociativa ni la conmutativa.

- **Multiplicación.** El producto de números borrosos en el campo de los números reales se puede asimilar al comportamiento para la misma operación de los intervalos de confianza en R.

De esta forma, dados dos números borrosos A y B representados a través de sus  $\alpha$ -cortes, se define su multiplicación por un número borroso C tal que:

$$\forall \alpha \in [0, 1] \quad C_\alpha = A_\alpha (\cdot) B_\alpha$$

$$[C_1(\alpha), C_2(\alpha)] = [\min(a_1(\alpha) \cdot b_1(\alpha), a_1(\alpha) \cdot b_2(\alpha), a_2(\alpha) \cdot b_1(\alpha), a_2(\alpha) \cdot b_2(\alpha)), \max(a_1(\alpha) \cdot b_1(\alpha), a_1(\alpha) \cdot b_2(\alpha), a_2(\alpha) \cdot b_1(\alpha), a_2(\alpha) \cdot b_2(\alpha))]$$

es decir, el extremo inferior del número resultante será el valor más pequeño de todos los productos posibles entre los cuatro límites mientras que el extremo superior será el valor máximo de dichas combinaciones. En el campo de  $R^+$  esto se reduce a:

$$A_\alpha (\cdot) B_\alpha = [a_1(\alpha), a_2(\alpha)] (\cdot) [b_1(\alpha), b_2(\alpha)] = [a_1(\alpha) \cdot b_1(\alpha), a_2(\alpha) \cdot b_2(\alpha)]$$

Lo que es equivalente a la siguiente formulación expresada a través de las funciones de pertenencia de los dos números borrosos:

$$\mu_{A(\cdot)B}(z) = \bigvee_{z=x \cdot y} (\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)) \quad \forall x, y, z \in R$$

La representación de la multiplicación se puede realizar gráficamente como muestra la Figura 4.24.

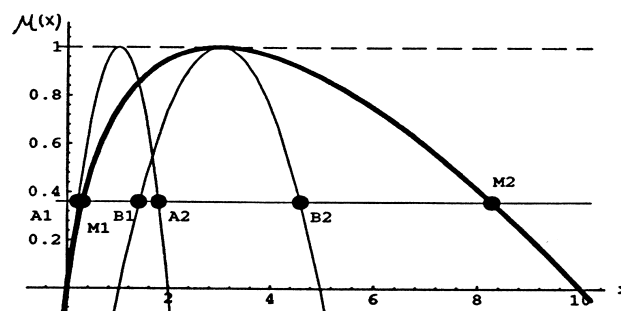


Figura 4.24.

Esta operación, para el caso numérico expuesto se realiza como sigue:

$$C = A (\cdot) B = [\min(1 \cdot 3, 1 \cdot 6, 4 \cdot 3, 4 \cdot 6), \max(1 \cdot 3, 1 \cdot 6, 4 \cdot 3, 4 \cdot 6)] = [(1 \cdot 3), (4 \cdot 6)] = [3, 24]$$

Evidentemente, al estar en  $R^+$  se podría haber deducido directamente.



La multiplicación de números borrosos es conmutativa y asociativa en  $R$ , siendo el elemento neutro de un número borroso el real 1, esto es, cumple las siguientes propiedades:

- a. Conmutativa:  $A (\cdot) B = B (\cdot) A$
- b. Asociativa:  $(A (\cdot) B) (\cdot) C = A (\cdot) (B (\cdot) C)$
- c. Elemento neutro:  $A (\cdot) 1 = A$  siendo  $1 = [1, 1]$

Las propiedades anteriores confieren al conjunto de los números borrosos, con la operación de multiplicación, la estructura de semigrupo conmutativo.

En cuanto a la propiedad distributiva del producto de número de números borrosos respecto a la suma sólo es válida en el campo de los números reales positivos:

$$\forall A, B, C \quad A (\cdot) (B (+) C) = (A (\cdot) B) (+) (A (\cdot) C)$$

Se puede definir a partir de un número borroso  $A$  otro número borroso  $A^{-1}$ , denominado "pseudo-simétrico", tal que considerados ambos en función de sus  $\alpha$ -cortes se cumple:

$$\forall \alpha \in [0, 1] \quad \text{siendo } A_\alpha = [a^1(\alpha), a^2(\alpha)] \quad \text{y} \quad A_\alpha^{-1} = [a^1(\alpha), a^2(\alpha)]^{-1}$$

- a.  $0 < a^1(\alpha) \leq a^2(\alpha) \quad [a^1(\alpha), a^2(\alpha)]^{-1} = [1/a^2(\alpha), a^2(\alpha)]$
- b.  $0 = a^1(\alpha) < a^2(\alpha) \quad [a^1(\alpha), a^2(\alpha)]^{-1} = [1/a^2(\alpha), \infty]$
- c.  $0 = a^1(\alpha) = a^2(\alpha) \quad [a^1(\alpha), a^2(\alpha)]^{-1} = n \quad (n \rightarrow \infty)$
- d.  $a^1(\alpha) < a^2(\alpha) < 0 \quad [a^1(\alpha), a^2(\alpha)]^{-1} = [1/a^2(\alpha), 1/a^1(\alpha)]$
- e.  $a^1(\alpha) < a^2(\alpha) = 0 \quad [a^1(\alpha), a^2(\alpha)]^{-1} = [-\infty, 1/a^1(\alpha)]$
- f.  $a^1(\alpha) \leq a^2(\alpha) \quad [a^1(\alpha), a^2(\alpha)]^{-1} = [-\infty, 1/a^1(\alpha)] \cup [1/a^2(\alpha), +\infty]$

Evidentemente  $A^{-1}$  no es un elemento inverso y, por tanto  $A (\cdot) A^{-1} \neq 1$

El elemento borroso pseudo-simétrico sólo existe en el caso de los números  $R-\{0\}$  puesto que si  $0 \in [a^1(\alpha), a^2(\alpha)]$  para algún nivel de presunción  $\alpha \neq 0$  el conjunto de intervalos no encajaría, con lo cual el pseudo-simétrico no se comportaría como un número borroso.

- **División.** La división entre dos números borrosos A y B se define como el producto de A por el pseudo-simétrico de B, es decir:

$$\forall \alpha \in [0, 1] A_\alpha (:) B_\alpha = A_\alpha (\cdot) B_\alpha^{-1} = [a_1(\alpha), a_2(\alpha)] (\cdot) [b_1(\alpha), b_2(\alpha)]^{-1}$$

De esta forma, la división entre números borrosos queda restringida asimismo al conjunto  $\mathbb{R}-\{0\}$ , es decir, al conjunto de los números reales no nulos.

En el campo de los reales positivos y  $\forall \alpha \in [0, 1]$  se podría resumir en:

$$A_\alpha (:) B_\alpha = A_\alpha (\cdot) B_\alpha^{-1} = [a_1(\alpha) / b_2(\alpha), a_2(\alpha) / b_1(\alpha)]$$

En cambio, en  $\mathbb{R}^-$  será:

$$A_\alpha (:) B_\alpha = A_\alpha (\cdot) B_\alpha^{-1} = [a_2(\alpha) / b_1(\alpha), a_1(\alpha) / b_2(\alpha)]$$

Utilizando la formulación empleada en los casos anteriores mediante las funciones de pertenencia de los números borrosos A y B, se define la división mediante la fórmula de "convolución maxmin" de la forma siguiente:

$$\mu_{A(:)B}(z) = \bigvee_{z=x/y} (\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)) \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Gráficamente se puede representar la división de dos números borrosos como recoge la Figura 4.25.

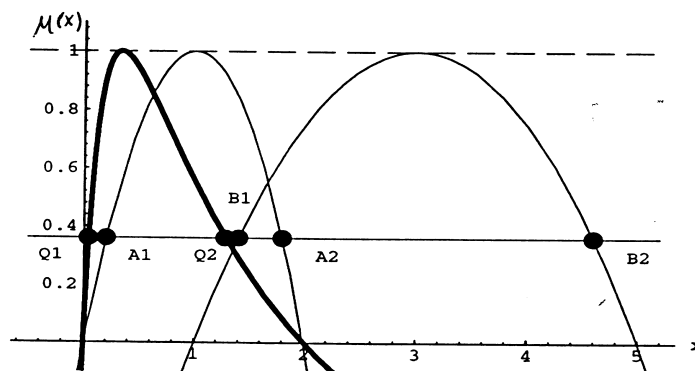


Figura 4.25.

De forma numérica, esta operación se realiza como se refleja a continuación:

$$\begin{aligned} C = A (:) B &= [\min (1/3, 1/6, 4/3, 4/6), \max (1/3, 1/6, 4/3, 4/6)] = \\ &= [(1/6), (3/4)] = [0'16, 0'75] \end{aligned}$$

- **Multiplicación y división por un número real.** Se define la multiplicación entre un número real  $k$  y un número borroso  $A$  como:

$$\begin{aligned} \forall \alpha \in [0, 1] \text{ y } \quad \forall k \in \mathbb{R} \quad k \cdot A_\alpha &= k \cdot [a_1(\alpha), a_2(\alpha)] = \\ &= [\min(k \cdot a_1(\alpha), k \cdot a_2(\alpha)), \max(k \cdot a_1(\alpha), k \cdot a_2(\alpha))] \end{aligned}$$

En cuanto a la división por un número real se define como:

$$\forall \alpha \in [0, 1] \text{ y } \quad \forall k \in \mathbb{R} (k \neq 0)$$

$$(1/k) \cdot A_\alpha = (1/k) \cdot [a_1(\alpha), a_2(\alpha)] = [\min(a_1(\alpha)/k, a_2(\alpha)/k), \max(a_1(\alpha)/k, a_2(\alpha)/k)]$$

Si el número borroso  $A$  se representa en el conjunto de los números reales a través de su función de pertenencia, se tienen las siguientes expresiones:

- En el caso del producto:

$$\forall z \in \mathbb{R} \quad \mu^{k \cdot A}(z) = \mu^A(z/k) \quad (k \neq 0)$$

Si  $k = 0$  el resultado es el cero.

- En el caso de la división:

$$\forall z \in \mathbb{R} \quad \mu^{k/A}(z) = \mu^A(k \cdot z)$$

- **Mínimo.** Dados dos números borrosos  $A$  y  $B$  se denomina mínimo y se representa por  $A (\wedge) B$  al número borroso definido a partir de los  $\alpha$ -cortes como:

$$\forall \alpha \in [0, 1]$$

$$A_\alpha (\wedge) B_\alpha = [a_1(\alpha), a_2(\alpha)] (\wedge) [b_1(\alpha), b_2(\alpha)] = [a_1(\alpha) \wedge b_1(\alpha), a_2(\alpha) \wedge b_2(\alpha)]$$

O bien, a partir de las funciones de pertenencia:

$$\mu_{A (\wedge) B}(z) = \bigvee_{z=x \wedge y} (\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)) \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$$

De forma gráfica, el mínimo de dos números borrosos se muestra en la Figura 4.26.

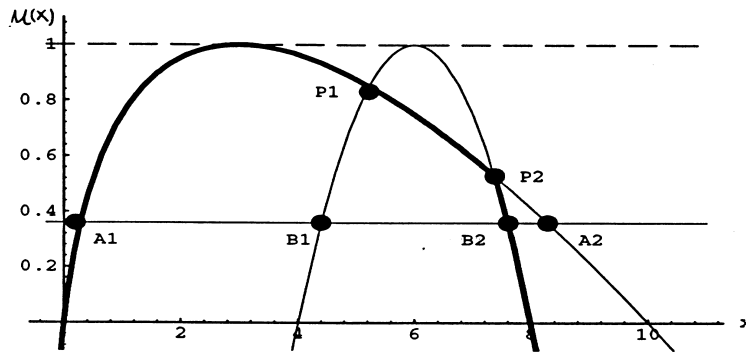


Figura 4.26.

- **Máximo:** De la misma forma que se representa el mínimo se puede representar el máximo ( $\vee$ ) de dos números borrosos A y B por un número borroso resultado de la siguiente definición:

$$\forall \alpha \in [0, 1]$$

$$A_\alpha (\vee) B_\alpha = [a_1 (\alpha), a_2 (\alpha)] (\vee) [b_1 (\alpha), b_2 (\alpha)] = [a_1 (\alpha) \vee b_1 (\alpha), a_2 (\alpha) \vee b_2 (\alpha)]$$

o bien siguiendo la representación de las funciones de pertenencia:

$$\mu_{A(\vee)B}(z) = \bigvee_{z=x\vee y} (\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)) \quad \forall x, y, z \in R$$

La representación gráfica queda recogida en la Figura 4.27.

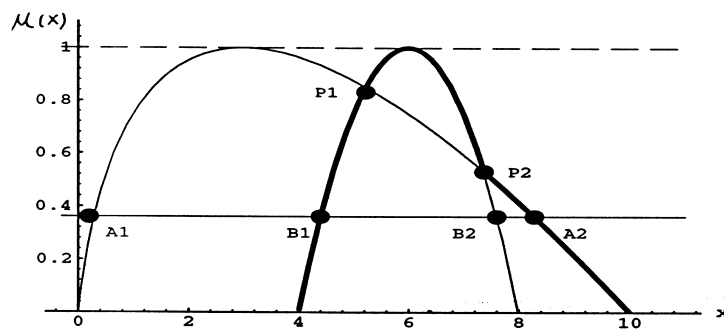


Figura 4.27.

Respecto a las expresiones utilizadas de “máximo” y “mínimo” de números borrosos, conviene expresar que dichos conceptos se refieren más concretamente a “límite superior” y “límite inferior” que al máximo y mínimo general. En efecto, los números borrosos no forman parte entre sí de un orden total como los reales, sino un orden parcial.

- **Distancia.** En muchos casos será necesario determinar la desviación o separación entre dos números borrosos o entre un número borroso y su óptimo. Surge así el concepto de distancia. Dados dos números borrosos:

$$\forall \alpha \in [0, 1]$$

$$A_\alpha = [a_1(\alpha), a_2(\alpha)] \quad B_\alpha = [b_1(\alpha), b_2(\alpha)]$$

En primer lugar se define la distancia a la izquierda:

$$d_l(A, B) = \int_{\alpha=0}^1 |a_1(\alpha) - b_1(\alpha)| d\alpha$$

y a continuación la distancia a la derecha:

$$d_D(A, B) = \int_{\alpha=0}^1 |a_2(\alpha) - b_2(\alpha)| d\alpha$$

De forma que la distancia entre dos números borrosos viene definida por la suma de las dos anteriores:

$$d(A, B) = d_l(A, B) + d_D(A, B)$$

- **Igualdad.** Dos números borrosos A y B son iguales si se establece entre ellos la siguiente relación:

$$A = B \quad \Leftrightarrow \quad (\forall \alpha \in [0, 1], A_\alpha = B_\alpha) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (\forall \alpha \in [0, 1], [a_1(\alpha), a_2(\alpha)] = [b_1(\alpha), b_2(\alpha)])$$

- **Ordenación de números borrosos.** Para la ordenación de números borrosos se pueden utilizar métodos basados en relaciones exactas o bien métodos basados en relaciones difusas.

En cuanto a los métodos basados en relaciones exactas se pueden destacar:

- a. **Método del lambda promedio.** Sean A y B dos números borrosos, entonces:

$$A \geq_\lambda B \Leftrightarrow V_s^\lambda(A) \geq V_s^\lambda(B) \quad \text{con:}$$

$$V_s^\lambda(A) = \int_0^1 [\lambda \alpha_{a2} + (1-\lambda) \alpha_{a1}] dS(\alpha)$$

$$A_\alpha = [\alpha_{a1}, \alpha_{a2}], \quad \alpha \in [0, 1]$$

donde:

$S$  = medida aditiva sobre  $[0, 1]$

$\lambda$  = grado de pesimismo-optimismo,  $\lambda \in [0, 1]$

De acuerdo con lo anterior, la elección de “ $\lambda$ ” determinará la importancia que se le da a cada rama de la función de pertenencia el número borroso, es decir, si  $\lambda$  está muy próxima a la unidad será la parte derecha del número borroso la que cobre mayor importancia, mientras que si el valor de  $\lambda$  es 0’5 ambas ramas tendrán similar importancia.

Este método sirve también como función de eliminación de la borrosidad de un número para lo cual bastará con asignar a este el valor de la función  $V_s^\lambda(X)$ .

- b. **Método de la distancia al extremo.** Si A y B son números borrosos, y C es su máximo, entonces el mayor (menor) de A y B será aquel que presente menor (mayor) distancia a C, dado que la distancia entre dos números borrosos es un número real, el resultado de esta operación es totalmente determinista.

#### 4.4.3. Tipos de números borrosos

Dentro de los números borrosos existen diversos tipos entre los que destacan, por su utilidad y generalidad, los números borrosos triangulares y trapezoidales, a los que destinan los siguientes epígrafes.

##### 4.4.3.1. Números borrosos triangulares

Un caso particular de números borrosos son los números borrosos triangulares que, como su propio nombre indica, presentan forma triangular por lo que quedan perfectamente definidos con tres números reales que indican las abscisas de los vértices. Las ordenadas se obtienen por la propia definición del número borroso, los valores de los extremos están a altura cero y el valor central estará a uno.

El sentido de los tres números reales que definen un número borroso triangular son: una primera cantidad por debajo de la cual no va a descender ( $a_1$ ); otra por encima de la cual es imposible llegar ( $a_3$ ) y una tercera ( $a_2$ ) que representará el máximo nivel de presunción. Su representación gráfica es la que muestra la Figura 4.28.

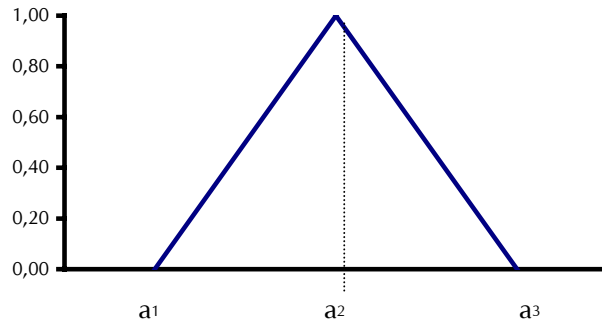


Figura 4.28.

En este caso, el máximo de presunción es único, y la función característica de pertenencia es lineal en ambos sentidos, es decir, decrece al mismo ritmo para valores decrecientes y para valores crecientes del referencial si bien no tiene por qué decrecer al mismo ritmo en ambos sentidos.

En el caso de los números borrosos triangulares se supone que se ha estimado el valor de la función característica de pertenencia de *todos* los valores del referencial. Cuando sólo se posee información de los extremos  $a_1$  y  $a_3$  y del máximo de presunción  $a_2$  se trata de una "tripleta de confianza", cuya representación en un eje de coordenadas sería la que muestra la Figura 4.29.

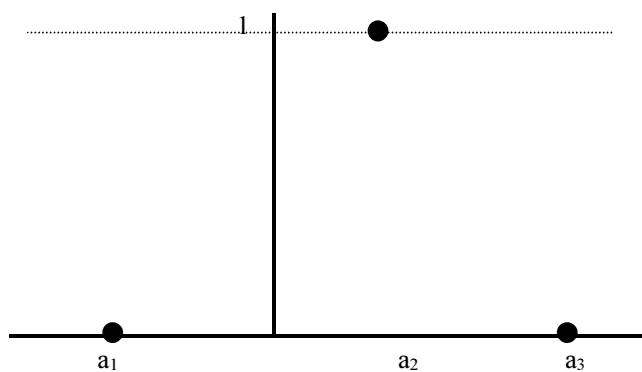


Figura 4.29.

Asimismo, un número borroso triangular se puede representar:

- a. Mediante la terna de números reales que lo describen:

$$A = (a_1, a_2, a_3) \quad \text{siendo } a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} \quad a_1 \leq a_2 \leq a_3$$

- b. Mediante su función de pertenencia: Para todo  $x$  del intervalo  $[a_1, a_2]$  dicha función de pertenencia es la recta que une dos puntos  $(a_1, 0)$  y  $(a_2, 1)$ , es decir:

$$\frac{\mu_A(x) - 0}{1 - 0} = \frac{x - a_1}{a_2 - a_1} \Rightarrow \mu_A = \frac{x - a_1}{a_2 - a_1}$$

Para todo  $x \in [a_2, a_3]$  la función de pertenencia  $\mu_A(x)$  es la recta que une los puntos  $(a_2, 1)$  y  $(a_3, 0)$ , por consiguiente:

$$\frac{\mu_A(x) - 1}{0 - 1} = \frac{x - a_2}{a_3 - a_2} \Rightarrow \mu_A = \frac{a_3 - x}{a_3 - a_2}$$

De esta forma, la función de pertenencia para un número borroso triangular se puede escribir como la función definida por intervalos:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a_1 \\ \frac{x - a_1}{a_2 - a_1} & a_1 < x \leq a_2 \\ \frac{a_3 - x}{a_3 - a_2} & a_2 \leq x < a_3 \\ 0 & a_3 \leq x \end{cases}$$

Por tanto, en un número borroso triangular se distinguen tres niveles de presunción característicos, el correspondiente al valor central igual a la unidad, y los correspondientes a los extremos que se igualan a cero.

Al presentar una estructura sencilla los números borrosos triangulares permiten la obtención de una expresión general para los  $\alpha$ -cortes, despejando la variable  $x$  en función del nivel de presunción  $\alpha = \mu_A(x)$ .

El extremo inferior del intervalo se obtiene de la función de pertenencia definida a la izquierda del punto  $a_2$  y el extremo superior se obtiene a partir de la función definida a la derecha del punto  $a_2$ :

$$\alpha = \frac{x - a_1}{a_2 - a_1} \Rightarrow x = a_1 + \alpha \cdot (a_2 - a_1)$$

$$\alpha = \frac{a_3 - x}{a_3 - a_2} \Rightarrow x = a_3 - \alpha \cdot (a_3 - a_2)$$

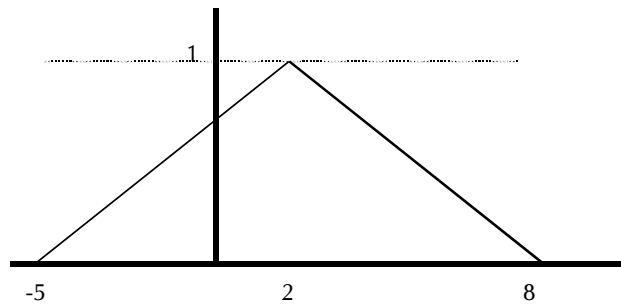
Por tanto, un número borroso triangular se puede transformar en un intervalo de confianza sin más que realizar lo siguiente:

$$\forall \alpha \in [0, 1] \quad A_\alpha = [(a_2 - a_1) \alpha + a_1, -(a_3 - a_2) \alpha + a_3]$$



La transformación anterior permite operar con los mismos en el mismo sentido que con los números borrosos, expresados en términos de nivel de presunción-intervalo de confianza.

A efectos ilustrativos se plantea, por ejemplo, el número borroso representado en la Figura 4.30.



**Figura 4.30.**

cuya función de pertenencia sería:

$$\begin{aligned} \mu_A &= 0 & x < -5 \\ \mu_A &= \frac{x+5}{2+5} & -5 \leq x \leq 2 \\ \mu_A &= \frac{8-x}{8-2} & 2 \leq x \leq 8 \\ \mu_A &= 0 & 8 > x \end{aligned}$$

o bien, su representación a través de intervalos de confianza como sigue:

$$\alpha \in [0, 1] \quad [a_1, a_2] = [7\alpha - 5, -6\alpha + 8]$$

#### 4.4.3.1.1. Operaciones con números borrosos triangulares

En este apartado se van a considerar solamente las operaciones de composición interna en el conjunto de los números borrosos triangulares.

Dados dos números borrosos triangulares A y B:

$$A = (a_1, a_2, a_3)$$

$$B = (b_1, b_2, b_3)$$

Se pueden definir las siguientes operaciones:

- **Suma.** La suma de dos números borrosos triangulares se define como:

$$A (+) B = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$

La función de pertenencia correspondiente al resultado de dicha operación será la siguiente:

$$\mu_{A(+)\text{B}}(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a_1 + b_1 \\ \frac{x - (a_1 + b_1)}{(a_2 + b_2) - (a_1 + b_1)} & a_1 + b_1 < x \leq a_2 + b_2 \\ \frac{(a_3 + b_3) - x}{(a_3 + b_3) - (a_2 + b_2)} & a_2 + b_2 < x < a_3 + b_3 \\ 0 & a_3 + b_3 \leq x \end{cases}$$

Por ejemplo, para los números borrosos triangulares siguientes, su suma vendrá dada por:

$$A = (2, 4, 5) \quad B = (1, 3, 6)$$

$$A (+) B = (2 + 1, 4 + 3, 5 + 6) = (3, 7, 11)$$

Utilizando intervalos de confianza para cada nivel de presunción  $\alpha$  se puede escribir:

$$\begin{aligned} A_\alpha &= [a_1(\alpha), a_3(\alpha)] = [(a_2 - a_1)\alpha + a_1, -(a_3 - a_2)\alpha + a_3] = \\ &= [(4-2)\alpha + 2, -(5-4)\alpha + 5] = [2\alpha + 2, -\alpha + 5] \end{aligned}$$

$$B_\alpha = [b_1(\alpha), b_3(\alpha)] = [(3-1)\alpha + 1, -(6-3)\alpha + 6] = [2\alpha + 1, -3\alpha + 6]$$

Y, en consecuencia la suma de ambos números será:

$$A_\alpha (+) B_\alpha = [2\alpha + 2 + 2\alpha + 1, -\alpha + 5 - 3\alpha + 6] = [4\alpha + 3, -4\alpha + 11]$$

Estos resultados se pueden confirmar para los niveles de presunción:

$$\alpha = 0 \quad \rightarrow \quad A^0 (+) B^0 = [3, 11]$$

$$\alpha = 1 \quad \rightarrow \quad A^1 (+) B^1 = [7, 7]$$

que evidentemente coincide con el resultado de la suma anteriormente definida.

La representación gráfica de la suma de números borrosos triangulares se recoge en la Figura 4.31., resaltando con línea más gruesa el resultado obtenido.

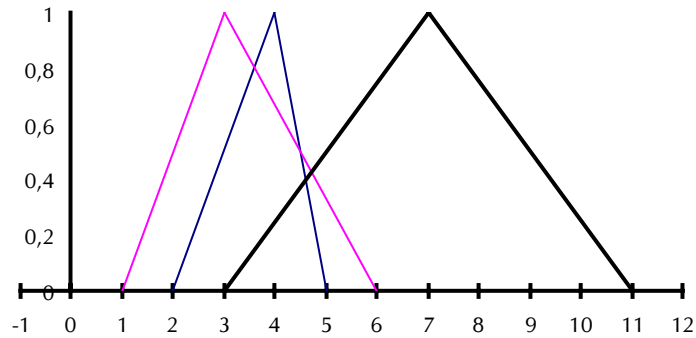


Figura 4.31.

- **Diferencia.** Se establece la diferencia entre dos números borrosos triangulares mediante la siguiente expresión:

$$A (-) B = (a_1 - b_3, a_2 - b_2, a_3 - b_1)$$

Siendo la función de pertenencia:

$$\mu_{A(-)B}(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a_1 - b_3 \\ \frac{x - (a_1 - b_3)}{(a_2 - b_2) - (a_1 - b_1)} & a_1 - b_3 < x \leq a_2 - b_2 \\ \frac{(a_3 - b_1) - x}{(a_3 - b_1) - (a_2 - b_2)} & a_2 - b_2 < x < a_3 - b_1 \\ 0 & a_3 - b_1 \leq x \end{cases}$$

En el ejemplo numérico anterior, la diferencia entre los números borrosos triangulares se realiza como sigue:

$$A (-) B = (2-6, 4-3, 5-1) = (-4, 1, 4)$$

Utilizando el nivel de presunción se puede comprobar el resultado:

$$A_\alpha (-) B_\alpha = [2\alpha + 2 + 3\alpha - 6, -\alpha + 5 - 2\alpha - 1] = [5\alpha - 4, -3\alpha + 4]$$

$$\alpha = 0 \quad \rightarrow \quad A^0 (-) B^0 = [-4, 4]$$

$$\alpha = 1 \quad \rightarrow \quad A^1 (-) B^1 = [1, 1]$$

La representación gráfica de la diferencia queda recogida en la Figura 4.32., reflejando nuevamente el resultado mediante línea más gruesa.

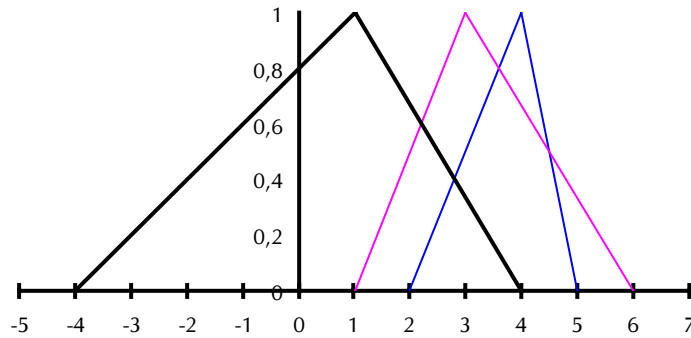


Figura 4.32.

Asimismo, se puede definir el pseudo-simétrico de un número borroso triangular como:

$$-A = (-a_3, -a_2, -a_1)$$

Para el número A su pseudo-simétrico sería:  $-A = (-5, -4, -2)$

- **Multiplicación aproximada en  $\mathbf{R}^+ \cup \mathbf{0}$ :** La definición de esta operación se puede realizar como sigue (DUBOIS y PRADE, 1980; KAUFMANN y GIL ALUJA, 1986):

$$A \cdot B = (a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2, a_3 \cdot b_3)$$

De acuerdo con la función de pertenencia sería:

$$\mu_{A \cdot B}(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a_1 \cdot b_1 \\ \frac{x - (a_1 \cdot b_1)}{(a_2 \cdot b_2) - (a_1 \cdot b_1)} & a_1 \cdot b_1 < x \leq a_2 \cdot b_2 \\ \frac{(a_3 \cdot b_3) - x}{(a_3 \cdot b_3) - (a_2 \cdot b_2)} & a_2 \cdot b_2 \leq x < a_3 \cdot b_3 \\ 0 & a_3 \cdot b_3 \leq x \end{cases}$$

Sin embargo, si se parte de dos números borrosos triangulares, los obtenidos de las operaciones de multiplicación y división no son números borrosos triangulares.

Para las operaciones de multiplicación y división no pueden utilizarse triplas por lo que se ha de operar tratando los números borrosos en forma de intervalos, multiplicando o dividiendo nivel a nivel, es decir, para cada nivel de presunción.

- **Multiplicación.** La multiplicación para cada nivel de presunción se realizará como si se tratase de intervalos de confianza, a saber:

$$A (\cdot) B = [(a_2 - a_1) \alpha + a_1) (\cdot) ((b_2 - b_1) \alpha + b_1), (- (a_3 - a_2) \alpha + a_3) (\cdot) ((- (b_3 - b_2) \alpha + b_3))]$$

Precisando para  $\alpha = 0$  y  $\alpha = 1$  se tiene que:

$$\alpha = 0 \quad \rightarrow \quad A (\cdot) B = [ (a_1 \cdot b_1), (a_3 \cdot b_3) ]$$

$$\alpha = 1 \quad \rightarrow \quad A (\cdot) B = [ (a_2 \cdot b_2) ]$$

El número resultante de la multiplicación quedará expresado como sigue:

$$A (\cdot) B = [(a_1 \cdot b_1), (a_2 \cdot b_2), (a_3 \cdot b_3)]$$

En el caso numérico expuesto, la multiplicación se realizará:

$$A (\cdot) B = [(2 \cdot 1), (4 \cdot 3), (5 \cdot 6)] = (2, 12, 30)$$

Precisando para los niveles de presunción:

$$\alpha = 0 \quad \rightarrow \quad A (\cdot) B = [ (2 \cdot 1), (5 \cdot 6) ] = (2, 30)$$

$$\alpha = 1 \quad \rightarrow \quad A (\cdot) B = (4 \cdot 3) = 12$$

En  $\mathbb{R}^+$  estos cálculos son muy sencillos y se pueden exponer siguiendo el mismo ejemplo numérico:

$$A_\alpha = [(2 \alpha + 2), (- \alpha + 5)] \quad B_\alpha = [(2 \alpha + 1), (-3 \alpha + 6)]$$

$$\begin{aligned} A_\alpha (\cdot) B_\alpha &= [(2 \alpha + 2) \cdot (2 \alpha + 1), (- \alpha + 5) \cdot (-3 \alpha + 6)] = \\ &= [4 \alpha^2 + 6 \alpha + 2, 3 \alpha^2 - 21 \alpha + 30] \end{aligned}$$

Precisando para  $\alpha = 0$  y  $\alpha = 1$  se tiene que:

$$\alpha = 0 \quad \rightarrow \quad A_0 (\cdot) B_0 = (2, 30)$$

$$\alpha = 1 \quad \rightarrow \quad A_1 (\cdot) B_1 = (12, 12)$$

Los resultados de esta operación se pueden representar en un eje de coordenadas como muestra la Figura 4.33.

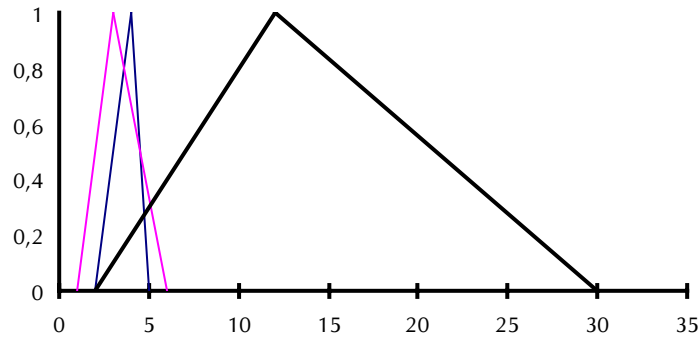


Figura 4.33.

- **Multiplicación por un número real.** Esta operación se puede expresar como sigue:

$$k \cdot A = k \cdot (a_1(\alpha), a_2(\alpha), a_3(\alpha)) =$$

$$= [\min(k \cdot a_1(\alpha), k \cdot a_2(\alpha), k \cdot a_3(\alpha)), k \cdot a_2(\alpha), \max(k \cdot a_1(\alpha), k \cdot a_2(\alpha), k \cdot a_3(\alpha))]$$

siendo el resultado un número borroso triangular.

Por ejemplo, el producto del número A por un número real  $k = 3$  sería:

$$k \cdot A = (\min(3 \cdot 2, 3 \cdot 5), 3 \cdot 4, \max(3 \cdot 2, 3 \cdot 5)) = (6, 12, 15)$$

Evidentemente, en  $R^+$  se podría deducir directamente:

$$k \cdot A = (k \cdot a_1(\alpha), k \cdot a_2(\alpha), k \cdot a_3(\alpha))$$

- **División.** La forma de operar con tripletas de confianza con respecto a la división es similar al caso de la multiplicación. Así, la división, para cada nivel de presunción, quedará establecida como sigue:

$$A(:)B = \left[ \frac{(a_2 - a_1)\alpha + a_1}{-(b_3 - b_2)\alpha + b_3}, \frac{-(a_3 - a_2)\alpha + a_3}{(b_2 - b_1)\alpha + b_1} \right]$$

y precisando para  $\alpha = 0$  y  $\alpha = 1$ :

$$\alpha = 0 \quad \rightarrow \quad A(:)B = \left[ \frac{a_1}{b_3}, \frac{a_3}{b_1} \right]$$

$$\alpha = 1 \quad \rightarrow \quad A(:)B = \left[ \frac{a_2}{b_2} \right]$$

De forma similar se puede expresar como sigue:

$$A(:)B = \left[ \min \left( \frac{(a_2 - a_1)\alpha + a_1}{(b_2 - b_1)\alpha + b_1}, \frac{-(a_3 - a_2)\alpha + a_3}{-(b_3 - b_2)\alpha + b_3}, \frac{(a_2 - a_1)\alpha + a_1}{(b_3 - b_2)\alpha + b_3}, \frac{-(a_3 - a_2)\alpha + a_3}{(b_2 - b_1)\alpha + b_1} \right), \right. \\ \left. \max \left( \frac{(a_2 - a_1)\alpha + a_1}{(b_2 - b_1)\alpha + b_1}, \frac{-(a_3 - a_2)\alpha + a_3}{-(b_3 - b_2)\alpha + b_3}, \frac{(a_2 - a_1)\alpha + a_1}{(b_3 - b_2)\alpha + b_3}, \frac{-(a_3 - a_2)\alpha + a_3}{(b_2 - b_1)\alpha + b_1} \right) \right]$$

Siguiendo con el ejemplo numérico se podría escribir lo siguiente:

$$A(:)B = \left[ \min \left( \frac{(4-2)\alpha + 2}{(3-1)\alpha + 1}, \frac{-(5-4)\alpha + 5}{-(6-3)\alpha + 6}, \frac{(4-2)\alpha + 2}{-(6-3)\alpha + 6}, \frac{-(5-4)\alpha + 5}{(3-1)\alpha + 1} \right), \right. \\ \left. \max \left( \frac{(4-2)\alpha + 2}{(3-1)\alpha + 1}, \frac{-(5-4)\alpha + 5}{-(6-3)\alpha + 6}, \frac{(4-2)\alpha + 2}{-(6-3)\alpha + 6}, \frac{-(5-4)\alpha + 5}{(3-1)\alpha + 1} \right) \right]$$

cuyo resultado numérico sería como se recoge a continuación:

$$\alpha = 0 \quad \rightarrow \quad A_0(:)B_0 = (2/6, 5/1)$$

$$\alpha = 1 \quad \rightarrow \quad A_1(:)B_1 = (4/3, 4/3)$$

En el caso de  $R^+$  la división sería:

$$\alpha = 0 \quad \rightarrow \quad A(:)B = \left[ \frac{a_1}{b_3}, \frac{a_3}{b_1} \right]$$

$$\alpha = 1 \quad \rightarrow \quad A(:)B = \left[ \frac{a_2}{b_2} \right]$$

▪ **Ordenación de tripletas de confianza.** Para establecer un orden entre varias tripletas de confianza será necesario establecer el criterio a seguir ya que dentro de la literatura especializada no existe unanimidad al respecto. En general se utilizan los tres criterios siguientes, si bien cabe poner de manifiesto que el resultado es distinto en función del criterio y la jerarquía elegidas.

a. **Centroide.** Consiste en calcular la distancia de cada tripleta de confianza respecto a su óptimo o a un punto dado (k), de forma que en función del orden que se pretenda preestablecer (de mayor a menor o viceversa) se establecerá cual es el mayor de los números dados.

Para ello, se calculará la distancia a la izquierda ( $d_l$ ) que se define como el área desde k hasta el lado izquierdo de la tripleta y la distancia a la derecha ( $d_D$ ) que

será el área desde k hasta el lado derecho del número. El removal se define como la media entre ambas distancias:

$$d(A, k) = \frac{1}{2} \cdot [(d_I(A, k) + d_D(A, k))]$$

Este criterio, en el caso de tripletas de confianza para  $k = 0$ , es similar a calcular el centroide que viene dado por la siguiente expresión:

$$A = \frac{a_1 + 2 \cdot a_2 + a_3}{4}$$

La demostración de la anterior expresión se puede realizar sin más que establecer para cada tripleta de confianza, mediante la realización de los  $\alpha$ -cortes, el intervalo de confianza que la define, de modo que será posible calcular la distancia en los términos que fue definida para el caso de intervalos de confianza. Sin más que particularizar para  $\alpha = 1$  y  $\alpha = 0$  se obtendrá el centroide.

- b. **Valor de máxima presunción.** Consiste en tomar como número menor, para aquellos que en función del método anterior sean similares, el que su valor de máxima presunción sea menor.
- c. **Divergencia** (base de incertidumbre). Consiste en calcular la base de incertidumbre. Este método se suele utilizar en combinación con los métodos anteriores para el caso concreto en que no haya sido posible establecer un orden de clasificación o cuando el orden de clasificación establecido sea muy similar. De acuerdo con lo anterior, para una tripleta su divergencia vendrá dada por:

$$\text{Divergencia} = (a_3 - a_1)$$

#### 4.4.3.2. Números borrosos trapezoidales

Un número borroso trapezoidal viene dado por cuatro números reales que definen las abscisas de los cuatro vértices del trapecio. Por tanto, es un número borroso en el cual el nivel de máxima presunción corresponde a un intervalo de confianza, de forma que se puede definir mediante un cuádruplo de confianza:

$$A = (a_1, [a_2, a_3], a_4)$$

De forma gráfica se puede representar un número borroso triangular como muestra la Figura 4.34.



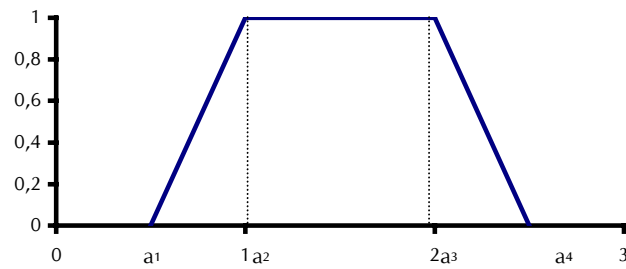


Figura 4.34.

La representación de los números borrosos trapezoidales se puede realizar, de forma similar al resto de números borrosos, de las siguientes formas:

- a. Mediante su función característica de pertenencia:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a_1 \\ \frac{x - a_1}{a_2 - a_1} & a_1 < x < a_2 \\ 1 & a_2 \leq x \leq a_3 \\ \frac{a_4 - x}{a_4 - a_3} & a_3 < x < a_4 \\ 0 & a_4 \leq x \end{cases}$$

- b. En función de sus  $\alpha$ -cortes:

$$\forall \alpha \in [0, 1] \quad A_\alpha = [a_1 + \alpha \cdot (a_2 - a_1), a_4 - \alpha \cdot (a_4 - a_3)]$$

A efectos ilustrativos se puede plantear un ejemplo de las posibles representaciones anteriormente descritas para el número borroso trapezoidal de la Figura 4.35.

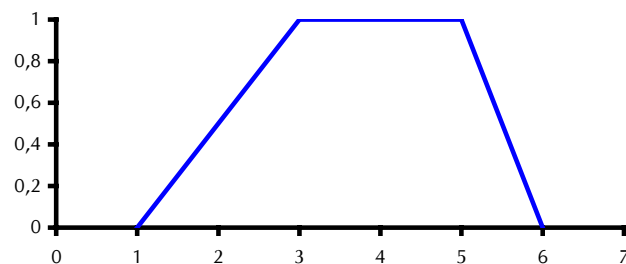


Figura 4.35.

El número borroso trapezoidal de la Figura anterior se puede representar:

- Mediante el cuádruplo de confianza que lo define:

$$A = (a_1, [a_2, a_3], a_4) = (1, 3, 3, 6)$$

- A través de su función de pertenencia:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 1 \\ \frac{x-1}{3-1} & 1 < x < 3 \\ 1 & 3 \leq x \leq 3 \\ \frac{3-x}{6-3} & 3 < x < 6 \\ 0 & 6 \leq x \end{cases}$$

- En función de sus  $\alpha$ -cortes:

$$\forall \alpha \in [0, 1] \quad A_\alpha = [(1 + \alpha \cdot (3 - 1)), 6 - \alpha \cdot (6 - 3)] = (1 + 2\alpha, 6 - 3\alpha)$$

#### 4.4.3.2.1. Operaciones con números borrosos trapezoidales

De la misma forma que los números borrosos triangulares, los números borrosos trapezoidales tienen la propiedad de clausura solamente para las operaciones de suma, diferencia y producto por un número real.

Dados los siguientes números trapezoidales:

$$A = (2, 4, 5, 6) \quad B = (1, 2, 3, 4)$$

Se pueden definir las siguientes operaciones para el tratamiento de los números borrosos trapezoidales:

- **Suma.** La suma de dos números borrosos trapezoidales viene definida, mediante las cuádruplas que los representan, de la siguiente forma:

$$A (+) B = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, a_4 + b_4)$$

La suma definida atendiendo a la función de pertenencia vendrá definida por:

$$\mu_{A(+)\ B}(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a_1 + b_1 \\ \frac{x - (a_1 + b_1)}{(a_2 + b_2) - (a_1 + b_1)} & a_1 + b_1 < x < a_2 + b_2 \\ 1 & a_2 + b_2 \leq x \leq a_3 + b_3 \\ \frac{(a_4 + b_4) - x}{(a_4 + b_4) - (a_3 + b_3)} & a_3 + b_3 < x < a_4 + b_4 \\ 0 & a_4 + b_4 \leq x \end{cases}$$

Para el ejemplo numérico expuesto, la suma de ambos números borrosos trapezoidales, se establece como sigue:

$$A (+) B = (2 + 1, 4 + 2, 5 + 3, 6 + 4) = (3, 6, 8, 10)$$

▪ **Resta.** La resta de dos números borrosos trapezoidales viene definida por la siguiente expresión:

$$A (-) B = (a_1 - b_4, a_2 - b_3, a_3 - b_2, a_4 - b_1)$$

De acuerdo con su función de pertenencia, la resta se determina como sigue:

$$\mu_{A(-)B}(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a_1 - b_4 \\ \frac{x - (a_1 - b_4)}{(a_2 - b_3) - (a_1 - b_4)} & a_1 - b_4 < x < a_2 - b_3 \\ 1 & a_2 - b_3 \leq x \leq a_3 - b_2 \\ \frac{(a_4 - b_1) - x}{(a_4 - b_1) - (a_3 - b_2)} & a_3 - b_2 < x < a_4 - b_1 \\ 0 & a_4 - b_1 \leq x \end{cases}$$

De forma numérica, con los números borrosos trapezoidales del ejemplo anterior, se puede escribir:

$$A (-) B = (a_1 - b_4, a_2 - b_3, a_3 - b_2, a_4 - b_1) = (2-4, 4-3, 5-2, 6-1) = (-2, 1, 3, 5)$$

La representación gráfica de las operaciones de suma y resta para los números borrosos trapezoidales considerados se recogen en las Figuras 4.36. y 4.37., respectivamente.

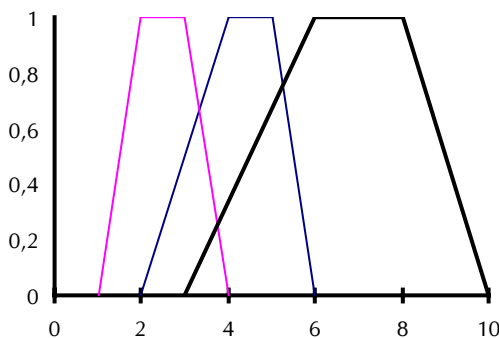


Figura 4.36.

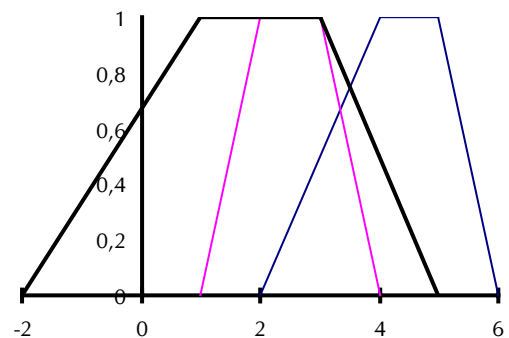


Figura 4.37.

- **Multiplicación por un número real.** En este caso se define que  $\forall k \in \mathbb{R}$ , la multiplicación de un número por  $k$  vendría dado por:

$$k \cdot A = (\min(k \cdot a_1, k \cdot a_4), \min(k \cdot a_2, k \cdot a_3), \max(k \cdot a_2, k \cdot a_3), \max(k \cdot a_1, k \cdot a_4))$$

En consecuencia, si se desea realizar la multiplicación del número  $A$  por el número real  $3$  quedaría:

$$3 \cdot A = (\min(3 \cdot 2, 3 \cdot 6), \min(3 \cdot 4, 3 \cdot 5), \max(3 \cdot 4, 3 \cdot 5), \max(3 \cdot 2, 3 \cdot 6)) = (6, 12, 15, 18)$$

- **Multiplicación aproximada en  $\mathbb{R}^+ \cup \mathbf{0}$**  (DUBOIS y PRADE, 1980; KAUFMANN y GIL ALUJA, 1986). Para dos números borrosos trapezoidales se establece esta operación mediante la siguiente expresión:

$$A (\cdot) B = (a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2, a_3 \cdot b_3, a_4 \cdot b_4)$$

Si se realiza mediante su función característica quedaría reflejado como sigue:

$$\mu_{A(\cdot)B}(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a_1 \cdot b_1 \\ \frac{x - (a_1 \cdot b_1)}{(a_2 \cdot b_2) - (a_1 \cdot b_1)} & a_1 \cdot b_1 < x < a_2 \cdot b_2 \\ 1 & a_2 \cdot b_2 \leq x \leq a_3 \cdot b_3 \\ \frac{(a_4 \cdot b_4) - x}{(a_4 \cdot b_4) - (a_3 \cdot b_3)} & a_3 \cdot b_3 < x < a_4 \cdot b_4 \\ 0 & a_4 \cdot b_4 \leq x \end{cases}$$

En el ejemplo numérico, la multiplicación aproximada daría como resultado:

$$A (\cdot) B = (2 \cdot 1, 4 \cdot 2, 5 \cdot 3, 6 \cdot 4) = (2, 8, 15, 24)$$

La representación gráfica de ambos tipos de operadores de multiplicación se recogen en las Figuras 4.38. y 4.39.

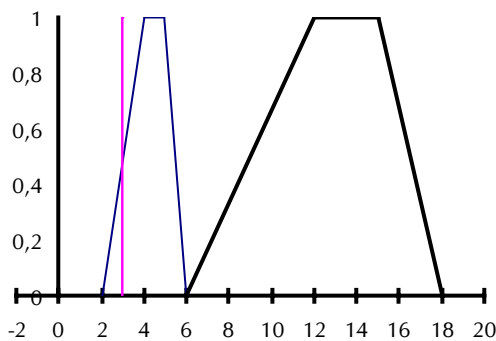


Figura 4.38.

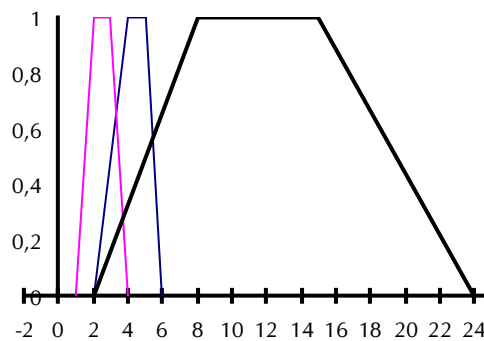


Figura 4.39.

## **4.5. VARIABLES LINGÜÍSTICAS**

### **4.5.1. Consideraciones generales**

En determinadas circunstancias, la información disponible para afrontar una decisión no se puede valorar de forma precisa mediante un valor cuantitativo (un número), siendo fácilmente expresada de forma cualitativa. En este caso, la utilización de un enfoque lingüístico se adapta mejor que un enfoque numérico.

Las razones por las que las evaluaciones realizadas por parte de las personas de fenómenos relacionados con percepciones subjetivas (diseño, gusto, etc.) son expresadas mediante el lenguaje natural (bonito, feo, dulce, salado, etc.) en lugar de utilizar valores numéricos son varias, entre las que destacan las siguientes (CHEN y HWANG, 1992):

- La naturaleza de la información puede provocar que la misma sea incuantificable de forma numérica, de tal manera que sólo sea posible su medición mediante el uso de términos lingüísticos (por ejemplo cuando se evalúa el precio de un artículo se suele utilizar términos como “alto”, “bajo”, etc.).
- Los elementos necesarios para proceder a la medición de determinados tipos de informaciones no están disponibles para realizar una medición exacta o bien porque el coste de medida sea muy elevado.

El enfoque lingüístico borroso es un enfoque aproximado que tiene como base teórica para su desarrollo la Teoría de los Subconjuntos Borrosos y que representa los aspectos cualitativos como valores lingüísticos mediante “variables lingüísticas”. Se denomina variable lingüística a aquella noción o concepto que se puede calificar de forma borrosa. Se le aplica el adjetivo “lingüística” porque es posible definir sus características mediante el lenguaje hablado.

Con la utilización de etiquetas lingüísticas, aparece un tipo de incertidumbre, denominada imprecisión, que surge de la inexactitud inherente al uso del lenguaje que, sin embargo, puede representar fielmente el razonamiento humano. De hecho, las variables lingüísticas son una poderosa herramienta para procesar lenguaje natural impreciso y borroso, constituyéndose en un puente entre el mundo numérico preciso y la forma borrosa o difusa en que los humanos se expresan.

En principio, la definición de las distintas variables lingüísticas tiene su origen en las expresiones que los individuos utilizan para referirse a un objeto o a una variable, pues es habitual que las personas tengan serios inconvenientes para expresar con

valores numéricos exactos sus apreciaciones sobre el comportamiento de determinadas variables. Bajo estas circunstancias, parece más adecuado expresar sus opiniones por medio de valores lingüísticos en vez de valores numéricos exactos, es decir, suponer que el dominio de las variables que intervienen en un problema es un conjunto de términos lingüísticos.

Así, en situaciones donde intervienen individuos, los cuales usan más bien expresiones lingüísticas que numéricas para dar sus opiniones, se consigue modelar de manera más directa gran cantidad de problemas reales con la utilización de etiquetas lingüísticas, ya que permite representar la información (casi siempre poco precisa) de manera muy aproximada a como se expresa inicialmente. Es decir, la definición de las restricciones borrosas en general será subjetiva, ya que depende de los gustos de cada persona y de la comprensión que ésta tenga del término que desea describir.

Una variable lingüística se caracteriza por un valor sintáctico o etiqueta y por un valor semántico o significado. La etiqueta es una palabra o frase, perteneciente a un conjunto de términos lingüísticos y el significado de dicha etiqueta viene dado por un subconjunto borroso en el universo de discurso. De esta forma, la utilización de palabras que son menos precisas que los números, puede ser una opción válida para caracterizar aquellos fenómenos que son demasiado complejos o que están mal definidos y en los que la utilización de valores numéricos precisos puede distorsionar la información.

Una variable lingüística se puede expresar por una quintupla:

$$(H, T(H), U, G, M)$$

donde:

- H nombre de la variable
- T(H) conjunto de términos lingüísticos de H, es decir, el conjunto de nombres de valores lingüísticos de H, donde cada valor es una variable borrosa notada generalmente como X y que varía a lo largo del universo de discurso
- U universo de discurso, asociado a una variable base denominada u
- G regla sintáctica, que normalmente toma forma de gramática, para generar los nombres de los valores de H
- M regla semántica para asociar significado M(X) a cada elemento de H, el cuál es un conjunto borroso de U

Las variables lingüísticas son similares a las variables numéricas ya que tienen ciertos valores asociados a ellas. Pero, a diferencia de las variables numéricas, los valores de las variables lingüísticas no son números sino expresiones del lenguaje natural que describen alguna cantidad abstracta de interés. Estas expresiones del lenguaje natural son los nombres de subconjuntos borrosos que consisten de valores numéricos. A estos subconjuntos borrosos se les denomina también restricciones borrosas.

El universo de discurso se denomina al rango de valores que pueden tomar los elementos que poseen la propiedad expresada por la variable lingüística. Por ejemplo, en el caso de la variable lingüística "altura", sería el conjunto de valores comprendido entre 1'50 y 2'30 metros.

Por su parte, el valor lingüístico son las diferentes clasificaciones que se efectúan sobre la variable lingüística. En el caso concreto de la altura, se puede dividir el universo de discurso en los diferentes valores lingüísticos: "bajo", "mediano" y "alto". Cada valor lingüístico tendrá un subconjunto borroso asociado, de forma que se pueden interpretar los distintos valores lingüísticos como los subconjuntos borrosos "bajo", "alto", etc. asociados a la variable lingüística concreta, en este caso "altura".

En el caso de utilizar una representación basada en la función de pertenencia, ésta será la aplicación que asocia a cada elemento de un conjunto borroso el grado con que pertenece al valor lingüístico asociado, ya que los subconjuntos borrosos son caracterizados por sus funciones de pertenencia.

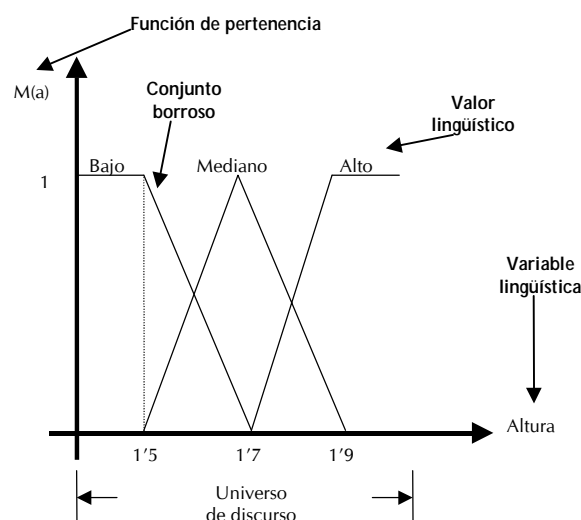


Figura 4.40.

A efectos ilustrativos, en la Figura anterior se representan tres subconjuntos borrosos sobre la variable lingüística "altura", cuyos valores lingüísticos asociados son

“bajo”, “mediano” y “alto”, respectivamente. Aunque en principio cualquier función sería válida para definir subconjuntos borrosos, en la práctica hay ciertas funciones típicas que suelen ser de uso general, tanto por la facilidad de computación que su utilización conlleva como por su estructura lógica para definir su valor lingüístico asociado. Entre ellas las más significativas se muestran en la Figura 4.41.

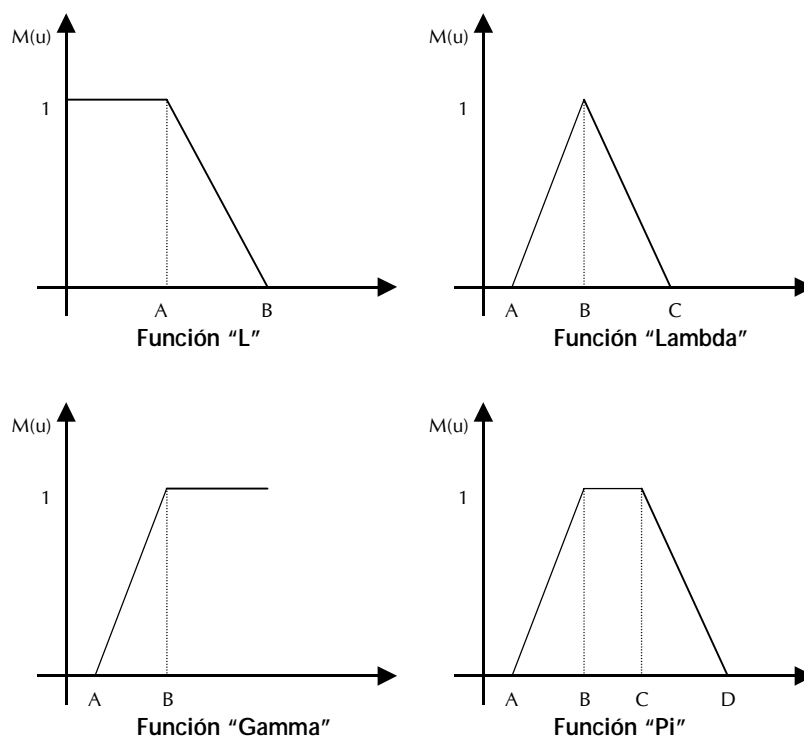


Figura 4.41.

En el ejemplo de la Figura 4.40. las funciones de pertenencia utilizadas son de tipo “L” para el bajo, “Lambda” o “Triángulo” para el mediano y “Gamma” para el alto.

Las funciones "L" y "Gamma" se suelen utilizar para calificar valores lingüísticos extremos, tales como "helado" o "ardiendo", respectivamente. Su ventaja es que la función se extiende al infinito.

Por su parte, las funciones "Pi" y "Lambda" se usan para describir valores intermedios. Su diferencia reside en que la función "Pi" implica un margen de tolerancia alrededor del valor que se toma como más representativo del valor lingüístico asociado al conjunto borroso.

A este respecto, conviene señalar que el principal problema en el uso de variables lingüísticas se encuentra en la determinación del conjunto de etiquetas a utilizar para expresar las opiniones de los individuos. Para ello, se ha de determinar el nivel de



distinción al que se quiere expresar la incertidumbre, o lo que es lo mismo la granularidad de la incertidumbre del conjunto de etiquetas, así como la semántica de las etiquetas, es decir, qué tipo de funciones de pertenencia utilizar para caracterizar los valores lingüísticos. Por tanto, en la práctica se plantea la necesidad de la elección de los descriptores lingüísticos apropiados del conjunto de términos y su semántica, la cual se suele realizar de dos formas, a saber:

- Definir el conjunto de términos lingüísticos mediante una gramática libre de contexto y su semántica mediante números borrosos descritos por una función de pertenencia parametrizada y por reglas semánticas (ZADEH, 1995; BONISSONE, 1982).
- Definir el conjunto de términos lingüísticos utilizando una estructura ordenada de etiquetas de forma que la semántica de los mismos se deriva de la propia estructura ordenada, la cual puede estar o no uniformemente distribuida en el intervalo  $[0, 1]$  (BORDOGNA y PASSI, 1997; HERRERA, HERRERA-VIEDMA y VERDEGAY, 1996; DELGADO, HERRERA, HERRERA-VIEDMA y MARTÍNEZ, 1996; TORRA, 1996).

#### **4.5.1.1. Elección del conjunto de términos lingüísticos**

Los descriptores lingüísticos de una variable lingüística permiten proporcionar a una fuente de información un número reducido de términos con los cuales pueda expresar con facilidad su información y/o conocimiento. La elección del conjunto de términos lingüísticos está relacionado con la granularidad de la incertidumbre, es decir, la cardinalidad del conjunto de términos lingüísticos utilizado para expresar la información.

La cardinalidad de un conjunto de términos lingüísticos debe ser lo suficientemente pequeño como para no imponer una restricción a la información que quiere expresar cada fuente de información, y lo suficientemente grande para permitir hacer una discriminación de las valoraciones en un número limitado de grados.

Diferentes estudios han llegado a conclusiones tanto sobre la cardinalidad, es decir, el número de etiquetas que se ha de establecer, recomendándose en número impar (BEYTH-MAROM, 1982), como sobre el límite de granularidad, la cual algunos autores entienden que no debe ser mayor de 11 o 13 etiquetas y donde el término medio representa una valoración de “aproximadamente 0’5” y con el resto de los términos simétricamente distribuidos a su alrededor (BONISSONE y DECKER, 1986). Estos valores clásicos de cardinalidad parecen estar dentro de la línea de observación de MILLER

(1956) sobre la capacidad humana, en la que se indica que pueden manejar razonablemente y recordar alrededor de siete o nueve términos.

Generalmente, dependiendo del dominio del problema, un conjunto apropiado de términos lingüísticos se elige y se utiliza para describir el conocimiento vago o impreciso, de forma que el número de elementos del conjunto de etiquetas o términos lingüísticos, determina la granularidad de la incertidumbre, que representa el nivel de distinción entre las diferentes caracterizaciones del fenómeno.

Una vez determinada la cardinalidad del conjunto de términos lingüísticos es necesario establecer un mecanismo para generar los términos lingüísticos, para lo cual existen fundamentalmente dos enfoques, a saber:

- Enfoque basado en una gramática libre de contexto. Este enfoque consiste en utilizar una gramática libre de contexto  $G$ , donde el conjunto de términos pertenece al lenguaje generado por  $G$  [5, 7, 100]. Una gramática generadora  $G$  es una 4-tupla tal que:

$$(V_N, V_T, I, P),$$

siendo:

$V_N$  conjunto de símbolos no terminales

$V_T$  conjunto de símbolos terminales

$I$  símbolo inicial

$P$  reglas de producción

La elección de los cuatro elementos anteriores determinará la cardinalidad y la forma del conjunto de términos lingüísticos. El lenguaje generado debería ser lo suficientemente grande para que permita describir cualquier posible situación del problema al que se desea aplicar.

A este respecto, MILLER (1956) establece que el lenguaje generador no tiene que ser infinito sino más bien fácilmente comprensible, de tal modo que estructuras sintácticas complejas, como la recursiva ilimitada que utiliza siempre la misma regla de producción en un ciclo no terminal provocando un lenguaje infinito, deberían eliminarse.

En su aplicación al ejemplo de la variable "altura", sería posible establecer entre los símbolos terminales y no terminales, términos primarios como "alto", "medio" y "bajo", modificadores como "mucho", "muy", "más" o "menos", re-

laciones como “mayor que”, “menor que” y conectivos como “y”, “o” o “pero”. Si se construye  $I$  como cualquier término primario, el conjunto de términos lingüísticos  $H = \{\text{muy alto, alto, alto o medio, medio, etc.}\}$  se genera usando  $P$ . La manera de definir  $P$  puede ser una forma extendida de Backus Naur (BORDOGNA y PASSI, 1993).

- Enfoque basado en términos primarios con una estructura ordenada. Este enfoque, más simple que el anterior, consiste en dar directamente un conjunto de términos considerándolos a todos como primarios y distribuirlos sobre una escala con un orden total definido (BORDOGNA y PASSI, 1997; HERRERA, HERRERA-VIDEVA y VERDEGAY, 1995; YAGER, 1993 y 1995a). Un ejemplo mediante un conjunto de siete etiquetas puede ser:

$$S = \{MB, BB, B, M, A, BA, MA\}$$

$$s_0 = MB = \text{Muy\_Bajo}$$

$$s_4 = A = \text{Alto}$$

$$s_1 = BB = \text{Bastante\_Bajo}$$

$$s_5 = BA = \text{Bastante\_Alto}$$

$$s_2 = B = \text{Bajo}$$

$$s_6 = MA = \text{Muy\_Alto}$$

$$s_3 = M = \text{Medio}$$

donde  $s_a < s_b$  si y sólo si  $a < b$ .

#### 4.5.1.2. Semántica de un conjunto de términos lingüísticos

Normalmente, la semántica de las etiquetas se da mediante números borrosos definidos sobre el intervalo unidad  $[0,1]$ , los cuales se describen utilizando funciones de pertenencia. Dado que las etiquetas son aproximaciones de expresiones lingüísticas propias de los individuos, se considerará que las funciones de pertenencia trapezoidales lineales son suficientemente buenas para recoger la imprecisión de las expresiones humanas, ya que conseguir valores más exactos puede ser una tarea imposible e innecesaria.

Sin embargo, en la literatura especializada se establecen tres posibilidades para definir la semántica de términos lingüísticos, según se base en la estructura ordenada del conjunto de términos lingüísticos, en las funciones de pertenencia o basada en la función de negación:

- Semántica basada en la estructura ordenada del conjunto de términos lingüísticos. Existe la posibilidad de definir la semántica de las etiquetas de un conjunto

ordenado de términos utilizando el orden total (YAGER, 1993; BORDOGNA y PASSI, 1997), para lo cual el conjunto de etiquetas debe cumplir las siguientes características:

- a. Existe un operador de negación. Por ejemplo,  $Neg(s_i) = s_j, j = g - i (g + 1$  es la cardinalidad de  $S$ ).
- b. Tiene un operador de maximización:  $\max (s_i, s_j) = s_i \quad s_i \geq s_j$
- c. Tiene un operador de minimización:  $\min (s_i, s_j) = s_i \quad s_i \leq s_j$

De acuerdo con lo anterior este tipo de semántica es similar a utilizar una escala que provee un orden tal que:

$$s_i > s_j \quad s_i \quad i > j$$

Un ejemplo de este tipo de semántica es la siguiente escala (YAGER, 1993):

Perfecto	P	S <sub>6</sub>
Muy Alto	MA	S <sub>5</sub>
Alto	A	S <sub>4</sub>
Medio	M	S <sub>3</sub>
Bajo	B	S <sub>2</sub>
Muy Bajo	MB	S <sub>1</sub>
Nulo	N	S <sub>0</sub>

- Semántica basada en funciones de pertenencia. En este caso se trata de definir la semántica del conjunto de términos lingüísticos mediante la utilización de números borrosos en el intervalo  $[0, 1]$ , de forma que cada número borroso está definido por su función de pertenencia (entre otros, BONISSONE y DECKER, 1986; DELGADO, VERDEGAY y VILA, 1993a; BORDOGNA y PASSI, 1993; CHANG y CHEN, 1994).

En numerosos casos las valoraciones lingüísticas dadas por las fuentes de información son aproximaciones, de ahí que algunos autores consideren que las funciones de pertenencia trapezoidales son lo suficientemente buenas para representar la vaguedad de dichas valoraciones lingüísticas e incluso que valores más ajustados pueden ser innecesarios e incluso imposibles de obtener.

Por tanto, esta representación paramétrica se realiza mediante una tupla  $(a, b, c, d)$  en la cual los valores intermedios "b" y "c" representan el intervalo en el que la función de pertenencia vale 1 mientras que los valores izquierdo y derecho,

“a” y “d” indican los extremos izquierdo y derecho de la función de pertenencia. Sin embargo, sería factible utilizar para esta representación números borrosos triangulares, en cuyo caso se expresaría por una tripleta de valores (a, b, c) con el significado comentado con anterioridad. No obstante, hay autores que optan por otro tipo de representaciones, por ejemplo, funciones Gaussianas (BORDOGNA y PASSI, 1993).

Así, por ejemplo, para un conjunto de nueve términos lingüísticos se puede establecer la siguiente semántica:

Imposible	I	(0, 0, 0, 0)
Extremadamente Improbable	EI	(0, 0'01, 0'02, 0'07)
Posibilidad Muy Baja	PMB	(0'04, 0'1, 0'16, 0'21)
Poca Posibilidad	PP	(0'17, 0'2, 0'36, 0'42)
Puede Ser	PS	(0'32, 0'41, 0'58, 0'65)
Cierta Posibilidad	CP	(0'58, 0'63, 0'8, 0'86)
Muy Probable	MP	(0'73, 0'78, 0'92, 0'97)
Extremadamente Posible	EP	(0'93, 0'98, 0'99, 1)
Cierto	C	(1, 1, 1, 1)

La representación del conjunto de etiquetas anteriores basado en la función de pertenencia es la que muestra la Figura 4.42.

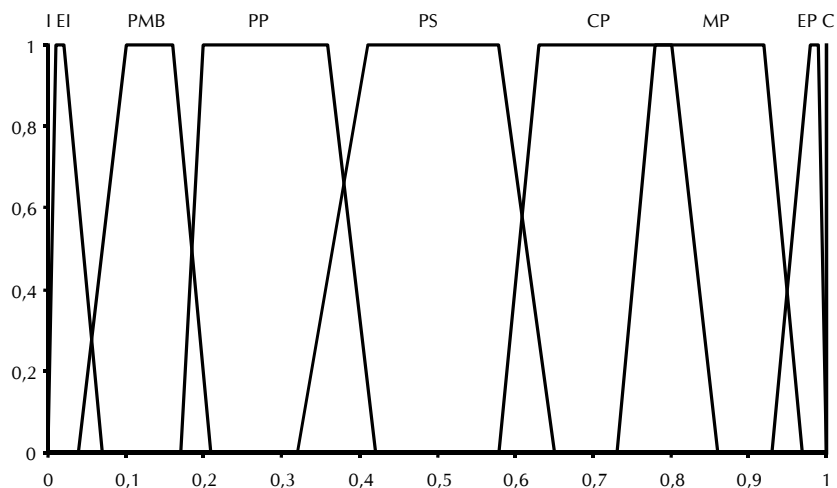


Figura 4.42.

Un caso particular se presenta cuando se parte de una extensión basada en la estructura ordenada de términos lingüísticos, para lo cual se utiliza un conjunto

de números borrosos uniformemente distribuidos en el intervalo  $[0, 1]$ , tal como muestra la Figura 4.43.

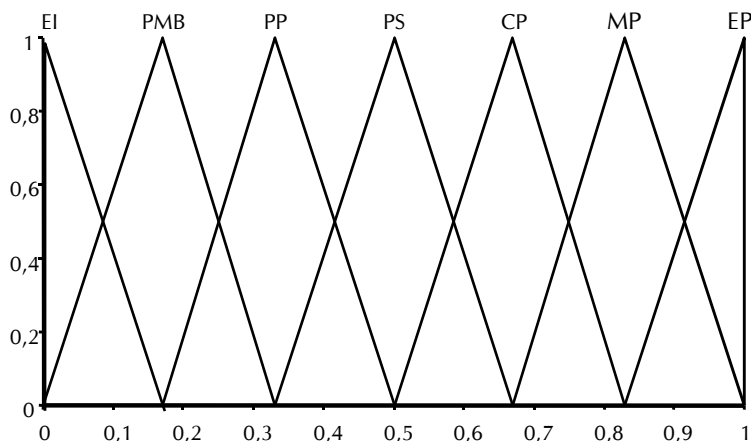


Figura 4.43.

De acuerdo con lo anterior, la posibilidad de utilizar este enfoque implica establecer las funciones de pertenencia asociadas a cada etiqueta, lo cual plantea un problema en el sentido de que es difícil que todas las fuentes de información propongan exactamente las mismas funciones de pertenencia asociadas a los términos lingüísticos primarios, es decir no existe una distribución universal de conceptos.

A este respecto, en la Figura 4.44. se puede observar como para una misma evaluación se pueden establecer percepciones distintas y cercanas a la vez.

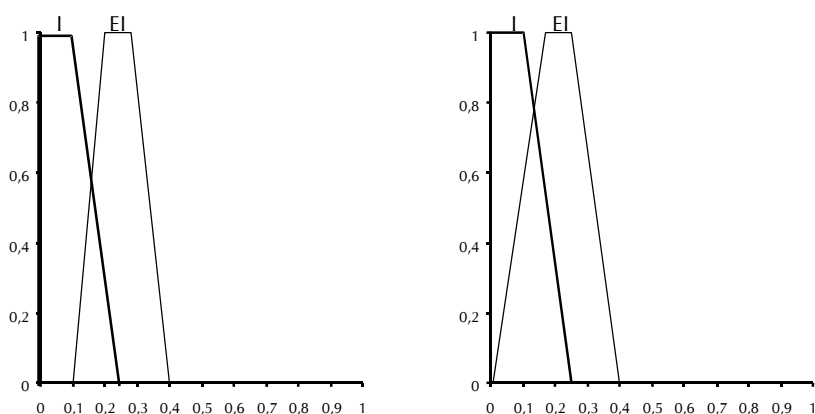


Figura 4.44.

En consecuencia, se pueden plantear situaciones de términos lingüísticos con una sintaxis similar y diferente semántica. Esto es así en la medida en que no

siempre es factible para las distintas fuentes de información definir un conjunto borroso para cada etiqueta primaria porque requiere un exceso de precisión que la fuente de información en muchos casos no es capaz de proporcionar. De ahí que en muchas circunstancias se consideren entornos en los que las fuentes de información pueden discriminar sin problemas el mismo conjunto de términos lingüísticos bajo una concepción similar, teniendo en cuenta que el concepto de variable lingüística sirve para expresar una medida de una caracterización aproximada de información para una preferencia imprecisa (HERRERA, HERRERA-VIEDMA y VERDEGAY, 1995).

- Semántica intervalar basada en la función de negación. Esta opción consiste en generar la semántica de las etiquetas lingüísticas mediante funciones de negación que inducen una semántica para cada etiqueta (TORRA, 1996, 1999), estando éstas definidas como intervalos en  $[0, 1]$ .

TORRA (1996) realiza un estudio de las funciones de negación que se definen sobre los conjuntos ordenados de etiquetas, en donde cada etiqueta es un subdominio del dominio de definición del conjunto de etiquetas, generalmente  $[0, 1]$ . Este mismo autor pone de manifiesto que las funciones de negación clásicas presentan ciertos problemas cuando se asume que un subdominio puede ser más informativo que el resto de subdominios. En este caso la densidad de las etiquetas en ese subdominio debería ser mayor que la densidad en el resto del dominio, es decir, el conjunto ordenado de términos no estaría uniformemente distribuido.

Asimismo, TORRA (1996) presenta el siguiente ejemplo representativo de esta situación: sea un sistema de control cuya salida debe ser la temperatura, exigiendo un comportamiento muy preciso cuando el valor de la temperatura es "Bajo". El conjunto de etiquetas tendría una distribución de las mismas similar a la de la Figura 4.45.

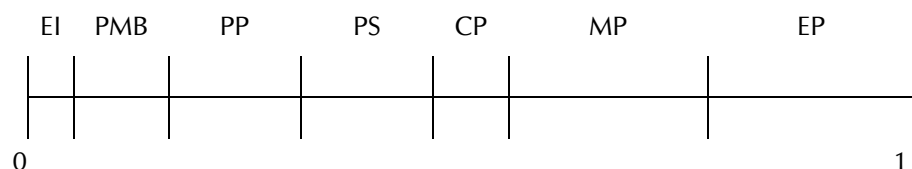


Figura 4.45.

siendo EI = Extremadamente Improbable, PMB = Posibilidad Muy Baja, PP = Poca Posibilidad, PS = Puede Ser, CP = Cierta Posibilidad, MP = Muy Probable, EP = Extremadamente Posible.

En esta situación el autor propone un método que induce la semántica utilizando una función de negación definida a partir del conjunto de etiquetas para partitionarlo. Este método permite construir una semántica para un conjunto de etiquetas en el caso en que la fuente de información proporciona los valores de una función de negación para cada etiqueta.

En el caso de la Figura anterior podría definirse la siguiente función de negación:

$$\text{Neg (CN)} = \text{Neg (MB)} = \{\text{MA}\}$$

$$\text{Neg (PB)} = \text{Neg (B)} = \{\text{A}\}$$

$$\text{Neg (M)} = \{\text{M}\}$$

$$\text{Neg (A)} = \{\text{PB, B}\}$$

$$\text{Neg (MA)} = \{\text{CN, MB}\}$$

#### **4.5.2. Utilización de las variables lingüísticas: Modelado de preferencias**

De forma genérica, el modelado de preferencias supone decidir la representación de las valoraciones dadas por los expertos que participan en un problema. En este caso el término “representación” hace referencia a dos aspectos, a saber:

1. Decidir la naturaleza y el dominio de la información que se va a utilizar para expresar los valores de las preferencias sobre las distintas alternativas del problema. En función de la alternativa por la que se opte se pueden determinar distintos tipos de modelado:
  - a. Modelado binario de preferencias, en el caso de utilizar dos valores, normalmente  $\{0, 1\}$ , para expresar la preferencia sobre cada par de alternativas.
  - b. Modelado de preferencias valorado en  $[0, 1]$ , en el caso de que la información que se utilice para expresar las preferencias son valores numéricos en el intervalo  $[0, 1]$ , que modelan la incertidumbre existente en la preferencia de cada alternativa.
  - c. Modelado borroso de preferencias, aplicable en el caso de problemas que presentan alternativas sobre las que se posee un conocimiento incierto o impreciso, y se utilizan números borrosos para expresar la preferencia sobre las distintas alternativas del problema.



- d. Modelado lingüístico de preferencias, en el cual los valores utilizados para expresar la preferencia sobre las alternativas del problema son etiquetas lingüísticas.
2. Seleccionar la estructura que soportará y dará significado a las preferencias con que trabajará el problema. En este caso es posible optar entre las siguientes alternativas:
- a. Vector de utilidad. Los valores de preferencia son expresados en un vector, donde cada valor expresa la preferencia para cada una de las alternativas que se están calificando en el problema. Por ejemplo, en un problema con un conjunto de alternativas  $\{x_1, \dots, x_n\}$ , un vector de utilidad para estas alternativas sería el siguiente:  $(y_1, \dots, y_n)$ , donde  $y_1$  es la preferencia sobre la alternativa  $x_1$ ,  $y_2$  la preferencia sobre la alternativa  $x_2$  y así sucesivamente.
- b. Relación de preferencias. En la teoría clásica de preferencias, una relación binaria  $R$  con respecto a cada par de alternativas  $(x_i, x_j)$  de un conjunto  $A$  es una relación de preferencia si refleja el grado en que  $x_i$  es preferible a  $x_j$ . Por tanto, la estructura que muestra las relaciones de preferencias son matrices cuyos elementos representan el valor de la relación binaria sobre las alternativas correspondientes a la posición que ocupan en la matriz, es decir:

$$\left( \begin{array}{c|ccc} & x_1 & \dots & x_n \\ \hline x_1 & y_{11} & \dots & y_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n & y_{n1} & \dots & y_{nn} \end{array} \right)$$

El enfoque lingüístico borroso ha sido ampliamente utilizado en gran número de aplicaciones, entre las que destaca el modelado lingüístico de preferencias, que consiste en la utilización de variables lingüísticas para valorar las preferencias sobre las alternativas que presenta el problema, es decir, las estructuras de preferencia se representan mediante etiquetas lingüísticas (TONG y BONISSONE, 1980; ZADEH, 1983). Existen distintas estructuras para llevar a cabo dicha representación, entre las que destacan por su utilización las dos siguientes:

- a. Vector de utilidad lingüístico. Cada fuente de información proporciona un valor para cada alternativa del problema, es decir se asocia a cada alternativa un valor lingüístico que indica la utilidad, rendimiento o preferencia de dicha alternativa desde el punto de vista del que proporciona la información (YAGER, 1992a).

Por ejemplo, las preferencias siguientes:

$$\begin{pmatrix} a_1 & MA \\ a_2 & A \end{pmatrix}$$

proporcionan el vector (MA, A), que asigna un valor lingüístico de preferencia a cada alternativa  $a_i$  que se está evaluando.

- b. Relación de preferencia lingüística. Consiste en expresar las preferencias sobre el conjunto de alternativas a valorar mediante una relación binaria que refleja el grado lingüístico en que cada alternativa es preferida sobre otra (HERRERA, HERRERA-VIEDMA y VERDEGAY, 1995). Por ejemplo:

$$\left( \begin{array}{c|cc} & a_1 & a_2 \\ \hline a_1 & - & A \\ a_2 & B & - \end{array} \right)$$

representa la relación de preferencia siguiente: la alternativa  $a_1$  es preferida a la alternativa  $a_2$  con un grado "A", mientras que  $a_2$  es preferida a  $a_1$  con un grado "B".

Asimismo, el modelado lingüístico de preferencias implica la necesidad de realizar operaciones con etiquetas lingüísticas, es decir, el uso de técnicas computacionales que tienen definidos operadores de agregación, comparación, negación, etc., sobre información lingüística, siendo los dos más extendidos los modelos basados en el Principio de Extensión y los modelos simbólicos.

#### 4.5.2.1. Modelos basados en el Principio de Extensión

Estos modelos realizan operaciones con términos lingüísticos mediante operaciones asociadas a las funciones de pertenencia de las etiquetas basándose en el Principio de Extensión.

El Principio de Extensión es un concepto básico de la Teoría de Subconjuntos Borrosos, el cual se utiliza para generalizar conceptos matemáticos no borrosos a conjuntos borrosos, del cual existen diferentes formulaciones (ZADEH, 1975; KLIR y YUAN, 1995) y que se puede definir como sigue: Sea  $X$  el producto cartesiano de los universos  $X_1, \dots, X_r$  y sean  $\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_r$   $r$  conjuntos borrosos en  $X_1, \dots, X_r$ , respectivamente. Sea  $f$  una función definida desde el universo  $X$ , ( $X = X_1 \times \dots \times X_r$ ), al universo  $Y$ ,  $y =$

$f(x_1, \dots, x_r)$ . El Principio de Extensión permite definir un conjunto borroso  $\tilde{B}$  en  $Y$ , a partir de los conjuntos borrosos  $\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_r$  representando su imagen mediante la función  $f$  de acuerdo con la siguiente expresión:

$$\tilde{B} = \left\{ (y, \mu_{\tilde{B}}(y)) / y = f(x_1, \dots, x_r), (x_1, \dots, x_r) \in X \right\}$$

donde:

$$\mu_{\tilde{B}}(y) = \begin{cases} \sup_{(x_1, \dots, x_r) \in f^{-1}(y)} \min\{\mu_{\tilde{A}_1}(x_1), \dots, \mu_{\tilde{A}_r}(x_r)\} & \text{si } f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Para  $r = 1$ , el Principio de Extensión se reduce a:

$$\tilde{B} = f(A) = \left\{ (y, \mu_{\tilde{B}}(y)) / y = f(x), x \in X \right\}$$

donde:

$$\mu_{\tilde{B}}(y) = \begin{cases} \sup_{x \in f^{-1}(y)} \mu_{\tilde{A}}(x), & \text{si } f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

De esta forma, el Principio de Extensión es una herramienta de la Teoría de los Subconjuntos Borrosos que se utiliza para extender conceptos matemáticos definidos sobre la recta real a su versión sobre conjuntos borrosos, es decir, permite extender funciones para operar con números borrosos de forma que el resultado sea también un número borroso. Se trata, por tanto, de extender la matemática clásica sobre los números borrosos generando lo que se denomina "aritmética borrosa".

La utilización de la aritmética borrosa en la operativa con variables lingüísticas puede provocar aumentos en la imprecisión de los resultados, ya que la obtención de los mismos mediante los operadores aritméticos borrosos puede determinar un resultado que no coincida con ninguno de los términos lingüísticos del conjunto inicial de términos, lo que obliga a realizar un proceso de aproximación lingüística para expresar los resultados en el dominio de expresión original.

Los procesos de aproximación lingüística consisten en localizar un conjunto borroso que represente la semántica de una etiqueta lingüística en el conjunto de etiquetas original y que sea lo más cercano posible al significado del conjunto borroso sin etiquetar que se obtiene como resultado de las operaciones borrosas. Para realizar la aproximación existen diversas posibilidades (BONISSONE y DECKER, 1986; DEGANI y BORTOLAN, 1988), siendo el esquema de un proceso de aproximación lingüística

en una operación de agregación realizada con un modelo basado en el Principio de Extensión el que se muestra en la Figura 4.46.

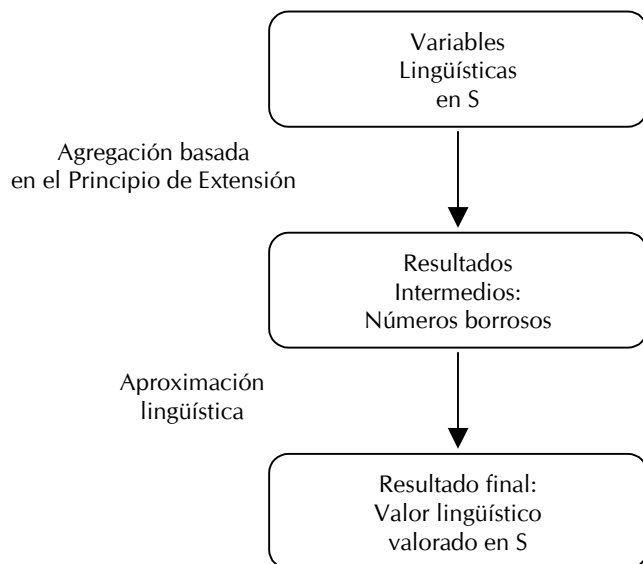


Figura 4.46.

Este esquema se puede formalizar como sigue:

$$S^n \xrightarrow{\tilde{F}} F(R) \xrightarrow{\text{app}_1(\cdot)} S$$

donde:

$S^n$  dominio de definición, vectores de  $n$  etiquetas sobre  $S$

$F(R)$  conjunto de números borrosos sobre  $R$

$\tilde{F}$  operador de agregación basado en el Principio de Extensión

$\text{app}_1(\cdot)$  función de aproximación lingüística

$S$  conjunto de inicial de términos lingüísticos

A efectos ilustrativos de la operativa con modelos basados en el principio de extensión, supóngase el siguiente ejemplo: Sea una empresa que desea renovar un elemento de su flota de transportes y entre las alternativas que se establecen como factibles se encuentran las siguientes:

- $x_1$  Vehículo "Alfa"
- $x_2$  Vehículo "Beta"
- $x_3$  Vehículo "Gamma"
- $x_4$  Vehículo "Omega"

Para llevar a cabo el estudio entre las distintas alternativas se somete a consideración de cuatro expertos ( $e_1, e_2, e_3, e_4$ ) en elementos de transportes de estas características, los cuales emitirán su opinión mediante un vector de utilidad expresando su preferencia sobre el conjunto de alternativas. Los valores de preferencia se establecen sobre el conjunto lingüístico  $S = \{MB, B, M, A, MA\}$ , cuya semántica asociada es la siguiente: MB = Muy Baja, B = Baja, M = Media, A = Alta y MA = Muy Alta. Las funciones de pertenencia se suponen triangulares y uniformemente distribuidas, de forma que los números borrosos asociados al conjunto de términos lingüísticos S así como su representación gráfica es la que se muestra en la Figura 4.47.

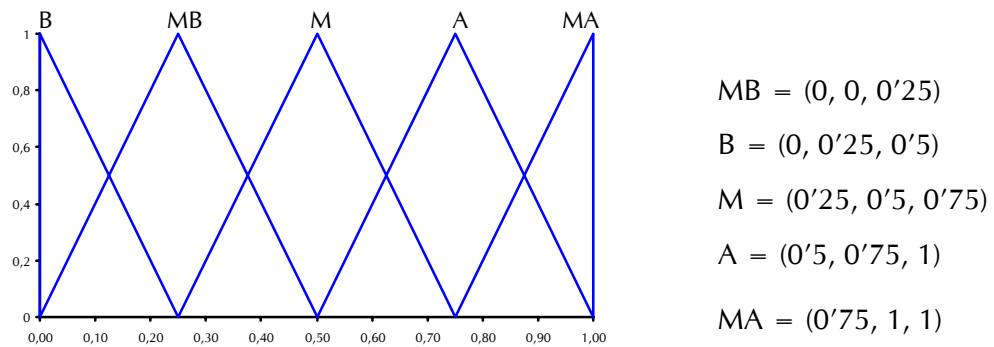


Figura 4.47.

Los vectores de preferencia proporcionados por los expertos son los recogidos en el Cuadro 4.1.

		Alternativas			
		$y_{ij}$	$x_1$	$x_2$	$x_3$
Expertos	$e_1$	A	M	MB	B
	$e_2$	A	M	MB	A
	$e_3$	MB	A	B	A
	$e_4$	B	M	A	M

Cuadro 4.1.

donde:

$y_{ij}$  valor de preferencia del experto  $e_i$  para la alternativa  $x_j$

$\mu_{y_{ij}} = (a_{ij}, b_{ij}, c_{ij})$  función de pertenencia

Para proceder a realizar la evaluación de las distintas alternativas, en primer término será preciso agregar los valores de preferencia suministrados por cada experto para obtener un valor de preferencia colectiva sobre cada alternativa, que proporcionará un vector de preferencia colectiva. En este caso, se considera que la opinión de los distintos expertos es de igual relevancia, de ahí que se pueda utilizar como operador de agregación la media aritmética actuando sobre las funciones de pertenencia. De esta forma, el valor de preferencia colectiva para cada alternativa  $x_j$  se puede calcular mediante la siguiente expresión:

$$\mu_{y_j} = \left( \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m a_{ij}, \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m b_{ij}, \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m c_{ij} \right)$$

En su aplicación al ejemplo considerado, se tiene que:

$$\begin{aligned} \mu_{y_1} &= (0'25, 0'4375, 0'6875) & \mu_{y_3} &= (0'125, 0'25, 0'5) \\ \mu_{y_2} &= (0'3125, 0'5625, 0'8125) & \mu_{y_4} &= (0'3125, 0'5625, 0'8125) \end{aligned}$$

Los números borrosos obtenidos en la operación anterior no coinciden con ningún término lingüístico en  $S = \{MB, B, M, A, MA\}$ , por lo que será preciso aplicar un proceso de aproximación lingüística para obtener los resultados en el dominio de expresión inicial  $S$ .

Para obtener un término en  $S$  cuyo significado sea lo más cercano posible a  $y_j$ , se plantea utilizar como función de aproximación ( $app_1(\cdot)$ ), por su generalidad, la distancia euclídea sobre los valores de representación de los números borrosos triangulares, ponderando éstos:

$$d(\mu_{s_i}, \mu_{y_j}) = \sqrt{P_1 (a_i - a_j)^2 + P_2 (b_i - b_j)^2 + P_3 (c_i - c_j)^2}$$

donde:

$(a_i, b_i, c_i)$  y  $(a_j, b_j, c_j)$  funciones de pertenencia de " $s_i$ " y de " $y_j$ "

$P_1, P_2, P_3$  pesos que representan la importancia de los parámetros  $a$ ,  $b$ , y  $c$

De esta forma, la función  $app_1(\cdot)$  selección  $s_i^*$  ( $app_1(y_j) = s_i^*$ ) tal que:

$$d(\mu_{s_i^*}, \mu_{y_j}) \leq d(\mu_{s_i}, \mu_{y_j}) \quad \forall s_i \in S$$

El proceso de aproximación lingüística anterior, aplicado a los conjuntos borrosos obtenidos en el ejemplo de aplicación, asignando unos pesos de  $P_1 = 0'2$ ,  $P_2 = 0'6$  y  $P_3 = 0'2$ , se tiene lo siguiente:

$$\text{app}_1(y_1) = M, \text{ con } d(\mu_{s_1}, \mu_{y_1}) = \sqrt{0'2 \cdot (0'25 - 0'25)^2 + 0'6 \cdot (0'5 - 0'4375)^2 + 0'2 \cdot (0'75 - 0'6875)^2} = 0'055$$

$$\text{app}_1(y_2) = M, \text{ con } d(\mu_{s_1}, \mu_{y_2}) = \sqrt{0'2 \cdot (0'25 - 0'3125)^2 + 0'6 \cdot (0'5 - 0'5625)^2 + 0'2 \cdot (0'75 - 0'8125)^2} = 0'0625$$

$$\text{app}_1(y_3) = B, \text{ con } d(\mu_{s_1}, \mu_{y_3}) = \sqrt{0'2 \cdot (0'25 - 0'125)^2 + 0'6 \cdot (0'5 - 0'25)^2 + 0'2 \cdot (0'75 - 0'5)^2} = 0'055$$

$$\text{app}_1(y_4) = M, \text{ con } d(\mu_{s_1}, \mu_{y_4}) = \sqrt{0'2 \cdot (0'25 - 0'3125)^2 + 0'6 \cdot (0'5 - 0'5625)^2 + 0'2 \cdot (0'75 - 0'8125)^2} = 0'0625$$

La Figura 4.48. presenta el proceso de aproximación lingüística para  $y_2$  que en este caso concreto coincidirá con el proceso de  $y_4$ .

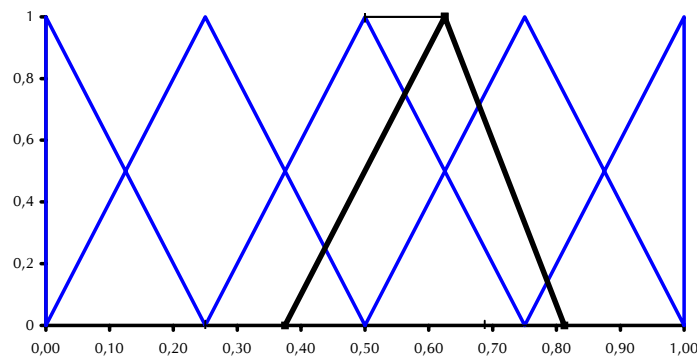


Figura 4.48.

En la Figura anterior se aprecia que  $y_2$  no coincide con ningún término en  $S$ , siendo el término más cercano a  $y_2$  según  $\text{app}_1(\cdot)$  el obtenido mediante la siguiente expresión:

$$\min \{ d(\mu_{y_2}, \mu_{MB}), d(\mu_{y_2}, \mu_B), d(\mu_{y_2}, \mu_M), d(\mu_{y_2}, \mu_A), d(\mu_{y_2}, \mu_{MA}) \}$$

De forma que para el ejemplo de aplicación los valores de la expresión anterior son:

$$d(\mu_{y_2}, \mu_{MB}) = 0'522$$

$$d(\mu_{y_2}, \mu_A) = 0'1875$$

$$d(\mu_{y_2}, \mu_B) = 0'3125$$

$$d(\mu_{y_2}, \mu_{MA}) = 0'4001$$

$$d(\mu_{y_2}, \mu_M) = 0'0625$$

Por tanto,  $\text{app}_1(\cdot) = M$

Sin embargo, el proceso anterior provoca que en la operación de aproximación del resultado final al dominio de expresión inicial se pierda información, tal y como muestra la Figura 4.48. Asimismo esta circunstancia provoca que una vez que los resultados han sido expresados en el dominio inicial puedan existir varias alternativas con el mismo resultado.

El vector de preferencia colectiva construido en los términos anteriormente descritos sirve para delimitar aquella alternativa con mayor grado de preferencia colectiva. En el ejemplo de aplicación práctica, debido al proceso de aproximación, se plantean tres alternativas con el mismo "máximo" valor de preferencia, de tal forma que el conjunto solución viene dado por  $\{x_1, x_2, x_4\}$ , lo cual no permite discernir entre todas las alternativas planteadas, ya que mediante la aproximación se pierde información que podría ser útil en el momento de determinar una única alternativa como la mejor valorada por el conjunto de expertos.

En el ejemplo anterior se pone de manifiesto uno de los inconvenientes que plantea la utilización de modelos basados en el Principio de Extensión. A continuación se analizará la posibilidad de utilizar los modelos simbólicos, para lo cual en primer término se hace una breve descripción de los mismos para con posterioridad utilizarlos en la resolución del ejemplo anterior con la finalidad de poder comparar los resultados y analizar las ventajas y desventajas de ambos modelos.

#### **4.5.2.2. Modelos simbólicos**

Los operadores de agregación asociados al modelo simbólico no necesitan del Principio de Extensión, pues no realizan operaciones sobre las funciones de pertenencia de los conjuntos borrosos, sino que se basan en el orden que ocupa una etiqueta en su conjunto de términos ( $S$ ) y otras propiedades de dichos términos lingüísticos.

En general, en este modelo se suele utilizar para operar la estructura ordenada de los términos lingüísticos  $S = \{s_0, \dots, s_g\}$  donde  $s_i < s_j$  si  $i < j$ . Los resultados intermedios de estas operaciones son valores numéricos  $\beta \in [0, g]$  los cuáles son aproximados en cada etapa del proceso utilizando una función de aproximación  $\text{app}_2(\cdot)$  para obtener un valor  $\text{app}_2(\beta) \in [0, 1, \dots, g]$  que indique el índice del término lingüístico asociado  $s_{\text{app}_2(\beta)} \in S$ .

Un esquema de un modelo simbólico para una operaciones de agregación es el que se recoge en la Figura 4.49.



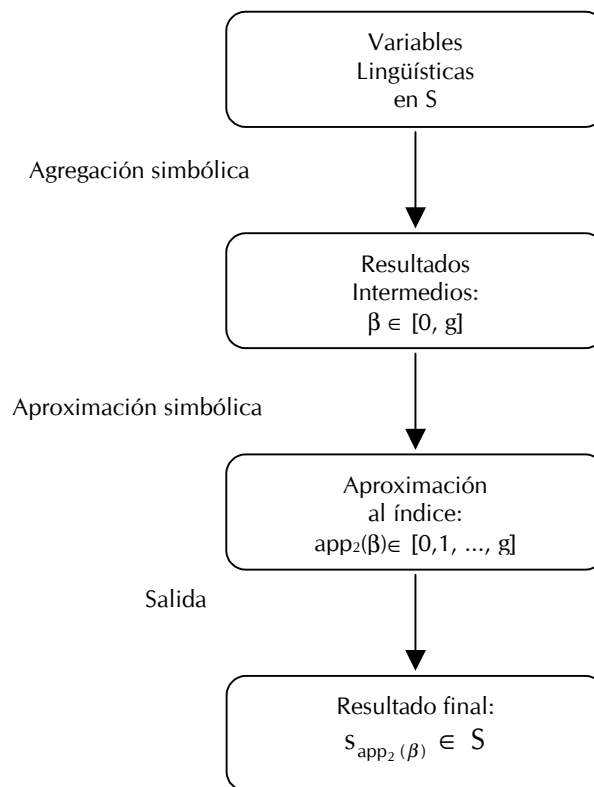


Figura 4.49.

La expresión formal es la que sigue:

$$S^n \xrightarrow{C} [0, g] \xrightarrow{\text{app}_2(\cdot)} \{0, \dots, g\} \longrightarrow S$$

donde:

$S^n$  dominio de definición, vectores de  $n$  etiquetas sobre  $S$

$C$  operador simbólico de agregación

$\text{app}_2(\cdot)$  función de aproximación utilizada para obtener un índice asociado a una etiqueta en  $S$

$S$  conjunto de inicial de términos lingüísticos

La aplicación al ejemplo anterior del modelo simbólico se va a realizar en función del enfoque simbólico desarrollado en el trabajo de DELGADO, VERDEGAY y VILA (1993b), utilizando como método de agregación de variables lingüísticas la combinación convexa que considera un vector de pesos con suma igual a 1, y actúa sobre los índices de las etiquetas, aplicando una función de redondeo al resultado final para así obtener un valor entero, siendo éste el índice de la etiqueta solución.

Si se denomina  $A = \{a_1, \dots, a_m\}$  al conjunto de términos lingüísticos que se van a agregar, la Combinación Convexa  $C^m$  se puede definir a través de la siguiente expresión:

$$C^m \{w_k, b_k, k = 1, \dots, m\} = w_1 \otimes b_1 \oplus (1 - w_1) \otimes C^{m-1} \{\eta_h, b_h, h = 2, \dots, m\}$$

donde:

$W = \{w_1, \dots, w_m\}$  vector de pesos asociado a  $A$ , tal que  $w_i \in [0, 1]$  y  $\sum_i w_i = 1$

$B = (b_1, \dots, b_m)$  vector tal que  $B = (a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(n)})$ , con  $a_{\sigma(j)} \leq a_{\sigma(i)}$ ,  $\forall i \leq j$

$\sigma$  permutación sobre los valores  $a_i$

$\eta_h = w_k / \sum_{k=2}^m w_k$ ,  $h = 2, \dots, m$

$\otimes$  es el producto general de una etiqueta por un número real positivo

$\oplus$  es la suma de etiquetas definida en DELGADO, VERDEGAY y VILA (1993b)

Así, si  $m = 2$ , entonces se define la Combinación Convexa,  $C^2$ , como:

$$C^2 \{w_i, b_i, i = 1, 2\} = w_1 \otimes s_j \oplus (1 - w_1) \otimes s_i = s_k, \quad s_j, s_i \in S, (j \geq i)$$

tal que:

$$k = \min \{g, i + \text{round}(w_1 \cdot (j - i))\}$$

donde:

$g + 1$  cardinalidad de  $S$

round operación tradicional de redondeo

$b_1 = s_j$

$b_2 = s_i$

Si  $w_j = 1$  y  $w_i = 0$ , con  $i \neq j \forall i$ , entonces la Combinación Convexa se define como:

$$C^m \{w_i, b_i, i = 1, K, m\} = b_j$$

A efectos ilustrativos de las consideraciones anteriores, puede resultar de interés continuar con las mismas condiciones que en el caso anterior, partiendo de la base de que las opiniones de todos los expertos tienen la misma importancia, resultando, en consecuencia, que el vector de pesos será  $\{0'25, 0'25, 0'25, 0'25\}$ . Para determinar los valores de preferencia colectiva será preciso aplicar el proceso de combinación convexa a todas las alternativas. En concreto, para la alternativa  $x_1$  este proceso se realiza como sigue:

$$C^4 \{(0'25, 0'25, 0'25, 0'25), (A, A, B, MB)\} = 0'25 \otimes A \oplus 0'75 \otimes C^3 \{(0'33, 0'33, 0'33), (A, B, MB)\}$$

$$C^3 \{(0'33, 0'33, 0'33), (A, B, MB)\} = 0'33 \otimes A \oplus 0'66 \otimes C^2 \{(0'5, 0'5), (B, MB)\}$$

$$C^2 \{(0'5, 0'5), (B, MB)\} = s_{k_2} = s_1 = B$$

$$k_2 = \min \{4, 0 + \text{round}(0'5 \cdot (1 - 0))\} = 1$$

$$C^3 \{(0'33, 0'33, 0'33), (A, B, MB)\} = 0'33 \otimes A \oplus 0'66 \otimes B = s_{k_3} = s_2 = M$$

$$k_3 = \min \{4, 1 + \text{round}(0'33 \cdot (3 - 1))\} = 2$$

$$C^4 \{(0'25, 0'25, 0'25, 0'25), (A, A, B, MB)\} = 0'25 \otimes A \oplus 0'75 \otimes M = s_{k_4} = s_2 = M$$

$$k_4 = \min \{4, 2 + \text{round}(0'25 \cdot (3 - 2))\} = 2$$

Operando en el mismo sentido con el resto de alternativas, los valores de preferencia colectiva en el ejemplo de aplicación práctica serán los siguientes:

$$C^4 \{(0'25, 0'25, 0'25, 0'25), (A, A, B, MB)\} = M$$

$$C^4 \{(0'25, 0'25, 0'25, 0'25), (A, M, M, M)\} = M$$

$$C^4 \{(0'25, 0'25, 0'25, 0'25), (A, B, MB, MB)\} = B$$

$$C^4 \{(0'25, 0'25, 0'25, 0'25), (A, A, M, B)\} = M$$

Por tanto, las alternativas con mayor grado de preferencia colectiva y que constituyen el vector de preferencias colectivas son  $\{x_1, x_2, x_4\}$ , de forma que la aplicación de este método, de forma semejante al método anterior, proporciona una solución con múltiples alternativas y en concreto con el mismo resultado que el método anterior. Asimismo, la desventaja señalada anteriormente respecto a la pérdida de información no ha sido superada, debido en este caso a la utilización del operador de aproximación "round".

En consecuencia, ambos métodos tienen el inconveniente de que al precisar ajustar los resultados al dominio original necesitan algún tipo de función de aproximación, la cual provoca que el resultado proporcionado sea asimismo "aproximado", de tal forma que dicho resultado no extrae toda la información que las variables iniciales pueden contener, provocando pérdida de información que en determinadas circunstancias puede ser fundamental al permitir la elección entre alternativas que siguiendo los métodos anteriores dan resultados iguales. Por otra parte, ambos métodos provocan que entradas distintas para distintas alternativas produzcan resultados idénticos, debido en ambos casos a la necesidad de aplicar algún operador de aproximación, si bien es cierto que durante el proceso de cálculo y con anterioridad a la utilización de dicho operador los resultados parciales fueran distintos.

El inconveniente de la pérdida de información en el enfoque lingüístico borroso es debida a que se utiliza una representación discreta de la información lingüística y se utilizan operadores que actúan en un rango continuo.

La importancia de este inconveniente suscita el interés por analizar la utilidad del modelo de representación de información lingüística con 2-tuplas basado en el trabajo de MARTÍNEZ (1999), a cuya consideración se dedicará el apartado 6 del presente Capítulo.

#### **4.5.3. Operadores de agregación de información lingüística**

En las situaciones en las que se presenta información cualitativa, generalmente poco rigurosa e imprecisa, expresada a través de variables lingüísticas, se precisa de mecanismos que faciliten la combinación de esta información, es decir, que permitan su agregación.

En un contexto borroso, han sido muchos los autores que se han dedicado al estudio y diseño de operadores de combinación de información. Entre ellos destacan los trabajos sobre conectivos lógicos borrosos (las familias de operadores conjuntivos, t-normas, y disyuntivos, t-conormas, y operadores promedio) (entre otros, DUBOIS y PRADE, 1985; MIZUMOTO, 1989; YAGER, 1991), funciones de implicación (entre

otros, TRILLAS y VALVERDE, 1985), operadores de agregación de información ponderada "MAX" y "MIN" (entre otros, DUBOIS y PRADE, 1985; 1986), operadores de generalización de t-normas y t-conormas (entre otros, YAGER, 1995b), operadores promedio ponderados ordenados (entre otros, ZADEH, 1975; YAGER, 1988).

En un contexto lingüístico se conocen dos tipos de operadores de agregación de etiquetas lingüísticas: los que se basan en la utilización de las funciones de pertenencia asociadas con las etiquetas lingüísticas (BONISSONE y DECKER, 1986; TONG y BONISSONE, 1980) y los que trabajan directamente con las etiquetas (DELGADO, VERDEGAY y VILA, 1993b; HERRERA y VERDEGAY, 1993; YAGER, 1992a, 1992b, 1995a).

La mayoría de los operadores utilizados se basan en la función de pertenencia que se asocia a cada etiqueta lingüística, operando en consecuencia mediante la aritmética borrosa definida en apartados anteriores. De ahí que el contenido de los siguientes apartados se centre en los operadores lingüísticos que trabajan directamente con las etiquetas.

En este sentido, se han desarrollado diferentes operadores que analizan la información que se pretende sea combinada en un proceso lingüístico, diferenciándose claramente dos tipos:

1. Información lingüística no ponderada. Se trata de situaciones en las que sólo se dispone de los valores lingüísticos que deben ser combinados.
2. Información lingüística ponderada. Se refiere a situaciones en las que además de un conjunto de valores lingüísticos a combinar, como pueden ser opiniones, cada uno de ellos posee un grado de importancia indicando el peso en referencia al conjunto.

En ambos casos, se precisa de operadores de agregación de la información lingüística para combinar adecuadamente la misma, de tal manera que la agregación final sea la "mejor" representación de todas las opiniones. En las siguientes subsecciones se presentan los operadores que se pueden considerar en ambos casos.

#### **4.5.3.1. Operadores para información lingüística no ponderada**

En esta sección se pretende utilizar el enfoque que trabaja directamente con las etiquetas, considerando dos operadores, el Operador de Agregación de Información Lingüística no Ponderada (LOWA) propuesto por HERRERA y VERDEGAY (1993) y el Operador Inverso de Agregación de Información Lingüística no Ponderada (I-LOWA) propuesto por HERRERA y HERRERA-VIEDMA (1997).

▪ **Operador LOWA**

El operador de agregación de información lingüística no ponderada LOWA (Linguistic Ordered Weighted Averaging) ((HERRERA y VERDEGAY, 1993) está basado en el operador OWA (Ordered Weighted Averaging) definido por YAGER (1988) y en la combinación convexa de etiquetas lingüísticas definida por DELGADO, VERDEGAY y VILA (1993b).

El operador OWA se puede definir de la siguiente forma: Una función:

$$F: I^m \rightarrow I \quad (\text{donde } I = [0, 1])$$

es un operador OWA de dimensión  $m$  si tiene asociado un vector de ponderación  $W = [w_1, \dots, w_m]$  tal que  $w_i \in [0, 1]$  y  $\sum_i w_i = 1$  y donde  $F$  presenta la siguiente expresión:

$$F(a_1, \dots, a_m) = w_1 b_1 + w_2 b_2 + \dots + w_m b_m, \quad a_j \in [0, 1]$$

donde  $b_i$  es el  $i$ -ésimo mayor elemento de la colección  $(a_1, \dots, a_m)$ .

Si se describe  $B$  como el vector de orden  $m$  formado por los argumentos de  $F$  ordenados en orden descendente, entonces  $F$  toma la siguiente expresión:

$$F(a_1, \dots, a_m) = W \cdot B^T$$

Entre las propiedades de este operador destacan la monotonía respecto a los valores de sus argumentos, la conmutatividad y la de ser un operador "orand", es decir que satisface la siguiente relación:

$$\text{MIN} \{a_1, \dots, a_m\} \leq F(a_1, \dots, a_m) \leq \text{MAX} \{a_1, \dots, a_m\}$$

La extensión del operador OWA a etiquetas lingüísticas utilizando el operador de combinación convexa da como resultado el operador LOWA, el cual se puede definir como sigue:

Sea  $A = \{a_1, \dots, a_m\}$  el conjunto de términos lingüísticos que se van a agregar, entonces se define el operador LOWA,  $\phi$ , como:

$$\begin{aligned} \phi(a_1, K, a_m) &= W \cdot B^T = C^m \{w_k, b_k, k = 1, K, m\} = \\ &= w_1 \otimes b_1 \oplus (1 - w_1) \otimes C^{m-1} \{ \beta_h, b_h, h = 2, K, m \} \end{aligned}$$

donde:

$W = [w_1, \dots, w_m]$  es un vector de pesos, tal que  $w_i \in [0, 1]$  y  $\sum_i w_i = 1$

$\beta_h = w_h / \sum_2^m w_k$ ,  $h = 2, K, m$ , y  $B = (b_1, \dots, b_m)$  es el vector asociado a  $A$ , tal que:

$$B = \sigma(A) = \{a_{\sigma(1)}, K, a_{\sigma(n)}\}$$

siendo:

$a_{\sigma(j)} \leq a_{\sigma(i)} \quad \forall \quad i \leq j$ , con  $\sigma$  siendo una permutación sobre el conjunto de etiquetas  $A$

$C^m$  es el operador de Combinación Convexa de  $m$  etiquetas

Como se expuso con anterioridad, si  $m=2$ , entonces se define la Combinación Convexa,  $C^2$ , como:

$$C^2 \{w_i, b_i, i = 1, 2\} = w_1 \otimes s_j \oplus (1 - w_1) \otimes s_i = s_k, \quad s_j, s_i \in S, \quad (j \geq i)$$

tal que:

$$k = \min \{g, i + \text{round}(w_1 \cdot (j - i))\}$$

donde:

$g+1$  cardinalidad de  $S$

round operación tradicional de redondeo

$b_1 = s_j$

$b_2 = s_i$

Si  $w_j = 1$  y  $w_i = 0$ , con  $i \neq j \quad \forall i$ , entonces la Combinación Convexa se define como:

$$C^m \{w_i, b_i, i = 1, K, m\} = b_j$$

▪ **Operador I-LOWA**

Un operador I-LOWA (Inverse-Linguistic Ordered Weighted Averaging),  $\phi^I$ , es un tipo de operador LOWA, que satisface la relación:

$$B = \sigma^I(A) = \{a_{\sigma(1)}, K a_{\sigma(n)}\}$$

donde  $a_{\sigma(i)} \leq a_{\sigma(j)} \quad \forall i \leq j$ .

De forma similar al caso anterior, si  $m=2$ , entonces se define como:

$$C^2\{w_i, b_i, i = 1, 2\} = w_1 \otimes s_j \oplus (1 - w_1) \otimes s_i = s_k, \quad s_j, s_i \in S, (j \leq i)$$

tal que  $k = \min \{g, i + \text{redondeo}(w_1 \cdot (j - i))\}$ .

Los operadores LOWA e I-LOWA son monótonos crecientes, conmutativos, y de "redondeo", que verifican los axiomas siguientes: Dominio no Restringido, Unanimidad o Indempotencia, Asociación Positiva de las Preferencias Sociales e Individuales, Independencia de Alternativas Irrelevantes, Soberanía y Neutralidad (HERRERA, LOZANO y VERDEGAY, 1996b).

En el operador LOWA las ponderaciones miden la importancia de un valor en relación con otros valores, con independencia de la fuente de la información. Sin embargo en la definición de dicho operador no se establece de forma explícita la forma de obtener dicho vector. Sin embargo, en su aplicación práctica es una cuestión fundamental a resolver. Entre las distintas opciones, una posible solución es que los pesos o ponderaciones representen el concepto de Mayoría Borrosa (KACPRZYK, 1986), en la agregación del operador LOWA utilizando cuantificadores lingüísticos (ZADEH, 1983).

En este sentido, YAGER (1988) propone calcular los pesos utilizando cuantificadores lingüísticos borrosos, de forma que en caso de utilizar un cuantificador proporcional creciente Q, la expresión para calcular el vector de pesos W es la siguiente:

$$w_i = Q(i/n) - Q((i-1)/n), \quad i = 1, \dots, n$$

siendo la función de pertenencia de Q la siguiente:

$$Q(r) = \begin{cases} 0, & \text{si } r < a \\ \frac{r-a}{b-a}, & \text{si } a \leq r \leq b \\ 1, & \text{si } r > b \end{cases}$$



donde  $a, b, r \in [0, 1]$ . Algunos ejemplos de operadores lingüísticos proporcionales y crecientes son: “la mayoría” (0’3; 0’8), “al menos la mitad” (0; 0’5) y “tantos como sea posible” (0’5; 1). Cuando un cuantificador lingüístico  $Q$ , se utiliza para calcular los pesos del operador LOWA,  $\phi$ , este último se simboliza por  $\phi_Q$ . De la misma manera se puede aplicar al operador I-LOWA, representándose por  $\phi_Q^I$ .

En la Figura 4.50. se muestran algunos ejemplos de operadores proporcionales, donde los parámetros (a, b) son (0’3; 0’8), (0; 0’5) y (0’5; 1), respectivamente.

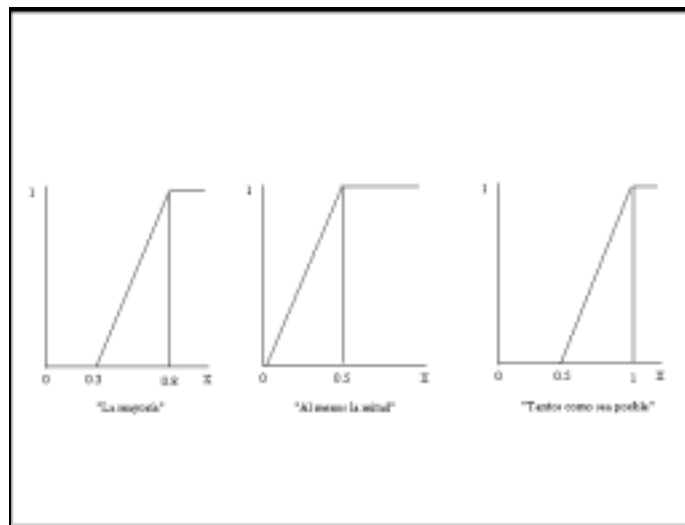


Figura 4.50.

#### 4.5.3.2. Operadores para información lingüística ponderada

Se pueden encontrar situaciones donde la información disponible no tiene la misma importancia, es decir, se trabaja con información ponderada. Por ello, con el fin de agregar este tipo de información, se debe combinar la información lingüística con los pesos, que incluyen la transformación de la misma bajo diferentes grados de importancia.

De acuerdo con esa idea, se propone utilizar el operador lingüístico ponderado (LWA), para combinar información lingüística ponderada (HERRERA y HERRERA-VIEDMA, 1997), que se define utilizando el operador LOWA (HERRERA y VERDEGAY, 1993), el concepto de mayoría borrosa representado por los cuantificadores lingüísticos (ZADEH, 1983), y dos familias de conectivos lingüísticos (HERRERA y HERRERA-VIEDMA, 1997), tal como se muestra a continuación:

▪ **Operador LWA**

La agregación de un conjunto de opiniones individuales,  $\{(c_1, a_1), \dots, (c_m, a_m)\}$ , de acuerdo con operador LWA se define como sigue:

$$(c_E, a_E) = LWA[(c_1, a_1), K, (c_m, a_m)]$$

donde el grado de importancia de la opinión del grupo,  $c_E$ , se obtiene como se muestra a continuación:

$$c_E = \phi_Q(c_1, K, c_m)$$

Por su parte, la opinión del grupo,  $a_E$ , se obtiene como:

$$a_E = f[g(c_1, a_1), K, g(c_m, a_m)]$$

siendo:

$f \in \{\phi_Q, \phi_Q'\}$  operador de agregación lingüística de información transformada

$g$  función de importancia transformada, tal que  $g \in LC^{\rightarrow}$  si  $f = \phi_Q$  y,  $g \in LI^{\rightarrow}$  si  $f = \phi_Q'$

siendo  $LC^{\rightarrow}$  alguna de las siguientes funciones de conjunción lingüística:

a. El operador MIN Clásico:

$$LC_1^{\rightarrow}(c, a) = \text{MIN}(c, a)$$

b. El operador MIN nilpotente:

$$LC_2^{\rightarrow}(c, a) = \begin{cases} \text{MIN}(c, a) & \text{si } c > \text{Neg}(a) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

c. La conjunción débil:

$$LC_3^{\rightarrow}(c, a) = \begin{cases} \text{MIN}(c, a) & \text{si } \text{MAX}(c, a) = s_T \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y  $LI^{\rightarrow}$  alguna de las siguientes implicaciones lingüísticas:

- a. Función de implicación de Kleene-Dienes:

$$LI_2^{\rightarrow}(c, a) = \text{MAX}(\text{Neg}(c), a)$$

- b. Función de implicación de Godel:

$$LI_2^{\rightarrow}(c, a) = \begin{cases} s_t & \text{si } c \leq a \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- c. Función de implicación de Fodor:

$$LI_3^{\rightarrow}(c, a) = \begin{cases} s_t & \text{si } c \leq a \\ \text{MAX}(\text{Neg}(c), a) & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde "MAX" representa el operador máximo y "MIN" el mínimo.

Se puede observar que el operador LWA intenta reducir el efecto de aquellos elementos que tiene baja importancia. Para ello, con  $f = \phi_Q$ , los elementos de baja importancia son transformados en valores pequeños y con  $f = \phi_Q^I$  en valores grandes.

#### 4.6. MODELO DE REPRESENTACIÓN LINGÜÍSTICA CON 2-TUPLAS

En este apartado se propone la utilización de un nuevo modelo de representación para la información lingüística que utiliza como base de representación un par de valores o 2-tupla (MARTÍNEZ, 1999; HERRERA y MARTÍNEZ, 1999a, 1999b, 1999c, 2000a, 2000b, 2000c).

En estos trabajos se plantea un modelo de representación lingüístico basado en el concepto de traslación simbólica (HERRERA y MARTÍNEZ, 1999d), el cual se puede definir como sigue:

Sea  $S = \{S_0, \dots, S_g\}$  un conjunto de términos lingüísticos, y  $\beta \in [0, g]$  un valor obtenido por un método simbólico operando con información lingüística. La traslación simbólica de un término lingüístico  $s_i$  es un número valorado en el intervalo  $[-0'5, 0'5)$  que expresa la "diferencia de información" entre una cantidad de información expresada por el valor  $\beta \in [0, g]$  obtenido en una operación simbólica y el valor entero más próximo,  $i \in \{0, \dots, g\}$ , que indica el índice de la etiqueta lingüística ( $s_i$ ) más cercana en  $S$ .

El modelo de representación basado en el concepto de traslación simbólica utiliza como base de representación 2-tuplas,  $(\tau_i, \alpha_i)$  donde  $\tau_i \in S$  y  $\alpha_i \in [-0'5, 0'5)$  y cuya simbología representa lo siguiente:

- $\tau_i$  una etiqueta lingüística
- $\alpha_i$  número que expresa el valor de la distancia desde el resultado original  $\beta$  al índice de la etiqueta lingüística más cercana ( $\tau_i$ ) en el conjunto de términos lingüísticos  $S$ , es decir, su traslación simbólica.

La utilización de la representación anteriormente expuesta precisa convertir las etiquetas lingüísticas clásicas en su equivalente en 2-tupla, para lo cual siendo  $s_i \in S$  un término lingüístico, su representación mediante una 2-tupla equivalente se obtiene mediante la función  $\theta$ :

$$\theta : S \rightarrow (S \times [-0'5, 0'5))$$

$$\theta(s_i) = (s_i, 0) / s_i \in S$$

Asimismo, a partir de un valor numérico  $\beta$ ,  $\beta \in [0, g]$  obtenido de una operación simbólica se puede obtener la 2-tupla lingüística que expresa la información equivalente a  $\beta$  utilizando la siguiente función:

$$\Delta : [0, g] \rightarrow S_x [-0'5, 0'5)$$

$$\Delta(\beta) = (s_i, \alpha), \text{ con } \begin{cases} s_i, & i = \text{round}(\beta) \\ \alpha = \beta - i, & \alpha \in [-0'5, 0'5) \end{cases}$$

donde:

*round*: operador usual de redondeo

$s_i$  etiqueta con el índice más cercano a  $\beta$

$\alpha$  valor de traslación simbólica

El funcionamiento de la función  $\Delta$  se puede expresar como sigue: suponiendo una operación de agregación simbólica sobre etiquetas valoradas en el conjunto de términos lingüísticos  $S = \{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6\}$  que obtiene como resultado de dicha agregación un valor  $\beta = 2'8$ . La representación de esta información mediante una 2-tupla lingüística es:

$$\Delta(2'8) = (s_3, -0'2)$$

Una representación de esta información se puede realizar como muestra la Figura 4.51.

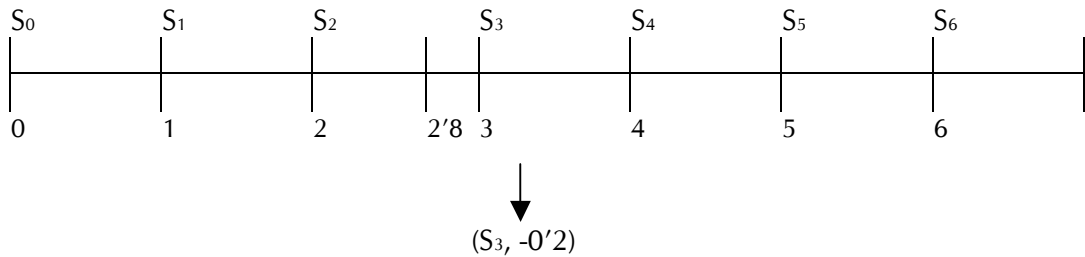


Figura 4.51.

De esta forma, se puede generalizar el proceso que para una 2-tupla devuelva su valor numérico de la forma siguiente:

Sea  $S = \{s_0, \dots, s_g\}$  un conjunto de términos lingüísticos y  $(s_i, \alpha)$  una 2-tupla lingüística, es posible obtener el valor numérico equivalente  $\beta \in [0, g]$  mediante la función  $\Delta^{-1}$  siguiente:

$$\Delta^{-1} : S \times [-0'5, 0'5] \rightarrow [0, g]$$

$$\Delta^{-1}(s_i, \alpha) = i + \alpha = \beta$$

#### 4.6.1. Operadores de la representación con 2-tuplas

El modelo de representación de información basado en 2-tuplas proporciona un conjunto de operadores que permite realizar las siguientes operaciones sobre las mismas (HERRERA y MARTÍNEZ, 1999a):

1. Comparación de 2-tuplas
  2. Operador de Negación de una 2-tupla
  3. Agregación de 2-tuplas
1. **Comparación de 2-tuplas.** Sean  $(s_k, \alpha_1)$  y  $(s_l, \alpha_2)$  dos 2-tuplas cada una de las cuales representa cierta cantidad de información. Se establece que:
    - Si  $k < l$  entonces  $(s_k, \alpha_1)$  es menor que  $(s_l, \alpha_2)$
    - Si  $k = l$  entonces puede ocurrir que

- a. Si  $\alpha_1 = \alpha_2$  entonces  $(s_k, \alpha_1)$  y  $(s_l, \alpha_2)$  representan la misma cantidad de información
- b. Si  $\alpha_1 < \alpha_2$  entonces  $(s_k, \alpha_1)$  es menor que  $(s_l, \alpha_2)$
- c. Si  $\alpha_1 > \alpha_2$  entonces  $(s_k, \alpha_1)$  es mayor que  $(s_l, \alpha_2)$

2. **Operador de Negación de una 2-tupla.** El operador de negación sobre una 2-tupla lingüística se puede definir como:

$$\text{Neg}((s_i, \alpha) = \Delta(g - (\Delta^{-1}(s_i, \alpha)))$$

siendo  $g+1$  la cardinalidad de  $S$ ,  $S = \{s_0, \dots, s_g\}$ .

3. **Agregación de 2-tuplas.** La agregación consiste en obtener un valor colectivo que exprese la información de un conjunto de valores marginales. El resultado de una operación de agregación debe de ser consistente con la representación de los valores de entrada, por tanto, el resultado de la agregación de 2-tuplas debe ser una 2-tupla. Este problema se puede enfocar desde dos perspectivas:
- a. Utilizar operadores de agregación numéricos y extender dichos operadores para que puedan trabajar con 2-tuplas lingüísticas.
  - b. Utilizar los operadores de agregación simbólicos que requieren menos esfuerzo para trabajar con 2-tuplas lingüísticas.

Por el interés que presenta para el desarrollo de la presente Memoria los operadores de agregación de 2-tuplas, los apartados siguientes se dedican a realizar un análisis en profundidad de los mismos.

#### 4.6.1.1. Operadores de agregación simbólicos extendidos para 2-tuplas lingüísticas

En este apartado se plantean los operadores de agregación simbólicos extendidos para que operen de forma correcta sobre 2-tuplas. En la literatura especializada se pueden encontrar operadores de agregación basados en el principio de extensión (BONISSONE y DECKER, 1986; DEGANI y BORTOLAN, 1988) y operadores simbólicos (DELGADO, VERDEGAY y VILA, 1993b; HERRERA y HERRERA-VIEDMA, 1997; TORRA, 1999 y YAGER, 1998).

Entre los operadores de agregación simbólicos que combinan información lingüística destaca el operador LOWA definido anteriormente, el cual se puede extender para que combine información lingüística modelada mediante 2-tuplas, de la siguiente forma (HERRERA y MARTÍNEZ, 1999a):

▪ **Operador extendido LOWA**

La adaptación del operador LOWA para su aplicación con 2-tuplas lingüísticas precisa realizar en primer término la combinación convexa extendida, la cual se realiza de la siguiente forma:

Sea  $A = \{(r_1, \alpha_1), \dots, (r_m, \alpha_m)\}$  un conjunto de 2-tuplas para ser agregadas tal que  $(r_i, \alpha_i) \in S \times [-0'5, 0'5)$ . La combinación convexa extendida para combinar 2-tuplas,  $EC^m$ , se puede definir como:

$$EC^m \{w_j, (r_{\sigma(j)}, \alpha_{\sigma(j)}), j=1, \dots, m\} = \\ = \Delta \left( w_1 \cdot \Delta^{-1} (r_{\sigma(1)}, \alpha_{\sigma(1)}) + (1 - w_1) \cdot \Delta^{-1} \left( EC^{m-1} \{ \eta_h, (r_{\sigma(h)}, \alpha_{\sigma(h)}), h=2, \dots, m \} \right) \right)$$

siendo:

$\eta_h = \frac{w_h}{\sum_{k=2}^m w_k}$ ,  $h=2, \dots, m$  y  $W = (w_1, \dots, w_m)$  un vector de pesos asociado a A, tal que  $w_i \in [0, 1]$  y  $\sum_i w_i = 1$  y  $B = \{(r_{\sigma(1)}, \alpha_{\sigma(1)}), \dots, (r_{\sigma(m)}, \alpha_{\sigma(m)})\}$  un conjunto ordenado asociado a A, tal que  $(r_{\sigma(j)}, \alpha_{\sigma(j)}) \leq (r_{\sigma(i)}, \alpha_{\sigma(i)}) \forall i \leq j$ .

El desarrollo de la expresión anterior establece lo siguiente:

$$EC^m \{w_j, (r_{\sigma(j)}, \alpha_{\sigma(j)}), j=1, \dots, m\} = \Delta \left( \sum_{i=1}^m w_i \Delta^{-1} (r_{\sigma(i)}, \alpha_{\sigma(i)}) \right) = \Delta \left( \sum_{i=1}^m w_i \beta_{\sigma(i)} \right)$$

donde:

$$\beta_{\sigma(i)} = \Delta^{-1} (r_{\sigma(i)}, \alpha_{\sigma(i)})$$

Si  $m = 2$  se define el operador anterior como sigue:

$$EC^2 \{w_i, (r_{\sigma(i)}, \alpha_{\sigma(i)}), i=1, 2\} = \Delta \left( w_1 \Delta^{-1} (r_{\sigma(1)}, \alpha_{\sigma(1)}) + (1 - w_1) \cdot \Delta^{-1} (r_{\sigma(2)}, \alpha_{\sigma(2)}) \right) = (r_f, \alpha_f)$$

$$(r_f, \alpha_f) = \Delta \left( \beta_{\sigma(1)} + w_1 \cdot (\beta_{\sigma(1)} - \beta_{\sigma(2)}) \right)$$

Si  $w_j = 1$  y  $w_i = 0$  con  $i \neq j \forall i$ , se puede definir la combinación convexa extendida como:

$$EC^m \{w_i, (r_{\sigma(i)}, \alpha_{\sigma(i)}), i = 1, \dots, m\} = (r_{\sigma(j)}, \alpha_{\sigma(j)})$$

En consecuencia, es posible definir el operador LOWA sobre 2-tuplas, de la forma siguiente:

Sea  $A = \{(r_1, \alpha_1), \dots, (r_m, \alpha_m)\}$  un conjunto de 2-tuplas para ser agregadas. El operador LOWA extendido  $\phi^e$ , se define como

$$\phi^e ((r_1, \alpha_1), \dots, (r_m, \alpha_m)) = W \cdot B^T = EC^m \{w_i, (r_{\sigma(i)}, \alpha_{\sigma(i)}), i = 1, \dots, m\}$$

De forma que la utilización de este operador permite la agregación de información lingüística representada mediante 2-tuplas.

#### 4.6.1.2. Operadores de agregación para 2-tuplas basados en operadores de agregación numéricos

En este apartado se analizan los operadores de agregación para 2-tuplas extendidos de los operadores de agregación numéricos. En el dominio numérico existen asimismo numerosos operadores de agregación (TORRA, 1997; YAGER, 1988 y YAGER y FILEV, 1993) que permiten agregar la información de acuerdo a distintos criterios.

La utilización de la función  $\Delta^{-1}$  definida anteriormente permite convertir una 2-tupla lingüística en un número en el intervalo  $[0, g]$  de forma que es factible y sencillo adaptar cualquier operador de agregación numérico para combinar 2-tuplas lingüísticas. Entre estos operadores destacan la media aritmética, la media ponderada, el operador OWA, el operador Or-Like s-OWA y el operador And-Like S-OWA.

##### 1. Media aritmética

El operador media aritmética se puede establecer como sigue (HERRERA y MARTÍNEZ, 1999a):

Sea  $x = \{x_1, \dots, x_n\}$  un conjunto de valores numéricos para una variable  $x$ . La media aritmética  $\bar{x}$  se obtiene dividiendo la suma de todos los valores por su cardinalidad, por ejemplo:



$$\bar{x} (x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

La extensión de este operador para obtener su equivalente para información lingüística representada mediante 2-tuplas se puede hacer de la siguiente forma:

Sea  $x = \{(r_1, \alpha_1), \dots, (r_m, \alpha_m)\}$  un conjunto de 2-tuplas, su media aritmética extendida  $\bar{x}^e$  se define como:

$$\bar{x}^e ((r_1, \alpha_1), \dots, (r_m, \alpha_m)) = \Delta \left( \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \Delta^{-1} (r_i, \alpha_i) \right) = \Delta \left( \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \beta_i \right)$$

## 2. Operador media ponderada

La media ponderada permite que diferentes valores  $x_i$  tengan diferente importancia, de forma que a cada valor  $x_i$  se le asigna un peso asociado  $w_i$  que indica la importancia de dicho valor.

Sea  $x = \{x_1, \dots, x_n\}$  un conjunto de valores numéricos y  $W = \{w_1, \dots, w_n\}$  un vector numérico con los pesos asociados a cada  $x_i$ , tal que  $w_1$  corresponde a  $x_1$  y así sucesivamente. La media aritmética ponderada se define como sigue:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i w_i}{\sum_{i=1}^n w_i}$$

La adaptación del operador media aritmética ponderada a la representación mediante 2-tuplas se puede establecer como sigue (HERRERA y MARTÍNEZ, 1999a):

Sea  $x = \{(r_1, \alpha_1), \dots, (r_m, \alpha_m)\}$  un conjunto de 2-tuplas y  $W = (w_1, \dots, w_m)$  un vector numérico con los pesos asociados a cada 2-tupla. La media ponderada extendida  $\bar{x}^e$  se define como:

$$\bar{x}^e = \Delta \left( \frac{\sum_{i=1}^m \Delta^{-1} (r_i, \alpha_i) \cdot w_i}{\sum_{i=1}^m w_i} \right) = \Delta \left( \frac{\sum_{i=1}^m \beta_i \cdot w_i}{\sum_{i=1}^m w_i} \right)$$

El operador  $\bar{x}^e$  se puede aplicar en el caso en que los pesos  $w_i$  sean también valores lingüísticos representados mediante 2-tuplas, en cuyo caso este operador, denominado  $\bar{x}_i^e$ , se puede definir como sigue: Sea  $x = \{(r_1, \alpha_1), \dots, (r_m, \alpha_m)\}$  un conjunto

de 2-tuplas y  $W = ((w_1, \alpha_1), \dots, (w_m, \alpha_m))$  el vector lingüístico con los pesos asociados a cada 2-tupla. El operador medida ponderada extendida viene dado por la expresión:

$$\bar{x}_i^e = \Delta \left( \frac{\sum_{i=1}^m \Delta^{-1}(r_i, \alpha_i) \cdot \Delta^{-1}(w_i, \alpha_i)}{\sum_{i=1}^m \Delta^{-1}(w_i, \alpha_i)} \right) = \Delta \left( \frac{\sum_{i=1}^m \beta_i \cdot \beta_{w_i}}{\sum_{i=1}^m \beta_{w_i}} \right)$$

donde  $\beta_{w_i} = \Delta^{-1}(w_i, \alpha_i)$ .

### 3. Operador OWA (Ordered Weighted Aggregation)

El operador OWA, definido en el apartado 4.5.3.1., se puede extender para trabajar con 2-tuplas (HERRERA y MARTÍNEZ, 1999a). Para ello, se define el operador  $F^e$  de la forma siguiente: Sea  $A = \{(r_1, \alpha_1), \dots, (r_m, \alpha_m)\}$  un conjunto de 2-tuplas y  $W = (w_1, \dots, w_m)$  un vector de pesos asociado que satisface que  $w_i \in [0, 1]$  y  $\sum w_i = 1$ . El operador OWA extendido ( $F^e$ ) para combinar 2-tuplas actúa como sigue:

$$F^e((r_1, \alpha_1), \dots, (r_m, \alpha_m)) = \Delta \left( \sum_{j=1}^m w_j \cdot \beta_j^* \right)$$

siendo  $\beta_j^*$  el j-ésimo mayor valor de los  $\Delta^{-1}((r_i, \alpha_i))$ .

### 4. OR-LIKE S-OWA

Una de las principales ventajas que aporta el operador OWA es su flexibilidad para seleccionar el tipo de regla de agregación. Dicha flexibilidad se basa en la forma de determinar el vector de pesos que se va a utilizar en una determinada aplicación. YAGER y FILEV (1993) presentaron dos familias de operadores OWA, denominadas S-OWA, y que son la "orlike" y la "andlike".

El operador "orlike" S-OWA, denotado como  $F_{SO}$ , es definido por una familia de pesos OWA, tales que con  $\zeta \in [0, 1]$ :

$$w_i = \begin{cases} \frac{1}{n}(1-\zeta) + \zeta & i = 1 \\ \frac{1}{n}(1-\zeta) & i = 2, \dots, n \end{cases}$$

Sea  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$  un conjunto de valores numéricos para agregar y los pesos a utilizar en el proceso de agregación los obtenidos de la operación anterior. El operador “orlike” S-OWA vendrá definido como sigue:

$$F_{SO}(a_1, \dots, a_n) = \zeta \cdot \max_i \{a_i\} + \frac{1}{n}(1-\zeta) \cdot \sum_i a_i$$

Este operador se puede extender para operar con 2-tuplas, como sigue: Sea  $A = \{(r_1, \alpha_1), \dots, (r_m, \alpha_m)\}$  el conjunto de 2-tuplas que se desea agregar, el operador extendido “orlike” S-OWA utilizará los anteriores pesos y se definirá como sigue:

$$\begin{aligned} F_{SO}((r_1, \alpha_1), \dots, (r_m, \alpha_m)) &= \Delta \left( \zeta \cdot \max_i \{\Delta^{-1}(r_i, \alpha_i)\} + \frac{1}{m}(1-\zeta) \cdot \sum_i \Delta^{-1}(r_i, \alpha_i) \right) = \\ &= \Delta \left( \zeta \cdot \max_i \{\beta_i\} + \frac{1}{m}(1-\zeta) \cdot \sum_i \beta_i \right) \end{aligned}$$

## 5. AND-LIKE S-OWA

El operador “andlike” S-OWA, denotado como  $F_{SA}$ , es definido por la familia de pesos OWA tal que con  $\vartheta \in [0, 1]$ :

$$w_i = \begin{cases} \frac{1}{n}(1-\vartheta) & i=n \\ \frac{1}{n}(1-\vartheta) + \vartheta & i=1, \dots, n-1 \end{cases}$$

De esta forma se puede definir el operador “andlike” S-OWA para un conjunto de valores numéricos  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ , utilizando los pesos anteriores, como sigue:

$$F_{SA}(a_1, \dots, a_n) = \vartheta \cdot \min_i \{a_i\} + \frac{1}{n}(1-\vartheta) \cdot \sum_i a_i$$

siendo factible extenderlo para operar con 2-tuplas como sigue: Sea  $A = \{(r_1, \alpha_1), \dots, (r_m, \alpha_m)\}$  un conjunto de 2-tuplas para agregar, el operador extendido “andlike” S-OWA utilizará los anteriores pesos y se definirá como sigue:

$$\begin{aligned} F_{SA}((r_1, \alpha_1), \dots, (r_m, \alpha_m)) &= \Delta \left( \vartheta \cdot \min_i \{\Delta^{-1}(r_i, \alpha_i)\} + \frac{1}{m}(1-\vartheta) \cdot \sum_i \Delta^{-1}(r_i, \alpha_i) \right) = \\ &= \Delta \left( \vartheta \cdot \min_i \{\beta_i\} + \frac{1}{m}(1-\vartheta) \cdot \sum_i \beta_i \right) \end{aligned}$$

#### **4.6.2. Agregación de información lingüística multigranular**

En el apartado anterior se han establecido los distintos operadores que permiten la agregación de información lingüística representada en 2-tuplas. Sin embargo, en problemas en los que las valoraciones que se utilizan para resolverlos pertenecen al dominio lingüístico, es posible encontrarse con situaciones en que dichas valoraciones no utilicen el mismo conjunto de etiquetas, sino que pertenezcan a distintos conjuntos lingüísticos, con diferente granularidad y/o semántica. Es decir, si la información que se requiere para abordar un problema proviene de distintas fuentes de información es posible que cada una de ellas tenga distintos grados de incertidumbre, y en consecuencia utilicen conjuntos de etiquetas con distinta granularidad, esto es, que estén definidos en un contexto lingüístico multigranular (HERRERA, HERRERA-VIEDMA y MARTÍNEZ, 1999).

El enfoque lingüístico borroso presenta, por tanto, una importante limitación a la hora de realizar procesos de agregación con información lingüística multigranular al no existir ni procedimientos de normalización ni operadores de agregación estándar para este tipo de información. Dada la necesidad que se plantea en la presente Memoria de agregar información multigranular, en este apartado se analiza la posibilidad de utilizar un mecanismo que permita unificar este tipo de información en un único dominio de expresión y, en concreto, en aquellos casos en los que la misma venga representada en 2-tuplas.

En la literatura especializada se encuentran distintas aproximaciones a la hora de trabajar con problemas que presentan información lingüística multigranular (CHANG y CHEN, 1994; TORRA, 1999) si bien todos ellos adolecen de distintos problemas, bien relativos a la expresión de los resultados en dominios distintos a los originales o bien originando pérdida de información durante los procesos de cálculo, como se ha puesto de manifiesto en el apartado 5.2.1. Como consecuencia de los motivos anteriores, en la presente Memoria se plantea utilizar un proceso de agregación basado en el modelo de representación lingüístico con 2-tuplas (HERRERA y MARTÍNEZ, 1999a) y utilizando como método para manejar información multigranular el propuesto por estos mismos autores (2000c).

En efecto, cuando la información se presenta expresada de acuerdo con diferentes criterios se suele utilizar un esquema de resolución compuesto por dos procesos (ROUBENS, 1997):

1. Proceso de agregación, que combina las valoraciones o preferencias para conseguir un valor colectivo de preferencia para cada alternativa. Este proceso se desarrolla en dos fases:

- a. Fase de normalización, que consiste en elegir un conjunto de términos lingüísticos en el cual se hará uniforme la información lingüística multigranular.
  - b. Fase de agregación, donde la información es unificada mediante el operador de agregación lingüística.
2. Proceso de explotación, que ordena los valores según un criterio determinado para obtener un conjunto solución de alternativas.

De esta forma, a continuación se plantea la consideración de las fases anteriores, en un contexto multigranular y con una representación de la información lingüística mediante 2-tuplas.

### 1.a. Proceso de agregación. Fase de normalización

En el primer proceso es necesario unificar la información lingüística multigranular en un único dominio de expresión para con posterioridad combinar dicha información ya uniforme. El principal problema se plantea en el momento de proceder a la unificación de la información ya que si bien es posible la utilización de diferentes enfoques, todos ellos asumen el riesgo de pérdida de información e imprecisión en los resultados obtenidos. De ahí que en este aspecto se proponga utilizar modelo propuesto por HERRERA y MARTÍNEZ (2000a), el cual parte de contextos lingüísticos multigranulares, denominados jerarquías lingüísticas, las cuales cumplen una serie de reglas y condiciones de forma que al operar sobre información lingüística multigranular valorada en estos contextos permite unificarla en un único dominio de expresión sin pérdida de información.

Las jerarquías lingüísticas están compuestas por un conjunto de niveles, donde cada nivel es un conjunto de términos lingüísticos con distinta granularidad al resto de niveles de su jerarquía. Cada nivel de una jerarquía se puede escribir como:

$$L(t, n(t))$$

donde:

t      número que indica el nivel de la jerarquía

n(t)    la granularidad del conjunto lingüístico del nivel t

Los niveles dentro de una jerarquía están ordenados de acuerdo a su granularidad, es decir, para dos niveles sucesivos t y t + 1 se cumple que  $n(t + 1) > n(t)$ .

De acuerdo con lo anterior se puede definir una jerarquía lingüística (LH) como la unión de todos los niveles  $t$ :

$$LH = \bigcup_t I(t, n(t))$$

Para analizar la construcción de una jerarquía lingüística, teniendo en cuenta que su orden jerárquico viene dado por el incremento de la granularidad de los conjuntos de términos lingüísticos en cada nivel, se parte de un conjunto de etiquetas  $S$  sobre el dominio  $U$  en el nivel  $t$ , tal que:

$$S = \{s_0, \dots, s_{n(t)-1}\}$$

siendo  $s_k$  términos lingüísticos del conjunto  $S$  con  $k = 0, \dots, n(t) - 1$ .

Para construir una jerarquía lingüística se puede extender la definición de  $S$ , permitiendo la existencia de varios conjuntos de términos lingüísticos, cada uno con una granularidad distinta en cada nivel. Para ello se introduce el parámetro  $n(t)$  en la definición de un conjunto de etiquetas, que representa la granularidad del conjunto del nivel  $t$  donde está definido:

$$S^{n(t)} = \{s_0^{n(t)}, \dots, s_{n(t)-1}^{n(t)}\}$$

La metodología de construcción de una jerarquía lingüística cumple las siguientes reglas:

- Conservar todos los puntos modales de las funciones de pertenencia de cada término lingüístico de un nivel al siguiente nivel de la jerarquía.
- Hacer transiciones suaves entre niveles consecutivos. Teniendo como objetivo construir un nuevo conjunto  $S^{t+1}$ , se añade un nuevo término entre cada dos términos del conjunto del nivel  $t$ . Para realizar esta inserción se reduce el tamaño del soporte de las etiquetas para reservar espacio para la nueva, que se sitúa en el medio de ellas.

Por ejemplo, utilizando un conjunto lingüístico con una función de pertenencia triangular, simétrica y uniformemente distribuida, con un valor de granularidad impar, el Cuadro 4.2. muestra la granularidad necesaria en cada conjunto lingüístico del nivel  $t$  dependiendo del valor  $n(t)$  definido en el primer nivel (3 y 7, respectivamente).

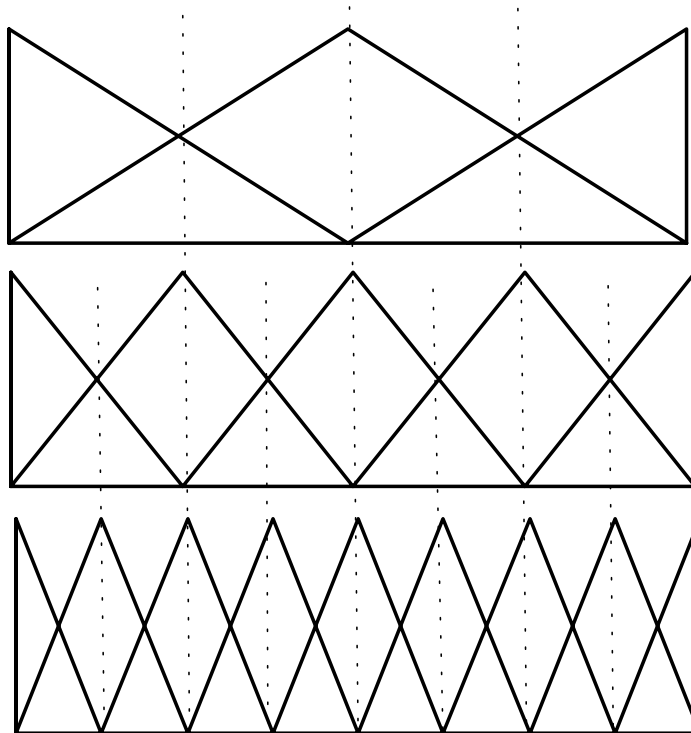
	$L(t, n(t))$	$L(t, n(t))$
Nivel 1	$L(1, 3)$	$L(1, 7)$
Nivel 2	$L(2, 5)$	$L(2, 13)$
Nivel 3	$L(3, 9)$	

**Cuadro 4.2.**

De forma genérica se puede decir que el conjunto de términos del nivel  $t+1$  se obtiene de su predecesor como sigue:

$$L(t, n(t)) \rightarrow L(t+1, 2 \cdot n(t) - 1)$$

En la Figura 4.52. se puede observar un gráfico de las jerarquías lingüísticas de 3, 5 y 9 etiquetas.



**Figura 4.52.**

En este punto interesa establecer una función que permita trasladar información lingüística de un conjunto de términos a otro sin pérdida de información. Para ello estos autores definen en primer término el paso de un nivel al inmediatamente superior e inferior, para con posterioridad generalizar el procedimiento, tal y como se recoge a continuación:

La función de transformación de un término del nivel  $t$  a uno del nivel  $t+1$  se define como:

$$TF_{t+1}^t : l(t, n(t)) \rightarrow l(t+1, n(t+1))$$

$$TF_{t+1}^t (s_i^{n(t)}, \alpha^{n(t)}) = \Delta \left( \frac{\Delta^{-1} (s_i^{n(t)}, \alpha^{n(t)}) \cdot (n(t+1) - 1)}{n(t) - 1} \right)$$

Por su parte, la función de transformación de un término del nivel  $t$  a uno del nivel  $t-1$  se define como:

$$TF_{t-1}^t : l(t, n(t)) \rightarrow l(t-1, n(t-1))$$

$$TF_{t-1}^t (s_i^{n(t)}, \alpha^{n(t)}) = \Delta \left( \frac{\Delta^{-1} (s_i^{n(t)}, \alpha^{n(t)}) \cdot (n(t-1) - 1)}{n(t) - 1} \right)$$

La generalización de la operativa anterior de forma que permita transformaciones entre términos de niveles no consecutivos, se puede realizar mediante una función recursiva basada en las dos funciones anteriores.

De esta forma, la función recursiva de transformación de un término del nivel  $t$  a uno del nivel  $t' = t+a$ , con  $a \in \mathbb{Z}$  se define como:

$$TF_{t'}^t : l(t, n(t)) \rightarrow l(t', n(t'))$$

- Si  $|a| > 1$  entonces

$$TF_{t'}^t (s_i^{n(t)}, \alpha^{n(t)}) = TF_{t'}^{t+\frac{t-t'}{|t-t'|}} \left( TF_{t+\frac{t-t'}{|t-t'|}}^t (s_i^{n(t)}, \alpha^{n(t)}) \right)$$

- Si  $|a| = 1$  entonces

$$TF_{t'}^t (s_i^{n(t)}, \alpha^{n(t)}) = TF_{t+\frac{t-t'}{|t-t'|}}^t (s_i^{n(t)}, \alpha^{n(t)})$$

Esta función recursiva se puede definir no recursivamente como sigue:

$$TF_{t'}^t : l(t, n(t)) \rightarrow l(t', n(t'))$$

$$TF_{t'}^t (s_i^{n(t)}, \alpha^{n(t)}) = \Delta^{-1} \left( \frac{\Delta (s_i^{n(t)}, \alpha^{n(t)}) \cdot (n(t') - 1)}{n(t) - 1} \right)$$



La función de transformación de términos entre distintos niveles de una jerarquía es idempotente:

$$TF_t^{t'} \left( TF_t^t \left( s_i^{n(t)}, \alpha_i^{n(t)} \right) \right) = \left( s_i^{n(t)}, \alpha_i^{n(t)} \right)$$

como se demuestra a continuación:

$$TF_t^t \left( s_i^{n(t)}, \alpha_i^{n(t)} \right) = \Delta \left( \frac{\Delta^{-1} \left( s_i^{n(t)}, \alpha_i^{n(t)} \right) \cdot (n(t') - 1)}{n(t) - 1} \right)$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} TF_t^{t'} &= \Delta \left( \frac{\Delta^{-1} \left( s_i^{n(t)}, \alpha_i^{n(t)} \right) \cdot (n(t') - 1)}{n(t) - 1} \right) = \Delta \left( \frac{\Delta^{-1} \left( \Delta \left( \frac{\Delta^{-1} \left( s_i^{n(t)}, \alpha_i^{n(t)} \right) \cdot (n(t') - 1)}{n(t) - 1} \right) \right) \cdot (n(t) - 1)}{n(t') - 1} \right) = \\ &= \Delta \left( \frac{\Delta^{-1} \left( s_i^{n(t)}, \alpha_i^{n(t)} \right) \cdot (n(t') - 1) \cdot (n(t) - 1)}{(n(t) - 1) \cdot (n(t') - 1)} \right) = \left( s_i^{n(t)}, \alpha_i^{n(t)} \right) \end{aligned}$$

Este resultado garantiza la transformación sin pérdida de información.

A efectos ilustrativos, se plantea desarrollar el ejemplo del apartado 5.2. del presente Capítulo. Para analizar la repercusión de utilizar información en distintos dominios de expresión, se establece que los expertos  $e_1$  y  $e_3$  realizan su valoración en un dominio con 9 etiquetas, el experto  $e_2$  utiliza 5 etiquetas y el experto  $e_4$  se expresa mediante 3 etiquetas.

De esta forma, los dominios quedarán definidos como sigue:

- |         |          |         |          |
|---------|----------|---------|----------|
| ▪ $e_1$ | $I(3,9)$ | ▪ $e_3$ | $I(3,9)$ |
| ▪ $e_2$ | $I(2,7)$ | ▪ $e_4$ | $I(1,3)$ |

Las valoraciones establecidas por los distintos expertos sobre las cuatro alternativas a efectos ilustrativos se consideran las reflejadas en el Cuadro 4.3.

		Alternativas				Alternativas				
		y <sub>ij</sub>	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	x <sub>4</sub>	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	x <sub>4</sub>
Expertos	e <sub>1</sub>	BA	M	MB	BB	s <sub>6</sub> <sup>9</sup>	s <sub>4</sub> <sup>9</sup>	s <sub>1</sub> <sup>9</sup>	s <sub>2</sub> <sup>9</sup>	
	e <sub>2</sub>	A	M	MB	A	s <sub>3</sub> <sup>5</sup>	s <sub>2</sub> <sup>5</sup>	s <sub>0</sub> <sup>5</sup>	s <sub>3</sub> <sup>5</sup>	
	e <sub>3</sub>	BB	BA	B	MA	s <sub>2</sub> <sup>9</sup>	s <sub>6</sub> <sup>9</sup>	s <sub>3</sub> <sup>9</sup>	s <sub>7</sub> <sup>9</sup>	
	e <sub>4</sub>	B	M	A	M	s <sub>0</sub> <sup>3</sup>	s <sub>1</sub> <sup>3</sup>	s <sub>2</sub> <sup>3</sup>	s <sub>1</sub> <sup>3</sup>	

Cuadro 4.3.

En esta primera fase será preciso proceder a la normalización de las valoraciones establecidas por los expertos. En primer lugar es necesario determinar el conjunto de términos lingüísticos que se va a utilizar como base para unificar la información. Por razones prácticas, y dado que dos expertos utilizan el dominio l(3,9), se procede a unificar la información en dicho dominio, si bien sería posible elegir otro cualquiera. De esta forma, a efectos ilustrativos, aplicando la función de transformación para el experto e<sub>2</sub> se procedería como sigue:

- Para A = (s<sub>3</sub><sup>5</sup>, 0) → TF<sub>3</sub><sup>2</sup>(s<sub>3</sub><sup>5</sup>, 0) = Δ<sup>-1</sup>  $\left( \frac{\Delta(s_3^5, 0) \cdot (9 - 1)}{(5 - 1)} \right)$  = Δ<sup>-1</sup>(6) = (s<sub>6</sub><sup>9</sup>, 0)
- Para M = (s<sub>2</sub><sup>5</sup>, 0) → TF<sub>3</sub><sup>2</sup>(s<sub>2</sub><sup>5</sup>, 0) = Δ<sup>-1</sup>  $\left( \frac{\Delta(s_2^5, 0) \cdot (9 - 1)}{(5 - 1)} \right)$  = Δ<sup>-1</sup>(4) = (s<sub>4</sub><sup>9</sup>, 0)
- Para MB = (s<sub>0</sub><sup>5</sup>, 0) → TF<sub>3</sub><sup>2</sup>(s<sub>0</sub><sup>5</sup>, 0) = Δ<sup>-1</sup>  $\left( \frac{\Delta(s_0^5, 0) \cdot (9 - 1)}{(5 - 1)} \right)$  = Δ<sup>-1</sup>(0) = (s<sub>0</sub><sup>9</sup>, 0)

De forma similar se normalizaría la información suministrada por el experto e<sub>4</sub>.

Con este procedimiento, se obtienen los valores unificados de los distintos expertos en el dominio de expresión elegido, como se refleja en el Cuadro 4.4.

		Alternativas			
		x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	x <sub>4</sub>
e <sub>1</sub>		s <sub>6</sub> <sup>9</sup>	s <sub>4</sub> <sup>9</sup>	s <sub>1</sub> <sup>9</sup>	s <sub>2</sub> <sup>9</sup>
e <sub>2</sub>		s <sub>6</sub> <sup>9</sup>	s <sub>4</sub> <sup>9</sup>	s <sub>0</sub> <sup>9</sup>	s <sub>6</sub> <sup>9</sup>
e <sub>3</sub>		s <sub>2</sub> <sup>9</sup>	s <sub>6</sub> <sup>9</sup>	s <sub>3</sub> <sup>9</sup>	s <sub>7</sub> <sup>9</sup>
e <sub>4</sub>		s <sub>0</sub> <sup>9</sup>	s <sub>4</sub> <sup>9</sup>	s <sub>8</sub> <sup>9</sup>	s <sub>4</sub> <sup>9</sup>

Cuadro 4.4.

### 1.b. Proceso de agregación. Fase de agregación

En cuanto al proceso de agregación propiamente dicho, consiste en obtener un valor que represente el conjunto de valores que se desean agregar. El resultado del proceso aplicado a un conjunto de 2-tuplas vendrá establecido también en una 2-tupla.

La resolución de este proceso se puede abordar mediante las dos metodologías anteriormente descritas, a saber:

- Utilizar los operadores de agregación numéricos y extender dichos operadores para que puedan trabajar con 2-tuplas lingüísticas.
- Utilizar los operadores de agregación simbólicos para trabajar con 2-tuplas lingüísticas.

En el ejemplo de aplicación práctica que se está desarrollando, si se establece que las opiniones emitidas por los 4 expertos tienen similar importancia, se puede proceder a la agregación de las opiniones utilizando el operador media para 2-tuplas mencionado con anterioridad y cuya expresión es:

$$\bar{x}^e = \Delta \left( \frac{\sum_{i=1}^m \Delta^{-1}(r_i, \alpha_i)}{m} \right)$$

De forma que el valor colectivo para cada alternativa quedaría como se recoge en el Cuadro 4.5.

X1	X2	X3	X4
$(s_4^9, -0'5)$	$(s_5^9, -0'5)$	$(s_3^9, 0)$	$(s_5^9, -0'25)$

**Cuadro 4.5.**

Los valores anteriores permiten, dentro del mismo dominio de expresión, establecer la mejor alternativa ya que si bien pueden coincidir en cuanto al valor de la etiqueta que las define, es posible entre varias discernir aquella que es más cercana a cada etiqueta.

Por otra parte, si fuera preciso exponer el resultado en el conjunto de términos lingüísticos original, de forma que cada experto conozca el resultado en su propio dominio de expresión, sin más que aplicar la función de transformación, es posible ofre-

cer el valor colectivo en el resto de dominios originales. En el caso del ejemplo numérico expuesto, éste quedaría como se refleja en el Cuadro 4.6.

	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	x <sub>4</sub>
l(3,9)	$(s_4^9, -0'5)$	$(s_5^9, -0'5)$	$(s_3^9, 0)$	$(s_5^9, -0'25)$
l(1,3)	$(s_1^3, -0'125)$	$(s_1^3, 0'125)$	$(s_1^3, -0'25)$	$(s_1^3, 0'1875)$
l(2,5)	$(s_2^5, -0'25)$	$(s_2^5, 0'25)$	$(s_2^5, -0'5)$	$(s_2^5, 0'375)$

**Cuadro 4.6.**

### 3. Proceso de explotación

Este proceso consiste en elegir la mejor alternativa, es decir, establecer el mayor valor colectivo del conjunto de alternativas obtenidas en la fase anterior. En los modelos analizados en el apartado 5.2. del presente Capítulo, se planteaba que varias alternativas obtenían la misma valoración final como consecuencia del proceso de aproximación necesario para establecer el resultado en el conjunto de etiquetas original, si bien las entradas iniciales de dichas alternativas eran dispares y asimismo durante el proceso de cálculo los valores de las mismas también diferían. En el modelo presentado en este apartado, debido principalmente al tipo de representación utilizada, si bien es factible establecer la solución en el contexto original, se facilita la elección entre alternativas que poseen la misma solución.

En el ejemplo de resolución práctica, se trata de establecer la mejor alternativa, es decir, la que posee un valor colectivo mayor. En este caso en concreto es posible establecer una única alternativa que será la x<sub>4</sub>, que obviamente se encuentra dentro de los posibles resultados obtenidos por los métodos anteriores.



## Capítulo 5

# La construcción de modelos bio-inspirados para la optimización de información sobre nuevos productos

### 5.1. INTRODUCCIÓN

En el presente Capítulo se pretende exponer las bases utilizadas en la construcción e implementación de una serie de modelos que faciliten la toma de decisiones acerca de las características que se deben incorporar en el desarrollo de un nuevo producto.

De acuerdo con lo comentado en el Capítulo 2, el desarrollo de nuevos productos es un proceso en el que confluyen distintas perspectivas sobre lo que se espera del mismo. En este sentido, este proceso debe estar guiado tanto por las expectativas de los clientes acerca de dicho producto como por las especificaciones internas de la empresa. Por tanto, se trata de conjugar en un modelo los mecanismos que faciliten el establecimiento de las tareas que la empresa debe realizar, de forma que se optimicen ambas perspectivas, es decir, que cumplan en la medida de lo posible los requerimientos de los clientes (atiendan la “voz del cliente”) dentro de las posibilidades técnicas y operativas de la empresa o características para el nuevo producto (“voz del ingeniero”), maximizando la relación entre ambas.

En consecuencia, el método a plantear parte de estas dos perspectivas, las cuales como es lógico, tienen cierta conexión, en el sentido de que habrá características para el nuevo producto planteadas por los ingenieros que cumplirán en cierta medida alguno de los requerimientos de los clientes y viceversa, es decir, para el cumplimiento de algunas de las solicitudes formuladas por los clientes será necesario en cierta medida establecer o desarrollar determinadas características en el nuevo producto.

Asimismo, de acuerdo con lo comentado en el Capítulo 2, tanto los requerimientos como las características se ven afectados por otras variables que tendrán incidencia en la decisión que se pretende abordar, de forma que será preciso procesar toda la información disponible respecto a las mismas, es decir, información inherente a los requerimientos solicitados por los clientes en el nuevo producto y variables afines, y la información de las posibles características que la empresa está en condiciones de desarrollar en el nuevo producto y las variables que afectan a las mismas.

En este sentido, el problema planteado en este contexto se presenta como un problema de asignación cuadrática (Quadratic Assignment Problem, QAP), el cual fue introducido en el contexto económico por KOOPMANS y BECKMAN (1957) constituyendo uno de los problemas de optimización combinatoria más estudiado. Muchos problemas prácticos como el diseño de campus y hospitales (DICKY y HOPKINS, 1972, ELSHAFFI, 1997), diseño de teclados para máquinas de escribir (BURKARD y OFFERMANN, 1977), el problema de la planificación (GEOFFRION y GRAVES, 1976) y muchos otros como el análisis estadístico y la electrónica (EISELT y LAPORTE, 1991) se pueden formular como casos particulares del QAP.

El QAP se puede describir como el problema de asignar un conjunto de actividades (o unidades) a un conjunto de localizaciones, con unas distancias dadas entre las localizaciones y unos flujos dados entre las actividades. El objetivo consiste en colocar las actividades en las localizaciones de tal modo que la suma del producto entre los flujos y las distancias sea mínimo.

Formalmente este problema se puede formular como sigue: dadas  $n$  actividades y  $n$  localizaciones se pueden definir dos matrices de  $n \times n$ :

$$D = [d_{ij}]$$

$$F = [f_{rs}]$$

donde:

$d_{ij}$  distancia entre las localizaciones  $i$  y  $j$

$f_{rs}$  flujo entre las actividades  $r$  y  $s$

La asignación es una permutación  $\pi \{1, \dots, n\}$  donde  $\pi_i$  es la actividad asignada a la localización  $i$ . La definición matemática del problema viene dada por la siguiente expresión:

$$\min_{\pi \in S(n)} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_{ij} d_{\pi_i \pi_j}$$

donde:

$S(n)$  conjunto de todas las permutaciones (correspondiente a las asignaciones) del conjunto de enteros  $\{1, \dots, n\}$

$\pi_i$  localización de la facilidad  $i$  en la solución actual  $\pi \in S(n)$ .

El coste de asignar simultáneamente la facilidad  $i$  a la localización  $\pi_i$  y la facilidad  $j$  a la localización  $\pi_j$  es  $f_{ij} d_{\pi_i \pi_j}$ .

El término cuadrático se deriva de la formulación del QAP como un problema de programación entera con una función objetivo cuadrática. Sea  $x_{ij}$  una variable binaria que toma el valor 1 si la facilidad  $i$  se asigna a la localización  $j$  y 0 en otro caso. Entonces el problema se puede formular como:

$$\min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n d_{ij} f_{kl} x_{ik} x_{jl}$$

sujeto a las restricciones

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \quad (j = 1, \dots, n)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad (i = 1, \dots, n)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad (i, j = 1, \dots, n)$$

El QAP es un problema de optimización NP-completo (SAHNI y GONZÁLEZ, 1976). Incluso en el caso en que se encuentre una solución dentro de un factor de  $1 + \epsilon$  de la solución óptima permanece siendo NP-completo. Es considerado como uno de los problemas de optimización más duros, no se ha encontrado solución óptima para la mayoría de los problemas de tamaño  $n \geq 20$ .

Los motivos anteriores han suscitado el interés de los investigadores por el estudio del QAP, siendo utilizado como uno de los problemas clásicos al que se le han



aplicado gran cantidad de algoritmos aproximados para su resolución, es decir, algoritmos heurísticos que pueden encontrar soluciones de buena calidad en un corto espacio de tiempo, como son: Algoritmos Genéticos, Enfriamiento Simulado, Estrategias de Evolución, GRASP, Algoritmos de Hormigas, etc.

En consecuencia, el modelo planteado precisa de un mecanismo que optimice la información sobre todas las variables y las interrelaciones existentes entre las mismas. Con este objetivo, en el presente Capítulo se pretende establecer las bases para utilizar en el modelo técnicas de optimización basadas en la naturaleza, en concreto, algoritmos genéticos y sistemas de hormigas.

Sin embargo, la obtención y disposición de la información precisa para afrontar esta decisión puede realizarse desde ópticas distintas, ya que si bien es posible que la empresa disponga de información cierta sobre determinadas variables, existe la posibilidad de que mucha de dicha información sea necesario obtenerla de fuentes bien diversas. Asimismo, y dado que la decisión que se pretende abordar afecta al futuro, en muchos casos la información se encontrará expresada en términos inciertos, siendo por tanto preciso aplicar mecanismos que permitan trabajar con este tipo de información.

En este sentido, y en función de la disponibilidad de información, el modelo a plantear se puede establecer en dos ámbitos distintos, a saber: con información precisa, esto es, cuando la disponibilidad de información es total siendo posible conocer los datos que afectan a las distintas variables en términos de certeza, o bien cuando la información con la que puede operar la empresa es imprecisa o vaga, expresada bien en términos inciertos o bien con variables lingüísticas.

De acuerdo con las consideraciones anteriores, y en función de lo analizado en los Capítulos precedentes, en los siguientes apartados se establecen las bases utilizadas en la construcción de distintos modelos, en ámbitos de certeza y de incertidumbre, utilizando técnicas de optimización bio-inspiradas, que sirvan de soporte a la decisión acerca de la decisión sobre las características que se deben desplegar en el desarrollo de un nuevo producto.

Para ello, en primer término y en función del ámbito de decisión en que nos encontremos, se analizan las variables que aportan información pertinente para afrontar dicha decisión, así como las posibles relaciones entre las mismas, con la finalidad de establecer las modificaciones precisas en su incorporación al modelo. En segundo lugar, se plantea la posibilidad de construir modelos, basados en técnicas de optimización bio-inspiradas, que faciliten la búsqueda de la combinación óptima de características que, de acuerdo con dicha información, se deberían recoger en el nuevo producto.

## **5.2. MODELOS DE DESARROLLO DE NUEVOS PRODUCTOS CON ALGORITMOS GENÉTICOS**

La aplicación de algoritmos genéticos (AGs) para la resolución de problemas de QAP ha sido realizada en distintos trabajos (entre otros, TATE y SMITH, 1995). En este apartado se analiza la posibilidad de utilizar AGs como técnica de optimización de la información disponible acerca del desarrollo de un nuevo producto.

El punto de partida para el desarrollo del método que se propugna en la presente Memoria consiste en conjugar la información exógena (requerimientos de los clientes) y la información endógena (características determinadas por los ingenieros), optimizando las posibles relaciones que existen entre ambas.

Sin embargo, como se comentó con anterioridad, la información disponible para afrontar la decisión puede estar establecida en términos de certeza y/o en términos inciertos, siendo preciso utilizar en cada caso los mecanismos o técnicas matemáticas que permitan trabajar con cada tipo de información. Por tanto, se plantea la necesidad de utilizar mecanismos de tratamiento de la información distintos en función de la disponibilidad de los datos para afrontar la decisión. Por este motivo, en los apartados siguientes se establecen las bases para la construcción de un modelo que, utilizando como mecanismo de optimización un algoritmo genético, permitan procesar la información desde las dos perspectivas comentadas con anterioridad.

### **5.2.1. En condiciones de certidumbre: El modelo AG-DNP-Crisp**

Una vez analizada la problemática propia de las necesidades de información en la toma de decisiones sobre nuevos productos, así como la estructura básica de los algoritmos genéticos, en el presente epígrafe se pretende construir un modelo denominado AG-DNP-Crisp que, utilizando la metodología propia de los AGs, proporcione una combinación óptima de características a desarrollar en el nuevo producto que maximice la relación entre todas las variables que inciden en el modelo de decisión, partiendo de la hipótesis de que la información disponible se encuentra expresada en términos ciertos (crisp).

En primer término será necesario procesar la información disponible respecto a las principales variables del modelo, es decir, la información inherente a los requerimientos solicitados por los clientes en el nuevo producto y la información propia de las posibles características que la empresa puede desarrollar, desde la perspectiva de que la decisión a abordar se plantea en un ámbito preciso y cierto, desarrollando la metodología a seguir en el tratamiento de dichas variables.

En segundo lugar, y una vez recopilada toda la información que servirá de soporte en la decisión, se analiza la posibilidad de utilizar como base para la optimización de la misma un algoritmo genético, que constituya el núcleo del modelo, y analizar su utilidad desde el punto de vista de la toma de decisiones.

El desarrollo del modelo precisa en primera instancia establecer los requerimientos de los consumidores, es decir, captar los atributos que influyen en la percepción del cliente sobre el nuevo producto. Para ayudar a establecer dichos atributos pueden emplearse una variedad de técnicas de investigación de mercado, como encuestas a los clientes, grupos de enfoque y clínicas a los clientes, empleando la retroalimentación del cliente para elaborar una lista de dichos requerimientos, es decir, establecer los atributos que satisfagan las perspectivas exógenas del nuevo producto. Este listado de requerimientos debe desarrollarse utilizando la misma terminología del propio cliente con el objeto de evitar posibles interpretaciones erróneas. De ahí que sea necesario partir de niveles lo más genéricos posibles para ir agrupando dicha información de forma que se recojan todos los atributos expresados por los consumidores.

Por tanto, se obtendrá un listado de los distintos de requerimientos, tal que:

$RC_i$ , con  $i = 1, 2, \dots, n$

Como se expuso con anterioridad, los requerimientos de los clientes deben confrontarse con las opiniones internas para poder establecer las especificaciones de diseño que maximizan las relaciones entre ambas. Por tanto, los requerimientos anteriores deben ser traducidos en características medibles en el producto, es decir, traducir la voz del cliente en lenguaje técnico que permita determinar las características del producto que están relacionadas con los requisitos o requerimientos. De esta forma se obtendrá un listado de las características, tal que:

$CA_j$ , con  $j = 1, 2, \dots, m$

En consecuencia, la información inicial se puede resumir en una matriz de doble entrada en el que se especifican requerimientos y características, así como la relación existente entre ellos.

Con la finalidad de facilitar la exposición del modelo, se plantea un ejemplo ilustrativo que servirá de base para el desarrollo de los diferentes modelos construidos e implementados en lenguaje de programación conocido como Visual Basic y que son objeto de análisis en los distintos apartados del presente Capítulo.

En el ejemplo de ilustración práctica se parte de un listado compuesto por 15 requerimientos ( $n = 15$ ) y 10 características ( $m = 10$ ), cuyas relaciones se han establecido en los términos “Fuerte”, “Mediana” y “Débil”, y cuya valoración en el ejemplo se recoge en la Figura 5.1.

	CA1	CA2	CA3	CA4	CA5	CA6	CA7	CA8	CA9	CA10
RC1	Fuerte		Mediana							
RC2	Fuerte	Débil	Mediana							
RC3	Débil	Fuerte	Fuerte	Débil						
RC4	Fuerte		Débil							
RC5	Débil	Débil		Fuerte	Débil	Mediana				
RC6				Fuerte	Fuerte	Débil				
RC7				Débil	Mediana	Mediana	Débil			
RC8									Mediana	
RC9							Fuerte		Débil	
RC10							Fuerte	Débil	Débil	
RC11										Débil
RC12							Débil	Débil	Fuerte	Fuerte
RC13							Mediana		Débil	Fuerte
RC14							Mediana	Mediana	Fuerte	Fuerte
RC15								Fuerte		Mediana

Figura 5.1.

La información anterior sirve de punto de partida para la construcción del modelo si bien es necesario incorporar al mismo toda la información referente a ambas variables, y que se pasa a analizar en los apartados siguientes, comenzando por la relativa a los requerimientos de los clientes y continuando por la información proporcionada por los ingenieros de la empresa.

#### 5.2.1.1. Tratamiento de la información exógena: Voz del cliente

A partir de la premisa de que el listado de requerimientos sirve como punto de partida para establecer qué esperan los clientes del nuevo producto, es necesario incorporar al modelo toda aquella información que permita establecer diferencias entre los mismos, y que facilite la decisión relativa a las “mejores” características a incorporar en el producto en función de dicha información. Para ello, interesa detallar las distintas variables que afectan a los requerimientos entre las cuales, a tenor de lo comentado en el Capítulo 2, en el modelo propugnado en la presente Memoria se pueden concretar en las siguientes:

- Factor de ponderación de los requerimientos, que facilitará establecer una medida de la importancia de los mismos desde la perspectiva del cliente conjuntamente con las características con las que cada uno de los requerimientos se relaciona.
- Evaluación competitiva, que permita conocer la posición en la que se encuentra la empresa en cuanto al cumplimiento de cada requisito en función de la competencia, siempre desde la visión o perspectiva aportada por los potenciales clientes.
- Correlación entre los requerimientos, que ponga de manifiesto las posibles incompatibilidades entre los mismos aportadas por los clientes.

A continuación se analiza el procesamiento de dicha información en el modelo construido.

#### **5.2.1.1.1. Importancia de los requerimientos desde la perspectiva del cliente**

Los requerimientos no tienen la misma repercusión, es decir, no satisfacen en igual medida la perspectiva que del nuevo producto puedan tener los potenciales consumidores. De ahí que, en primer término, sea necesario ponderar dichos requerimientos con la finalidad de establecer la importancia real de los mismos.

En el modelo planteado el factor de ponderación de los requerimientos ha sido establecido siguiendo, por su generalidad, la escala de Likert que, como se comentó en el Capítulo 2, asigna valores de 1 a 5, entendiendo que aquellos requerimientos con mayor importancia tendrán un factor de ponderación próximo al valor 5 y viceversa.

El factor de ponderación así establecido sirve para determinar el valor de los requerimientos ponderados lo que proporcionará una medida de la importancia de los mismos. Sin embargo, en la medida de la importancia es necesario incorporar la información relativa a las características con las que se relaciona cada uno de los requerimientos, ya que un requerimiento no sólo es importante por sí mismo, sino que dependerá de las características por las que se ve afectado y el grado de relación con las mismas, la cual, en general, se suele contemplar en los términos siguientes:

Débil	→	1 punto
Mediana	→	3 puntos
Fuerte	→	9 puntos

De esta forma, si se denomina  $g_i$  al valor asignado a la importancia del requerimiento  $i$  o factor de ponderación, se pueden obtener los requerimientos ponderados de la siguiente forma:

$$RCP_i = \sum_{j=1}^n R_i^j \times g_i$$

donde:

$RCP_i$  valor del requerimiento ponderado (importancia)

$R_i^j$  relación del requerimiento  $i$  con la característica  $j$  (F/M/D)

En el modelo AG-DNP-Crisp dicha información se procesa mediante el pseudocódigo que refleja el Cuadro 5.1.

```

*****
'Propósito: Localiza, para cada requerimiento, la relación con cada una de las caracterís-
            ticas y en función de dicha relación (Fuerte, Mediana o Débil) y del factor de
            ponderación del requerimiento de que se trate, realiza la valoración de la im-
            portancia del mismo
'Entradas: Matriz de relaciones
            Factor de ponderación de los requerimientos
'Devuelve: Importancia de los requerimientos
*****

Para n = 1 hasta Número_de_requerimientos hacer
    Para m = 1 hasta Número_de_características hacer
        Buscar si existe relación entre el requerimiento n y la característica m:
            - Si existe relación, multiplicar el valor asignado al grado de relación
              (F/M/D) por el factor de ponderación del requerimiento
            - Si no existe relación, continuar con la siguiente característica
        Sumar para cada requerimiento los valores obtenidos de la operación anterior
    
```

**Cuadro 5.1.**

El resultado obtenido por el modelo para el ejemplo de ilustración práctica es el que muestra la pantalla de la Figura 5.2.

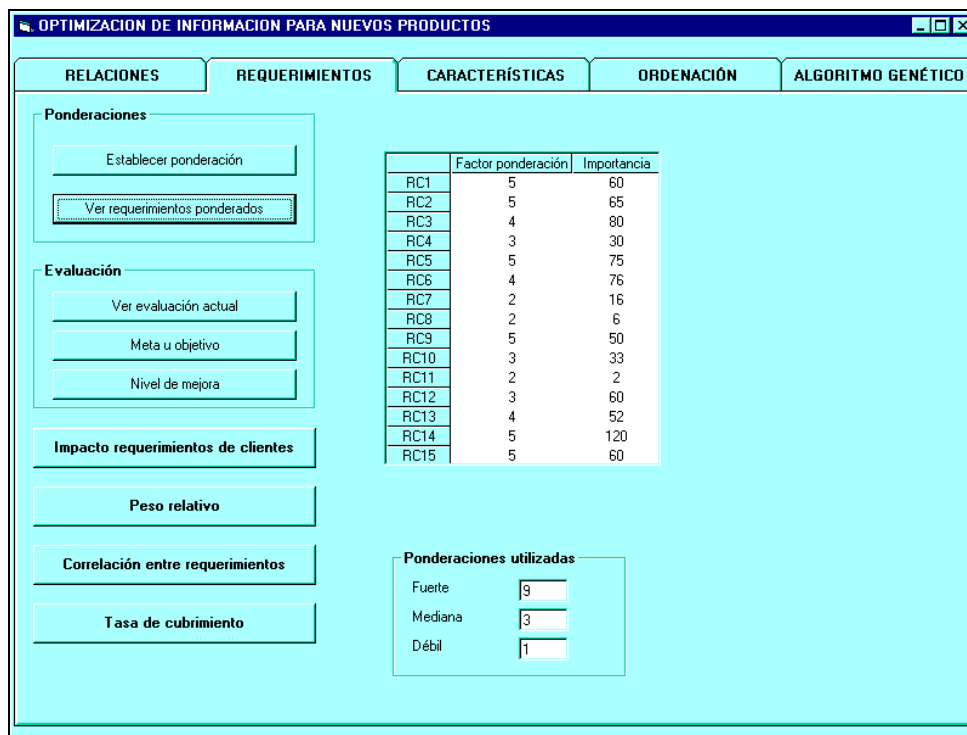


Figura 5.2.

#### 5.2.1.1.2. Evaluación comparativa con productos concurrentes

En este apartado se trata de incorporar al modelo la información relativa a la perspectiva o visión que tienen los clientes de la satisfacción de cada requerimiento en la empresa y en posibles empresas de la competencia. El objetivo es establecer una medida o distancia entre la situación actual de la empresa respecto al resto de competidores, atendiendo a la visión exógena de la empresa.

Para determinar una medida que sirva para cuantificar la posición propia y la posición de la competencia se ha utilizado nuevamente la escala de Likert, tanto para la empresa como para los productos concurrentes, de forma que una vez determinadas ambas situaciones, la evaluación comparativa se establece en términos de diferencia entre ambas valoraciones.

El objetivo de esta evaluación es permitir distinguir los puntos fuertes y débiles de la empresa, ayudando a establecer las acciones prioritarias desde esta perspectiva.

En el modelo propuesto se procesa dicha información de la forma que refleja el pseudo-código recogido en el Cuadro 5.2.

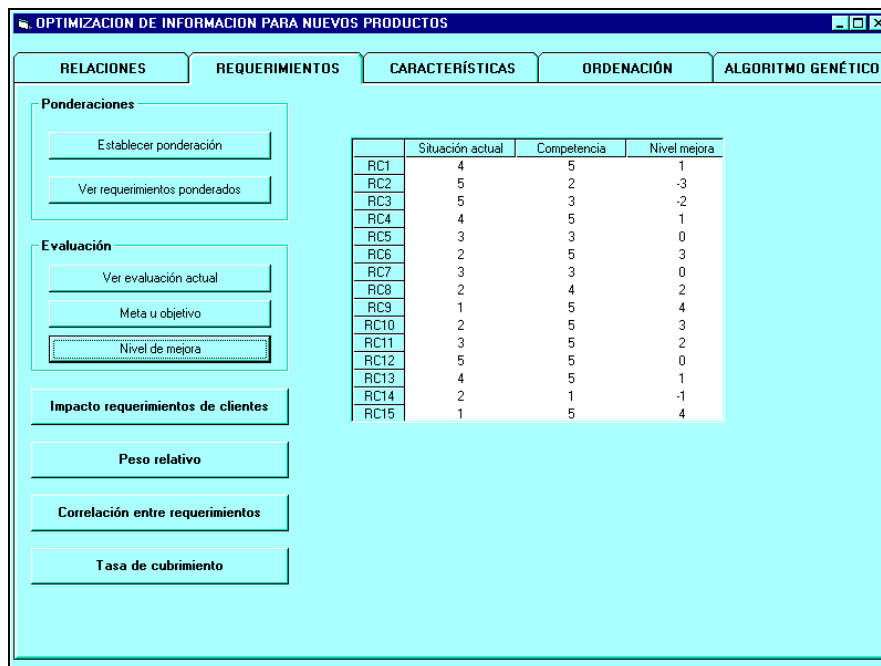
```

*****
'Propósito:  Determina, para cada requerimiento, la evaluación actual de la empresa y la
              compara con la evaluación de la competencia y establece la distancia entre
              ambas
'Entradas:   Evaluación actual de los requerimientos en la empresa
              Evaluación actual de los requerimientos en la competencia
'Devuelve:  Nivel de mejora para cada requerimiento
*****

Para n = 1 hasta Número_de_requerimientos hacer
    Localiza la evaluación de la competencia
    Localiza la evaluación de la empresa
    Establece la distancia entre ambos valores
    
```

**Cuadro 5.2.**

En el ejemplo de aplicación, la información inicial sobre la situación actual y la evaluación de la competencia, así como el resultado proporcionado por el modelo, quedan reflejadas en la pantalla que se muestra en la Figura 5.3.



**Figura 5.3.**

Aún cuando en el modelo propuesto la información sobre la importancia de los requerimientos y la evaluación comparativa se incorporan de forma separada, cabe la posibilidad de establecer una valoración conjunta de ambos que sirva de medida del



impacto que tiene cada requerimiento desde la perspectiva exógena. Para ello, se podría operar de la siguiente forma:

$$W_i = RCP_i \times t_i$$

donde:

$W_i$  impacto del requerimiento  $i$  (peso absoluto del requerimiento  $i$ )

$RCP_i$  valor del requerimiento ponderado (importancia)

$t_i$  tasa de mejora del requerimiento  $i$

Asimismo, en un análisis posterior, podría resultar de interés conocer no sólo el impacto de cada requerimiento en valor absoluto sino el peso relativo que en el conjunto de requerimientos representa cada uno de ellos. Para ello, bastaría con establecer el valor del impacto de cada requerimiento en términos porcentuales de la siguiente forma:

$$w_i^{\%} = w_i \times \frac{100}{\sum_{i=1}^n w_i}$$

donde:

$w_i^{\%}$  peso relativo del requerimiento  $i$

La forma de calcular el impacto en los términos anteriores queda recogido el pseudo-código que se muestra en el Cuadro 5.3.

```

*****
'Propósito:  Determina, en función de la importancia y de la evaluación competitiva, el
              impacto de cada requerimiento
'Entradas:   Importancia de cada requerimiento
              Nivel de mejora para cada requerimiento
'Devuelve:   Impacto para cada requerimiento
*****

Para n = 1 hasta Número_de_requerimientos hacer
    Localiza la importancia
    Localiza el nivel de mejora
    Establece el impacto multiplicando el peso de ambas variables
    
```

**Cuadro 5.3.**

El cálculo de ambos valores en el ejemplo de aplicación quedaría como muestra la pantalla de la Figura 5.4.

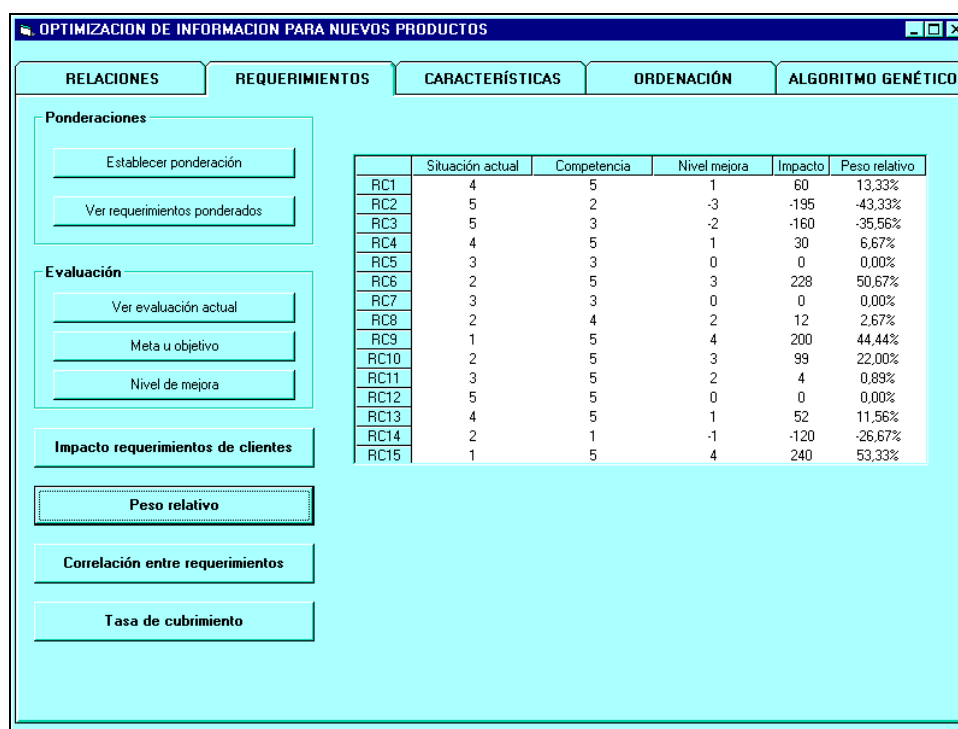


Figura 5.4.

### 5.2.1.1.3. Correlación entre los requerimientos

Los requerimientos apuntados por los consumidores como deseables en el nuevo producto se encuentran en muchos casos relacionados entre sí. Esta relación debe ser considerada en el momento de analizar la repercusión que un requerimiento puede tener en la solución a adoptar, es decir, no sólo es necesario tener presente la relación de los requerimientos con las características que se van a desarrollar sino también es relevante la información perteneciente a las posibles relaciones entre los requerimientos. Esto es así en la medida en que actuar sobre un requerimiento que en base al resto de información pueda ser importante, puede afectar a otro u otros requerimientos y esta posibilidad debe ser recogida en el modelo, máxime si se tiene presente que dicha relación no tiene por qué ser siempre positiva.

En consecuencia, en el modelo se recoge en un cuadro de doble entrada las posibles relaciones entre requerimientos, valoradas entre  $-1$  y  $1$ , con la finalidad de permitir las posibles correlaciones negativas.

En concreto, en el ejemplo que se está desarrollando se han establecido los grados de correlación que se muestran en la pantalla de la Figura 5.5.

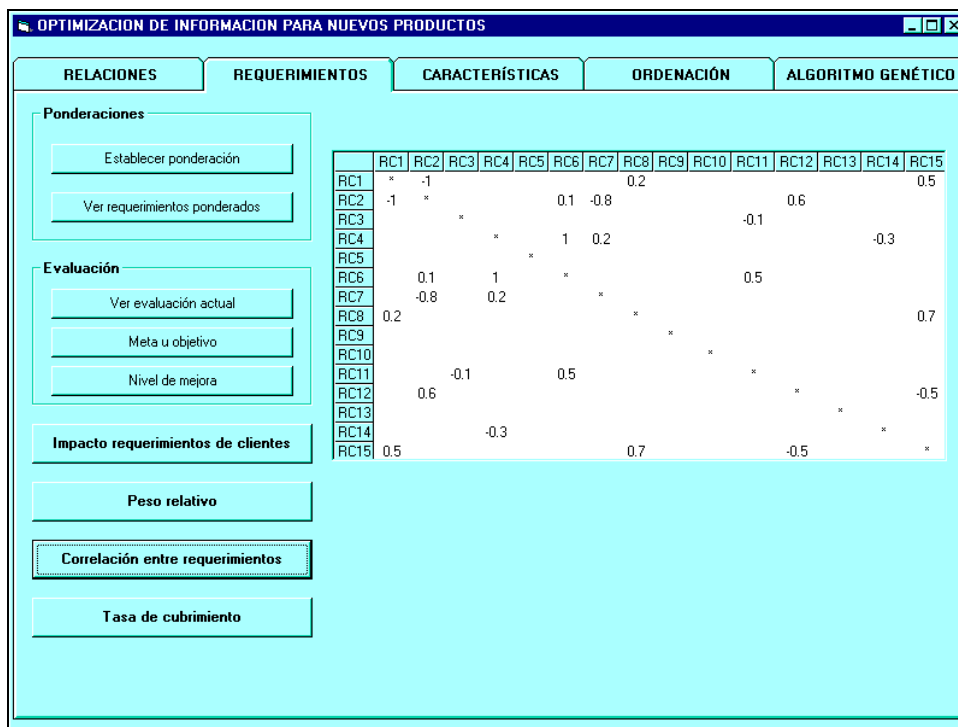


Figura 5.5.

#### 5.2.1.1.4. Tasa de cubrimiento de las características por parte de los requerimientos

En determinadas circunstancias, en las que en base al resto de información, un requerimiento pueda ser similar a otro, es posible incorporar algún tipo de variable que permita discernir entre ambos. En este sentido, se plantea la posibilidad de analizar para cada requerimiento, no solamente el valor que representa en relación con las características (requerimientos ponderados) sino también determinar con cuantas características está relacionado. Es decir, en términos generales se puede establecer la importancia de los requerimientos considerando la relación que los une con las características, sin embargo, es posible determinar dicha importancia en función del “número” de características con las que se relaciona, con independencia del grado de dicha relación. No obstante, esta variable sólo será relevante cuando en base al resto de información, dos o más requerimientos sean iguales.

De esta forma, se calcula lo que se ha denominado “tasa de cubrimiento” que consiste en determinar para cada requerimiento el número de características con las que se relaciona, y la forma de obtenerla puede ser mediante el pseudo-código que se muestra en el Cuadro 5.4.

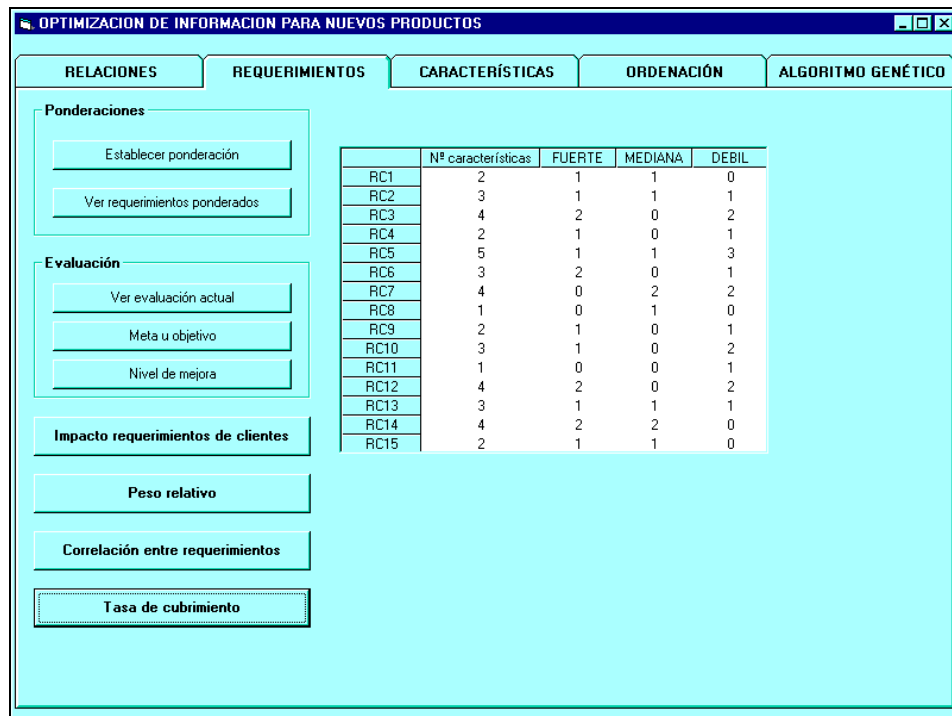
```

*****
'Propósito:  Determinar el número de características con que se relaciona cada requeri-
              miento
'Entradas:   Matriz de relaciones
'Devuelve:   Tasa de cubrimiento de cada requerimiento
*****

Para n = 1 hasta Número_de_requerimientos hacer
    Para m = 1 hasta Número_de_características hacer
        Establecer si existe relación de la característica m con el requerimiento n
            - Si existe relación
                Determinar el grado de relación
                Realizar la suma de todas las características con ese grado
            - Si no existe relación, continuar con la siguiente característica
        Establecer la tasa de cubrimiento para cada requerimiento en total (número
        de características) así como en función de la relación que mantiene con las
        mismas (F/M/D)
    
```

**Cuadro 5.4.**

El resultado proporcionado por el modelo para el ejemplo es el que se muestra en la pantalla de la Figura 5.6.



**Figura 5.6.**

### 5.2.1.1.5. Ordenación de los requerimientos

Al objeto de llevar a cabo la ordenación de los requerimientos, las dos variables que presentan una incidencia directa en su ponderación son la tasa de mejora o distancia y el grado de importancia de los mismos. El análisis conjunto de ambas variables permite establecer un diagnóstico previo de los distintos tipos de requerimientos y de la situación de la empresa respecto a los mismos.

Si para establecer dicha clasificación se utiliza, tanto para el grado de importancia como para la tasa de mejora, los valores medios posibles, se obtendría una ordenación basada en datos medios, tal como se muestra en el Cuadro 5.5.

*****	
'Propósito:	Calcular en función del grado de importancia y de la tasa de mejora de los requerimientos una ordenación de los mismos
'Entradas:	Grado de importancia de los requerimientos Tasa de mejora de los requerimientos
'Devuelve:	Ordenación en función de datos medios posibles de los requerimientos
*****	
1.	Determinar la importancia media Localizar las ponderaciones utilizadas para medir la relación entre características y requerimientos y calcular su media Multiplicar por el número de características
2.	Determinar la tasa de mejora media Localizar las valoraciones utilizadas para determinar la tasa de mejora y calcular la media
3.	Para $n = 1$ hasta Número_de_requerimientos <i>hacer</i> Localizar su grado de importancia (requerimientos ponderados) Establecer su tasa de mejora o distancia entre la situación actual y la situación de la competencia En función de los valores de cada requerimiento, <i>hacer</i> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Si importancia &lt; importancia media y tasa &lt; tasa media, clasificar el requerimiento como "Cuestionable"</li> <li>- Si importancia &lt; importancia media y tasa &gt; tasa media, clasificar el requerimiento como "Dormido"</li> <li>- Si importancia &gt; importancia media y tasa &lt; tasa media, clasificar el requerimiento como "Oportunidad"</li> <li>- Si importancia &gt; importancia media y tasa &gt; tasa media, clasificar el requerimiento como "Ganador"</li> </ul>

**Cuadro 5.5.**

La opción alternativa a la anterior consiste en establecer los valores medios en función de los datos actuales, obteniendo en consecuencia una ordenación actual de los distintos requerimientos.

Esta operación se puede realizar mediante el pseudocódigo que se recoge en el Cuadro 5.6.

```
*****
'Propósito:  Calcular en función del grado de importancia y de la tasa de mejora de los
              requerimientos una ordenación de los mismos
'Entradas:   Grado de importancia de los requerimientos
              Tasa de mejora de los requerimientos
'Devuelve:   Ordenación en función de datos medios actuales de los requerimientos
*****

1.  Para n = 1 hasta Número_de_requerimientos hacer
    Localizar la importancia actual del requerimiento
    Sumar la importancia del requerimiento con la del resto de requerimientos
    Calcular la media

2.  Para n = 1 hasta Número_de_requerimientos hacer
    Localizar la tasa actual del requerimiento
    Sumar la tasa actual del requerimiento con la del resto de requerimientos
    Calcular la media

3.  Para n = 1 hasta Número_de_requerimientos hacer
    En función de los valores de cada requerimiento, hacer
        - Si importancia < importancia media actual y tasa < tasa media actual, clasi-
          ficar el requerimiento como "Cuestionable"
        - Si importancia < importancia media actual y tasa > tasa media actual, clasi-
          ficar el requerimiento como "Dormido"
        - Si importancia > importancia media actual y tasa < tasa media actual, clasi-
          ficar el requerimiento como "Oportunidad"
        - Si importancia > importancia media actual y tasa > tasa media actual, clasi-
          ficar el requerimiento como "Ganador"
```

**Cuadro 5.6.**

En el ejemplo propuesto las ordenaciones, tanto en base a valores posibles como en función de los datos actuales, quedan como muestra la pantalla de la Figura 5.7.

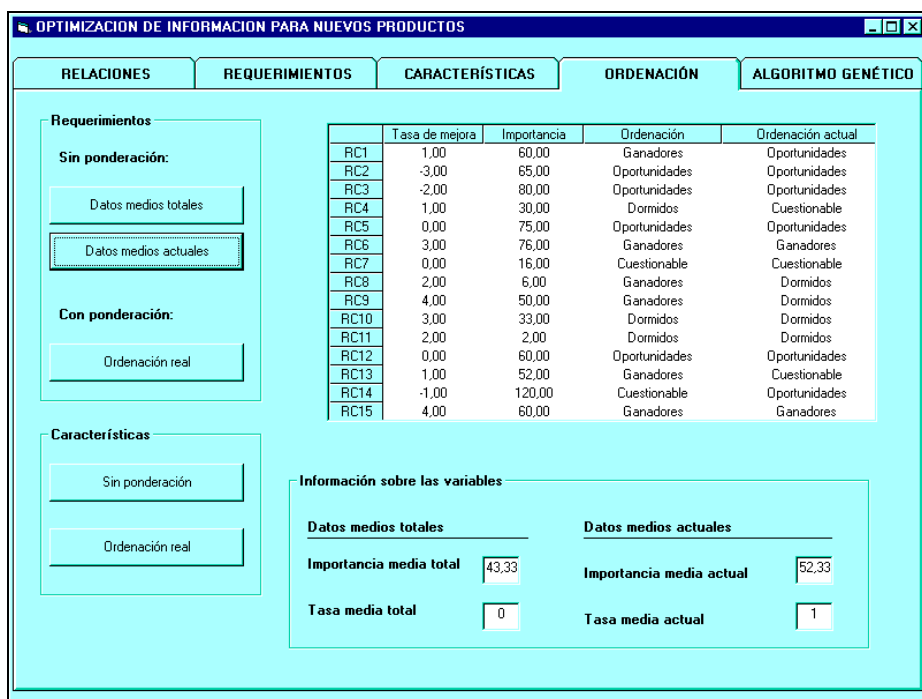


Figura 5.7.

La clasificación tanto para valores medios totales como valores medios actuales obtenida en el paso anterior, pone de manifiesto la existencia de varios requerimientos que se encuentran encuadrados en la misma definición. En consecuencia, sería necesario poder reclasificar los mismos de forma que si bien en principio se encuentran encuadrados en el mismo grupo, sea posible discernir entre ellos. En este sentido, se plantea la posibilidad de determinar una clasificación que atienda a un orden real, en el que sea factible establecer distinta importancia para las variables que afectan a esta clasificación.

A este respecto, se establece la posibilidad de utilizar la ordenación real propuesta por TACU y STEFAN (1996a). Estos autores plantean que en la teoría de decisiones hay muchas situaciones donde es absolutamente necesario determinar objetivamente la jerarquía de un conjunto finito de objetos, entendiendo por objeto un conjunto homogéneo de los mismos (productos, máquinas, personas, etc.) o bien un conjunto homogéneo de estados (variables estratégicas del desarrollo económico, variables tecnológicas, etc.). Por su parte, una característica es cualquier tipo de información que se considere necesaria para afrontar la decisión de establecer el orden de preferencia de los objetos.

Dicha jerarquización se puede realizar estableciendo un orden creciente de objetos según una determinada característica, es decir, cuando un objeto situado antes que otros es preferido a todos los situados por detrás de él (es decir, el primer objeto es el mejor y el último el peor respecto a la característica que se valora en el caso concre-

to). La realización de un “ranking” de  $n$  objetos respecto de una característica permite crear una secuencia monótona creciente; es decir, el objeto mejor ocupa el primer puesto (1), mientras que el peor objeto de los disponibles ocupará el último puesto ( $n$ ).

En este sentido, se pueden establecer dos tipos básicos de características en función de las cuales se puede realizar la ordenación de los distintos objetos, a saber:

- Características cuantitativas: Son aquellas en las que cada objeto tiene asociado un valor cierto de la característica o un intervalo compacto en el eje real de valores correspondientes a dicha característica (por ejemplo, la velocidad de un coche es de 65 kms/h, la precisión de una máquina está entre 2 y 3 mm., etc.).
- Características cualitativas: Son aquellas en las que cada objeto tiene asociado un cierto atributo (por ejemplo, bueno, muy bueno, regular, etc.). En el caso de este tipo de características, para proceder a ordenar los objetos será necesario cuantificar de alguna forma estas características.

Para proceder a realizar la jerarquización, se parte de una característica cuantitativa  $C$ , y un conjunto de  $n$  objetos ( $O_1, O_2, \dots, O_n$ ), de forma que para cada objeto  $O_i$  (con  $i = 1, 2, \dots, n$ ) hay un valor de la característica  $C$  asociada al mismo, que se denotará como  $A_i$ .

Si la ordenación que se precisa se basa simplemente en dicha característica, el criterio de ordenación vendrá dado por los valores  $A_i$  asignados a los objetos. Sin embargo, el problema se plantea cuando dos objetos diferentes tienen asociado el mismo valor  $A_i$ .

En estas circunstancias el procedimiento planteado para realizar dicha ordenación será el siguiente: En primer lugar, sólo se consideran los valores de las características  $A_i$  diferentes, de forma que el conjunto inicial de valores  $A_i$  quedará restringido a  $A_j$  con  $j = 1, 2, \dots, m$ , donde  $m \leq n$ , es decir, se eliminan los valores repetidos de las características, de forma que se denomina  $A_1$  al valor más pequeño de la característica y  $A_m$  al valor más grande.

Para proceder a la ordenación de los objetos se plantea el problema de aquellos cuya característica presenta un valor idéntico, en cuyo caso se plantean dos opciones para realizar la ordenación a partir de los valores de dicha característica en función de si dicha característica es positiva o negativa, a saber:

- a. Si la característica es positiva, es decir, si  $A_i < A_j$ , todos los objetos correspondientes al valor  $A_j$  son preferidos a los correspondientes al valor  $A_i$ . En este caso el orden de un objeto  $i$  es el número real  $K$  calculado a partir del  $A_j$  que tiene asociado el objeto de la siguiente forma:



$$K = m + 1 - j$$

donde:

$$j = 1, \dots, m$$

$$K = 1, 2, 3, \dots, m$$

- b. Si la característica es negativa, es decir, si  $A_i < A_j$ , todos los objetos correspondientes al valor  $A_i$  son preferidos a los correspondientes al valor  $A_j$ , el orden de un objeto  $i$  es el número real  $K$  calculado a partir del  $A_j$  que tiene asociado el objeto de la siguiente forma:

$$K=j$$

donde:

$$j = 1, \dots, m$$

$$K = 1, 2, 3, \dots, m$$

El análisis anterior se puede extrapolar al caso de que si cada objeto tiene varias características (por ejemplo,  $m$  características distintas) es decir,  $C_1, C_2, \dots, C_m$ , en cuyo caso cada objeto tendrá un cierto ranking respecto a cada una de las características.

En la estadística no paramétrica el método utilizado para la construcción de un sistema jerárquico con un número finito de objetos consiste en determinar el orden medio a través del siguiente ratio:

$$\bar{R}_i = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m r_{ij} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

donde:

$\bar{R}_i$  orden medio del objeto  $O_i$

$m$  número de características

$n$  número de objetos

$r_{ij}$  orden del objeto  $O_i$  en la característica  $C_j$

Sin embargo, el método anterior presenta el inconveniente de que la determinación del orden medio no tiene en cuenta ni los valores ni la importancia de las características, es decir se utiliza como criterio la media. En consecuencia, la aplicación del ratio anterior sólo proporcionará un resultado satisfactorio, es decir, sólo se corresponderá con una ordenación real si los valores  $A_j^i$  de las características  $C_j$  son equidis-

tantes y además se consideran de igual importancia a efectos del ranking que se desea realizar.

Por tanto, será preciso establecer algún mecanismo que permita establecer una jerarquización en aquellas circunstancias en que las características a analizar tengan valores no equidistantes y en el caso en que la importancia de las mismas sea distinta, ya que la ordenación realizada en función de los criterios anteriores no es representativa a efectos de tomar una decisión.

Con la finalidad de evitar estos inconvenientes, los autores han desarrollado un nuevo método de ordenación, denominado "ordenación real" que toma en consideración tanto la distancia entre los valores como la importancia de las diferentes características. De esta forma, se denomina "orden real" de un objeto con respecto a una característica a un número positivo y en ocasiones fraccionado (frente a los números naturales utilizados frecuentemente), determinado a partir de los valores de las características  $C$  y de los lugares de dichos valores dentro del intervalo  $[A_1, A_m]$ .

Para cada característica  $C_j$ , con  $j = 1, 2, \dots, m$ , existe la siguiente secuencia finita de valores:

$$A_1^j < A_2^j < \dots < A_k^j < \dots < A_m^j$$

donde, al igual que antes,  $m$  es el número de valores diferentes de la característica  $C_j$  asociada a  $n$  objetos.

De forma similar a lo comentado con anterioridad, existen dos posibilidades de ordenación en función del tipo de característica, a saber:

- a. Característica positiva, es decir, si  $A_k^j < A_l^j$ . En este caso, todos los objetos correspondientes al valor  $A_k^j$  son preferidos a los correspondientes al valor  $A_l^j$  (por ejemplo, se considera mejor cuanto mayor sea el precio del producto).

En este caso el orden de un objeto  $i$  respecto a la característica  $j$  es el número real  $R_i^j$  calculado a partir del  $A^j$  que tiene asociado el objeto de la siguiente forma:

$$R_i^j = n_j - \frac{A_k^j - A_1^j}{A_m^j - A_1^j} \cdot (m - 1)$$

donde:

$R_i^j$  orden real del objeto  $O_i$  correspondiente al valor  $A_k^j$  de la característica  $C_j$

$n_j$  número de los valores distintos de la característica  $C_j$

$A_k^j$  valor de la característica  $C_j$  asociada al objeto  $O_i$

$A_1^j$  valor más pequeño de la característica  $C_j$

$A_m^j$  el valor más grande de la característica  $C_j$

- b. Característica negativa, es decir, si  $A_k^j < A_l^j$ . En esta situación todos los objetos correspondientes al valor  $A_k^j$  son preferidos a los correspondientes al valor  $A_l^j$ . En características negativas, el orden de un objeto  $i$  respecto a la característica  $j$  es el número real  $R_j^i$  calculado a partir del  $A^j$  que tiene asociado el objeto de la siguiente forma:

$$R_j^i = n_j - \frac{A_m^j - A_k^j}{A_m^j - A_1^j} \cdot (m - 1)$$

donde los términos de la fórmula tienen el mismo significado que en el caso anterior.

Ahora bien, el "orden real" de un objeto depende de los órdenes reales conseguidos en las  $m$  características y de la importancia de las mismas. La importancia de una característica es apreciada a través de una cierta magnitud, que puede ser una marca, un expertón o la media de un expertón. De esta forma, una cierta magnitud  $B_j$  (marca, media de expertón, etc.) se asocia a cada característica  $C_j$ , de forma que cuando un objeto  $O_{i1}$  es preferido a un objeto  $O_{i2}$  respecto a una característica, si el orden del objeto  $O_{i1}$  es menor que el del objeto  $O_{i2}$ , entonces la misma condición deberá ser satisfecha por las magnitudes  $B_j$  asociadas a las características  $C_j$ . Es decir, si la característica  $C_{j1}$  es más importante que la característica  $C_{j2}$ , entonces  $B_{j1} < B_{j2}$ .

Por tanto, si la importancia de las características  $C_j$  viene dada por las magnitudes  $N_j$ , de tal forma que si  $C_{j1}$  es más importante a  $C_{j2}$  entonces  $N_{j1} > N_{j2}$ . Para hallar los valores  $B_j$  deseados habrá que aplicar la siguiente fórmula de conversión:

$$B_j = \frac{\min N_j}{N_j}$$

donde  $j = 1, 2, \dots, m$

Finalmente el "orden real" del objeto  $O_i$  relativo a las  $m$  características  $C_j$  es calculado como sigue:

$$R_i = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m R_j^i B_j \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Los valores determinados a partir de la expresión anterior son los que permiten ordenar jerárquicamente el conjunto de objetos  $O_i$ , siendo el criterio de ordenación el siguiente:

$$R_{i1} < R_{i2} < R_{i3} < \dots < R_{in}$$

De esta forma, el objeto  $O_{i1}$  es el más importante, y el  $O_{in}$  el menos significativo y en consecuencia el orden real total de un objeto únicamente es la media aritmética de sus órdenes reales parciales cuando todas las características  $C_j$  tienen la misma importancia.

La aplicación de la ordenación real planteado anteriormente puede resultar de interés en el modelo desarrollado, de forma que si se considera una ponderación del doble para la importancia respecto a la tasa de mejora, el establecimiento del "orden real" de cada requerimiento se puede realizar mediante la codificación que se muestra el Cuadro 5.7.

*****	
'Propósito:	Calcular en función del grado de importancia y de la tasa de mejora de los requerimientos una ordenación de los mismos
'Entradas:	Grado de importancia de los requerimientos Tasa de mejora de los requerimientos
'Devuelve:	Ordenación real de los requerimientos
*****	
1.	<i>Para n = 1 hasta Número_de_requerimientos hacer</i> Determinar el número de valores distintos de la tasa de mejora Determinar el número de valores distintos de la importancia Calcular el mayor y el menor valor de la tasa de mejora Calcular el mayor y el menor valor de la importancia
2.	<i>Para n = 1 hasta Número_de_requerimientos hacer</i> Establecer el orden de cada requerimiento respecto a la tasa de mejora Establecer el orden de cada requerimiento respecto a la importancia
3.	Calcular la proporción que supone cada una de las dos variables en función de las ponderaciones introducidas
4.	<i>Para n = 1 hasta Número_de_requerimientos hacer</i> Establecer el orden real ponderando las dos variables en función de la proporción calculada en el paso anterior Ordenar los distintos requerimientos

**Cuadro 5.7.**

El resultado de aplicarlo a los datos del problema planteado a efectos ilustrativos sería el que muestra la pantalla de la Figura 5.8.

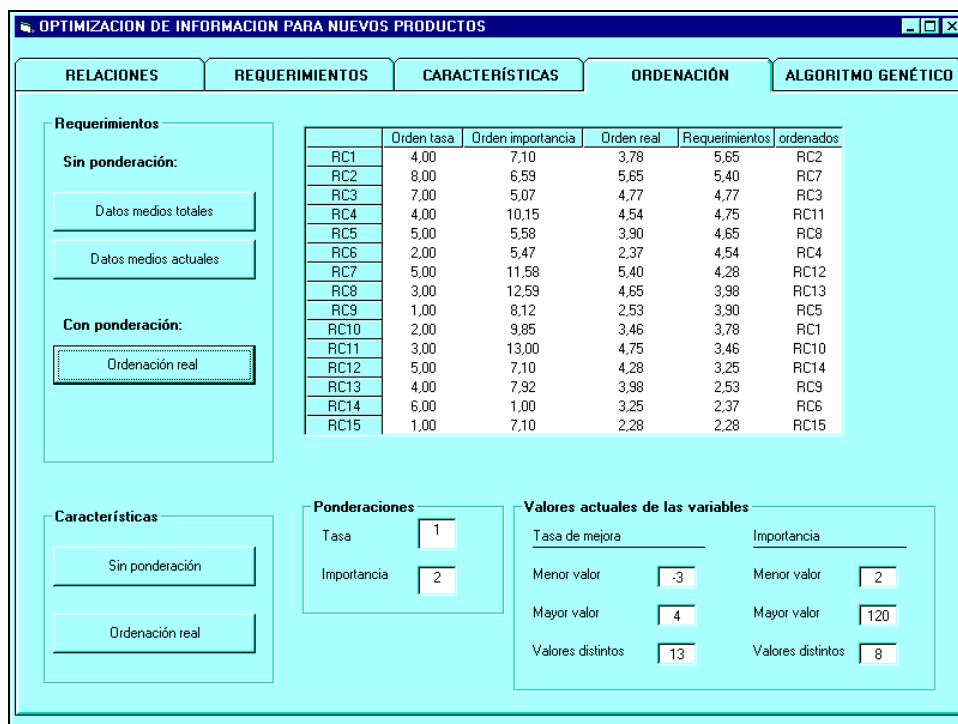


Figura 5.8.

### 5.2.1.2. Tratamiento de la información endógena: Voz del ingeniero

De forma similar a lo analizado para el listado de requerimientos, antes de proceder a construir el algoritmo propiamente dicho es necesario recolectar y procesar la información relativa a aquellos aspectos que puedan incidir en la elección de las posibles características a incluir en el nuevo producto.

En los apartados siguientes se procederá entonces a analizar las distintas variables que, de acuerdo con el modelo propuesto en el Capítulo 2, afectan a las características y que de forma resumida son las siguientes:

- Características ponderadas, es decir, en función de la importancia que tienen los distintos requerimientos desde la óptica de los potenciales consumidores, y teniendo en cuenta las relaciones existentes entre los mismos y las diferentes características posibles, será preciso ponderar estas últimas con el objetivo de poder determinar una medida inicial de la importancia de las mismas desde esta perspectiva.

- Evaluación comparativa, que permita conocer la posición de la empresa en el desarrollo de las distintas características respecto a la situación ideal u objetivo marcado por la empresa.
- Dificultad técnica, es decir, la información ofrecida por parte de los ingenieros sobre las posibilidades técnicas con que cuenta la empresa para poder desarrollar cada característica.
- Correlación entre características, que permita establecer una medida de la incidencia que el desarrollo de cada una de ellas puede tener en el resto de las posibles características.

#### 5.2.1.2.1. Importancia de las características

Los atributos del nuevo producto traducidos en características medibles en el mismo deben ser cuantificados desde la perspectiva de la importancia que tiene cada uno de ellos en función de la relación con los requerimientos y de la importancia que tienen dichos requerimientos desde la perspectiva de los futuros clientes.

En consecuencia, de forma análoga a lo realizado para los requerimientos, en primer lugar será preciso realizar una cuantificación de cada característica basada en los dos aspectos mencionados. Dicha cuantificación se realiza, teniendo en cuenta que  $g_i$  expresaba el grado de importancia para los clientes de cada uno de los requerimientos, sin más que establecer la suma de las características en función de la relación con los requerimientos por el factor de ponderación de cada uno de ellos de la forma siguiente:

$$CAP_j = \sum_{i=1}^m CA_j^i \times g_i$$

donde:

$CAP_j$  valor de la característica ponderada (importancia)

$R_j^i$  relación de la característica  $j$  con el requerimiento  $i$  (F/M/D)

$g_i$  grado de importancia (ponderación) del requerimiento  $i$

$m$  número de características

La codificación de la operativa anterior que permite evaluar la importancia de las características es la que se muestra en el Cuadro 5.8.

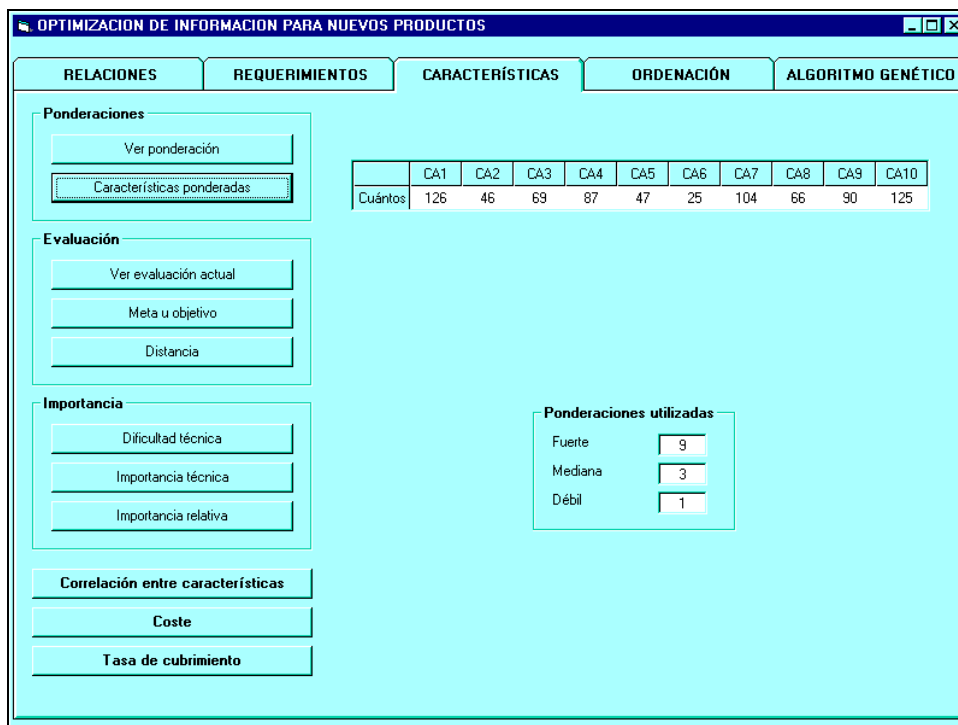
```

*****
'Propósito: Localiza, para cada característica, la relación con cada uno de los requeri-
mientos y en función de dicha relación (Fuerte, Mediana o Débil) y del factor
de ponderación del requerimiento de que se trate, realiza la cuantificación de
la importancia de la misma
'Entradas: Matriz de relaciones
'          Factor de ponderación de los requerimientos
'Devuelve: Importancia cuantificada de las características
*****

Para m = 1 hasta Número_de_características hacer
    Para n = 1 hasta Número_de_requerimientos hacer
        Buscar si existe relación entre la característica y el requerimiento
        - Si existe relación, multiplicar el grado de relación (F/M/D) por el factor de
          ponderación del requerimiento
        - Si no existe relación, continuar con el siguiente requerimiento
    Sumar para cada característica los valores obtenidos de la operación anterior
    
```

**Cuadro 5.8.**

Para el ejemplo desarrollado, en base a la información anteriormente suminis-  
trada, dicha valoración queda como se muestra en la pantalla de la Figura 5.9.



**Figura 5.9.**

### 5.2.1.2.2. Situación actual de las características técnicas

En este apartado se trata de establecer la situación de las diferentes características desde el punto de vista de la empresa. De esta forma, al igual que en el caso de los requerimientos, la posición de la empresa respecto a las posibles características debe ser establecida con el objetivo de compararla con la posición de los competidores, con la salvedad de que en este caso es la propia empresa la que evalúa y realiza este posicionamiento, de acuerdo con los estudios realizados sobre la competencia.

Será necesario establecer entonces la situación actual de la empresa y la situación en la que se encuentra la competencia, con la finalidad de determinar la distancia a la meta que la empresa desea conseguir. La evaluación de ambas posiciones se realiza, de forma similar a la estudiada para los requerimientos, siguiendo la escala de Likert.

Por tanto, partiendo de dicha información, la distancia se calcula sin más que restar ambas cantidades, siendo en consecuencia el pseudo-código mostrado en el Cuadro 5.9.

```
*****
'Propósito:  Determina, para cada característica, la evaluación actual de la empresa y la
              compara con la evaluación de la competencia y establece la distancia entre
              ambas
'Entradas:   Evaluación actual de las características en la empresa
              Evaluación actual de las características en la competencia
'Devuelve:   Nivel de mejora para cada característica
*****

Para m = 1 hasta Número_de_características hacer
    Localiza la evaluación de la competencia
    Localiza la evaluación de la empresa
    Establece la distancia entre ambos valores
```

**Cuadro 5.9.**

Los datos del ejemplo son los suministrados en la pantalla recogida en la Figura 5.10., procediendo asimismo a determinar la evaluación competitiva de la empresa con dichos valores, y cuyo resultado se recoge asimismo en la Figura 5.10.



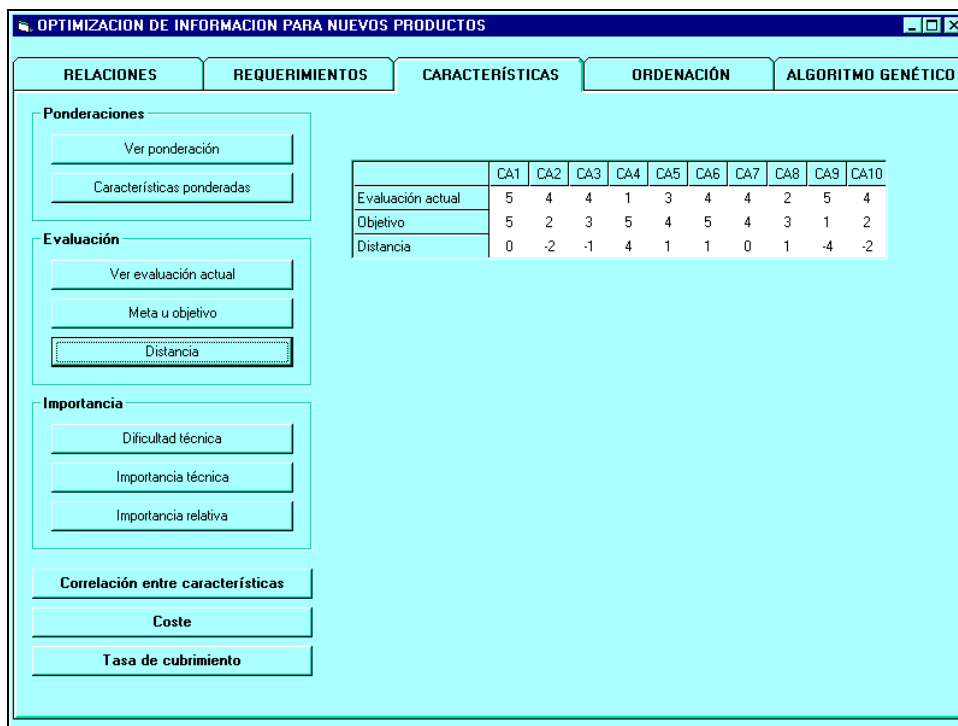


Figura 5.10.

### 5.2.1.2.3. Importancia técnica de las características

Al objeto de incorporar al modelo la información de la importancia de las características desde el punto de vista de su ejecución práctica, resulta factible que la medición de la dificultad técnica se realice mediante una tabla numérica que identifique el nivel de dificultad y que, de acuerdo con el modelo propugnado en el Capítulo 2, abarque desde el 1 (mínima dificultad) hasta el 5 (máxima dificultad).

Por tanto, se trata de una información que si bien se ha de incorporar al modelo, en este momento no es preciso realizar ningún tipo de transformación, ya que se tendrá en consideración como una variable más en el modelo.

Sin embargo, es posible que en función de la importancia de las características y de la evaluación efectuada de la dificultad técnica de cada una de ellas, se pueda calcular una variable intermedia que ponga de manifiesto la importancia técnica de las características, es decir, es posible realizar la siguiente operación:

$$ITCA_j = CAP_j \times DT_j$$

donde:

ITCA<sub>j</sub> importancia técnica de la característica *j*

CAP<sub>j</sub> valor de la característica *j* ponderada

DT<sub>j</sub> dificultad técnica de *j*

De esta forma, similar al caso de los requerimientos, será posible establecer dicha importancia en términos relativos, consiguiendo una visión más cercana del peso que se concede a cada característica.

El peso relativo anteriormente definido se puede obtener, por tanto, de la siguiente forma:

$$ITCA_j^{\%} = ITCA_j \times \frac{100}{\sum_{j=1}^m ITCA_j}$$

donde:

ITCA<sub>j</sub><sup>%</sup>                      Peso relativo de la característica *j*

En concreto, en el ejemplo propuesto la codificación de los pasos anteriores sería la que se recoge en el Cuadro 5.10., y el resultado de aplicarlo a los datos del ejemplo, tanto para la importancia técnica como para el peso relativo de cada característica, se refleja en la pantalla de la Figura 5.11.

```

*****
'Propósito:  Determina, para cada característica, su importancia ponderada y la dificultad
              técnica asignada a la misma con el objetivo de establecer la importancia de
              técnica de cada una de las características
'Entradas:   Importancia ponderada de las características
              Dificultad técnica de las características
'Devuelve:  Importancia técnica de las características
*****

Para m = 1 hasta Número_de_características hacer
    Localiza su importancia ponderada
    Localiza su dificultad técnica
    Establece la importancia técnica multiplicando el valor de ambas variables
    
```

**Cuadro 5.10.**

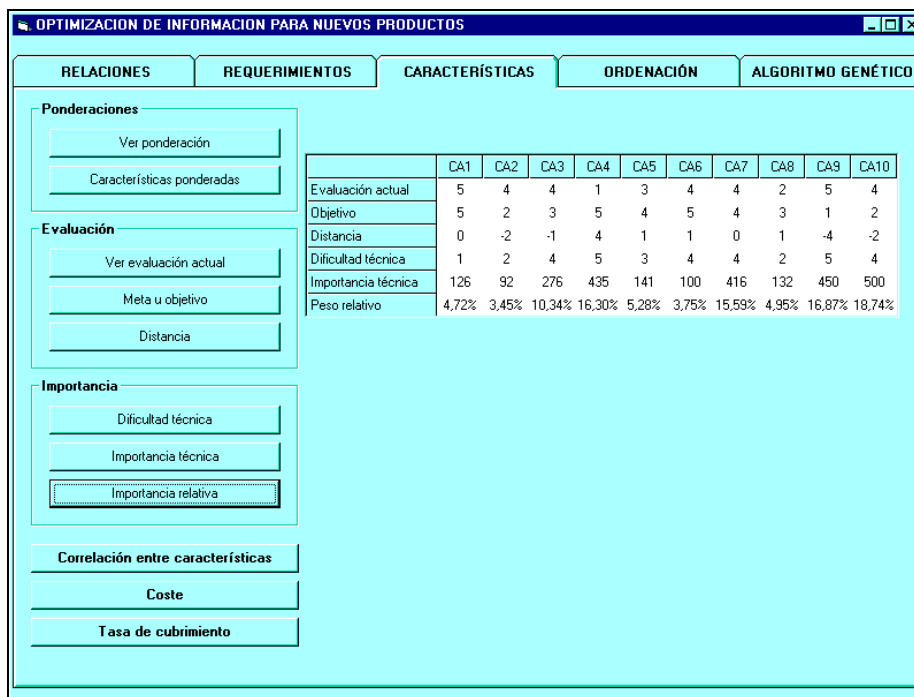


Figura 5.11.

#### 5.2.1.2.4. Correlación entre las características

Las posibles características a desarrollar en el nuevo producto que han sido apuntadas en el seno de la empresa, no siempre son independientes unas de otras sino más bien al contrario, entre las mismas pueden encontrarse sinergías o relaciones negativas que es necesario considerar a la hora de optar por unas determinadas características en detrimento de otras.

De forma similar a lo realizado con los requerimientos, se considera entonces la posibilidad de incorporar al modelo la correlación entre las características. En este sentido, la evaluación de esta variable se realizará mediante una valuación entre  $-1$  y  $1$  con la finalidad de recoger todo tipo de posibles relaciones. En el ejemplo de ilustración práctica se han establecido en concreto las siguientes relaciones que muestra la pantalla de la Figura 5.12.

#### 5.2.1.2.5. Tasa de cubrimiento de los requerimientos por parte de las características

La información sobre cuántos requerimientos son atendidos por cada característica puede ser relevante en aquellas circunstancias en que en base al resto de variables no sea posible o sea indiferente la elección entre dos o más características. Por este

motivo en el modelo se recoge esta información, cuyo proceso puede ser codificado de la forma que se refleja en el Cuadro 5.11. y que para el ejemplo que se está desarrollando queda como se muestra en la pantalla de la Figura 5.13.

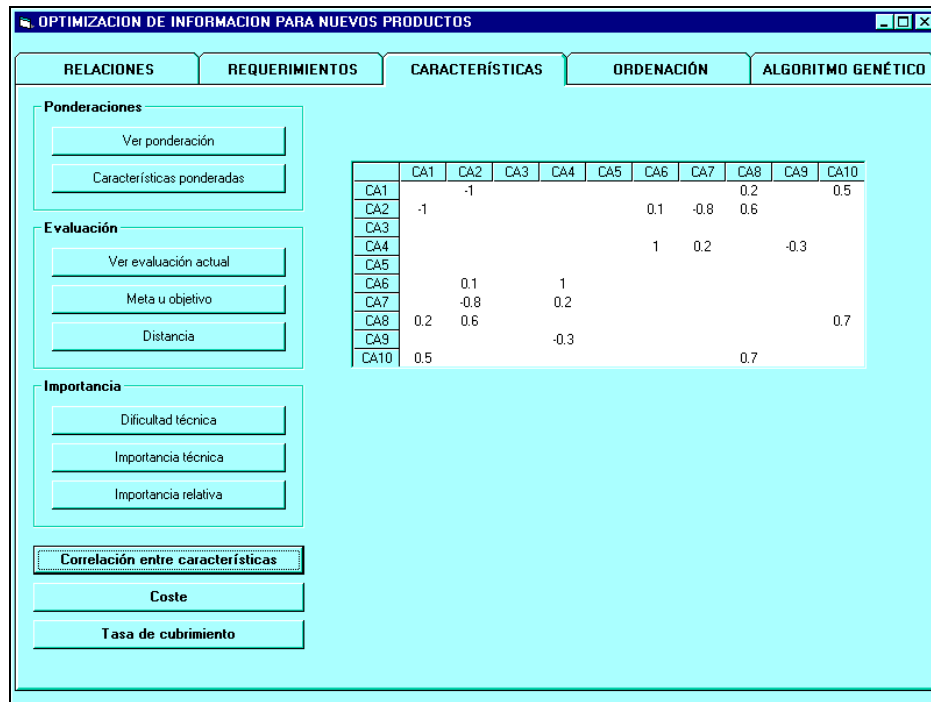


Figura 5.12.

```

*****
'Propósito:  Determinar, en función del número de requerimientos con que se relaciona,
              la tasa de cubrimiento de cada característica
'Entradas:   Matriz de relaciones
'Devuelve:   Tasa de cubrimiento de cada característica
*****

Para n = 1 hasta Número_de_características hacer
    Para m = 1 hasta Número_de_requerimientos hacer
        Establecer si existe relación del requerimiento con la característica
            - Si existe relación
                Determinar el grado de relación
                Realizar la suma de todos los requerimientos con ese grado
            - Si no existe relación, continuar con el siguiente requerimiento
        Establecer la tasa de cubrimiento para cada característica
    
```

Cuadro 5.11.

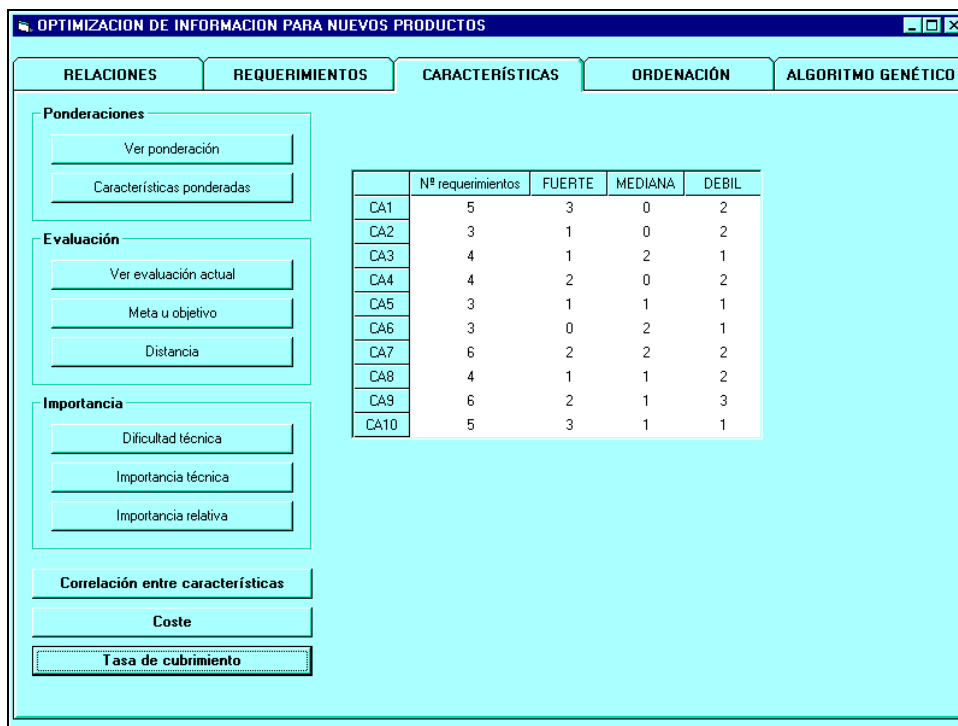


Figura 5.13.

#### 5.2.1.2.6. Ordenación de las características

La importancia total de las características puede establecerse en función de dos variables: el grado de importancia de las mismas o características ponderadas y la distancia entre la situación actual y el objetivo que la empresa establece para cada una de ellas.

Desde esta perspectiva, se puede proceder a ordenar las características en los cuatro grupos en que se han dividido las posibles situaciones, y cuya codificación podría formularse como se muestra en el Cuadro 5.12.

```

'*****
'Propósito:  Calcular en función de la ponderación y de la tasa de mejora de las caracte-
              rísticas una ordenación de las mismas
'Entradas:   Características ponderadas
              Tasa de mejora de las características
'Devuelve:   Ordenación en función de datos medios posibles de las características
'*****
    
```

<p>1. Determinar la importancia media</p> <p>Localizar las ponderaciones utilizadas para medir la relación entre características y requerimientos y calcular su media</p> <p>Multiplicar por el número de requerimientos</p>
<p>2. Determinar la tasa de mejora media</p> <p>Localizar las valoraciones utilizadas para determinar la tasa de mejora y calcular la media</p>
<p>3. Para <math>m = 1</math> hasta Número_de_características hacer</p> <p>Localizar su grado de importancia (características ponderadas)</p> <p>Establecer su tasa de mejora o distancia entre la situación actual y la situación de la competencia</p> <p>En función de los valores de cada característica, hacer</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Si importancia &lt; importancia media y tasa &lt; tasa media, clasificar la característica como "Cuestionable"</li> <li>- Si importancia &lt; importancia media y tasa &gt; tasa media, clasificar la característica como "Dormida"</li> <li>- Si importancia &gt; importancia media y tasa &lt; tasa media, clasificar la característica como "Oportunidad"</li> <li>- Si importancia &gt; importancia media y tasa &gt; tasa media, clasificar la característica como "Ganadora"</li> </ul>

**Cuadro 5.12.**

A su vez, si en lugar de utilizar los valores medios posibles o totales, tanto para la importancia como para la tasa de mejora, se realiza la ordenación en función de los valores actuales, es decir, en función de la información disponible en cada caso, el código del proceso podría ser el que se incluye en el Cuadro 5.13.

<p>*****</p> <p>'Propósito: Calcular en función de la ponderación y de la tasa de mejora de las características una ordenación de las mismas</p> <p>'Entradas: Características ponderadas Tasa de mejora de las características</p> <p>'Devuelve: Ordenación en función de datos medios actuales de las características</p> <p>*****</p> <p>1. Para <math>m = 1</math> hasta Número_de_características hacer</p> <p>Localizar la importancia actual de la característica</p>
--

- Sumar la importancia de la característica con la del resto de características  
 Calcular la media
2. Para  $n = 1$  hasta Número\_de\_características hacer  
 Localizar la tasa actual de la característica  
 Sumar la tasa actual de la característica con la del resto de características  
 Calcular la media
3. Para  $m = 1$  hasta Número\_de\_características hacer  
 En función de los valores de cada característica, hacer
- Si importancia < importancia media actual y tasa < tasa media actual, clasificar la característica como "Cuestionable"
  - Si importancia < importancia media actual y tasa > tasa media actual, clasificar la característica como "Dormida"
  - Si importancia > importancia media actual y tasa < tasa media actual, clasificar la característica como "Oportunidad"
  - Si importancia > importancia media actual y tasa > tasa media actual, clasificar la característica como "Ganadora"

Cuadro 5.13.

Por su parte, en su aplicación práctica al ejemplo concreto, la ordenación real quedaría como se muestra la Figura 5.14.

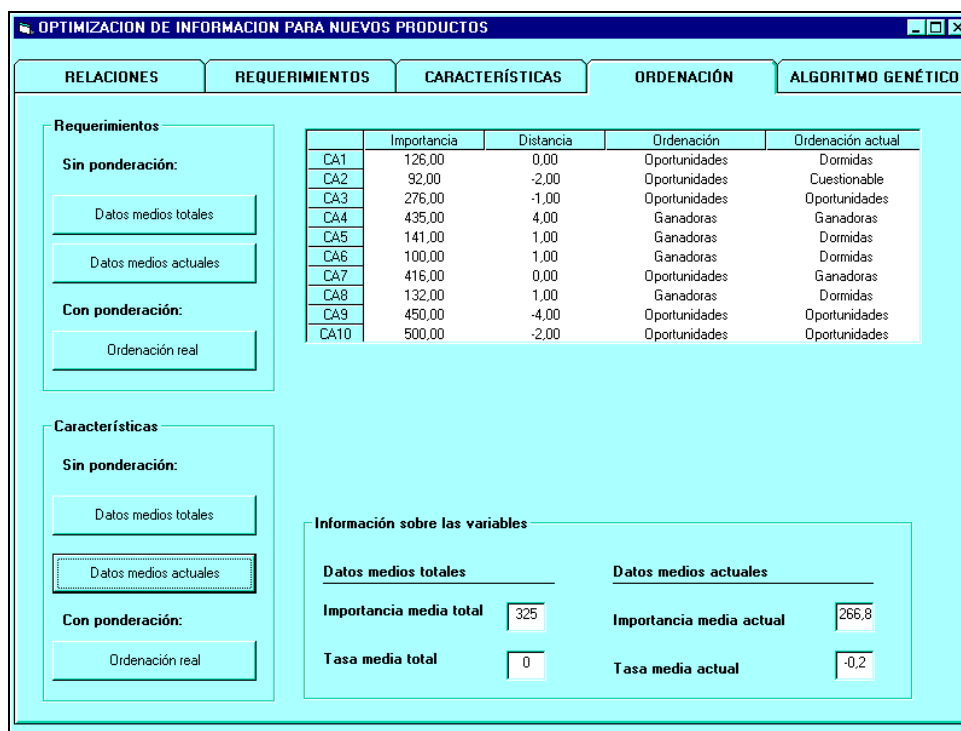


Figura 5.14.

En este punto cabe recordar que al igual que en el caso de los requerimientos, es posible establecer una ponderación distinta para la tasa de mejora de las características y para su importancia técnica, y en consecuencia se puede proceder a realizar una ordenación real de las mismas (TACU y STEFAN, 1996a). Este proceso es similar al expuesto en el apartado 2.1.1.5. del presente Capítulo, razón por la cual se omite la realización de consideraciones adicionales.

La codificación de este proceso quedaría como muestra el Cuadro 5.14.

*****	
'Propósito:	Calcular en función de la importancia técnica y de la tasa de mejora de las características una ordenación de las mismas
'Entradas:	Importancia técnica de las características Tasa de mejora de las características
'Devuelve:	Ordenación real de las características
*****	
1.	<i>Para m = 1 hasta Número_de_características hacer</i> Determinar el número de valores de la tasa de mejora distintos Determinar el número de valores de la importancia técnica distintos Calcular el mayor y el menor valor de la tasa de mejora Calcular el mayor y el menor valor de la importancia técnica
2.	<i>Para n = 1 hasta Número_de_características hacer</i> Establecer el orden de cada característica respecto a la tasa de mejora Establecer el orden de cada característica respecto a la importancia técnica
3.	Calcular la proporción que supone cada una de las dos variables en función de las ponderaciones introducidas
4.	<i>Para n = 1 hasta Número_de_características hacer</i> Establecer el orden real ponderando las dos variables en función de la proporción calculada en el paso anterior Ordenar las distintas características

**Cuadro 5.14.**

Y con la información disponible para la resolución del ejemplo de ilustración práctica, la ordenación real de las características quedaría como muestra la pantalla de la Figura 5.15.



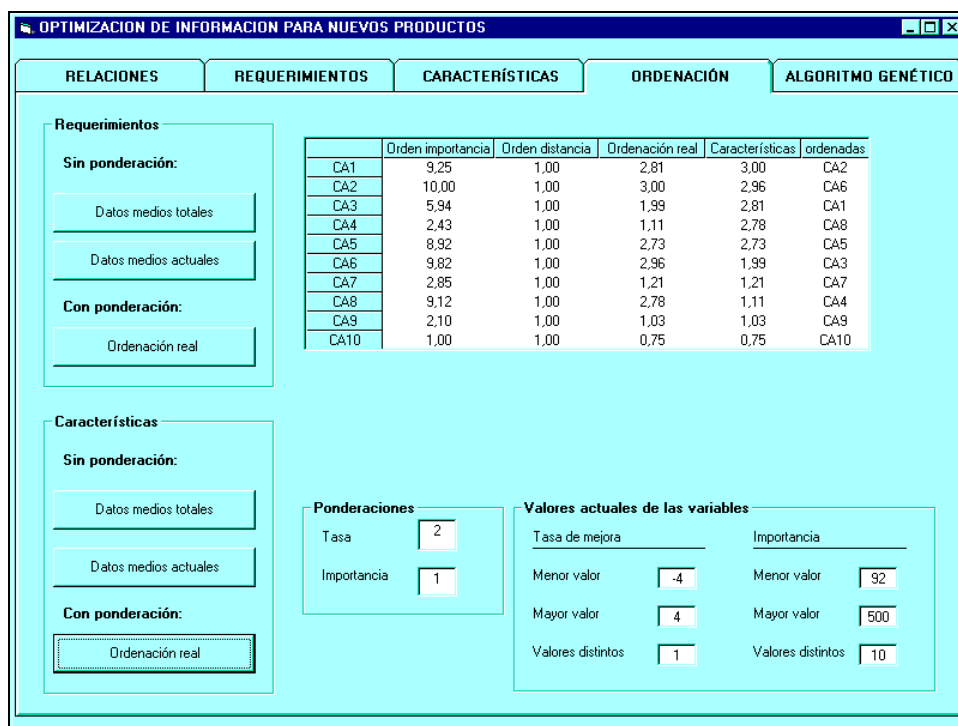


Figura 5.15.

#### 5.2.1.2.7. Coste de desarrollo de las características

Para finalizar con la información relativa a las características es necesario incorporar como variable relevante a considerar en la toma de decisiones el coste del desarrollo de cada una de ellas.

En este sentido, la información relativa al coste será uno de las variables más importantes en el momento de tomar la decisión sobre las características a incorporar en el nuevo producto, ya que los modelos construidos serán de aplicación en dos ámbitos de decisión, a saber: (i) se tratará de buscar la combinación óptima de características sujeta a una restricción presupuestaria o (ii) se tratará de establecer la mejor combinación entre un conjunto de características sustitutivas entre sí, en cuyo caso si bien no existe un límite en el presupuesto, sí que dicha combinación óptima deberá tratar de minimizar en lo posible el coste.

Por tanto, en un primer acercamiento en el modelo se recoge la información relativa al coste de desarrollo de las características en términos monetarios, en concreto los valores asignados a cada característica son los que se presentan en la pantalla de la Figura 5.16.

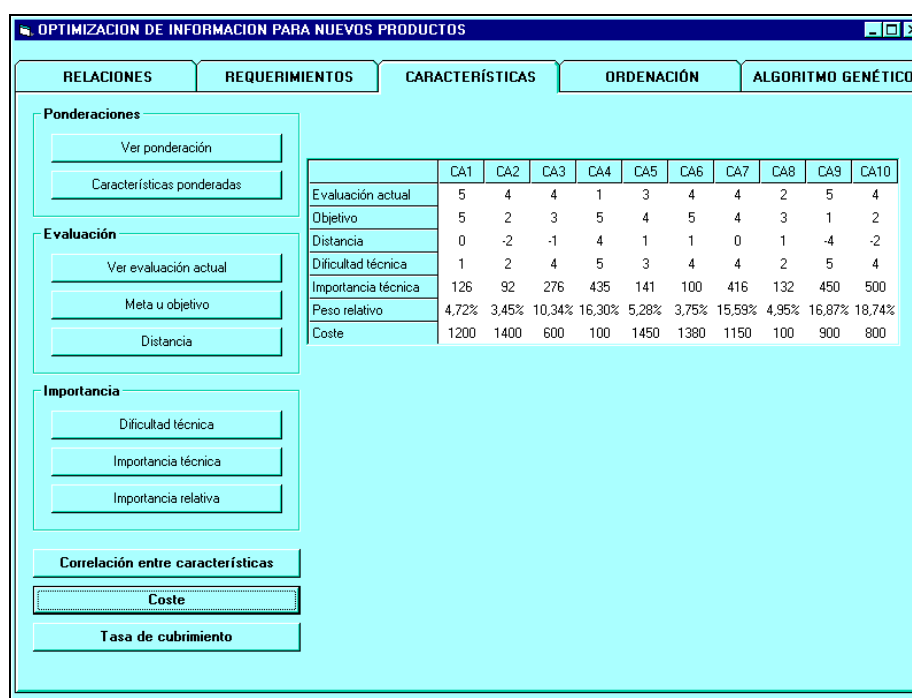


Figura 5.16.

Una vez analizada la información que incide en el modelo propugnado, en los apartados siguientes se trata de exponer la operativa y el procesamiento de construcción de un modelo basado en un algoritmo genético que permita, en las circunstancias descritas, establecer la combinación óptima de características a incorporar en el nuevo producto.

En el proceso de decisión de las características óptimas en principio se debe establecer un método que permita determinar la combinación que maximiza las relaciones existentes entre los requerimientos solicitados por los potenciales consumidores con dichas características.

Sin embargo, la decisión anterior puede verse afectada por algún tipo de restricción que incida en la posibilidad de llevar a cabo una determinada combinación de características, dentro de las cuales se analizan por su generalidad las dos siguientes:

- Restricción presupuestaria. El proceso de decisión del desarrollo de un nuevo producto generalmente se encuentra encuadrado dentro de un presupuesto límite o volumen de recursos disponibles para enfrentar dicho proceso.
- Características sustitutivas. Puede darse la circunstancia de que para el conjunto de posibles características a desarrollar se plantee la necesidad de optar entre varias de ellas que sean sustitutivas entre sí, pero que a priori, por la complejidad de las relaciones existentes sea imposible determinar la mejor de ellas.

En los apartados posteriores se analiza la construcción de un modelo, denominado AG-DNP-Crisp que, utilizando como mecanismo de optimización un algoritmo genético, permita afrontar la decisión de la combinación óptima de características a incorporar en un nuevo producto en términos de certeza (crisp), detallando las peculiaridades que presenta la implementación para su aplicación a los dos ámbitos de decisión anteriormente descritos.

### **5.2.1.3. Aplicación del modelo AG-DNP-Crisp a situaciones de restricción presupuestaria**

En este primer caso se parte de la base de que la empresa, para el desarrollo del nuevo producto, dispone de un volumen de recursos establecido a priori, de forma que la combinación óptima de características debe estar sujeta a dicha restricción presupuestaria.

En consecuencia, a continuación se realiza una breve descripción de los criterios utilizados para el desarrollo del AG así como de los parámetros necesarios para el funcionamiento del mismo, manteniendo para las variables del modelo similar tratamiento al considerado previamente.

#### **5.2.1.3.1. Codificación (alfabeto y longitud)**

La representación más comúnmente utilizada en la implementación de un algoritmo genético es la binaria, si bien las buenas propiedades de los mismos no dependen de su uso, razón por la cual será preciso analizar la codificación que más se ajuste a cada problema en concreto. De ahí que, para establecer la forma de codificación se han analizado las peculiaridades del problema de estudio, considerando el significado que se pretende tenga la solución ofrecida por el AG. De esta forma, teniendo en cuenta que la solución buscada debe establecer un número determinado de características que supongan una "buena" combinación, sin importar el orden de las mismas, se ha optado por una representación mediante vectores de números enteros, siendo en principio la longitud del mismo igual a  $m$ , es decir igual al número de características entre las que se puede optar y representando por tanto, cada número entero el "número" de la característica que se debería considerar en la decisión. En consecuencia, en el ejemplo de ilustración práctica que se está desarrollando, la longitud del vector será igual a 10, ya que es el número de posibles características a desplegar en el nuevo producto.

Entre las ventajas de esta codificación se encuentra la sencillez, es decir, la facilidad de aplicar el mecanismo de codificación objeto-individuo en ambos sentidos, ya que en este caso dicho mecanismo es automático, al representar cada número del vec-

tor el número de la característica correspondiente. Asimismo, este tipo de representación cumple el principio del alfabeto de símbolos mínimo, y permite una expresión más natural del problema.

### 5.2.1.3.2. Selección de la población inicial (operador de inicialización) y tratamiento de individuos no factibles

A tenor de las fases de desarrollo operativo del modelo AG-DNP-Crisp, en este apartado se trata de establecer el mecanismo que va a permitir generar los individuos que constituyen la población inicial. En principio se pretende que la población inicial sea lo más variada posible, de ahí que el principal criterio de selección de la población inicial es la elección aleatoria, salvo en los casos en los que se cuente con conocimiento específico en los cuales sería preferible incorporar al problema dicho conocimiento con la finalidad de elegir una población inicial factible y/o próxima al óptimo. No obstante, en el caso del ejemplo de la presente Memoria, en el tema de estudio se parte de la ausencia de conocimiento específico previo, razón por la cual se ha optado por una inicialización aleatoria, de forma que se generan tantas combinaciones de características como individuos tenga la población, cuyo número dependerá de los parámetros que se apliquen en el modelo y que se expondrán en apartados posteriores.

De acuerdo con lo anterior, la generación de soluciones iniciales podrá ser codificada de la forma que recoge el Cuadro 5.15.

```
*****
'Propósito:  Operador de inicialización. Generar soluciones iniciales
'Entradas:   Número de individuos
             Número de características
'Devuelve:   Individuos que constituyen la población inicial
*****

Para i = 1 hasta Número_de_individuos hacer
    Para m = 1 hasta Número_de_características hacer
        1. Elegir un número de característica al azar
        2. Comprobar si se encuentra en el cromosoma del individuo de que se trate:
            - Si no se encuentra, incluirla en la siguiente posición vacía
            - Si ya se encuentra, volver al paso 1 hasta
            Completar el cromosoma de cada individuo
```

Cuadro 5.15.

Asimismo, y como se indicó previamente, el problema que se pretende resolver mediante la construcción del AG está sometido a una restricción que viene determinada por el volumen de recursos disponibles para el desarrollo del nuevo producto. De esta forma, la combinación de características que se pueden llevar a cabo está sometida, mediante el coste de las mismas, a la necesidad de que dicha combinación se encuentre dentro de la restricción presupuestaria.

El tratamiento de dicha restricción se puede incorporar dentro de distintos criterios del AG, como son:

- En el cálculo de la evaluación de las distintas soluciones aportadas por el AG. En este caso, sólo se considerarían aquellas soluciones que, además de aportar la mayor adecuación o calidad para resolver el problema dentro de la generación que se esté evaluando, precisaran de un volumen de recursos debido a la combinación de características que recogiera, que fuera inferior al presupuesto. Esta opción, dada la codificación del problema no se podría llevar a cabo ya que las soluciones generadas están constituidas por todas las características.

Sin embargo, sí sería factible, a la hora de evaluar las soluciones, establecer la bondad de las mismas teniendo en cuenta que de la combinación aportada para cada solución sólo sería factible llevar a cabo las características para las que alcance el presupuesto. Se trata por tanto, comenzando por el inicio del cromosoma de ir acumulando el coste de las características hasta llegar al presupuesto y evaluar en consecuencia el individuo sólo hasta aquellas características que puedan ser desarrolladas desde la perspectiva del coste.

- En el momento de la generación de las soluciones iniciales, es decir, establecer tanto en la población inicial como en las sucesivas poblaciones obtenidas en cada generación, un mecanismo que impida que prosperen aquellos individuos que no son factibles (que no se encuentran dentro de la restricción). Este mecanismo consiste en aplicar una técnica de decodificación que modifique el superconjunto del dominio y aproxime las soluciones al dominio real posible.

Si bien cualquiera de las soluciones anteriores es posible, en el caso concreto de estudio se ha optado por eliminar los individuos no factibles desde el inicio del problema, más precisamente, se ha llevado a cabo un mecanismo que reduzca desde el principio la combinación de características al conjunto de características que se puedan desarrollar en base al coste. De esta forma, las soluciones iniciales son sometidas a evaluación desde el momento en que son generadas con la finalidad, no de eliminar a los individuos no factibles, sino de establecer hasta qué punto (hasta qué característica) son factibles teniendo presente la escasez de recursos. Para ello, se procede a acumular el coste de cada solución comenzando por el primer número del vector de

números enteros que representa la solución. Dicha acumulación se continúa hasta que, en base al coste de las características que representan los números del vector, se sobrepase el presupuesto. A partir de este punto se considera que el resto de valores del vector representativo de cada solución es 0.

Al objeto de facilitar la comprensión del tratamiento de los individuos no factibles, supóngase, por ejemplo, una solución inicial para 5 posibles características representadas por el vector siguiente:

2	1	5	4	3
---	---	---	---	---

Si se establece un presupuesto de 20 u.m. y unos costes de desarrollo de cada característica como los que se detallan:

Coste	CA <sub>1</sub> = 10	CA <sub>2</sub> = 8	CA <sub>3</sub> = 5	CA <sub>4</sub> = 2	CA <sub>5</sub> = 12
-------	----------------------	---------------------	---------------------	---------------------	----------------------

La conversión de las soluciones iniciales en factibles, daría lugar a una representación del individuo factible como la siguiente:

2	1	0	0	0
---	---	---	---	---

Este mecanismo se deberá repetir para cada generación, ya que al actuar los operadores de cruce y mutación la posición que cada característica ocupa en el vector de números enteros que simula la solución puede cambiar y, con ello, el coste acumulado siguiendo el orden del vector.

El pseudo-código utilizado para la implementación de este mecanismo se recoge en el Cuadro 5.16.

```

*****
'Propósito:  Modificar las soluciones iniciales para que sean soluciones factibles en base
              al presupuesto
'Entradas:   Soluciones iniciales
              Coste de las características
              Restricción presupuestaria
'Devuelve:  Individuos que constituyen la población inicial factible
*****

Para i = 1 hasta Número_de_individuos hacer
    Para m = 1 hasta Número_de_características hacer
    
```

1. Localizar el coste de las distintas características por el orden en que se encuentran dentro de la solución, comenzando por la primera
2. Acumular el coste de la misma como coste del individuo
3. Comparar el coste del individuo con el presupuesto:
  - Si es inferior, continuar con el paso 1
  - Si es superior, ir al paso 4
4. Poner 0 en el lugar que ocupaba la característica evaluada

**Cuadro 5.16.**

De acuerdo con lo anterior, en el modelo se ha optado por incluir tan sólo aquellas características que sea posible desarrollar atendiendo al coste. Por este motivo, cada solución, siendo factible, tendrá un coste de desarrollo distinto de otras soluciones factibles, el cual no tiene por qué coincidir con el presupuesto, pero que siempre será inferior a él.

En este punto cabe plantear la posibilidad de establecer que las características puedan ser cumplidas de forma parcial, es decir, que el coste asignado a la última característica no se corresponda con la opción máxima para su desarrollo, sino que sea posible asignar recursos a una característica sin necesidad de que sea su coste total. Esta circunstancia provocaría en el modelo que, si bien el coste de una característica evaluada provoque que se supere el presupuesto y, por tanto, que no se pueda llevar a cabo en su totalidad, en lugar de eliminarla de la solución factible, se establezca el grado con dicha característica es atendida, entendiendo por tal el porcentaje de recursos disponibles (hasta alcanzar el presupuesto) sobre el coste total de dicha característica. Esta forma de proceder haría que en la fase de evaluación de las posibles soluciones se debería tener en cuenta el grado con que se puede cumplir dicha característica y, en consecuencia, la evaluación tanto positiva como negativa para este tipo de características se consideraría solamente en dicho grado o porcentaje.

Sin embargo, en el modelo se ha desestimado dicha posibilidad por varios motivos, principalmente los dos siguientes: en primer lugar, la idea de un cumplimiento o desarrollo parcial de una característica no es generalizable, es decir, se entiende que para desarrollar un nuevo producto se estima que si se lleva a cabo una característica, se supone que se soporta el coste asociado a la misma, o por el contrario si se desestima dicha característica esto implica que no se incluya en el desarrollo del producto. En general, resulta muy difícil que se pueda establecer un desarrollo parcial, o incluir una determinada característica en el producto de forma parcial.

En segundo lugar, si una misma característica se puede incluir dentro del nuevo producto con parámetros distintos que hagan que el coste de la misma sea distinto

según el valor de dichos parámetros, sería factible incorporarla al modelo como dos características distintas, sin más que añadir la restricción de que ambas no puedan ser desarrolladas a la vez, es decir, se trataría como un caso de características sustitutivas y, en consecuencia, sería aplicable otro tipo de restricción.

Por tanto, en el modelo construido se ha optado por incluir características completas, esto es, cuando se pueden atender en función de su coste y del presupuesto en forma global, lo que provoca que en la mayoría de las circunstancias quede un remanente del presupuesto. De ahí que junto con la bondad de cada solución, se aporta a título informativo el coste de desarrollo que supone y, por diferencia, la parte del presupuesto que no es utilizada. De esta forma, ante soluciones con una calidad o adecuación similar siempre se podrá optar por aquellas que supongan una inversión menor.

#### **5.2.1.3.3. Cálculo de la adecuación de las soluciones iniciales**

La medición de la calidad de una solución viene dada por la función de adecuación, de ahí que de su definición y estructura dependa en buena medida el resultado del proceso de optimización que desarrolle el AG.

La función de evaluación se establece como el objetivo a maximizar mediante la utilización del AG. Por tanto, el paso previo consistirá en establecer una función que reúna toda la información disponible sobre el problema a que se ha hecho referencia en los apartados anteriores.

En un primer acercamiento, y de acuerdo con todo lo anterior, se trata de establecer una función que permita medir la bondad de una combinación de características respecto a los siguientes conceptos:

- Importancia de las características reflejadas en dicha combinación.
- Distancia entre la situación actual y el objetivo o meta para las características que se recogen en cada solución.
- Dificultad técnica de desarrollar dichas características.
- Correlación entre las características que se lleven a cabo.
- Importancia de los requerimientos con los que se encuentran relacionadas dichas características.
- Nivel de mejora o distancia resultante de la evaluación comparativa de los requerimientos con los que se encuentran relacionadas dichas características.



- Correlación entre los requerimientos que se relacionan con dichas características.

La función de adecuación debe reflejar todas las variables anteriores y las relaciones entre ellas. En principio, y dado que los AGs maximizan aptitudes, se admite por defecto que maximiza el objetivo. Sin embargo, en ciertas circunstancias es posible que sea un problema de minimización del objetivo, en cuyo caso, de acuerdo con lo comentado en el Capítulo 2, bastará con considerar la función de evaluación como el inverso de la función inicial.

En el caso del ejemplo de estudio, y dado que la medida de la calidad de cada solución deberá recoger todas las variables antes mencionadas, se ha planteado que la función de adecuación sea una agregación del valor de cada solución factible en cada una de las variables. Esta decisión tiene varias implicaciones que merecen una descripción detallada, a saber:

1. Objetivo respecto a cada variable. En primer lugar, será preciso realizar un análisis de la información disponible para cada variable y establecer la posición respecto a la misma, es decir, determinar si se pretende maximizar o minimizar los valores de dicha variable. En estas situaciones es posible trabajar con dos opciones:
  - a. Calcular la inversa de la valoración que se obtenga para dicha variable en la solución.
  - b. Incluir la valoración de esa variable en la función de adecuación con signo inverso, es decir, dado que la función de adecuación se plantea como una suma, las variables que se encuentran en este caso se incluirán en la misma con signo negativo.

Un ejemplo típico de este tipo de situaciones cabe encontrarlo en la variable "situación actual" de las características técnicas, analizado en el apartado 5.2.1.2.2. y que determina la distancia o nivel de mejora para cada característica. El cálculo del valor de esta variable se puede realizar como "situación actual - objetivo", en cuyo caso la empresa debería incidir en aquellas características con signo negativo, ya que serían aquellas en las que se encuentra "peor" situada y, por tanto, la adecuación de una solución respecto a esta variable será mejor cuanto menor sea el valor de la misma. En estas circunstancias se podría añadir a la función de adecuación restando (para que los valores negativos incrementen la adecuación de la solución) o bien, en un paso previo, calcular la inversa de la información de esta variable de forma que pueda incluirse en la función de adecuación como el resto de valores sumando.

2. Significado del valor de la información de las distintas variables. De acuerdo con lo anterior, la función de adecuación se establece como una suma de valores diversos, que se encuentran dentro de dominios distintos, y cuya valoración dependerá en buena medida de la forma de obtener la información.

Este hecho provoca que si no se tiene en consideración los distintos dominios de cada variable, el peso relativo de la información que se utiliza para medir la calidad de cada solución será distinto para cada variable por causas ajenas al objetivo que se pretende alcanzar. Por ejemplo, si las variables "Importancia de las características" y "Dificultad técnica" pueden tener valores entre 0 y 50 y entre 0 y 5, respectivamente, y ambas se desean maximizar, una posible solución que tenga una valoración respecto a la primera variable de 12 y respecto a la segunda de 0, tendrá una adecuación total de 10; mientras que una solución que tenga un valor para ambas variables de 5, tendrá una adecuación total de 10. En estas circunstancias se optaría por la primera solución. Sin embargo, un análisis detallado pone de manifiesto que respecto a la "importancia", ambas características están muy próximas y ambas con valores relativamente bajos, pero que respecto a la "dificultad", la primera solución no es relevante (no aporta nada) mientras que la segunda aporta el máximo posible y, no obstante, no sería la opción elegida.

Al objeto de minimizar este inconveniente, es necesario homogeneizar la información que se utilice como base para medir la bondad de las soluciones. Para ello, y con independencia del dominio de cada variable, se ha de normalizar dicha información, haciendo coincidir los dominios de todas las variables que se incluyen en el modelo.

En aras al mantenimiento de la mínima generalidad deseable en la aplicación operativa del modelo propugnado, se ha optado por realizar una homogeneización para el dominio [0, 1], con lo que los valores relativos a todas las variables se normalizan en dicho dominio antes de su inclusión en la función de adecuación. Asimismo, esta forma de operar permite que aquellas variables que puedan tomar valores positivos y/o negativos puedan incorporarse dentro del mismo dominio, sin más que normalizar entre [-1, 1].

En consecuencia, toda la información disponible para ser incorporada en el modelo deberá ser sometida a un proceso de normalización, el cual se realiza de la forma siguiente:

- a) Normalización para el dominio [0, 1]:

$$\text{Valor normalizado} = \frac{(\text{valor actual} - \text{mínimo})}{(\text{máximo} - \text{mínimo})}$$

b) Normalización para el dominio [-1, 1]:

$$\text{Valor normalizado} = 2 \times \frac{(\text{valor actual} - \text{mínimo})}{(\text{máximo} - \text{mínimo})} - 1$$

El proceso de normalización en sí mismo no plantea ningún problema desde el punto de vista práctico. Sin embargo, al objeto de llevarlo a cabo se establecen dos opciones respecto al dominio a considerar para proceder a calcular los valores mínimo y máximo, a saber: (i) utilizar el dominio total posible de cada variable y (ii) considerar el dominio total actual de cada variable.

En el presente modelo se ha optado por utilizar los valores actuales de las variables para establecer el dominio de las mismas. El motivo que subyace es que en principio se trata de establecer las características que se deben desarrollar que maximicen la actual situación de la empresa y, por tanto, el problema se plantea en un contexto determinado, es decir, se trata de optimizar la situación actual con la información de la que se dispone en este momento.

De acuerdo con lo anterior, en el momento de homogeneizar la información relativa a cada una de las variables antes de ser considerada, el modelo desarrollado deberá localizar el valor máximo y mínimo de los existentes en la información y normalizar el resto de valores en base a éstos.

En los apartados siguientes se procede a realizar una descripción acerca del significado de cada una de las variables comentadas con anterioridad, así como de la codificación utilizada en el modelo para proceder a su normalización antes de su inclusión en la función de adecuación.

## **A. INFORMACIÓN SOBRE LAS CARACTERÍSTICAS**

### **1.a. Información sobre las características: Importancia**

El valor de las características ponderadas determinada en el apartado 2.1.2.1. del presente Capítulo pone de manifiesto la importancia de cada característica en función de la relación mantenida con los requerimientos, del grado de dicha relación y de la importancia que tienen dichos requerimientos. En consecuencia, esta variable deberá ser incluida en la función de adecuación sin sufrir ningún tipo de transformación: cuanto mayor sea el valor de la solución factible en esta variable, mejor será la calidad de dicha solución. Por tanto, sólo será preciso normalizar la información, para lo cual puede procederse a la codificación que se indica en el Cuadro 5.17.

<pre> ***** 'Propósito: Homogeneizar la información correspondiente a la importancia de las características 'Entradas:  Importancia de las características (características ponderadas) 'Devuelve: Información a incluir en la función de adecuación relativa a la importancia de las características *****  Para m = 1 hasta Número_de_características hacer     Localizar el valor máximo de la importancia de las características     Localizar el valor mínimo de la importancia de las características     Homogeneizar todos los valores de la importancia cuantificada de las características en base a los valores máximo y mínimo anteriormente localizados         </pre>
---

**Cuadro 5.17.**

## 2.a. Información sobre las características: Situación actual

La evaluación competitiva de la empresa respecto a las características establecida en el apartado 2.1.2.2. del presente Capítulo ha sido determinada estableciendo la distancia entre el valor previsto o deseado para cada característica y la situación actual de la misma reconocida por los ingenieros, de ahí que los valores positivos de dicha variable ponen de manifiesto situaciones en las que es necesario mejorar, es decir, características sobre las que sería deseable incidir con el fin de disminuir dicha distancia. Por el contrario, valores negativos de dicha variable reconocen características que no es necesario priorizar.

Esta circunstancia merece especial mención en cuanto a su inclusión en la función de adecuación, ya que es posible plantearse las siguientes opciones:

- a. Reflejar todas las características de la solución factible, es decir, con independencia de los valores obtenidos, incluir en la función de adecuación la distancia tanto positiva como negativa.
- b. Recoger solamente valores positivos de esta variable, esto es, sólo aquellas soluciones factibles que actúen sobre características en las que es necesario incidir en base a la su distancia respecto a la competencia aumentarán su calidad, es decir, incrementarán el valor de la adecuación de la solución que se evalúa.

La forma de proceder en función de la opción elegida será distinta, pues en el primer caso, si se recoge esta variable con independencia del valor positivo o negativo,

implica a su vez plantearse el problema de la normalización, que podrá llevarse a cabo, a su vez, desde dos perspectivas:

- a.1. Homogeneizar los valores entre 0 y 1. Esto significaría que los valores negativos quedarían recogidos entre 0 y 0'5 y los valores positivos entre 0'5 y 1. En consecuencia, esta variable incrementaría la adecuación de las soluciones cuando fuera superior a 0'5 y disminuiría la adecuación con valores inferiores a 0'5.
- a.2. Homogeneizar los valores entre -1 y 1. En este caso se conseguiría que el peso de esta variable fuera similar al resto de variables, ya que en cualquier caso seguiría moviéndose dentro del intervalo genérico establecido para todas las variables.

Sin embargo, dado el objetivo de mantener todas las variables del modelo dentro de los mismos términos, no parece que la primera solución satisfaga dicho requerimiento, ya que en realidad se trataría de una variable que se movería entre 0'5 y 1, ya sea de forma positiva o negativa. Por este motivo, en el modelo propugnado se ha planteado la segunda opción en aras a evitar este inconveniente.

Asimismo, conviene observar que en la perspectiva a.1., el hecho de que una solución atienda a características que en este momento se encuentren en una situación "mejor" que la competencia no parece motivo para que la misma se vea penalizada, es decir, para que en la medida de su adecuación se vea disminuida por esta variable.

Las consideraciones anteriores hacen que la opción elegida para incorporar esta variable en la función de adecuación haya sido incrementar solamente el valor de aquellas soluciones con características que presenten valores positivos en la evaluación competitiva, de forma que en principio las soluciones que recojan características con una distancia menor o igual que 0 no se consideraría prioritario destinar recursos a las mismas, pero tampoco deberían ser penalizadas por esta circunstancia.

Por tanto, la distancia sólo es relevante cuando hay posibilidades de mejora en dicha característica, esto es, cuando el valor de la distancia es positivo. Sin embargo, las características con una distancia 0, siguiendo las consideraciones anteriores, se consideran similares a las que tienen valores negativos, ya que una distancia nula significa que la evaluación competitiva pone de manifiesto que la empresa se encuentra situada igual que la competencia y por tanto, tampoco resulta prioritaria su mejora. Esta consideración es importante en aras al cálculo del valor mínimo, ya que de ser así se considerará que el valor mínimo es el menor de los positivos y mayores que cero, y tras la normalización existirá al menos una característica que se asemeje al resto de las que tienen distancias negativas, al convertirse su valor normalizado en cero. De ahí que para evitar que características en las que es necesario mejorar (que tienen distancias

positivas) se asemejen a características con distancias negativas o nulas, el dominio actual se establece entre 0 y el mayor valor de la distancia. De esta forma se consigue que aquella característica con un valor pequeño pero positivo, incremente la adecuación de las soluciones en las que aparezca, ya que si bien es cierto que la situación de la empresa es relativamente buena, existen posibilidades de mejora.

La codificación para llevar a cabo la normalización de esta variable es la recogida en el Cuadro 5.18.

*****	
'Propósito:	Homogeneizar la información correspondiente a la evaluación competitiva
'Entradas:	Situación actual de las características
'Devuelve:	Información a incluir en la función de adecuación relativa a la situación actual de las características
*****	
<i>Para m = 1 hasta Número_de_características hacer</i>	
Localizar el valor máximo de la situación actual de las características	
Localizar los valores de la situación actual de forma que:	
- Para valores positivos, homogeneizar todos los valores de la evaluación competitiva de las características en base al valor máximo anteriormente localizado y tomando como valor mínimo el cero	
- Para valores negativos o nulos, poner a cero la situación actual	

**Cuadro 5.18.**

### **3.a. Información sobre las características: Dificultad técnica**

La dificultad técnica de desarrollo de las características, como se comentó en el apartado 2.1.2.3., se encuentra evaluada entre 1 y 5, de menor a mayor dificultad.

En principio la normalización de esta variable es similar a los casos comentados con anterioridad. Sin embargo, para su inclusión en la función de adecuación es necesario analizar el significado de la misma.

Los valores normalizados de la dificultad técnica se aproximarán a la unidad cuanto mayor sea el grado de dificultad de desarrollo de la característica, siendo cercanos a cero para características de fácil desarrollo técnico. En consecuencia, antes de acumular el valor de esta variable a la función de adecuación será preciso establecer el complementario, de forma que soluciones que incorporen características de alta dificultad (y por tanto próximas a la unidad) acumulen menos calidad por medio del com-

plementario, y a la inversa para las soluciones con características de baja dificultad técnica.

La codificación de esta información se ha planteado mediante el pseudo-código recogido en el Cuadro 5.19.

```

'*****
'Propósito: Homogeneizar la información correspondiente a la dificultad técnica de las
              características
'Entradas: Dificultad técnica
'Devuelve: Información a incluir en la función de adecuación relativa a la dificultad de
              desarrollo de las características
'*****

Para m = 1 hasta Número_de_características hacer
    Localizar el valor máximo de la dificultad técnica de las características
    Localizar el valor mínimo de la dificultad técnica de las características
    Homogeneizar todos los valores de la dificultad técnica de las características en ba-
    se a los valores máximo y mínimo anteriormente localizados
    Calcular el complementario de los valores normalizados
    
```

**Cuadro 5.19.**

Conviene recordar, no obstante, que si bien es posible utilizar la información de la dificultad técnica para establecer la “importancia técnica” de las características, se ha optado por reflejar en la función de adecuación las variables “importancia” y “dificultad técnica” de forma separada, si bien se reconoce la utilidad de la “importancia técnica” como medida conjunta del efecto de ambas variables.

**4.a. Información sobre las características: Correlación entre ellas**

Las posibles relaciones existentes entre las características se encuentran valoradas entre -1 y 1 con la finalidad de poder reflejar relaciones negativas, de ahí que la inclusión en la función de adecuación de esta variable no precisa realizar ninguna modificación en la información inicial.

Sin embargo, a diferencia del resto de variables analizadas hasta el momento, la información relativa a la correlación entre las características está relacionada de forma directa con la solución factible que se desee evaluar en cada momento. Esto es así en la medida en que no todas las características van a ser llevadas a cabo sino sólo aquellas que recoja la mejor solución y, por tanto, deberán reflejarse las relaciones existen-

tes entre las características que efectivamente sean desarrolladas, desechando por tanto la información relativa a las relaciones que dichas características tengan con aquellas que no se vayan a hacer efectivas.

De acuerdo con lo anterior, y dependiendo de las características que recoja cada solución, será necesario establecer un valor para dicho conjunto de características, es decir, la correlación entre características vendrá establecida de forma específica para cada solución, dependiendo de la combinación que aparezca en la misma. Por tanto, si bien no es necesario realizar ninguna modificación en la información primaria, sí es necesario establecer el proceso de acumulación de la correlación para las características presentes en la solución que se está evaluando.

El pseudo-código para proceder a realizar el proceso anterior se recoge en el Cuadro 5.20.

```
*****
'Propósito:  Determinar la correlación entre las características que se recogen en cada
              solución
'Entradas:   Correlación entre características
'Devuelve:  Información a incluir en la función de adecuación relativa a la correlación
              entre características de la solución que se está evaluando
*****

Para i = 1 hasta Número_de_individuos hacer
  Para m = 1 hasta Número_de_características hacer
    Para m' = 1 hasta Número_de_características hacer
      1. Si m y m' se encuentran en la solución factible:
        - Localizar su valor de correlación
        - Sumar para conocer la correlación de cada solución
      2. Si m y/o m' no están en la solución factible, continuar
```

**Cuadro 5.20.**

## **B. INFORMACIÓN SOBRE LOS REQUERIMIENTOS**

Como es conocido, en el tema de estudio la solución que se desea evaluar recoge una determinada combinación de características. Por tanto, toda la información relativa a los requerimientos dependerá en gran medida de las características que se vayan a desarrollar, ya que el nexo de unión entre la solución y los requerimientos es la relación que éstos últimos puedan tener con las características que recoja en cada caso la solución.



A este respecto, aún cuando se precisa homogeneizar toda la información relativa a los requerimientos, su inclusión en la función de adecuación dependerá de que la solución presente características que se relacionen con los mismos. En caso contrario, es decir, para requerimientos que no tienen relación con ninguna de las características que aparecen en la solución, su información será irrelevante pues no se va a llevar a cabo ninguna característica que le afecte positiva o negativamente. De ahí que, en primer lugar, se tratará de hacer homogénea toda la información relativa a los requerimientos (importancia de los mismos, evaluación comparativa y correlación entre ellos) para, con posterioridad, reflejar toda esta información en una sola variable que se incorporará en la función de adecuación, dependiendo de si el requerimiento se encuentra o no relacionado con alguna de las características que recoge la solución que se evalúa.

### 1.b. Información sobre los requerimientos: Importancia

En lo que hace referencia directa a la importancia de los requerimientos, en función de la información obtenida tal y como se explica en el apartado 2.1.1.1. del Capítulo 5, conviene proceder a su normalización de forma similar al resto de variables, para lo cual se puede realizar la codificación que se muestra en el Cuadro 5.21.

<pre> ***** 'Propósito: Homogeneizar la información correspondiente a la importancia de los requerimientos 'Entradas:  Requerimientos ponderados 'Devuelve: Información relativa a la importancia de los requerimientos *****  Para n = 1 hasta Número_de_requerimientos hacer     Localizar el valor máximo de la importancia de los requerimientos     Localizar el valor mínimo de la importancia de los requerimientos     Homogeneizar todos los valores de la importancia de los requerimientos en base a los valores máximo y mínimo anteriormente localizados                 </pre>
--

**Cuadro 5.21.**

### 2.b. Información sobre los requerimientos: Evaluación comparativa

La evaluación comparativa de la visión que tienen los clientes del cumplimiento de sus requerimientos por parte de la empresa respecto a la competencia se ha calculado, de acuerdo con lo analizado en el apartado 5.2.1.1.2., como la distancia entre

la visión sobre la competencia y la situación actual de la empresa, y dado que el significado de esta información es similar a la evaluación comparativa analizada anteriormente para el caso de las características, la forma de actuar con esta variable es la misma que la que comentó en el caso anterior.

De esta forma, sólo se considera relevante la información relativa a requerimientos en los que sea necesario incidir, es decir, aquellos cuya evaluación establezca un resultado positivo. Por tanto, su codificación es similar a la expresada para el caso de las características, tal como se indica en el Cuadro 5.22.

<pre>'***** 'Propósito: Homogeneizar la información correspondiente a la evaluación comparativa 'Entradas: Situación actual de los requerimientos 'Devuelve: Información relativa a la evaluación de los requerimientos '*****  <i>Para n = 1 hasta Número_de_requerimientos hacer</i>     Localizar el valor máximo de la situación actual de los requerimientos     Localizar el valor mínimo, mayor que cero, de la situación actual de los requerimientos     Localizar los valores de la situación actual de forma que:     - Para valores positivos, homogeneizar todos los valores de la evaluación comparativa de los requerimientos en base al valor máximo y mínimo anteriormente localizados     - Para valores negativos o nulos, poner a cero la situación actual</pre>
--

**Cuadro 5.22.**

### **3.b. Información sobre los requerimientos: Correlación entre ellos**

En principio, la información relativa a la correlación entre los requerimientos, al venir establecida en el intervalo [-1, 1], no deberá ser sometida a ninguna modificación, pues su evaluación inicial refleja los valores homogeneizados del resto de variables. No obstante, será preciso calcular la correlación de un requerimiento con todos los demás, dado que si un requerimiento va a ser atendido debido a que en la solución se encuentra alguna característica que se relaciona con él, este hecho va a incidir de forma positiva o negativa en todos los requerimientos relacionados con él. Es decir, al contrario de lo señalado en el caso de la correlación entre características, los requerimientos siempre existen, es decir, no dependen de la solución (de las características que se desarrollen o no), puesto que son demandas de los clientes que deben tratar de cumplirse.

En consecuencia, en el momento de calcular la correlación de los requerimientos se analizará la relación de cada uno de ellos con todos los demás, con independencia de las características que incidirán, con posterioridad, en el hecho de que un requerimiento, con toda su información, se incluya o no en la función de adecuación.

Por tanto, en este punto procede calcular la correlación de los requerimientos, cuya codificación se incluye en el Cuadro 5.23., de la forma siguiente:

```
*****
'Propósito:  Determinar la correlación de un requerimiento con todos los demás
'Entradas:   Correlación entre los requerimientos
'Devuelve:  Información relativa a la correlación de los requerimientos
*****

Para n = 1 hasta Número_de_requerimientos hacer
  Para n' = 1 hasta Número_de_requerimientos hacer
    Establecer si existe relación entre n y n':
      - Si existe relación, sumar el grado de correlación de ambos requerimientos
        para conocer la correlación total del requerimiento n
      - Si no existe relación, continuar con el requerimiento n'
```

**Cuadro 5.23.**

#### **4.b. Resumen de la información sobre los requerimientos**

Como se comentó con anterioridad, la información relativa a los requerimientos no es independiente de la solución que se está evaluando. De hecho, la inclusión o no de la valoración de un requerimiento en la evaluación de las soluciones dependerá de que el mismo se relacione con alguna de las características que refleja cada solución, de ahí que, antes de proceder a estimar el valor con el que los requerimientos afectarán a la bondad de la misma, en primer lugar será preciso agregar toda la información por la que el mismo se puede ver afectado para, con posterioridad, incluirlo o no en la medida de la adecuación de la solución.

Dado que la importancia en la función de adecuación de un requerimiento viene determinada por las características con las que el mismo se relacione, en el modelo propugnado se procede a agregar la información de los requerimientos para cada característica, de forma que si una característica se encuentra en la solución factible se incrementará (o disminuirá) la bondad de dicha solución en base a toda la información de los requerimientos con que dicha característica se relaciona.

Asimismo, y de forma similar al resto de las variables que inciden en la decisión, será preciso normalizar la información relativa a los requerimientos, razón por la cual es necesario reflejarla en primer término respecto a las características con la finalidad de conocer el dominio actual de esta información.

Por tanto, a continuación procede calcular, para cada característica, la importancia, la situación y la correlación entre los requerimientos con que dicha característica se relacionan, para con posterioridad proceder a la homogeneización de esta información de forma análoga al resto de variables.

De acuerdo con lo anterior, en este apartado cabe hacer la consideración de establecer si la característica se relaciona o no con el requerimiento, con independencia del grado de dicha relación (Fuerte, Mediana o Débil). El motivo es que la importancia de dicha relación queda reflejada ya desde el punto de vista de las características en la variable que establece la importancia de las mismas y desde la perspectiva de los requerimientos en la variable que establece los requerimientos ponderados, esto es, en este caso ya no se trata de ponderar el grado de relación sino de establecer si al desarrollar una característica se afecta a un requerimiento o no.

La codificación del procedimiento de evaluación de la importancia de los requerimientos es el que muestra el Cuadro 5.24.

```
*****
'Propósito:  Determinar la importancia de los requerimientos desde la perspectiva de las
              características con que se encuentra relacionado
'Entradas:   Importancia normalizada de los requerimientos
'Devuelve:   Para cada característica, importancia de los requerimientos con que se rela-
              ciona
*****

Para m = 1 hasta Número_de_características hacer
    Para n = 1 hasta Número_de_requerimientos hacer
        Establecer si existe relación con dicho requerimiento
        - Si existe relación, sumar la importancia de dicho requerimiento para cal-
          cular el total de la característica
        - Si no existe relación, continuar con el siguiente requerimiento
```

**Cuadro 5.24.**

A su vez, la codificación para la evaluación comparativa de los requerimientos se puede observar en el Cuadro 5.25.

```

'Propósito:  Determinar la situación de los requerimientos desde la perspectiva de las
              características con que se encuentra relacionado
'Entradas:   Evaluación comparativa de los requerimientos
'Devuelve:   Para cada característica, situación actual de los requerimientos con que se
              relaciona
'*****

Para m = 1 hasta Número_de_características hacer
    Para n = 1 hasta Número_de_requerimientos hacer
        Establecer si existe relación con dicho requerimiento
        - Si existe relación, sumar la situación actual de dicho requerimiento para
          calcular el total de la característica
        - Si no existe relación, continuar con el siguiente requerimiento
    
```

**Cuadro 5.25.**

En lo que respecta a la correlación entre los requerimientos, la codificación es la que se indica en el Cuadro 5.26.

```

'Propósito:  Determinar la correlación entre los requerimientos desde la perspectiva de las
              características con que se encuentra relacionado
'Entradas:   Correlación entre los requerimientos
'Devuelve:   Para cada característica, correlación entre los requerimientos con que se rela-
              ciona
'*****

Para m = 1 hasta Número_de_características hacer
    Para n = 1 hasta Número_de_requerimientos hacer
        Establecer si existe relación con dicho requerimiento
        - Si existe relación, sumar la correlación de dicho requerimiento con todos
          los demás para calcular el total de la característica
        - Si no existe relación, continuar con el siguiente requerimiento
    
```

**Cuadro 5.26.**

En atención al proceso definido anteriormente, el siguiente aspecto a considerar consiste en la agrupación de la información calculada en una única variable que refleje las tres valoraciones anteriores, y proceder a su normalización, lo cual se puede llevar a cabo mediante la codificación que se muestra en el Cuadro 5.27.

*****	
'Propósito:	Determinar la valoración de cada característica respecto a los requerimientos con que se encuentra relacionada y normalizar dicha información en base al dominio actual
'Entradas:	Importancia normalizada de los requerimientos Situación normalizada de los requerimientos Correlación entre los requerimientos
'Devuelve:	Para cada característica, valoración normalizada de los requerimientos con que se relaciona
*****	
1.	<i>Para m = 1 hasta Número_de_características hacer</i> Localizar la importancia normalizada, la situación actual y la correlación total de los requerimientos con que dicha característica se relaciona Añadir los valores anteriores para cada característica
2.	<i>Para m = 1 hasta Número_de_características hacer</i> Localizar el valor máximo de la agregación obtenida en el punto 1 Localizar el valor mínimo de la agregación obtenida en el punto 1 Normalizar la información del punto 1 respecto a las características en base al dominio calculado en el paso anterior

**Cuadro 5.27.**

De esta forma, toda la información relativa a los aspectos del modelo quedará entonces reflejada en las cinco variables siguientes:

1. Importancia de las características.
2. Situación actual de las características técnicas.
3. Dificultad técnica de las características.
4. Correlación entre las características.
5. Información de los requerimientos para cada característica.

De acuerdo con las consideraciones anteriores, para proceder a establecer la bondad de cada solución inicial será suficiente con determinar el valor de las variables anteriores para cada una de las características incluidas en cada solución. La única excepción viene dada por la correlación entre características, ya que para su cálculo ha sido necesario comprobar en primer término qué combinación de características supone la solución a evaluar.

La codificación de la medida de la bondad de las soluciones establecida en los términos anteriores se recoge en el Cuadro 5.28.

*****	
'Propósito:	Determinar la bondad de las soluciones iniciales
'Entradas:	Importancia de las características Situación actual de las características Dificultad técnica de las características Información normalizada de los requerimientos para cada característica Correlación entre características
'Devuelve:	Adecuación de las soluciones iniciales
*****	
<i>Para i = 1 hasta Número_de_individuos hacer</i>	
<i>Para m = 1 hasta Número_de_características hacer</i>	
- Si m se encuentra en la solución proporcionada para el individuo i, añadir la información relativa a importancia, situación actual, dificultad técnica e información sobre requerimientos relativa a dicha característica en el valor de la adecuación de i	
- Si m no se encuentra en la solución del individuo i continuar con la siguiente característica	
<i>Para i = 1 hasta Número_de_individuos hacer</i>	
Añadir a la medida de la adecuación calculada anteriormente la medida de la correlación entre las características que se encuentran en cada individuo	

**Cuadro 5.28.**

En consecuencia, la “salida” de la codificación anterior proporcionará para cada individuo de la población inicial una medida de la bondad o adecuación a la resolución del problema en base a la combinación de características que se recoge en el mismo.

#### 5.2.1.3.4. Operador de selección

En esta fase de la construcción del AG se plantea la necesidad de establecer el mecanismo que permita determinar qué cromosomas de la población inicial pasan a formar parte activa del proceso reproductivo. A este respecto, y de acuerdo con lo comentado en el Capítulo 3, el objeto de esta fase radica en facilitar la supervivencia de los individuos con mejor comportamiento, de ahí que el mecanismo de selección suele estar basado en la adecuación de los mismos.

Sin embargo, el grado con que la adecuación incide en el mecanismo de selección depende de la presión selectiva que se desee ejercer en el AG, de ahí que puedan distinguirse distintos criterios de selección que utilizan otros mecanismos para forzar la supervivencia.

En el modelo propuesto se ha utilizado un método de selección proporcional a la adecuación o método de la ruleta, de forma que para seleccionar los padres de cada individuo se elige un número al azar comprendido entre 0 y la adecuación total (medida de la adecuación de todas las soluciones iniciales), de forma que si la adecuación acumulada hasta el individuo de que se trate es mayor o igual que el número obtenido aleatoriamente dicho individuo es seleccionado para reproducirse.

Un ejemplo de este operador de selección se muestra en la Figura 5.17.

	Valor de la adecuación	Adecuación acumulada	Número aleatorio (entre 1 y 39)	
5 2 1 3 4	10	10	17	1 3 5 2 4
1 3 5 2 4	8	18	6	5 2 1 3 4
5 4 3 2 1	20	38	12	1 3 5 2 4

**Figura 5.17.**

La codificación del proceso de selección se puede observar en el Cuadro 5.29.

```

*****
'Propósito:  Operador de selección
'Entradas:   Adecuación de cada individuo
'Devuelve:  Individuos seleccionados para los operadores genéticos
*****

Para i = 1 hasta Número_de_individuos hacer
    Calcular la adecuación acumulada hasta dicho individuo
    Calcular la adecuación acumulada total

Para i = 1 hasta Número_de_individuos hacer:
    Elegir un número aleatorio entre 0 y la adecuación acumulada total
        Para i = 0 hasta Número_de_individuos hacer:
            Localizar el individuo para el que se cumple que su adecuación acumulada es superior al número aleatorio obtenido en el proceso anterior
            Asociar los individuos para ser los padres de la generación posterior
    
```

**Cuadro 5.29.**



### 5.2.1.3.5. Operador de cruce

En la implementación del AG-DNP-Crisp, ante el necesario carácter genérico que se pretende presida la construcción del mismo, se ha optado en un principio por utilizar una variante del operador de cruce clásico que es el cruce de doble punto o cruce en dos puntos. En su aplicación al ejemplo objeto de estudio, se trata de elegir dos puntos al azar y dividir las cadenas que representan a los individuos seleccionados como padres en tres segmentos, una cabeza, una parte central (la que se encuentra entre los dos puntos aleatorios) y una cola, intercambiando las partes centrales de las cadenas padre y obteniendo en consecuencia dos hijos que tendrán características de ambas cadenas iniciales.

Una representación de este tipo de cruce es la que muestra la Figura 5.18.

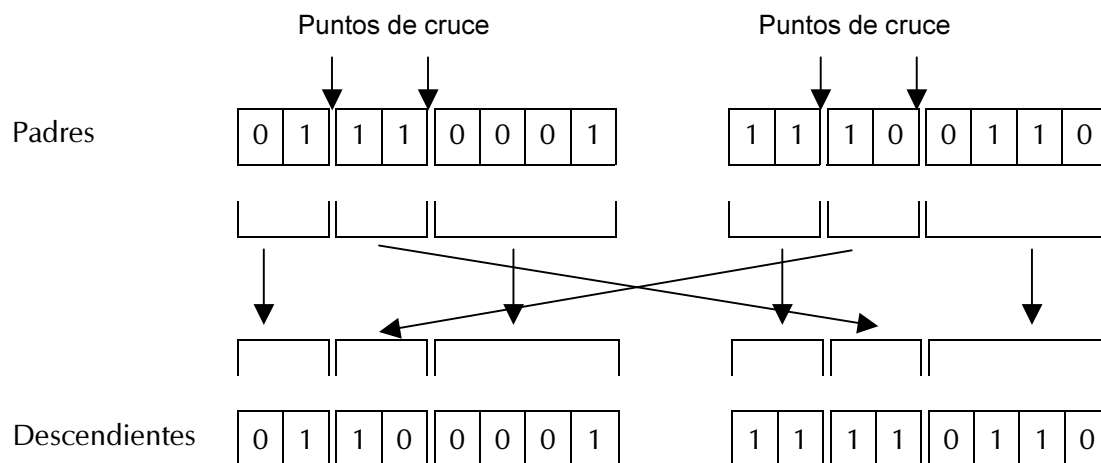


Figura 5.18.

Este planteamiento puede presentar en el ejemplo de aplicación, entre otros, los siguientes inconvenientes:

Los individuos factibles quedan representados mediante el vector de números enteros hasta el punto en que se cumpla la restricción presupuestaria. A partir de ese momento el resto de elementos que forman el cromosoma del individuo pasan a ser cero. De esta forma, si los puntos de cruce están al final del cromosoma es muy posible que no se produzca cruce dentro de la solución factible, es decir, que se intercambien partes cuya representación ha pasado a ser cero.

Los individuos resultantes tras el operador de cruce pueden no ser factibles, dado que las partes que se intercambian de los padres pueden contener características distintas que, dado el tipo de codificación utilizado, provoque que en los individuos hijos se repitan características y por contra no se encuentren representadas las  $m$  características iniciales.

Al objeto de evitar el primer inconveniente, resulta factible la utilización, en aras a aplicar el operador de cruce, de la codificación inicial, es decir, con independencia del número de características que abarque la solución factible debido al presupuesto, el cruce se realiza en el cromosoma que representa el individuo completo. Asimismo, este es otro de los motivos para utilizar el cruce en dos puntos, ya que el mismo incrementa la posibilidad de que la cadena que se intercambia se encuentre dentro de la solución factible, a diferencia del cruce tradicional que intercambiaría solamente las colas de los cromosomas padres.

En cuanto al posible problema generado tras el cruce en los descendientes puede ser rectificado con posterioridad, sin más que localizar en cada par de individuos hijos la característica o características que se repiten e intercambiarlas entre ellos, ya que la que falte en un individuo hijo será la que se repita en el otro, como se muestra en el ejemplo que muestra la Figura 5.19.

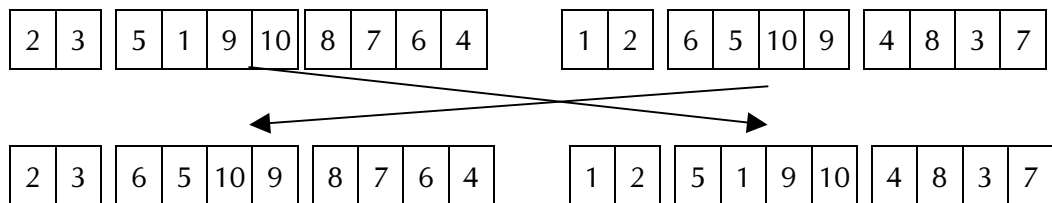


Figura 5.19.

En la Figura anterior se puede comprobar que en el primer hijo se repite la característica 6 y falta la característica 1, mientras que en el segundo individuo hijo faltaría la característica 6 y sobraría la 1. En consecuencia, sin más que intercambiar dichas características en los dos individuos resultantes, ambos quedarían conformados de acuerdo a la codificación utilizada, tal como se muestra en la Figura 5.20.

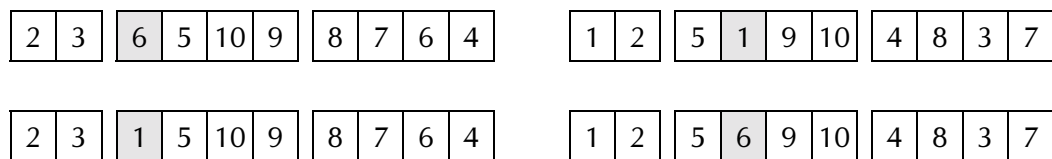


Figura 5.20.

Por otro lado, al objeto de concluir el estudio del operador de cruce, es necesario asignar la valoración del parámetro denominado “probabilidad de cruce” cuya finalidad consiste en permitir, en función de las necesidades del problema, aumentar o disminuir la ejecución de este operador, es decir, incrementar o disminuir el número de cadenas que se combinan. En la literatura al respecto es habitual que la probabilidad de cruce sea establecida en términos de un porcentaje fijo, que suele oscilar entre el 20% y el 60%. Sin embargo, como se describirá más adelante en los parámetros del

AG, en este caso se ha optado por utilizar una probabilidad de cruce, definida por el usuario, que oscile dentro de un intervalo y que normalmente actúa de la forma siguiente: Para cada individuo se calcula aleatoriamente un valor entre 0 y 1 que es su probabilidad de cruce. Esta probabilidad se compara con la probabilidad de cruce genérica establecida como sigue:

$$P_{CRU} = P_{CRU_i} + \frac{(P_{CRU_f} - P_{CRU_i})}{\text{Número de generaciones}} \times g$$

donde:

$P_{CRU_i} / P_{CRU_f}$  valores mínimo y máximo, respectivamente, del intervalo asignado a la probabilidad de cruce

$g$  generación actual

Si la probabilidad de cruce del individuo es inferior al valor calculado anteriormente, el individuo es seleccionado como padre para ser emparejado con otro individuo que cumpla dicho requerimiento y efectuar la operación de cruce con ambos individuos.

Por tanto, la probabilidad de cruce general calculada como se acaba de exponer, es un valor que varía de unas generaciones a otras, aumentando a medida que se incrementa la generación en la que se encuentra el AG. Esta forma de actuar tiene su justificación en la necesidad de provocar que los individuos de las primeras generaciones tengan mayores posibilidades de ser seleccionados para el cruce que en las generaciones posteriores, al comparar su probabilidad de cruce con una probabilidad de cruce general cada vez mayor.

El motivo de este proceder radica en que en las primeras generaciones de un AG puede resultar de interés incrementar el espacio de búsqueda, dando valores grandes a los parámetros de cruce y, como posteriormente se analizará, a los parámetros de mutación, para, a medida que se va aproximando a las últimas generaciones tratar de afianzar la convergencia reduciendo dichos valores.

Sin embargo, en el modelo propugnado se ha optado por incluir en la construcción del AG el mecanismo conocido como "elitismo", que consiste en mantener la información relativa a la mejor solución de cada iteración, de forma que con independencia de los saltos que se produzcan en el espacio de búsqueda, siempre se mantiene la "mejor" solución de las analizadas. De esta forma, no es preciso forzar la convergencia del AG en la misma medida que se haría en otras circunstancias.

En cuanto a la codificación de los pasos anteriormente descritos para el operador de cruce, ésta se puede realizar como se muestra en el Cuadro 5.30.

<pre>***** 'Propósito: Operador de cruce 'Entradas:  Parámetros del operador de cruce             Individuos de la población 'Devuelve: Individuos descendientes tras el operador de cruce *****  Para i = 1 hasta Número_de_individuos_hacer     Calcular una probabilidad de cruce (número aleatorio entre 0 y 1)     Comparar la probabilidad de cruce para el individuo con la probabilidad de cruce     genérica         - Si es mayor, seleccionar el individuo para su reproducción         - Si es menor, continuar con el siguiente individuo     / Fase en la que se seleccionan los individuos que se van a reproducir /  Para i = 1 hasta Número_de_individuos_seleccionados_hacer     Calcular un número aleatorio entre 0 y el total de características (m) → Punto de     cruce 1     Calcular un número aleatorio entre el punto de cruce 1 y el total de características     (m) → Punto de cruce 2     / Fase en la que se seleccionan los puntos de cruce para establecer las cadenas a     cruzar /  Para cada par de individuos seleccionados como padres_hacer     Combinar las cadenas intermedias para obtener los descendientes     / Fase en la que se produce el cruce /      Comparar las nuevas soluciones generadas para establecer las características que se     repiten en cada descendiente     Comparar las nuevas soluciones generadas para establecer las características que     faltan en cada descendiente     Cruzar las características que se repiten en un descendiente con las que faltan en el     otro para construir individuos factibles tras el cruce     / Fase en la que se reconstruyen las soluciones generadas tras el cruce /</pre>
---

**Cuadro 5.30.**

### 5.2.1.3.6. Operador de mutación

El operador de mutación a incluir en el AG está condicionado por el método de representación utilizado para las soluciones, ya que si una característica es “mutada” por otra, en la codificación de la solución se produciría una duplicidad de dicha característica y, a su vez, desaparecería la anterior. De ahí que en el modelo construido se propone utilizar una mutación al azar, combinada con el intercambio de características, es decir, se elige una posición de la cadena al azar y se calcula también de forma aleatoria una característica para pasar a ocupar dicha posición en la cadena. Tras esta operación la característica se encuentra duplicada y no aparece la característica inicial, de forma que para evitarlo se localiza el lugar en que se encuentra la característica duplicada y se modifica por la que falta.

Por ejemplo, para un individuo representado por el siguiente vector de números enteros:

2	3	6	5	10	8	9	7	1	4
---	---	---	---	----	---	---	---	---	---

Si el lugar obtenido para realizar la mutación es el tercero, y la característica que pasa a ocupar dicho lugar elegida aleatoriamente es la 9, el nuevo individuo quedaría, en principio, como se muestra:

2	3	9	5	10	8	9	7	1	4
---	---	---	---	----	---	---	---	---	---

En consecuencia, la característica 9 estaría duplicada y faltaría la característica número 6. Por tanto, se localiza el lugar que ocupa la característica repetida (el séptimo lugar) y cambiaría por la 6. Tras este proceso el nuevo individuo sería:

2	3	9	5	10	8	6	7	1	4
---	---	---	---	----	---	---	---	---	---

Este operador de mutación es similar a la mutación de intercambio inicialmente propuesta por BANZHAF (1990), con la excepción de que en lugar de intercambiar dos posiciones introduce de forma aleatoria la característica que va a ocupar el lugar en el que se produce la mutación.

En el caso de utilizar la mutación de intercambio, para el individuo del ejemplo anterior, se eligen al azar dos posiciones, por ejemplo, la 3 y la 9, y se intercambian las características que ocupan dichas posiciones:

2	3	6	5	10	8	9	7	1	4
---	---	---	---	----	---	---	---	---	---

2	3	1	5	10	8	9	7	6	4
---	---	---	---	----	---	---	---	---	---

Con el proceso de mutación, y teniendo presente la restricción de recursos que preside la búsqueda u optimización de la combinación de características, se consigue que características que por su posición en la cadena era posible que no formaran parte de la solución factible al incumplir la restricción presupuestaria, entren de nuevo en la valoración de posibles soluciones.

Por otra parte, y con similar razonamiento al utilizado en el caso del operador de cruce, el parámetro denominado “probabilidad de mutación” que habitualmente viene establecido en un determinado porcentaje, en el caso del modelo se ha propuesto que el mismo varíe en un determinado intervalo. De esta forma, la probabilidad de mutación se hace variable tratando de que en las primeras generaciones sea mayor la probabilidad de que un individuo sea sometido al operador de mutación que en las generaciones posteriores, con la finalidad de afianzar la convergencia del AG.

En este sentido, el proceso de mutación parte de generar para cada individuo un número aleatorio que será la medida de su probabilidad de mutación, el cual deberá ser comparado con la probabilidad de mutación genérica establecida en los siguientes términos:

$$P_{MUT_i} = P_{MUT_i} + \frac{(P_{MUT_f} - P_{MUT_i})}{\text{Número de generaciones}} \times g$$

donde:

$P_{MUT_f} / P_{MUT_i}$  valores mínimo y máximo, respectivamente, del intervalo asignado a la probabilidad de mutación

$g$  generación actual

Si la probabilidad obtenida para el individuo es inferior al valor así calculado, dicho individuo es sometido al operador de mutación y, en caso contrario, el individuo permanece con la misma solución. Este mecanismo de mutación propicia asimismo que las soluciones generadas tras este proceso continúen siendo soluciones factibles desde la perspectiva de la codificación inicial, si bien como es obvio al modificar el orden asignado a las características es posible que se modifique la evaluación que con posterioridad se realice para medir la bondad de estas nuevas soluciones.

El proceso de codificación del operador de mutación aplicado en el modelo construido se puede observar en el Cuadro 5.31.

```
'*****  
'Propósito:  Operador de mutación  
'Entradas:  Parámetros del operador de mutación  
            Individuos tras el operador de cruce  
'Devuelve:  Individuos descendientes tras el operador de mutación  
'*****  
  
Para i = 1 hasta Número_de_individuos_hacer  
    Calcular una probabilidad de mutación (número aleatorio entre 0 y 1)  
    Comparar la probabilidad de mutación para el individuo con la probabilidad de mu-  
    tación genérica  
        - Si es mayor, seleccionar el individuo para su mutación  
        - Si es menor, continuar con el siguiente individuo  
    / Fase en la que se seleccionan los individuos que se van a someter al proceso de  
    mutación /  
  
Para i = 1 hasta Número_de_individuos_seleccionados_hacer  
    Calcular un número aleatorio entre 1 y el total de características (m) → Posición  
    Calcular un número aleatorio entre 1 y el total de características (m) → Nuevo va-  
    lor  
    / Fase en la que se selecciona el lugar y el nuevo valor del gen que se va a mutar /  
  
    Cambiar el valor de la característica que ocupa la "posición" por el "nuevo valor"  
    Localizar la situación que la característica nueva ocupaba en el individuo inicial y  
    modificarlo por el valor que tenía la posición antes de ser mutada  
    / Fase en la que se reconstruyen las soluciones generadas tras la mutación /
```

**Cuadro 5.31.**

#### 5.2.1.3.7. Evaluación de las soluciones generadas tras los operadores genéticos

La actuación de los operadores genéticos (cruce y mutación) sobre las soluciones iniciales provoca cambios en la estructura de los individuos sometidos a los mismos, de forma que con anterioridad al cálculo de la "mejor" solución obtenida en cada generación es preciso repetir el proceso de evaluación para obtener la calidad de las nuevas soluciones.

Sin embargo, antes de proceder al proceso de evaluación propiamente dicho será preciso establecer para las nuevas soluciones hasta qué punto son factibles en base a la restricción presupuestaria, es decir, se deben transformar en soluciones factibles. El

proceso es similar al expuesto en el apartado 2.2.1.3., es decir, para cada individuo se calcula su coste acumulando el importe de la combinación de características que supone el mismo, comenzando por la primera. En el momento en que el coste del individuo supere el presupuesto, se eliminan el resto de características, esto es, les asigna un valor cero en el vector de números enteros que representa la solución. El código de este proceso, es similar al ya apuntado en el caso del tratamiento de individuos no factibles analizado en dicho apartado, por lo que se omite su explicitación.

En lo que se refiere al proceso del cálculo de la adecuación propiamente dicha, de las cinco variables que recoge el modelo sólo será necesario proceder a calcular de nuevo la correlación entre las características, ya que el resto de variables ya están referidas a cada característica en concreto y por tanto sólo varía si se incluyen o no en el cálculo de la adecuación. Por el contrario, la correlación entre características, al depender directamente de la combinación de las características que compone cada solución deberá ser recalculada en cada generación, ya que tras los operadores genéticos dichas combinaciones se ven modificadas.

La codificación del cálculo de la correlación entre características, así como el código específico para evaluar la adecuación de las soluciones, son los mismos que se han establecido en el caso de las soluciones iniciales.

#### **5.2.1.3.8. Criterio de terminación o parada**

Como ya se comentó, las posibilidades básicas para establecer el criterio de parada de un AG en la búsqueda de la mejor solución son tradicionalmente de tres tipos, a saber:

- a. Establecer un número máximo de generaciones (evaluaciones de la función objetivo).
- b. Establecer como condición de parada que tras un cierto número de generaciones no se produzca ninguna mejora en la solución.
- c. Establecer la finalización de la ejecución del AG cuando se obtiene una solución cuya calidad se estima suficiente.

En principio, se podría utilizar cualquiera de las opciones anteriores, si bien la posibilidad de optar por la tercera alternativa supone conocer en principio una referencia acerca de la calidad deseada, y dado que el problema al que se desea aplicar el AG es nuevo, y no se tiene suficiente conocimiento del mismo, no es posible establecer dicha medida de calidad.



Por tanto, se plantea entonces utilizar la primera alternativa, si bien sería posible también establecer la segunda. Por tanto, como más adelante se analizará al exponer los parámetros del modelo, se ha optado por utilizar como criterio de parada un número máximo de generaciones definido por el usuario final del modelo al establecer los parámetros de funcionamiento del AG.

Asimismo, y con el fin de no perder las buenas soluciones obtenidas en cada generación, se ha introducido el mecanismo denominado “elitismo” (GOLDBERG, 1989), consistente en mantener el mejor individuo de una generación en las siguientes hasta que otro individuo lo supere en su adecuación al problema. De esta forma, mediante el elitismo, se evita perder la mejor solución de una generación hasta que no sea superada por otro individuo que pasará a ser el elitista, manteniéndose hasta que no se encuentre una solución mejor.

La utilización del elitismo, además de mantener la información del individuo elitista durante la ejecución del AG, se ve reforzada mediante la incorporación de dicho individuo en la nueva generación, entendiendo que si la combinación de características que proporciona es buena, puede servir de guía en la búsqueda al menos de óptimos locales próximos a él.

La codificación de la selección del elitista y de su reposición en la nueva generación es la recogida en el Cuadro 5.32.

*****	
'Propósito:	Selección del elitista y reposición en la siguiente generación
'Entradas:	Adecuación de las soluciones obtenidas Adecuación del anterior individuo elitista
'Devuelve:	Valores de la mejor solución obtenida en la generación actual y en las generaciones anteriores
*****	
<i>Para i = 1 hasta Número_de_individuos hacer</i>	
Comparar la adecuación de todos los individuos	
Seleccionar el individuo con mayor adecuación	
Comparar la adecuación del individuo con mejor adecuación actual con el mejor de las generaciones anterior de forma que:	
- Si es mayor, seleccionar el nuevo individuo como elitista	
- Si es menor, continuar con el individuo elitista anterior	
/ Fase en la que se selecciona el individuo que supone la mayor adecuación /	

Para  $m = 1$  hasta Número\_de\_características hacer

- Reponer la combinación de características aportada por el individuo elitista como solución en la próxima generación
- Mantener la adecuación y combinación de características del individuo elitista como valoración de la mejor solución obtenida

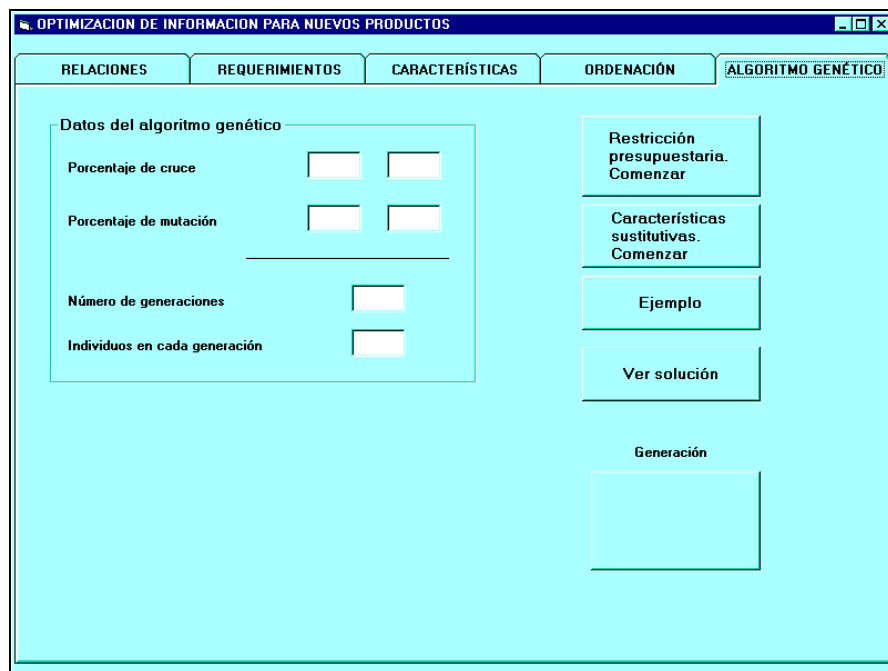
/ Fase en la que se repone el individuo elitista y se mantiene su información /

**Cuadro 5.32.**

### 5.2.1.3.9. Parámetros de funcionamiento del algoritmo genético

La operativa de un AG precisa establecer valores para una serie de parámetros de los cuales dependerá en buena medida el óptimo funcionamiento del mismo. De ahí que, como se indicó en el Capítulo 3, existan multitud de estudios sobre la posibilidad de optimizar a priori dichos parámetros así como sobre las ventajas e inconvenientes de que dichos parámetros sean modificados a lo largo del proceso de búsqueda.

Sin embargo, el funcionamiento general de un AG resulta independiente de los criterios elegidos para establecer los valores de los parámetros, razón por la cual se ha optado por dejar libertad al usuario final en la elección de aquellos parámetros que se consideran más generales, como son el tamaño de la población, el número de iteraciones y los intervalos que definen los porcentajes para los operadores genéticos de cruce y mutación. De acuerdo con lo anterior, la pantalla que se presenta en la Figura 5.21. muestra la entrada de valores para dichos parámetros, en la que el usuario decidirá los valores que considere oportunos en cada momento.



**Figura 5.21.**

Como se puede comprobar en la Figura anterior, tanto el número de iteraciones (generaciones) como el número de individuos son parámetros abiertos a la decisión del usuario. Por lo que se refiere a los operadores de mutación y cruce, dado que se ha establecido una probabilidad de cruce y una probabilidad de mutación mediante un intervalo, en la entrada de datos se permite establecer los porcentajes iniciales y finales que afectan a estos parámetros. No obstante, es posible asignar el mismo valor al inicial y al final y, en consecuencia, establecer valores fijos para los mismos.

A los efectos de contraste operativo del funcionamiento del modelo AG-DNP-Crisp, se puede analizar una propuesta de ejemplo ilustrativo como la siguiente, donde se han considerado como valores de los parámetros los siguientes:

- Número de generaciones: 100
- Número de individuos: 50
- Probabilidad de cruce inicial: 50%
- Probabilidad de cruce final: 55%
- Probabilidad de mutación inicial: 10%
- Probabilidad de mutación final: 15%
- Restricción presupuestaria: 2.200 u.m.

La evolución de la adecuación durante las sucesivas iteraciones, así como la combinación de características a desplegar que suponen la mejor adecuación y el coste de desarrollo de dicha combinación, se muestran en la pantalla de la Figura 5.22.

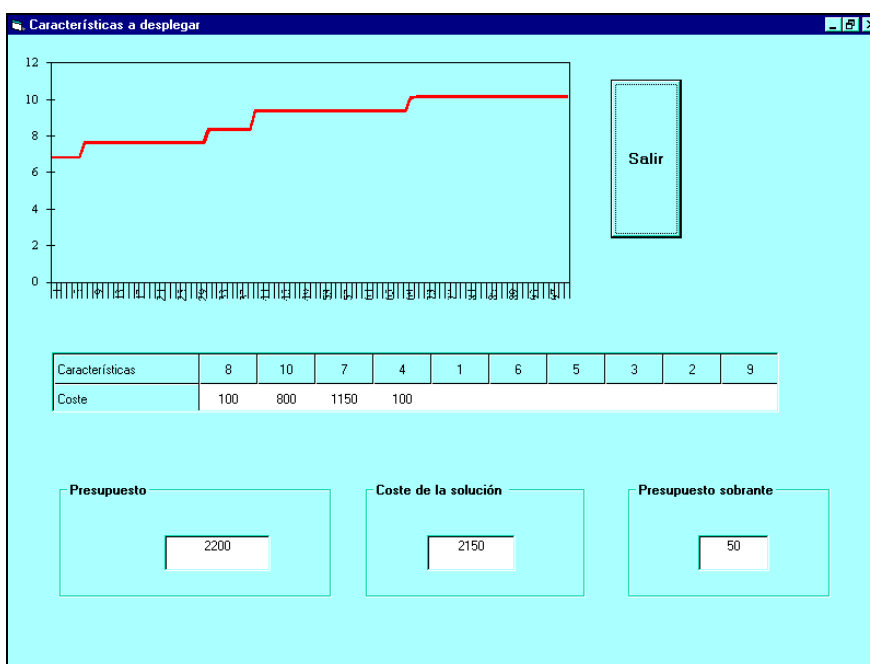


Figura 5.22.

#### 5.2.1.4. Aplicación del modelo AG-DNP-Crisp a situaciones de características sustitutivas

En el presente apartado se plantea la incorporación al modelo AG-DNP-Crisp de un AG que permita optimizar la información disponible en el modelo de decisión descrita en los apartados anteriores, considerando distintos grupos que representan características que son sustitutivas entre sí. En concreto, se asume que características pertenecientes al mismo grupo no pueden darse de forma simultánea y, por tanto, se debe elegir la mejor de cada grupo, siendo necesario que siempre se lleve a cabo alguna característica de cada grupo en concreto.

En principio, y tratando de evitar en lo posible modificaciones en el planteamiento del problema a resolver respecto al apartado anterior, si bien el AG desarrollado permite establecer tantos grupos como el usuario desee y asignar a cada grupo el número de características que lo compongan, para el ejemplo ilustrativo se supone que las 10 características iniciales se agrupan de la forma siguiente:

- Grupo 1: Características 1, 2, y 3
- Grupo 2: Características 4, 5, 6 y 7
- Grupo 3: Características 8, 9 y 10

El planteamiento así realizado implica que la solución proporcionada debe contener una característica de cada grupo, es decir, estará formada por las 3 características que optimizan la información disponible. Desde esta perspectiva se puede afirmar que las características pertenecientes a un mismo grupo son incompatibles entre sí, en el sentido de que en principio cumplen la misma misión y tratan de cubrir las mismas expectativas dentro del nuevo producto.

De forma genérica se puede establecer la proposición anterior de la forma siguiente:

- Grupo a Características dentro del grupo CA (a)<sub>i</sub> i = 1, 2,... m
- Grupo b Características dentro del grupo CA (b)<sub>j</sub> j = m + 1, m + 2, ...ñ
- (...)

De acuerdo con lo anterior, y partiendo como base el modelo AG-DNP-Crisp propuesto en el apartado 2.1.3. del presente Capítulo, se propone realizar las modificaciones necesarias para la resolución del problema planteado desde esta óptica. No obstante, y dado que el planteamiento genérico es el mismo pero con ciertas modificaciones en cuanto a su objetivo final, en los apartados siguientes se realiza una descripción de las particularidades que presenta la circunstancia anteriormente descrita en el desarrollo y funcionamiento del AG.

#### **5.2.1.4.1. Codificación (alfabeto y longitud)**

Con la finalidad de mantener en lo posible los criterios utilizados en el desarrollo del AG propuesto en los epígrafes anteriores, se propone considerar el mismo tipo de codificación, es decir, se establece un vector de números enteros de longitud igual al número de características totales que se desean analizar (en el ejemplo  $m = 10$ ), representando el número entero en el vector, el número de la característica correspondiente en la información disponible.

#### **5.2.1.4.2. Selección de la población inicial (operador de inicialización) y tratamiento de individuos no factibles**

De acuerdo con los motivos expuestos en el apartado 2.1.3.2. del presente Capítulo, la generación de la población inicial se realizará de forma aleatoria, es decir, para cada individuo se establece un vector de números enteros de longitud  $m$  con todas las posibles características incluidas y sin repetir ninguna de ellas.

De esta forma, la población inicial será variada y permitirá tras el proceso de eliminación de individuos no factibles que se comenta con posterioridad, establecer las soluciones iniciales que serán objeto de transformación mediante los operadores genéticos.

En lo referente al tratamiento de los individuos no factibles, en este caso, y a diferencia del modelo propuesto con anterioridad en el que la factibilidad de un individuo o solución venía establecido en función del coste de la combinación de características que se recogía en el mismo dada la existencia de un volumen de recursos limitado, el coste de la solución en principio no plantea ningún tipo de restricción, si bien como más adelante se expondrá sí será una variable a considerar en la evaluación de las soluciones.

Sin embargo, el hecho de existir distintos grupos de características que son sustitutivas entre sí, y que no pueden darse de forma simultánea, plantea una nueva restricción que será preciso incorporar al modelo. En este sentido, sería posible que dicha restricción actuara en distintos momentos del proceso del AG; sin embargo, se ha optado por evaluar desde el inicio los individuos y establecer un mecanismo que permita convertir las soluciones generadas aleatoriamente en soluciones que cumplan este requisito y, por tanto, que representen soluciones factibles.

La operativa para proceder a la conversión consistirá en analizar ordenadamente, comenzando por el primer valor del vector de números enteros, de forma que cuando localice una característica de un grupo haga que el resto de los números correspondientes a las características del mismo grupo se conviertan en 0.

Por ejemplo, si se parte de una solución inicial determinada por el vector siguiente:

5	2	6	10	1	8	9	7	4	3
---	---	---	----	---	---	---	---	---	---

Se comenzaría por el primer valor (5) y se eliminarían las características del grupo al que pertenece dicha característica (es decir, grupo 2: características 4, 6 y 7) que se convertirían en ceros. Se continuaría con el siguiente valor (2) y se eliminarían las características del grupo 1 (es decir, 1 y 3) para finalizar con el siguiente valor (10) que daría lugar a la eliminación de las características del grupo 3 (es decir, 8 y 9). En consecuencia, dicho individuo quedaría reflejado de la siguiente forma:

5	2	0	10	0	0	0	0	0	0
---	---	---	----	---	---	---	---	---	---

De esta forma el individuo anterior recogería una posible solución que bajo la restricción establecida se consideraría factible.

La codificación de este proceso puede ser la que se refleja en el Cuadro 5.33.

<pre> ***** 'Propósito:  Modificar las soluciones iniciales para que sean soluciones factibles en base a               la existencia de características sustitutivas entre sí e incompatibles 'Entradas:   Soluciones iniciales               Grupos de características               Características sustitutivas dentro de cada grupo 'Devuelve:  Individuos que constituyen la población inicial factible *****  Para i = 1 hasta Número_de_individuos hacer     Para g = 1 hasta Número_de_grupos hacer         Para m = 1 hasta Número_de_características_del_grupo hacer             Localizar la primera característica             Localizar el resto de características del mismo grupo y poner a             cero         </pre>
--

**Cuadro 5.33.**

### 5.2.1.4.3. Cálculo de la adecuación de las soluciones iniciales

La medición de la bondad o calidad de las soluciones no plantea ninguna diferencia respecto a lo analizado en el caso de la restricción presupuestaria, considerado

en epígrafe 5.2.1.3.3. En consecuencia, no se ha introducido ninguna modificación, respetando las consideraciones efectuadas en dicho apartado, donde se exponen con detalle tanto la forma de acumular la información disponible, como el proceso por el que dicha información es tratada con el fin de hacerla homogénea.

#### 5.2.1.4.4. Operador de selección

El método de selección utilizado también es el mismo que en caso anterior, es decir, se ha aplicado una selección proporcional a la adecuación, si bien como con posterioridad se expondrá, la medida de la calidad propiamente dicha incluirá además de la adecuación el coste que proporciona cada solución.

#### 5.2.1.4.5. Operador de cruce

Las principales diferencias introducidas en el AG como consecuencia de la existencia de características sustitutivas hacen referencia a la aplicación de los operadores genéticos, como consecuencia de la necesidad de que dichos operadores mantengan la factibilidad de los individuos resultantes de estos procesos.

En lo que se refiere al operador de cruce, en primer lugar, se establece una diferencia respecto al método anterior en el cual con la finalidad de mantener toda la información de las soluciones iniciales (con independencia de la restricción presupuestaria) se utilizaba la codificación inicial, es decir, el vector de números enteros completado con todas las características.

En el caso de aplicación con características sustitutivas, el proceso de cruce debe hacer referencia a características que se encuentren dentro del mismo grupo, es decir, no es posible que los hijos hereden de los padres características que se integren dentro de un mismo grupo.

Para evitar este inconveniente se plantea realizar el cruce en los siguientes términos:

- Se realiza un emparejamiento entre los individuos que van a ser sometidos al proceso de cruce, por ejemplo, se plantean dos soluciones como las siguientes:

0	3	0	5	10	0	0	0	0	0
---	---	---	---	----	---	---	---	---	---

8	0	0	0	0	1	5	0	0	0
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

- Para el primer individuo, se establece un valor al azar que represente el lugar de la característica que se va a cruzar, y que por tanto sea distinto de cero, por ejemplo el 5 que está ocupado por la característica número 10, perteneciente al grupo 3.
- En el segundo individuo, se localiza la característica que posee el mismo que se encuadre dentro del grupo de la elegida al azar en el primer individuo, es decir, la característica 8 para el caso de ejemplo.
- Se realiza el cruce intercambiando dichas características, de forma que los descendientes quedarían como sigue:

0	3	0	5	8	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	1	5	0	0	0

De esta forma se logra que los individuos resultantes del proceso de cruce cumplan la restricción impuesta por los grupos de características establecidos a priori.

En cuanto a la probabilidad de cruce, se han utilizado los mismos criterios que el caso anterior, esto es, se establece una probabilidad de cruce individual que es comparada con la probabilidad de cruce general, establecida de la forma que se indica en el apartado 5.2.1.3.5. y se comparan ambas probabilidades. Así, se mantiene la tendencia a que las primeras generaciones tengan mayores posibilidades de cruce y en consecuencia en las generaciones posteriores se afiance la convergencia.

La codificación del operador de cruce establecido en los términos anteriores es la que se muestra en el Cuadro 5.34.

```

*****
'Propósito: Operador de cruce
'Entradas: Parámetros del operador de cruce
'Devuelve: Individuos descendientes tras el operador de cruce
*****

Para i = 1 hasta Número_de_individuos hacer
    Calcular una probabilidad de cruce (número aleatorio entre 0 y 1)
    Comparar la probabilidad de cruce para el individuo con la probabilidad de cruce
    genérica
    - Si es mayor, seleccionar el individuo para su reproducción
    - Si es menor, continuar con el siguiente individuo
/ Fase en la que se seleccionan los individuos que se van a reproducir /
    
```



Para  $i = 1$  hasta Número\_de\_individuos\_seleccionados hacer

1. Calcular un número aleatorio entre 1 y el total de características (m)  
Localizar en la solución del individuo el número que se encuentra en dicho lugar en la cadena de forma que:
  - Si está vacío (si es cero), volver al paso 1
  - Si no está vacío (si hay una característica), continuar el paso 2
2. Determinar el grupo al que pertenece la característica elegida en el primer individuo  
Localizar en el segundo individuo qué característica pertenece a dicho grupo  
Realizar el cruce entre ambas características en ambos individuos  
/ Fase en la que se produce el cruce /

**Cuadro 5.34.**

#### 5.2.1.4.6. Operador de mutación

El proceso de mutación se debe definir asimismo en función de la problemática concreta del modelo que se pretende construir, de forma que si bien la mutación sencillamente supondría cambiar un número del vector de soluciones por otro, debido a la existencia de características incompatibles, resulta conveniente dirigir este proceso.

De forma similar a lo realizado en el resto de apartados, se trata de establecer un operador de mutación que sea simple en su operativa y que proponga soluciones factibles al problema. Para ello, se plantea un operador de mutación en los siguientes términos:

- Se establece el individuo que, en función de la probabilidad de mutación, vaya a ser sometido a este proceso.
- Se elige al azar una característica presente en dicho individuo y se comprueba el grupo al que pertenece.
- También de forma aleatoria, se “muta” por otra característica del mismo grupo.

En lo que se refiere a la elección de aquellos individuos sobre los que se va a aplicar el operador de mutación, el método elegido es el mismo que en los casos anteriores, es decir, se establece una probabilidad de mutación individual de forma aleatoria que se compara con la probabilidad de mutación genérica para determinar si un individuo concreto opta a someterse a este operador o no, de forma similar a lo analizado en el apartado 2.1.3.6. del presente Capítulo.

En consecuencia, el proceso anterior se puede codificar como se indica en el Cuadro 5.35.

<pre> ***** 'Propósito:  Operador de mutación 'Entradas:   Parámetros del operador de mutación               Individuos tras el operador de cruce 'Devuelve:  Individuos descendientes tras el operador de mutación *****  Para i = 1 hasta Número_de_individuos hacer     Calcular una probabilidad de mutación (número aleatorio entre 0 y 1)     Comparar la probabilidad de mutación para el individuo con la probabilidad de mutación genérica         - Si es mayor, seleccionar el individuo para su mutación         - Si es menor, continuar con el siguiente individuo     / Fase en la que se seleccionan los individuos que se van a someter al proceso de mutación /  Para i = 1 hasta Número_de_individuos_seleccionados hacer     1.   Calcular un número aleatorio entre 1 y el total de características (m)          Localizar en la solución del individuo el número que se encuentra en dicho lugar en la cadena de forma que:             - Si está vacío (si es cero), volver al paso 1             - Si no está vacío (si hay una característica) continuar el paso 2     2.   Determinar el grupo al que pertenece dicha característica          Calcular un número aleatorio dentro del grupo de características          Cambiar el valor inicial por el nuevo número de característica     / Fase en la que se produce la mutación / </pre>
---

**Cuadro 5.35.**

#### 5.2.1.4.7. Evaluación de las soluciones generadas tras los operadores genéticos

La medida de la calidad de un individuo vendrá expresada por la acumulación de las adecuaciones parciales en cada variable del modelo de las características que presenta dicho individuo en su representación de la solución. De esta forma, en principio la función de adecuación no difiere de la analizada en el apartado 5.2.1.3.7., ya que las variables incluidas en el modelo son las mismas, y la representación utilizada y las fases de desarrollo del AG siguen manteniendo individuos factibles. De ahí que

desde la perspectiva de la adecuación de las posibles soluciones con características sustitutivas, simplemente será necesario establecer la adecuación que se da para cada combinación de características proporcionadas por los individuos tras los operadores genéticos.

Sin embargo, el modelo así planteado excluye como variable de referencia el coste de desarrollo de cada combinación de características, ya que si bien en el primer modelo se planteaba un supuesto de restricción presupuestaria y, en consecuencia, el coste actuaba de forma restrictiva, en este caso no existe un volumen determinado de recursos para llevar a cabo el desarrollo del nuevo producto. No obstante, se considera que el factor coste puede ser determinante en el momento de optar por una característica u otra, máxime si la adecuación proporcionada en ambos casos es similar.

En consecuencia, se plantea la posibilidad de incorporar el coste de las soluciones en la medida de la bondad de las mismas. Esta posibilidad se puede llevar a cabo desde al menos las tres perspectivas siguientes:

- Tratar de establecer la solución que minimice el coste. En este caso se estaría dando prioridad absoluta a este factor, y en consecuencia no sería necesario ningún mecanismo de selección; bastaría con elegir de cada grupo de características aquélla cuyo coste sea menor.
- Incorporar el coste como una variable más, es decir, en el momento de evaluar la calidad de las soluciones, además de las variables incluidas con anterioridad establecer una medida del coste de cada solución. Para ello sería preciso normalizar la información sobre el coste, es decir, al igual que en el resto de variables se debería establecer el dominio de este factor y homogeneizar la información en base al mismo. Asimismo, al tratarse de una variable que penaliza, debería incluirse en la función de adecuación con signo negativo.
- Utilizar la variable coste como un aspecto más a considerar en la elección de la mejor solución en cada generación y por ende en el proceso de optimización en su totalidad. Esto significa que en el momento de establecer cuál es el individuo de mayor calidad se deba considerar no solamente el de mejor adecuación sino que dicha adecuación tenga referencia al coste.

En este aspecto se entiende que para el problema planteado no interesa tanto que el coste sea mínimo, sino considerar la repercusión que un incremento en el coste tiene en la función de adecuación. En otras palabras, para establecer si un individuo es mejor que otro no sólo se precisa conocer el incremento que se produce en la adecuación sino si dicho incremento viene unido a un incremento o a una disminución en el coste. Esto es así en la medida en que se acepta que aquellas características que posiblemente aporten una mejor solución (sean más adecuadas), generalmente supondrán a la empresa un mayor desembolso para su ejecución.

En consecuencia, se trata de establecer un mecanismo que sirva de nexo de unión entre la adecuación de varias soluciones y los costes de las mismas. En el caso concreto de estudio se ha optado por incorporar al modelo el análisis del coste conjuntamente con la adecuación, estableciendo los incrementos (o disminuciones) en el coste que se producen entre las posibles soluciones y compararlos con los incrementos (o disminuciones) que se producen en la bondad de las mismas. De esta forma, para que un individuo sea “preferido” a otro será necesario no solamente que su adecuación sea mayor sino que proporcionalmente su coste sea menor, es decir, que el incremento que sufra el coste sea un incremento proporcionalmente inferior que el incremento en la adecuación de dicha solución (y viceversa).

Una vez definida la estructura de selección en base a calidad y coste de cada solución, se debe establecer la forma que se va a utilizar para medir dichos incrementos. Por lo que respecta a la medida de las modificaciones en la adecuación, dado que la información contenida en las mismas ya es homogénea, será suficiente con comparar dos a dos a todos los individuos en cada generación y el mejor de ellos compararlo asimismo con el que se ha considerado elitista en la última iteración.

Por lo que se refiere al coste, al ser una variable que no ha sido homogeneizada, cabe plantear tres opciones posibles, a saber:

- Establecer un dominio concreto en cada iteración, es decir, normalizar los costes de las soluciones obtenidas en cada generación en función de los valores que han sido calculados en la misma. Esta alternativa presenta un inconveniente, sobre todo en las generaciones iniciales, debido a que, en el momento de establecer el dominio, los límites de éste se pueden ver afectados de forma muy clara por individuos pésimos que todavía no han sido descartados.
- Homogeneizar el coste de las soluciones en base al coste máximo y mínimo posible del problema en su conjunto, es decir, establecer las combinaciones con mayor y menor coste y en cada iteración homogeneizar los costes de los individuos a evaluar en base a este dominio.
- Considerar el incremento en sí mismo sin normalizar, esto es, comparar el coste de las soluciones en términos monetarios, sin realizar ningún tipo de modificación.

En el modelo propuesto, al tratarse de una comparación, se entiende que la información no tiene por qué ser homogénea respecto al resto de la información en el sentido de que no va a ser utilizada de forma conjunta con los valores de las demás variables. Es decir, el coste de las soluciones va a ser utilizado para establecer el mayor o menor importe que supone una solución respecto al resto y, en consecuencia, será comparada solamente con datos expresados en los mismos términos. De ahí que la

solución adoptada para establecer el incremento o disminución que supone un individuo respecto a otro consistirá en su comparación mediante un cociente de forma similar a lo que se realizará en el caso de las medidas de las adecuaciones de ambas soluciones.

De esta forma, se realizará una comparación, dos a dos, de todos los individuos en cada generación y se establecerá el incremento o disminución en la adecuación y en el coste que supone uno respecto al otro. El criterio para la elección de un individuo será que el incremento que suponga en el coste sea inferior al incremento que se obtenga en la adecuación. Este procedimiento, además de ser de sencilla aplicación, proporciona la posibilidad de establecer cualquier otro criterio adicional en el sentido que si se desea en un caso en concreto dar prioridad al coste, bastará con establecer, por ejemplo, que el incremento en la adecuación deba ser el doble que el incremento en el coste, permitiendo ponderar adecuación y coste, según cada caso en concreto.

De acuerdo con las consideraciones anteriores, aún cuando la codificación de la medida de la adecuación y el cálculo del coste de cada solución serán las mismas que en casos anteriores, será necesario implementar el mecanismo que permita establecer la cuantificación de los incrementos en ambas variables, la comparación entre los individuos y la elección del “mejor” individuo en cada generación. En concreto, esto se podrá llevar a cabo tal como se muestra en el Cuadro 5.36.

<p>*****</p> <p>'Propósito: Determinar la bondad de las soluciones en base a la adecuación y al coste</p> <p>'Entradas: Adecuación de las soluciones Coste de las soluciones</p> <p>'Devuelve: Medida de la calidad de las soluciones considerando de forma conjunta la adecuación y el coste que supone desarrollar cada solución</p> <p>*****</p> <p>Para <math>i = 1</math> hasta Número_de_individuos hacer</p> <p>    Para <math>i' = 1</math> hasta Número_de_individuos hacer</p> <p>        Establecer para cada par de individuos (<math>i, i'</math>) el incremento o disminución que se produce en la adecuación al cambiar de uno a otro</p> <p>        Establecer para cada par de individuos (<math>i, i'</math>) el incremento o disminución que se produce en el coste al cambiar de uno a otro</p> <p>        Comparar para cada par de individuos (<math>i, i'</math>) los incrementos y disminuciones anteriores</p> <p>        Establecer como medida conjunta del coste y de la adecuación la diferencia entre dichos incrementos o disminuciones para cada individuo</p>
--

**Cuadro 5.36.**

#### 5.2.1.4.8. Criterio de terminación o parada

Los parámetros de funcionamiento del modelo AG-DNP-Crisp han sido establecidos dando libertad al usuario para fijar los valores de los mismos. En concreto, como se comentó en apartados anteriores, el criterio de parada viene marcado por un número de iteraciones que pueden ser determinadas cada vez que se ejecuta el modelo.

De forma similar al caso anterior, se ha introducido el elitismo en el funcionamiento del AG, con lo que en cada generación será necesario establecer el mejor individuo de la misma y compararlo con el individuo elitista procedente de las generaciones anteriores. El objetivo que se persigue es determinar cual de los dos se mantiene para la próxima iteración como mejor solución (elitista) y, de acuerdo con lo comentado con anterioridad, se incorpora o repone en la población de la siguiente generación.

Asimismo, la comparación del mejor individuo de una generación con el elitista se deberá realizar asimismo considerando el incremento que supone en la adecuación y el incremento que supone en el coste, en los mismos términos establecidos en el apartado anterior para medir la bondad de todas las soluciones en conjunto.

La codificación de esta operación puede ser realizado en los términos que se muestran en el Cuadro 5.37.

```
'*****  
'Propósito: Selección del elitista y reposición en la siguiente generación  
'Entradas: Adecuación del mejor individuo de la generación actual  
           Adecuación del anterior individuo elitista  
           Coste del mejor individuo de la generación actual  
           Coste del anterior individuo elitista  
'Devuelve: Valores de la mejor solución obtenida en la generación actual y en las gene-  
           raciones anteriores  
'*****  
  
Establecer para el par de individuos formado por el mejor individuo de esta generación y  
el individuo elitista procedente de generaciones anteriores:  
- El incremento o disminución que se produce en la adecuación al cambiar de  
  uno a otro  
- El incremento o disminución que se produce en el coste al cambiar de uno a  
  otro  
  
Comparar ambos incrementos de forma que:  
- Si es mayor el incremento en la adecuación del nuevo individuo que su incre-  
  mento en el coste, seleccionar el nuevo individuo como elitista
```

<p>- Si es menor, continuar con el individuo elitista anterior / Fase en la que se selecciona el individuo que supone la mayor adecuación /</p> <p>Para <math>m = 1</math> hasta Número_de_características hacer</p> <p>Reponer la combinación de características aportada por el individuo elitista como solución en la próxima generación</p> <p>Mantener la adecuación del individuo elitista como valoración de la mejor solución obtenida</p> <p>/ Fase en la que se repone el individuo elitista y se mantiene su información /</p>
---

**Cuadro 5.37.**

#### 5.2.1.4.9. Parámetros de funcionamiento del algoritmo genético

Los parámetros de funcionamiento del AG del modelo AG-DNP-Crisp son similares a los comentados en el apartado 5.2.1.3.9. en su aplicación a situaciones de restricción presupuestaria, de ahí que la pantalla de captura de datos en principio sea similar a la establecida en el caso anterior. Sin embargo, en su aplicación a casos con características sustitutivas, se introduce la posibilidad de que el usuario determine el número de grupos de características así como qué características se encuadran dentro de cada uno de ellos.

De esta forma, en función de los valores introducidos la solución aportará una característica de cada uno de los grupos definidos. A efectos ilustrativos, se puede establecer un ejemplo del funcionamiento en este caso del modelo AG-DNP-Crisp con los parámetros siguientes:

▪ Número de generaciones	50
▪ Número de individuos	10
▪ Probabilidad de cruce inicial	50%
▪ Probabilidad de cruce final	55%
▪ Probabilidad de mutación inicial	10%
▪ Probabilidad de mutación final	15%
▪ Número de grupos	3
▪ Características grupo 1	1, 2 y 3
▪ Características grupo 2	4, 5, 6 y 7
▪ Características grupo 3	8, 9 y 10

La evolución que se produce en la ejecución del AG con los parámetros anteriores se presenta en la pantalla incluida en la Figura 5.23.

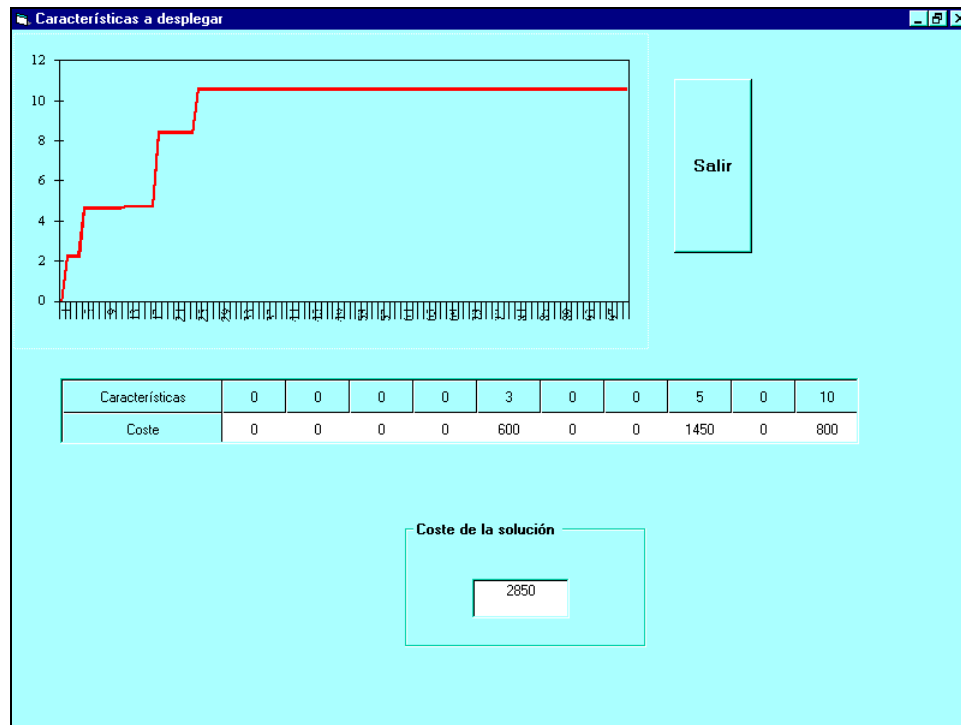


Figura 5.23.

Como se puede observar en la Figura anterior, debido principalmente al planteamiento del ejemplo de aplicación práctica en el que sólo se consideran tres posibles características distintas, la introducción en una solución por medio bien del operador de cruce bien del operador de mutación de una característica "mejor" que la que sustituye provoca un gran salto en la evolución. Asimismo, y debido a las pocas combinaciones posibles, resulta común que se mantenga en varias generaciones el individuo elitista y que, por tanto, se planteen pocos "saltos" en el gráfico X-Y que muestra la evolución de las distintas generaciones.

En este sentido, conviene poner de manifiesto el significado del gráfico de evolución: En el caso anterior, la evolución venía determinada por la adecuación de la mejor solución en cada generación, es decir, si el individuo elitista era sustituido debido a la mayor adecuación de un individuo en una generación determinada, se producía un cambio en la tendencia del gráfico correspondiente que, al tratarse de un incremento, suponía una mayor adecuación.

En este caso, la evolución de la población no puede medirse en los mismos términos, ya que es posible que se produzca un aumento en la adecuación de un



individuo respecto al elitista y, sin embargo, éste no sea sustituido porque su coste no proporcione un incremento más que proporcional en la adecuación.

En consecuencia, el gráfico de la Figura 5.23. en este caso representa la diferencia entre el incremento que se produce en la adecuación y el incremento que se produce en el coste que, debido a los términos en que ha sido efectuada la comparación para establecer el mejor individuo en cada generación, siempre deberá ser positiva, de ahí la tendencia del gráfico recogido en dicha Figura.

### **5.2.2. En condiciones de incertidumbre**

En el modelo que se está desarrollando existen distintas variables cuya información debe ser recabada de sitios bien diversos. En algunos casos es la propia empresa la que aporta los datos mientras que en otros es necesario acudir a información exógena a la empresa obtenida bien a través de los propios clientes, bien de expertos e incluso mediante la realización de análisis de mercado.

Esta circunstancia hace que en muchos casos la información sea difícil de evaluar de forma numérica, ya que son personas quienes deben omitir su opinión acerca del valor asignado a la misma, y para la mayoría de los humanos no resulta sencillo exponer su opinión en valores numéricos.

Asimismo, y dado que la información que se precisa afecta al futuro y no se tiene conocimiento de situaciones similares ocurridas en el pasado, en la mayoría de los casos será muy difícil valorar dicha información en términos ciertos.

De acuerdo con lo anterior se plantean dos circunstancias que hacen que sea necesario adaptar el modelo si se pretende que se aproxime a la realidad, a saber:

- Si se reconoce que la forma más natural de obtener la información es en el propio lenguaje utilizado por los humanos y que las expresiones del lenguaje natural habitualmente son imprecisas, se debería tratar de establecer mecanismos que consideren esta situación y traten de operar con esta información sin necesidad de transformarla para hacerla numérica.
- Si se reconoce la dificultad de que la información se exprese en términos ciertos, se deberían utilizar aquellas herramientas matemáticas que permitan trabajar en condiciones de imprecisión e incertidumbre.

La Teoría de los Subconjuntos Borrosos, como rama de la matemática que se ocupa de lo subjetivo e incierto, ofrece muchas posibilidades para reflejar la vaguedad

de la percepción humana y para poder tratar este tipo de información con técnicas que permitan reflejar la imprecisión y operar con ella. Por su parte, la utilización de etiquetas lingüísticas y la operativa inherente a las mismas, permite utilizar la información en la forma en que realmente es obtenida sin modificarla por la necesidad de las técnicas tradicionales de utilizar valores numéricos.

Como se comentó en el Capítulo 4, la utilización de variables lingüísticas en modelos en los que es necesario su agregación, comparación, etc. se puede abordar desde dos enfoques distintos:

1. Modelos computacionales basados en el Principio de Extensión.
2. Modelos computacionales simbólicos.

En el primer caso se realizan las operaciones en términos lingüísticos mediante operaciones asociadas a las funciones de pertenencia de las etiquetas basándose en el Principio de Extensión el cual, como se comentó en el Capítulo 4 es una herramienta de la Teoría de los Subconjuntos Borrosos (DUBOIS y PRADE, 1980) que se utiliza para extender conceptos matemáticos definidos sobre la recta real a su versión sobre conjuntos borrosos. De esta forma es posible extender funciones para aplicarlas a la operativa con números borrosos de forma que el resultado sea también un número borroso, es decir, es posible extender la aritmética clásica sobre números borrosos o difusos y establecer lo que se puede denominar "aritmética borrosa".

La utilización de este tipo de aritmética provoca que en determinadas circunstancias se incremente la imprecisión de los resultados y que en muchos casos éstos no coincidan con ninguno de los términos lingüísticos del conjunto inicial de términos, lo que obliga a realizar un proceso de aproximación lingüística para expresar los resultados en el dominio de expresión original. El proceso de aproximación lingüística consiste en localizar un conjunto borroso que represente la semántica de una etiqueta lingüística en el conjunto de etiquetas original y que sea lo más cercano al significado del conjunto borroso sin etiquetar que se obtiene tras las operaciones borrosas. Para llevar a cabo este proceso existen diversas posibilidades (BONISSONE y DECKER, 1986; DEGANI y BORTOLAN, 1988) entre las que destacan la distancia euclídea sobre los valores de representación de los números borrosos que se utilicen.

En los modelos computacionales simbólicos los operadores no realizan operaciones sobre las funciones de pertenencia de los conjuntos borrosos sino que utilizan el orden que ocupa una etiqueta en su conjunto de términos y otras propiedades de dichos términos lingüísticos. Habitualmente se utiliza para operar la estructura ordenada de los términos lingüísticos donde los resultados intermedios son valores numéricos los cuales son aproximados en cada paso del proceso utilizando una función de aproximación que indique el índice del término lingüístico asociado.

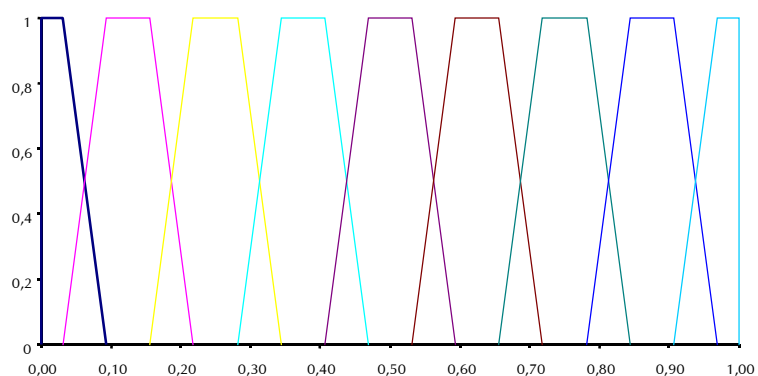
De acuerdo con lo anterior, en el presente epígrafe se pretende establecer los mecanismos necesarios para construir un modelo de decisión para establecer la combinación óptima de características que se deben incorporar en un nuevo producto, utilizando información lingüística basada en el Principio de Extensión (denominado modelo AG-DNP-Fuzzy) para, con posterioridad, en el apartado siguiente, realizar un modelo que permita operar con información representada mediante 2-tuplas (denominado modelo AG-DNP-2-tuplas). En ambos casos se analiza la utilidad que presenta el modelo construido en las situaciones anteriores, es decir, ante una restricción presupuestaria y en el tratamiento de características sustitutivas.

#### 5.2.2.1. Modelo basado en el Principio de Extensión: el modelo AG-DNP-Fuzzy

En un primer acercamiento a esta problemática se plantea la utilización de la información en términos lingüísticos utilizando las operaciones asociadas a las funciones de pertenencia de las etiquetas lingüísticas basadas en el Principio de Extensión comentado anteriormente.

En lo que se refiere a las etiquetas, BONISSONE y DECKER (1986) estudiaron la utilización de conjuntos de etiquetas con varias representaciones cardinales, manteniendo una etiqueta central a nivel "aproximadamente 0'5", colocando el resto de términos simétricamente alrededor de éste y estableciendo el límite de la granularidad en once y, como máximo, trece etiquetas. De acuerdo con el trabajo de estos autores, la semántica de los elementos del conjunto de etiquetas se establece por medio de números borrosos definidos en el intervalo  $[0,1]$  mediante sus respectivas funciones de pertenencia. Debido a que las valuaciones lingüísticas son aproximaciones suministradas por individuos, se puede considerar que una función de pertenencia trapezoidal es suficientemente buena como para capturar la imprecisión de esas estimaciones lingüísticas, resultando en muchas ocasiones imposible o innecesario obtener valuaciones más correctas. Esta representación se lleva a cabo por medio de cuatruplas  $(a_i, b_i, \alpha_i, \beta_i)$ , en las que los dos primeros parámetros indican el intervalo en el que la función de pertenencia es uno, y, el tercero y cuarto parámetros, indican el margen a izquierda y derecha respectivamente.

Desde un punto de vista formal, resulta difícil aceptar que todos los individuos puedan estar de acuerdo con la misma función de pertenencia asociada a los términos lingüísticos, por ello, no existe ningún concepto universal de distribución. Por este motivo, son muchos los estudios que utilizan para la representación de las etiquetas lingüísticas una distribución simétrica, es decir, establecen el conjunto de etiquetas dentro del intervalo  $[0, 1]$  de forma simétrica. En concreto, para un conjunto de nueve etiquetas su representación simétrica sería como muestra el gráfico de la Figura 5.24.

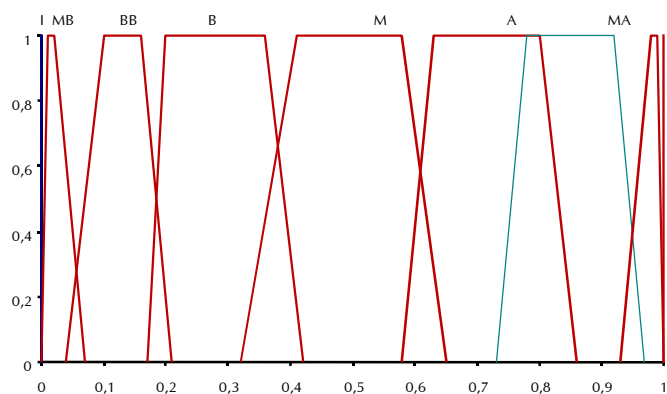


**Figura 5.24.**

En este caso los valores de los trapezios asociados a las mismas serían:

- I [0, 0, 0'03125, 0'09375]
- MB [0'03125, 0'09375, 0'15625, 0'21875]
- BB [0'15625, 0'21875, 0'28125, 0'34375]
- B [0'28125, 0'34375, 0'40625, 0'46875]
- M [0'40625, 0'46875, 0'53125, 0'59375]
- A [0'53125, 0'59375, 0'65625, 0'71875]
- BA [0'65625, 0'71875, 0'78125, 0'84375]
- MA [0'78125, 0'84375, 0'90625, 0'96875]
- E [0'90625, 0'96875, 1, 1]

Sin embargo, estudios realizados han tratado de establecer representaciones que se ajusten más a lo que los individuos entienden por cada etiqueta lingüística. En concreto uno de los estudios más contrastado y utilizado para un conjunto de nueve etiquetas es el anteriormente citado, propuesto por BONISSONE y DECKER (1986), cuya representación gráfica es la muestra en la Figura 5.25.



**Figura 5.25.**

y el conjunto de cuatruplas asociadas son:

I	Innecesaria	(0; 0; 0; 0)
MB	Muy Bajo	(0'01; 0'02; 0'01; 0'05)
BB	Bastante bajo	(0'1; 0'18; 0'06; 0'05)
B	Bajo	(0'22; 0'36; 0'05; 0'06)
M	Medio	(0'41; 0'58; 0'09; 0'07)
A	Alto	(0'63; 0'80; 0'05; 0'06)
BA	Bastante alto	(0'78; 0'92; 0'06; 0'05)
MA	Muy alto	(0'98; 0'99; 0'05; 0'01)
E	Esencial	(1; 1; 0; 0)

En cuanto a la representación de las etiquetas utilizada en el modelo AG-DNP-Fuzzy, si bien la realizada por BONISSONE y DECKER (1986) es una de las más contrastadas y utilizadas, se ha optado por incorporar la posibilidad de que el usuario decida el tipo de representación deseado, pudiendo optar entre la representación simétrica y la representación propuesta por estos autores. Los datos obtenidos tanto en el procesamiento inicial de la información, como posteriormente en el funcionamiento del propio AG, darán resultados diferentes, como consecuencia de la elección realizada sobre el tipo de representación.

La construcción del modelo, en base a la consideración anterior, precisa en primer término, para cada variable del modelo, de un análisis sobre las peculiaridades que presenta en este contexto, con la utilización de términos lingüísticos, siendo necesario establecer la semántica de las etiquetas lingüísticas utilizadas para expresar tanto las distintas relaciones como las diversas evaluaciones.

Por otra parte, y dada la homogeneidad de criterios perseguida en la construcción de los distintos modelos, en muchos casos se establece la presentación de la información en base a las circunstancias en que se ha desarrollado el modelo AG-DNP-Crisp. De esta forma, se ha optado porque aquellas variables en las que la información cierta se encuentra expresada en términos numéricos cuyo dominio de expresión se encuentre entre 0 y 5 (escala de Likert), en el modelo actual se establecerá en base a 5 etiquetas lingüísticas. Sin embargo, y dada la generalización de la utilización de 9 etiquetas comentada en el Capítulo 4, en aquellos casos en los que no sea posible realizar ningún tipo de comparación se ha optado por utilizar esta cifra.

En estos términos, el cuadro de doble entrada en el que se reflejan las relaciones entre los requerimientos de los clientes y el listado de las posibles características a desarrollar en el nuevo producto, se puede plantear como muestra la Figura 5.26.

	CA1	CA2	CA3	CA4	CA5	CA6	CA7	CA8	CA9	CA10
RC1	Muy fuerte		Media							
RC2	Fuerte	Bastante débil	Débil							
RC3	Débil	Muy fuerte	Bastante fuerte	Debilísima						
RC4	Esencial		Muy débil							
RC5	Muy débil	Debilísima		Muy fuerte	Media	Media				
RC6				Fuerte	Fuerte	Muy débil				
RC7				Bastante débil	Media	Media	Bastante débil			
RC8									Media	
RC9							Muy fuerte		Débil	
RC10							Bastante fuerte	Muy débil	Bastante débil	
RC11										Muy débil
RC12							Débil	Bastante débil	Muy fuerte	Esencial
RC13							Media		Muy débil	Bastante fuerte
RC14							Media	Media	Fuerte	Fuerte
RC15								Esencial		Media

Figura 5.26.

Como se puede observar en la Figura anterior, la utilización de este tipo de evaluación de la información permite una mayor precisión en el momento de establecer las posibles relaciones entre ambos aspectos, de forma que es posible reflejar de manera más exhaustiva las opiniones e informaciones relativas a dichas relaciones.

En este caso se ha optado por una representación con 9 etiquetas lingüísticas, que de mayor a menor relación se asocian a través de las nueve etiquetas siguientes: Esencial, Muy Fuerte, Bastante Fuerte, Fuerte, Media, Débil, Bastante Débil, Muy Débil y Debilísima. La función de pertenencia asociada a cada una de ellas se analizará con posterioridad en el momento de utilizar esta información.

Por lo que se refiere al resto del modelo, si bien las variables son similares en cuanto a su contenido y repercusión en relación con el modelo anterior, debido a la distinta forma de representación y a su funcionamiento, en los apartados siguientes se procede a realizar una breve descripción de las mismas desde la óptica de este tipo de representación.

#### 5.2.2.1.1. Tratamiento de la información exógena: Voz del cliente

Las opiniones de los clientes habitualmente son obtenidas mediante la realización de análisis de mercado, normalmente encuestas entre potenciales consumidores, en cuyo caso la facilidad que ofrece la obtención de esta información en términos lingüísticos es mayor si cabe que en el caso anterior.

Los aspectos relacionados con las expectativas de los posibles clientes se reflejan en la información relativa a los requerimientos que sobre el nuevo producto demandan los mismos.

A continuación se procede a realizar una descripción de cada uno de los componentes que afectan a los requerimientos, en cuanto al tipo de información que se va a procesar en el modelo, la forma de tratarla y el código utilizado en el programa en cada uno de estos aspectos.

### A. Importancia de los requerimientos desde la perspectiva del cliente

La importancia que los clientes otorgan a un determinado requerimiento puede asimismo ser obtenida a través de etiquetas lingüísticas. En este caso, y dado que en el ejemplo anterior se aplicaba la escala de Likert que asignaba valores de 1 a 5, en el caso del modelo AG-DNP-Fuzzy se plantea ponderar a los requerimientos mediante la utilización de 5 etiquetas, en concreto, con la siguiente semántica: Muy Importante, Importante, Medio, Poco Importante y Nulo.

En cuanto a la función de pertenencia asociada a cada una de las etiquetas anteriores, por su generalidad se aplica una representación simétrica de las mismas en el intervalo [0, 1], cuyos valores y representación es la de la Figura 5.27.

Muy importante	[0'8125, 0'9375, 1, 1]
Importante	[0'5625, 0'6875, 0'8125, 0'9375]
Medio	[0'3125, 0'4375, 0'5625, 0'6875]
Poco importante	[0'0625, 0'1875, 0'3125, 0'4375]
Nulo	[0, 0, 0'0625, 0'1875]

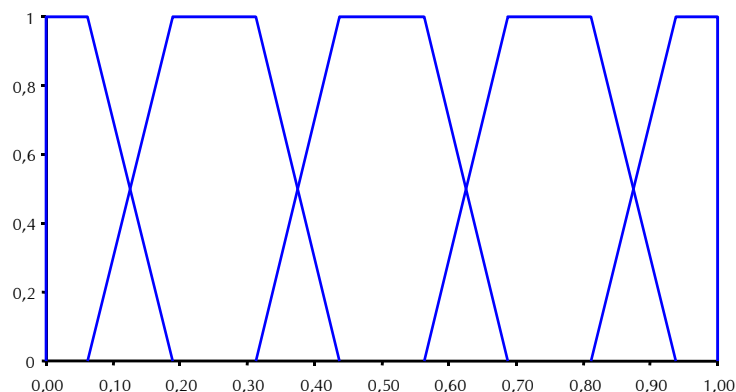


Figura 5.27.

Una vez determinadas las relaciones que cada requerimiento tiene con todas las posibles características y el factor que evalúa la ponderación de la importancia del mismo es posible establecer la importancia de cada requerimiento o lo que se ha denominado “requerimientos ponderados”.

Para ello, y de acuerdo con la matemática propia de los números borrosos trapezoidales, para cada requerimiento se suma el resultado de multiplicar el trapecio que representa la relación lingüística que mantiene con cada característica por el trapecio que representa la importancia o ponderación del mismo.

Para proceder a realizar este cálculo, se debería establecer el valor de las etiquetas lingüísticas que hacen referencia a la relación que los requerimientos mantienen con las características. En este sentido, para establecer la función de pertenencia de dichas variables lingüísticas existen dos opciones principales, a saber:

- Utilizar una representación simétrica, es decir, asignar a cada etiqueta una función de pertenencia simétrica y uniformemente distribuida.
- Utilizar la representación propuesta por Bonissone y Decker y basada en el trabajo de estos autores.

En ambos casos la operativa es la misma, razón por la cual en el modelo propuesto se da la opción de que sea el usuario el que determine el tipo de representación que estime oportuno para determinar dichas relaciones, como muestra la Figura 5.28.

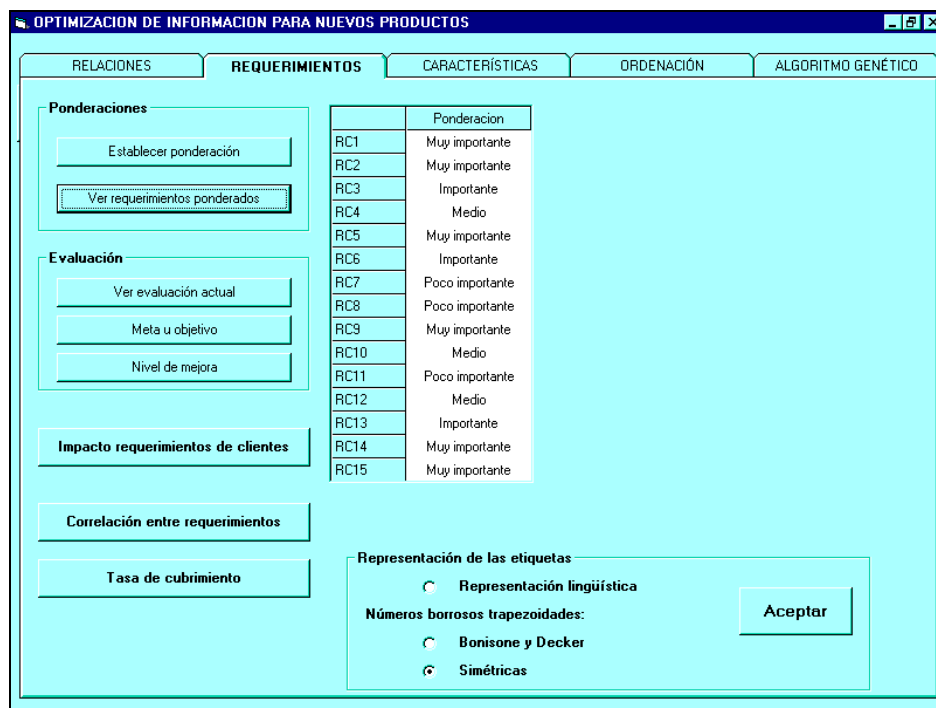


Figura 5.28.



En función de la opción elegida el resultado de los requerimientos ponderados será distinto, de forma que si se establece, por ejemplo, una representación simétrica el resultado de esta información, suponiendo para el ejemplo de ilustración práctica las ponderaciones recogidas en la Figura 5.29., vendrá establecido por los números borrosos trapezoidales asociados que refleja dicha Figura.

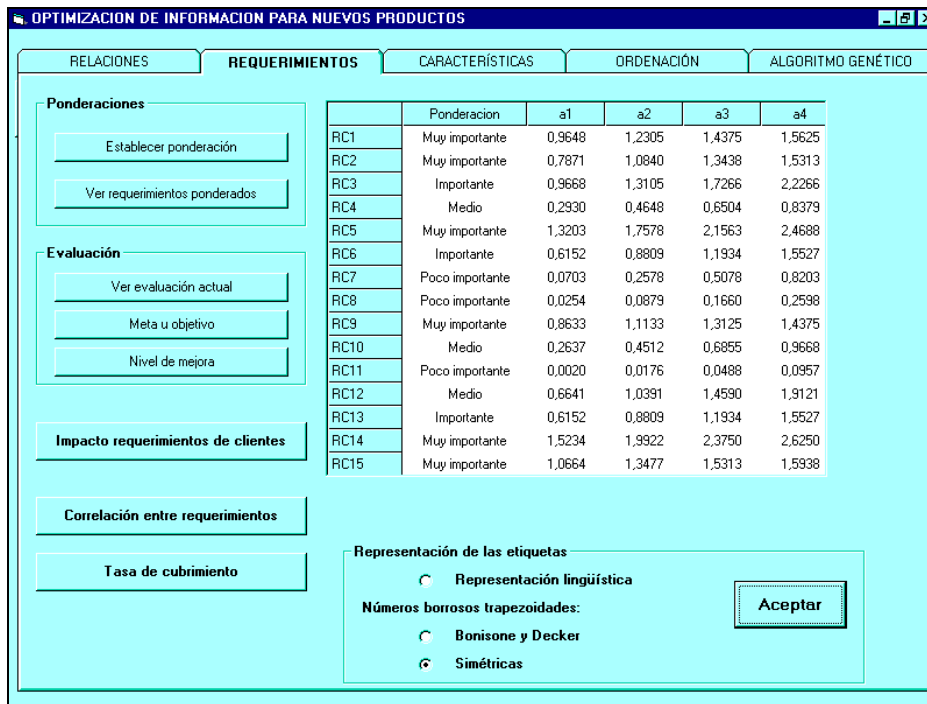


Figura 5.29.

El pseudo-código de este procedimiento, en el cual en primer término será necesario establecer la representación por la que opta el usuario para las evaluaciones recogidas en la matriz de relaciones, es el que se muestra en el Cuadro 5.38.

```

*****
'Propósito: Localiza, para cada requerimiento, la relación con cada una de las caracterís-
            ticas y en función de dicha relación (E/MF/BF/F/M/D/BD/MD/DB) y del factor
            de ponderación del requerimiento de que se trate (MI/I/M/PI/N), realiza la va-
            loraación de la importancia del mismo
'Entradas:  Matriz de relaciones
            Etiqueta lingüística de la ponderación de los requerimientos
            Números borrosos trapezoidales representativos de las etiquetas lingüísticas
            correspondientes a la matriz de relaciones y a la ponderación de los requeri-
            mientos en función de la decisión del usuario
'Devuelve:  Importancia de los requerimientos
*****
    
```

1. Establece la función de pertenencia de acuerdo con la opción elegida por el usuario:
  - Si el usuario opta por una representación simétrica, asociar a las etiquetas lingüísticas que determinan la relación entre requerimientos y características, los números borrosos trapezoidales correspondientes a dicha función de pertenencia
  - Si el usuario opta por la representación de Bonissone y Decker, asociar a las etiquetas lingüísticas que determinan la relación entre requerimientos y características, los números borrosos trapezoidales correspondientes a dicha función de pertenencia

/ Fase en la que se determina la función de pertenencia de la matriz de relaciones /
  
2. *Para n = 1 hasta Número\_de\_requerimientos hacer*
  - Para m = 1 hasta Número\_de\_características hacer*
    - Buscar si existe relación entre el requerimiento y la característica:
      - Si existe relación, multiplicar el número borroso trapezoidal asociado a dicha relación por el número borroso trapezoidal que representa el factor de ponderación del requerimiento
      - Si no existe relación, continuar con la siguiente característica
    - Sumar para cada requerimiento los valores obtenidos de la operación anterior

/ Fase en la que se establecen los números borrosos trapezoidales que determinan la importancia de los requerimientos ponderados /

**Cuadro 5.38.**

## **B. Evaluación comparativa con productos concurrentes**

Para establecer una medida de la evaluación comparativa del cumplimiento de los requerimientos de los clientes por parte de la empresa en relación con el desarrollo de los mismos en empresas de la competencia desde esta perspectiva, será necesario en primer lugar determinar la semántica a utilizar para realizar la valoración tanto de la situación actual de la empresa como de la situación en la que se encuentran las posibles empresas competidoras.

En el modelo anterior, ambas situaciones se planteaban siguiendo la escala de Likert, de ahí que en este desarrollo se haya optado por utilizar una representación simétrica y uniforme de las funciones de pertenencia asociadas a etiquetas lingüísticas con una cardinalidad de 5. En concreto la semántica aplicada a las mismas ha sido en los siguientes términos: Excelente, Buena, Aceptable, Mala y Pésima, tanto para la empresa como para competencia, cuyos valores y representación serán los recogidos en la Figura 5.27.

De esta forma es posible, utilizando la matemática propia de los números borrosos trapezoidales, establecer la distancia entre la empresa y la competencia sin más que restar ambos valores.

Para realizar dicha evaluación se ha seguido la misma metodología que en el caso anterior, de forma que valores negativos de la medida de distancia determinarían situaciones para los requerimientos en los que la empresa se encuentra bien valorada desde este aspecto.

La consideración anterior permite, en el momento de establecer la medida de una combinación de características, que maximicen las relaciones entre todas las variables, será irrelevante la evaluación comparativa en aquellos requerimientos cuya distancia sea negativa o nula.

La codificación de este procedimiento se plantea en el Cuadro 5.39.

*****	
'Propósito:	Determina, para cada requerimiento, la evaluación actual de la empresa y la compara con la evaluación de la competencia y establece la distancia entre ambas
'Entradas:	Evaluación actual de los requerimientos en la empresa Evaluación actual de los requerimientos en la competencia Números borrosos trapezoidales representativos de las etiquetas lingüísticas correspondientes a una función de pertenencia simétrica y uniforme basada en 5 etiquetas
'Devuelve:	Nivel de mejora para cada requerimiento
*****	
<i>Para n = 1 hasta Número_de_requerimientos hacer</i>	
	Localiza la evaluación lingüística de la competencia
	Localiza la evaluación lingüística de la empresa
	Asigna a cada etiqueta los números borrosos trapezoidales representativos de las mismas
	Establece la distancia entre ambos valores

**Cuadro 5.39.**

A efectos ilustrativos para la realización del ejemplo que se está desarrollando, se suponen unos valores para la evaluación de la situación de la empresa y de la competencia recogidos en la Figura 5.30., en la que se muestra asimismo el resultado de aplicar a los mismos este proceso.

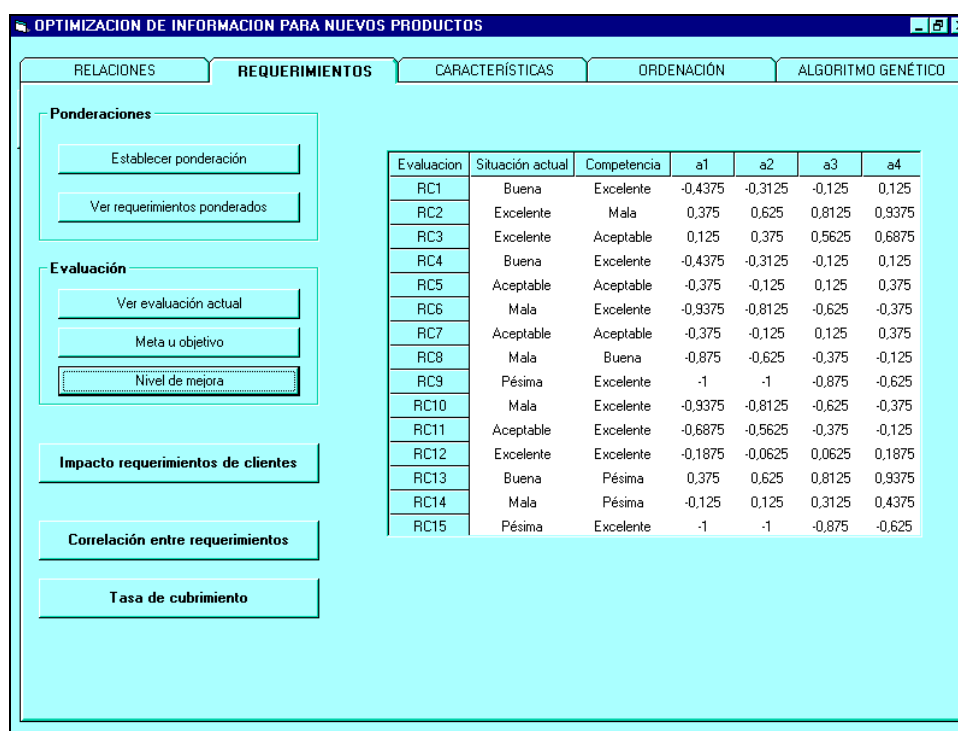


Figura 5.30.

Asimismo, en función de la importancia de los requerimientos y del nivel de mejora establecido para cada uno de ellos, tal como se comentó en el modelo propugnado en el Capítulo 2, es posible evaluar el impacto de cada requerimiento.

En este punto surge una dificultad al establecer la medida del impacto mediante números borrosos trapezoidales, al ser necesario aplicar un operador de multiplicación siendo el más generalizado la multiplicación de DUBOIS y PRADE, la cual precisa que los valores de las variables se encuentren dentro de los números reales positivos.

Por este motivo, en primer término será necesario proceder a realizar la transformación lineal en  $[0, 1]$  de los valores obtenidos tanto para la importancia de los requerimientos como para el nivel de mejora de los mismos. Este proceso se realiza obteniendo el menor y el mayor valor posible de todos los números borrosos trapezoidales, y normalizando todos los trapecios en función de dicho máximo y mínimo. De esta forma se consigue una homogeneización de los valores asignados a estas variables dentro del intervalo  $[0, 1]$  y, en consecuencia, pertenecientes a los números reales positivos, lo que permite la aplicación del operador de multiplicación antes mencionado.

La codificación de este proceso es la que se detalla en el Cuadro 5.40. y los valores obtenidos para el ejemplo de aplicación práctica son los que se muestra la pantalla de la Figura 5.31.

```

*****
'Propósito:  Determinar los valores de la importancia y del nivel de mejora de los requerimien-
tos sometidos a la transformación lineal en [0, 1]

'Entradas:   Importancia de los requerimientos
             Nivel de mejora de los requerimientos

'Devuelve:  Valores de la importancia y del nivel de mejora de los requerimientos en el inter-
valo [0, 1]
*****

Para n = 1 hasta Número_de_requerimientos hacer
    Localizar el menor valor de los correspondientes al primer término de cuatupla que re-
    presenta la importancia de los requerimientos
    Localizar el mayor valor de los correspondientes al cuarto término de cuatupla que re-
    presenta la importancia de los requerimientos
    Determinar la transformación lineal en [0, 1] de la importancia para cada requerimiento

Para n = 1 hasta Número_de_requerimientos hacer
    Localizar el menor valor de los correspondientes al primer término de cuatupla que re-
    presenta el nivel de mejora de los requerimientos
    Localizar el mayor valor de los correspondientes al cuarto término de cuatupla que re-
    presenta el nivel de mejora de los requerimientos
    Determinar la transformación lineal en [0, 1] del valor del nivel de mejora para cada requere-
    rimiento
    
```

Cuadro 5.40.

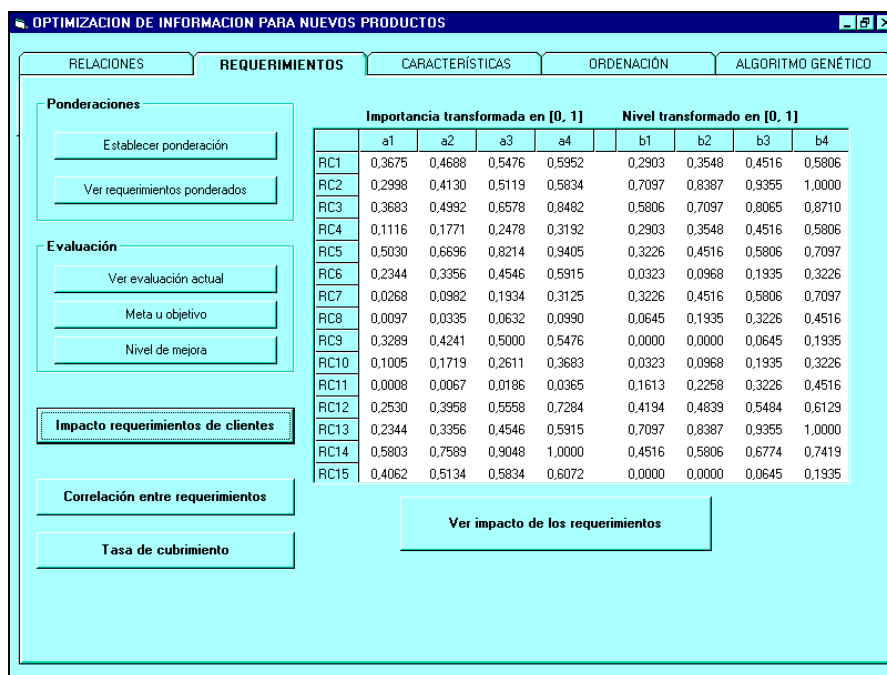


Figura 5.31.

En este proceso, al intervenir la información relativa a los requerimientos ponderados para los cuales existe la opción de utilizar etiquetas con una representación simétrica o bien con la representación establecida por BONISSONE y DECKER, el resultado estará condicionado por dicha elección.

A estos efectos, los resultados mostrados en la Figura 5.31. con la finalidad de continuar con el mismo ejemplo, se han establecido en función de una representación simétrica.

En el caso de la segunda variable, nivel de mejora de los requerimientos, no se daba esta circunstancia y, por tanto, no incide en el resultado obtenido.

Una vez establecidas de forma homogénea las variables que inciden en el cálculo del impacto de los requerimientos, será necesario proceder a la codificación de este proceso que, al ser similar al realizado en el modelo AG-DNP-Crisp sin más que utilizar la matemática propia de los números borrosos, no se considera oportuno su reiteración. Los resultados tras este proceso son los que muestra la pantalla de la Figura 5.32.

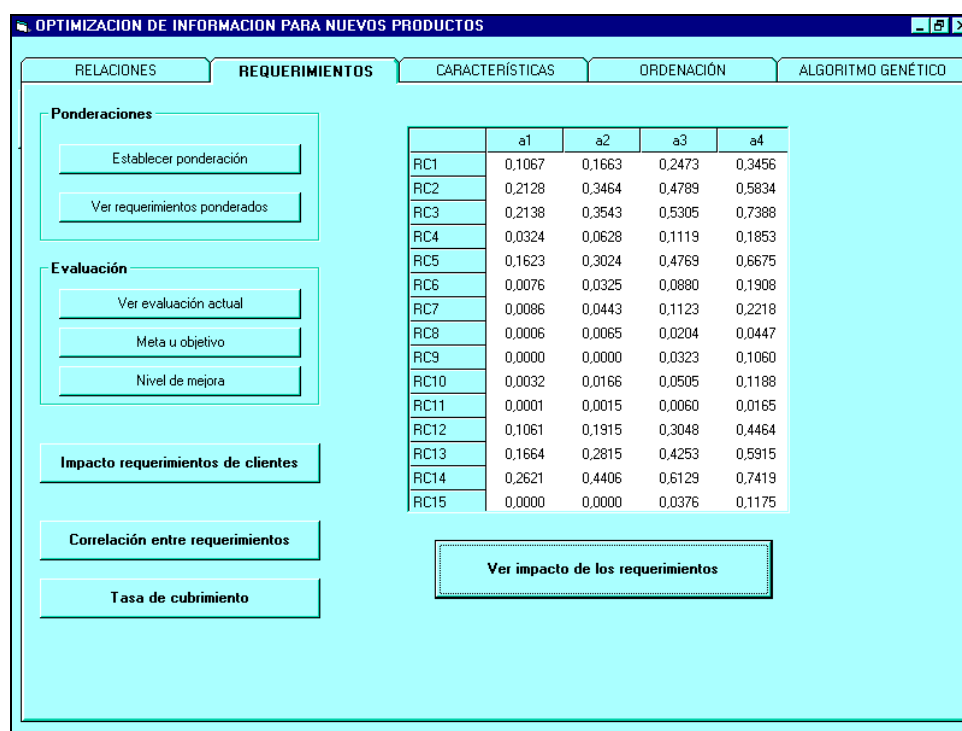
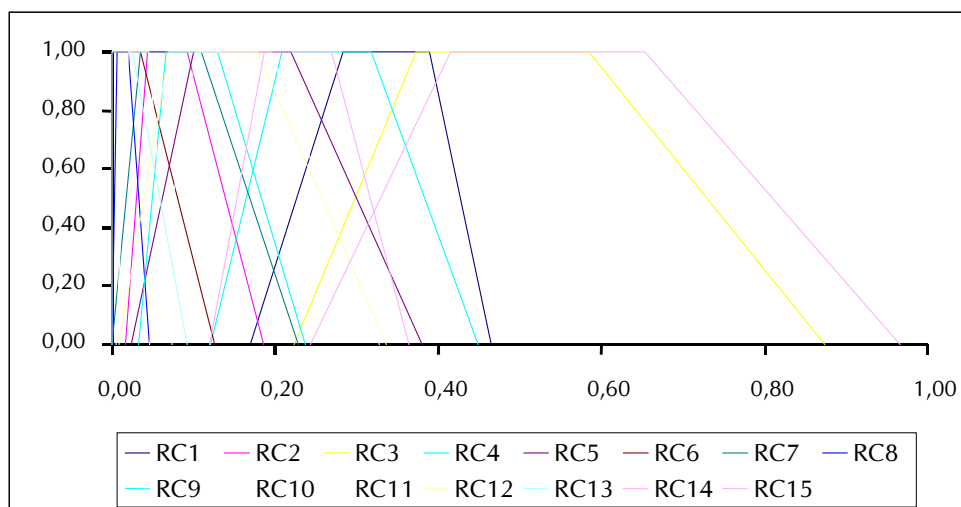


Figura 5.32.

A efectos ilustrativos se puede considerar una representación del impacto de los requerimientos evaluados en la Figura anterior y se muestra en la Figura 5.33.



**Figura 5.33.**

La Figura anterior realiza una representación de los números borrosos trapezoidales que establecen la medida del impacto de los requerimientos. En el modelo propuesto no es necesario realizar ninguna comparación entre los mismos, ya que el modelo opera con toda la incertidumbre, si bien en el caso en que fuera preciso se podría establecer qué requerimiento tiene mayor impacto en términos numéricos, sin más que calcular el centroide de cada uno de ellos. No obstante, la representación gráfica da una medida visual de este aspecto, que para algún requerimiento es suficiente en el sentido de que de forma visual es posible aproximar el posible impacto del mismo.

### C. Correlación entre los requerimientos

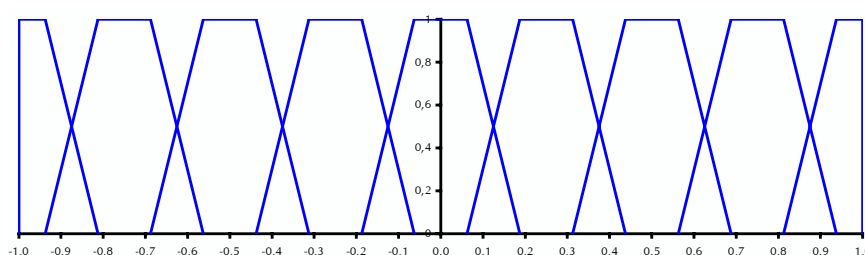
Las relaciones entre los distintos requerimientos deben poder establecerse en términos de relaciones positivas y negativas. De acuerdo con esto la función de pertenencia de los números borrosos trapezoidales representativos de dichas relaciones se establecen en el intervalo [-1, 1].

En cuanto a la cardinalidad de las variables lingüísticas utilizadas para expresar dichas relaciones, siguiendo el carácter general de la representación aplicado para el resto de variables, se ha optado por utilizar 9 etiquetas lingüísticas, cuya semántica es la siguiente: Positiva Extrema (PE), Positiva Muy Fuerte (PMF), Positiva Fuerte (PF), Positiva Débil (PD), Prácticamente Nula (PN), Negativa débil (ND), Negativa Fuerte (NF), Negativa Muy Fuerte (NMF) y Negativa Extrema (NE).

Las funciones de pertenencia asociadas a dicha representación, simétrica, uniforme, con 9 etiquetas en el intervalo [-1, 1] sería la siguiente:

Positiva Extrema	[0'8125, 0'9375, 1, 1]
Positiva Muy Fuerte	[0'5625, 0'6875, 0'8125, 0'9375]
Positiva Fuerte	[0'3125, 0'4375, 0'5625, 0'6875]
Positiva Débil	[0'0625, 0'1875, 0'3125, 0'4375]
Prácticamente Nula	[-0,1875, -0'0625, 0'0625, 0'1875]
Negativa Débil	[-0'0625, -0'1875, -0'3125, -0'4375]
Negativa Fuerte	[-0'3125, -0'4375, -0'5625, -0'6875]
Negativa Muy Fuerte	[-0'5625, -0'6875, -0'8125, -0'9375]
Negativa Extrema	[-0'8125, -0'9375, -1, -1]

Y la representación gráfica de las anteriores funciones de pertenencia se reflejan en la Figura 5.34.



**Figura 5.34.**

Respecto a la información correspondiente a esta variable, en la captura de la información no es preciso realizar ninguna modificación, si bien en su tratamiento en el momento de determinar la calidad de las soluciones generadas por el AG se establecerán los términos en que estas correlaciones inciden en la medida de las mismas. A efectos ilustrativos, la información incluida en el ejemplo se muestra la Figura 5.35.

#### **D. Tasa de cubrimiento de las características por parte de los requerimientos**

La determinación del número de características que son atendidos por cada requerimiento y con qué grado de relación sigue siendo una variable a utilizar en aquellas circunstancias en que en base al resto de la información dos o más requerimientos puedan ser indiferentes o muy similares. En el ejemplo, al tratarse del mismo ejemplo de estudio que en el caso del modelo AG-DNP-Crisp, cada requerimiento atenderá a las mismas características si bien las relaciones estarán establecidas en términos más precisos en función de las nueve etiquetas utilizadas en su determinación.



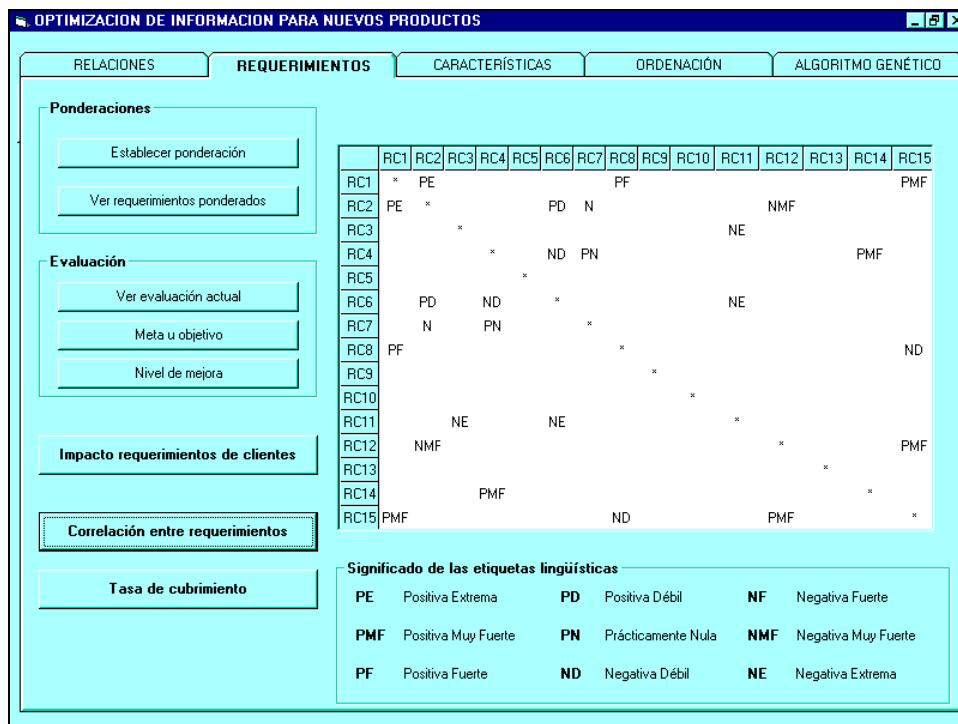


Figura 5.35.

La codificación del proceso en este caso será similar, salvo la circunstancia que se acaba de mencionar, y es la que se muestra en el Cuadro 5.41., mientras que la tasa de cubrimiento obtenida para los datos del ejemplo se representa en la pantalla que recoge la Figura 5.36.

```

*****
'Propósito:  Determinar, en función del número de características con que se relaciona y
              el grado de dicha relación, la tasa de cubrimiento de cada requerimiento
'Entradas:   Matriz de relaciones
'Devuelve:  Tasa de cubrimiento de cada requerimiento
*****

Para n = 1 hasta Número_de_requerimientos hacer
    Para m = 1 hasta Número_de_características hacer
        Establecer si existe relación de la característica con el requerimiento
            - Si existe relación
                Determinar el grado de relación
                Realizar la suma de todas las características con ese grado
            - Si no existe relación, continuar con la siguiente característica
        Establecer la tasa de cubrimiento para cada requerimiento
    
```

Cuadro 5.41.

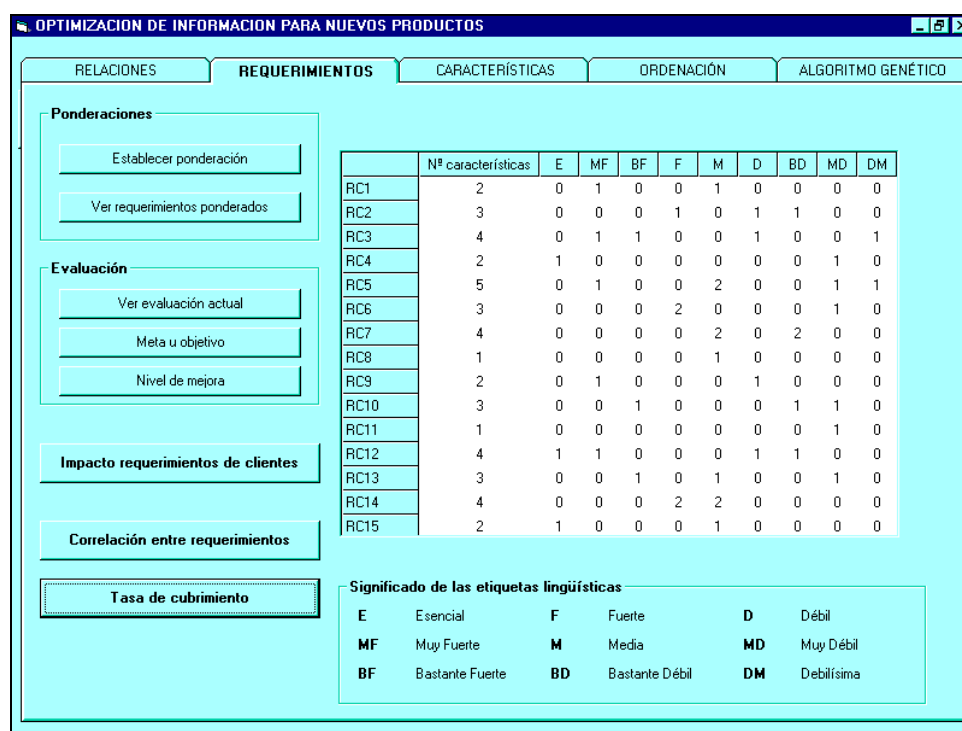


Figura 5.36.

## E. Ordenación de los requerimientos

La importancia de los requerimientos junto con la medida del nivel de mejora de los mismos, además de ser útil para establecer el impacto de los mismos, se pueden utilizar como variables relevantes en el momento de establecer una lista ordenada de mayor a menor importancia de todos los requerimientos.

En este caso, al necesitar establecer valores medios, tanto actuales como posibles, se procederá en primer lugar a determinar el centroide de cada una de las variables para cada requerimiento, es decir, tanto para la importancia como para el nivel de mejora se establece el valor medio que ambas variables tienen o podrían tener con cada requerimiento. En ambos casos el procedimiento será el siguiente:

- Para establecer una ordenación basada en los datos medios totales, en primer término es necesario calcular los valores máximos y mínimos posibles de ambas variables, de forma que sea posible, en función de los centroides de dichos valores, establecer el valor medio de las dos variables que afectarán la ordenación.
- Para establecer una ordenación basada en los datos medios actuales, y dado que éstos ya están calculados en apartados anteriores, se establecerá una media de los centroides de ambas variables que servirá para clasificar los distintos requerimientos.

La ordenación obtenida utilizando un criterio u otro puede diferir, ya que en un caso se establece un orden dentro de la situación en la que se encuentran actualmente los requerimientos respecto a las variables que inciden en la misma, mientras que en el otro caso se compara la situación de los requerimientos en este momento con una situación hipotética media. De esta forma, la utilidad de una u otra ordenación dependerá de los fines perseguidos con la misma.

Los valores de ambas ordenaciones se verán afectados por el sistema de representación elegido para el caso del establecimiento de la importancia de los requerimientos, en el cual como ya se ha hecho explícito, se deja libertad al usuario para optar entre la representación simétrica y la propuesta por Bonissone y Decker. La elección realizada por el usuario final afecta en ambos casos, si bien la repercusión es distinta en uno u otro caso.

En el primer caso, es decir cuando se realiza una ordenación en función de los datos medios actuales, la repercusión en el resultado del orden establecida viene dada por la valoración en sí de la importancia de los requerimientos, ya que a efectos de establecer la importancia media se tendrán en cuenta éstos así como en el momento de comparar la importancia de cada uno de ellos respecto a dicha media.

En el segundo caso, la repercusión sólo se produce en el cálculo de la ordenación propiamente dicha, ya que a efectos del cálculo de la importancia media sólo se consideran los valores actuales y, por tanto, es independiente de los valores posibles en uno u otro tipo de representación.

El proceso de codificación de ambas alternativas se muestra en los Cuadros 5.42. y 5.43. y resultado de someter los datos del ejemplo de aplicación práctica a ambos tipos de ordenación se recoge en la pantalla de la Figura 5.37.

```
'*****  
'Propósito:  Calcular, en función del grado de importancia y de la tasa de mejora de los  
              requerimientos, una ordenación de los mismos  
'Entradas:  Importancia de los requerimientos  
              Tasa de mejora de los requerimientos  
'Devuelve:  Ordenación en función de datos medios posibles de los requerimientos  
'*****  
  
1.    Determinar la importancia media  
      - Si se ha elegido una representación basada en Bonissone y Decker, determinar  
        el valor medio de las ponderaciones utilizadas para medir la relación entre ca-  
        racterísticas y requerimientos y calcular su media
```

- Si se ha elegido una representación simétrica, determinar el valor medio de las ponderaciones utilizadas para medir la relación entre características y requerimientos y calcular su media
2. Determinar la tasa de mejora media  
Localizar las valoraciones utilizadas para determinar la tasa de mejora y calcular la media
  3. *Para n = 1 hasta Número\_de\_requerimientos hacer*  
Localizar su grado de importancia (requerimientos ponderados) y calcular el centroide  
Establecer su tasa de mejora o distancia entre situación actual y situación de la competencia y calcular el centroide  
En función de los valores de cada requerimiento, *hacer*
    - Si el centroide de la importancia < importancia media y el centroide de la tasa < tasa media, clasificar el requerimiento como "Cuestionable"
    - Si el centroide de la importancia < importancia media y el centroide de la tasa > tasa media, clasificar el requerimiento como "Dormido"
    - Si el centroide de la importancia > importancia media y el centroide de la tasa < tasa media, clasificar el requerimiento como "Oportunidad"
    - Si el centroide de la importancia > importancia media y el centroide de la tasa > tasa media, clasificar el requerimiento como "Ganador"

**Cuadro 5.42.**

```

*****
'Propósito:  Calcular, en función del grado de importancia y de la tasa de mejora de los
              requerimientos, una ordenación de los mismos
'Entradas:   Importancia de los requerimientos
              Tasa de mejora de los requerimientos
'Devuelve:   Ordenación en función de datos medios actuales de los requerimientos
*****

Para n = 1 hasta Número_de_requerimientos hacer
    Localizar su grado de importancia (requerimientos ponderados) y calcular el cen-
    troide
    Establecer su tasa de mejora o distancia entre situación actual y situación competen-
    cia y calcular el centroide
    Determinar el valor medio de la importancia de los centroides anteriores correspon-
    dientes a la importancia de cada requerimiento
    Determinar el valor medio de la tasa de mejora de los centroides anteriores corres-
    pondientes a la tasa de mejora de cada requerimiento
    
```

Para  $n = 1$  hasta Número\_de\_requerimientos hacer

En función de los valores de cada requerimiento, hacer

- Si el centroide de la importancia < importancia media y el centroide de la tasa < tasa media, clasificar el requerimiento como "Cuestionable"
- Si el centroide de la importancia < importancia media y el centroide de la tasa > tasa media, clasificar el requerimiento como "Dormido"
- Si el centroide de la importancia > importancia media y el centroide de la tasa < tasa media, clasificar el requerimiento como "Oportunidad"
- Si el centroide de la importancia > importancia media y el centroide de la tasa > tasa media, clasificar el requerimiento como "Ganador"

Cuadro 5.43.

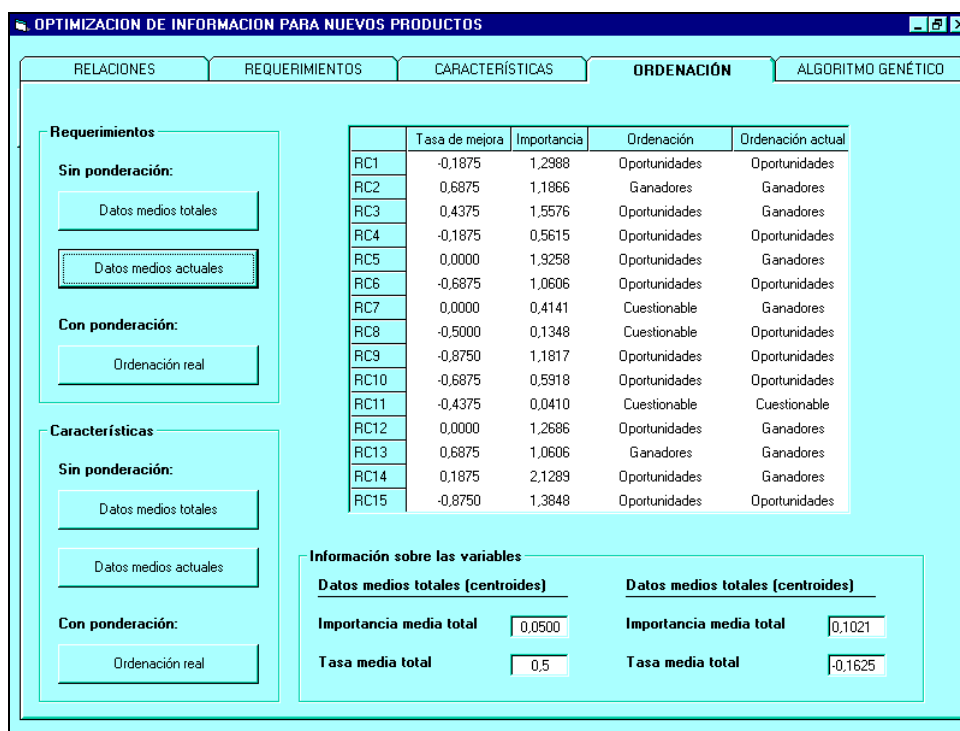


Figura 5.37.

En cuanto a la posibilidad de realizar una ordenación real en base a la propuesta de TACU y STEFAN (1996b), si se establece de forma similar al caso anterior, una ponderación del doble para la importancia respecto la tasa de mejora, se puede establecer dicha ordenación.

La codificación de este proceso, en la medida que se realiza con valores centrales de ambas variables es similar al modelo planteado con información en valores numéricos y, por tanto, está recogida en el Cuadro 5.7.

Los resultados en la aplicación al ejemplo, suponiendo una representación simétrica, son los que muestra la Figura 5.38.

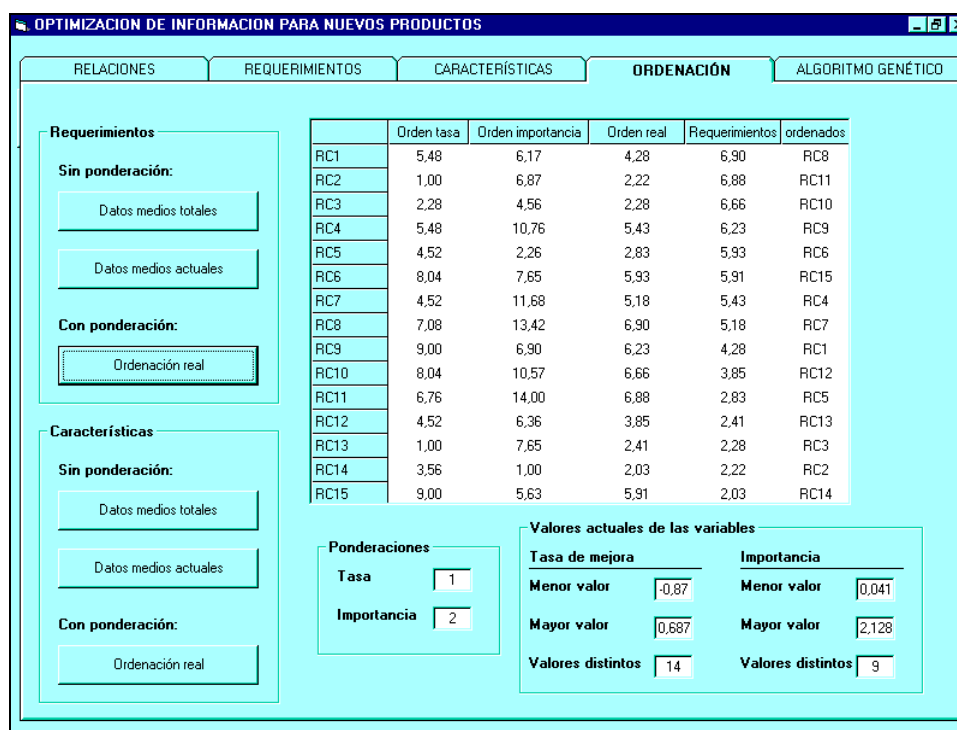


Figura 5.38.

De la misma forma que en el caso de ordenación anterior, el resultado obtenido al aplicar una ordenación ponderada dependerá de la representación elegida para las etiquetas lingüísticas que establecen las relaciones iniciales entre requerimientos y características, ya que los centroides de la importancia de cada requerimiento se ven afectados por esa medida.

#### 5.2.2.1.2. Tratamiento de la información endógena: Voz del ingeniero

La información proveniente del ámbito interno de la empresa es asimismo en muchos casos ofrecida por expertos propios que reflejarán sus opiniones, de forma que será más fácil obtener una información más ajustada si a los mismos se les permite opinar en su lenguaje natural.

En este apartado se pretende realizar una breve descripción de las posibilidades que ofrece para la obtención y tratamiento de la información interna la utilización de etiquetas lingüísticas, y las repercusiones que las mismas tienen en los valores de las variables que recoge el modelo. Dicho análisis se realizará siguiendo la estructura establecida en la construcción del modelo AG-DNP-Crisp.

## A. Importancia de las características

La cuantificación de la importancia de las características, o características ponderadas, está íntimamente relacionada con la forma de evaluar la importancia de los requerimientos, ya que para su evaluación se utilizará la misma información relativa a las relaciones con estos últimos así como la ponderación establecida por los clientes para cada uno de ellos.

De esta forma, en función de las consideraciones efectuadas con anterioridad para evaluar las relaciones que los requerimientos tienen con las características en base a nueve etiquetas lingüísticas y las posibles representaciones de las mismas, en el caso de las características se ha seguido un criterio similar, en el sentido de que se ha dejado libertad al usuario para determinar qué representación considera en cada caso para dichas etiquetas en el momento de determinar las características ponderadas.

En referencia a la ponderación establecida para los requerimientos por parte de los clientes, en este caso se utilizará igual que en el caso anterior, una representación de cinco etiquetas lingüísticas con distribución simétrica, de acuerdo con lo establecido en el apartado 2.1.3.3. del presente Capítulo, al analizar el tratamiento de la voz del cliente en el modelo AG-DNP-Crisp.

Con el fin de conseguir la homogeneidad del ejemplo en su aplicación práctica a los distintos casos de estudio, se ha optado por utilizar la representación simétrica en el momento de evaluar la importancia de las características, de forma análoga a lo realizado en el caso de los requerimientos. Sin embargo, el programa da libertad para combinar ambos tipos de representaciones aunque se considera lógico que el criterio seguido sea el mismo para todas las variables.

La codificación de este proceso es la que se recoge en el Cuadro 5.44., siendo el resultado de aplicarlo al ejemplo el que muestra la pantalla de la Figura 5.39.

```
*****
'Propósito: Localiza, para cada característica, la relación con cada una de los requeri-
            mientos y en función de dicha relación (E/MF/BF/F/M/D/BD/MD/DB) y del
            factor de ponderación del requerimiento de que se trate (MI/I/M/PI/N), realiza
            la valoración de la importancia de la misma
'Entradas: Matriz de relaciones
            Etiqueta lingüística de la ponderación de los requerimientos
            Números borrosos trapezoidales representativos de las etiquetas lingüísticas
            correspondientes a la matriz de relaciones y a la ponderación de los requeri-
            mientos
'Devuelve: Importancia de las características
*****
```

1. Establecer la función de pertenencia de acuerdo con la opción elegida por el usuario:
  - Si el usuario opta por una representación simétrica, asociar a las etiquetas lingüísticas que determinan la relación entre requerimientos y características los números borrosos trapezoidales correspondientes a dicha función de pertenencia
  - Si el usuario opta por la representación de Bonissone y Decker, asociar a las etiquetas lingüísticas que determinan la relación entre requerimientos y características los números borrosos trapezoidales correspondientes a dicha función de pertenencia

/ Fase en la que se determina la función de pertenencia de la matriz de relaciones /
2. Para  $m = 1$  hasta Número\_de\_características hacer
  - Para  $n = 1$  hasta Número\_de\_requerimientos hacer
    - Buscar si existe relación entre la característica y el requerimiento:
      - Si existe relación, multiplicar el número borroso trapezoidal asociado a dicha relación por el número borroso trapezoidal que representa el factor de ponderación del requerimiento
      - Si no existe relación, continuar con el siguiente requerimiento
    - Sumar para cada característica los valores obtenidos de la operación anterior

/ Fase en la que se establecen los números borrosos trapezoidales que determinan la importancia de las características ponderadas /

Cuadro 5.44.

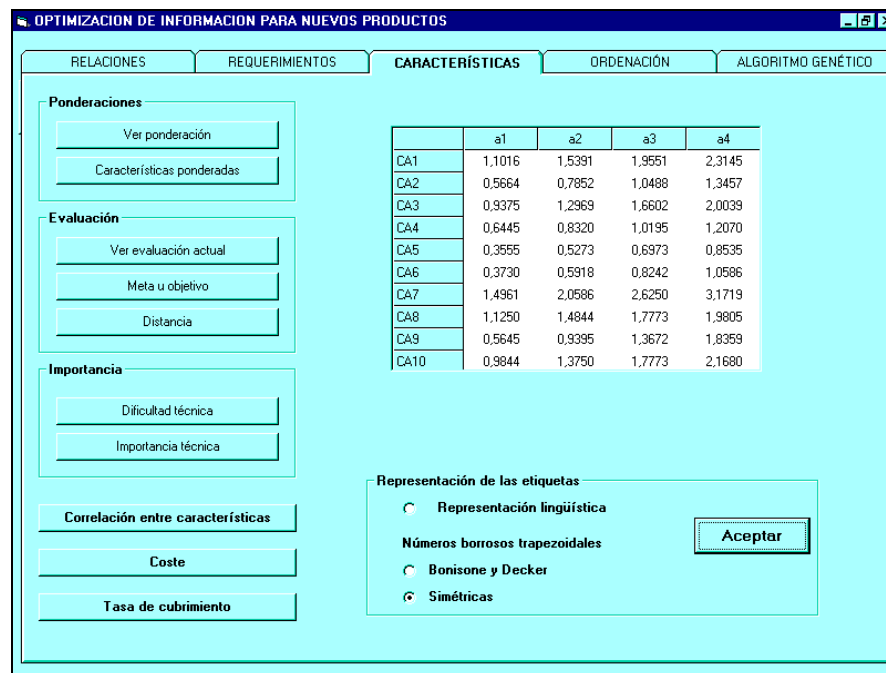


Figura 5.39.



**B. Situación actual de las características técnicas**

La evaluación actual de la situación de la empresa así como la valoración de la situación de las empresas de la competencia en sus posibilidades para desarrollar las características que se analizan, se realiza, por la homogeneidad buscada con los casos anteriores utilizando cinco etiquetas lingüísticas cuya semántica es la misma que se utilizó en el caso de los requerimientos.

La evaluación de la distancia o nivel de mejora para las características se realizará en consecuencia de forma similar a la evaluación comparativa efectuada con anterioridad sin más que aplicar la matemática propia de los números borrosos trapezoidales mediante los que han sido definidas las etiquetas lingüísticas correspondientes a las variables que inciden en dicha evaluación.

La codificación de este procedimiento será, por tanto, el que se recoge en el Cuadro 5.45.

*****	
'Propósito:	Determina, para cada característica, la evaluación actual de la empresa y la compara con la evaluación de la competencia y establece la distancia entre ambas
'Entradas:	Evaluación actual de las características en la empresa Evaluación actual de las características en la competencia Números borrosos trapezoidales representativos de las etiquetas lingüísticas correspondientes a una función de pertenencia simétrica y uniforme basada en 5 etiquetas
'Devuelve:	Nivel de mejora para cada característica
*****	
<i>Para m = 1 hasta Número_de_características hacer</i>	
	Localiza la evaluación de la competencia
	Localiza la evaluación de la empresa
	Asigna a cada etiqueta los números borrosos trapezoidales representativos de las mismas
	Establece la distancia entre ambos valores

**Cuadro 5.45.**

Si se suponen unas evaluaciones como las recogidas en la Figura 5.40., los resultados de su aplicación al ejemplo que se está desarrollando se muestran en dicha Figura.

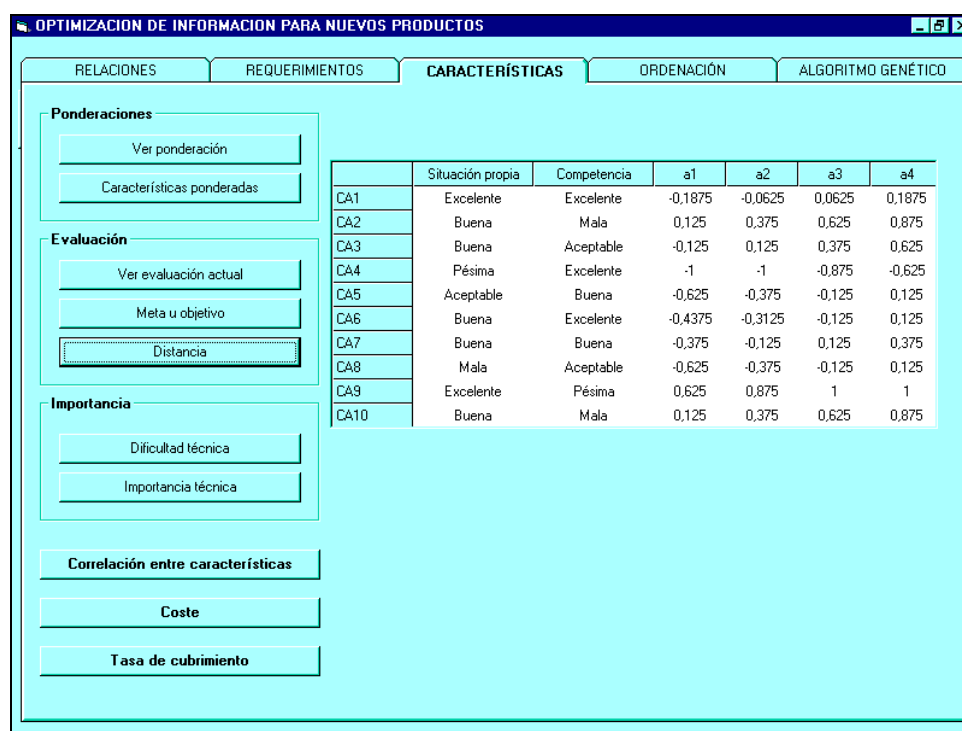


Figura 5.40.

### C. Importancia técnica de las características

La dificultad de desarrollar una característica, en términos distintos al coste de la misma, se establecía en el modelo desarrollado en ámbitos de certeza mediante la escala de Likert, de ahí que en términos lingüísticos se opte por una representación mediante cinco etiquetas, en concreto con la siguiente semántica: Muy Alta, Alta, Media, Baja y Muy Baja. La homogeneidad en el tratamiento de la información hace que se utilicen variables lingüísticas simétricas en el intervalo  $[0, 1]$  como para el resto de variables que se han configurado de acuerdo con esta cardinalidad.

La dificultad de desarrollo conjuntamente con la importancia de cada característica se utiliza como medida de la importancia técnica de las mismas. El cálculo de esta variable es similar al realizado en el caso de utilizar información numérica cierta, sin más que aplicar la matemática propia de los números borrosos trapezoidales.

De acuerdo con lo anterior, la codificación será la misma que la desarrollada en el apartado 2.1.2.3. presente Capítulo, recogido en el Cuadro 5.10., de forma que en su aplicación a los valores del ejemplo quedaría como muestra la pantalla de la Figura 5.41.

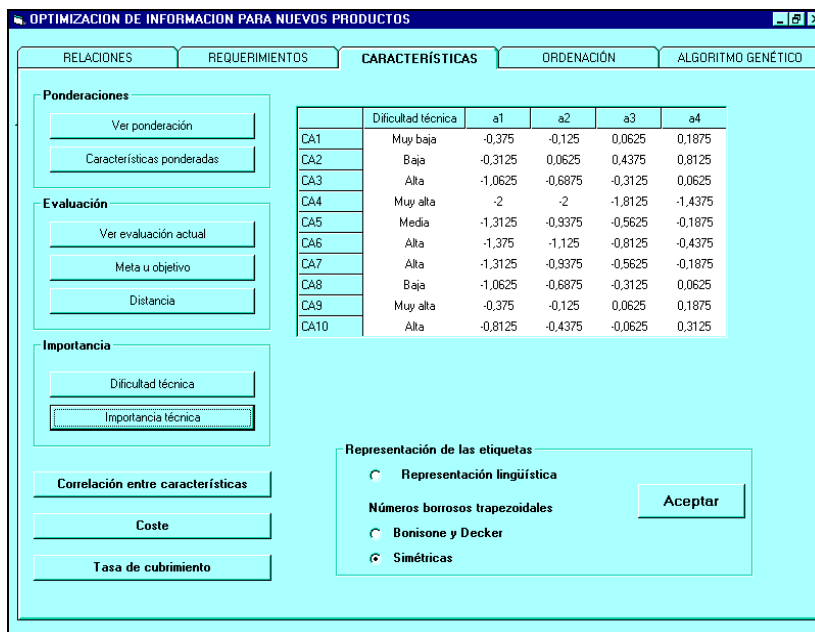


Figura 5.41.

#### D. Correlación entre las características

Las relaciones entre el listado de posibles características a desplegar en el nuevo producto, al considerar factible relaciones positivas o negativas, se han establecido de la misma forma de lo analizado en el caso de los requerimientos. Por tanto, se trata de una información que se refleja a través de nueve etiquetas simétricas en el intervalo [-1, 1] y que no precisan ningún tratamiento en este punto. En concreto, para el ejemplo las posibles correlaciones se han establecido como muestra la Figura 5.42.

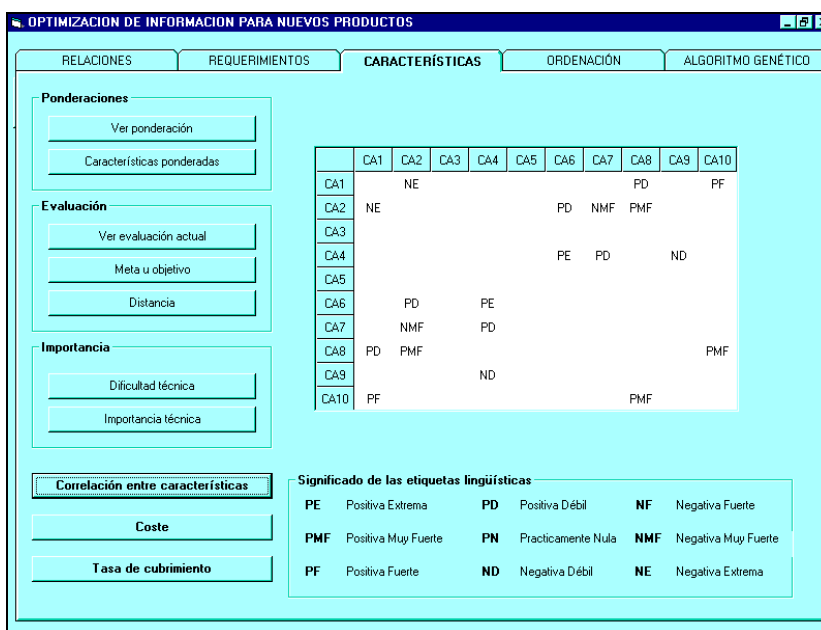


Figura 5.42.

### E. Tasa de cubrimiento de los requerimientos por parte de las características

La tasa de cubrimiento establece con cuántos requerimientos se encuentra relacionada cada característica y el grado de dicha relación. El establecimiento de esta variable es similar al caso anterior sin más que considerar la posible existencia de nueve tipos de relaciones dados por las nueve etiquetas utilizadas frente a las tres evaluaciones clásicas. La codificación de este proceso es la que se refleja en el Cuadro 5.46. y los resultados en el ejemplo se muestran en la Figura 5.43.

```

*****
'Propósito:  Determinar, en función del número de requerimientos con que se relaciona y
              el grado de dicha relación, la tasa de cubrimiento de cada característica
'Entradas:   Matriz de relaciones
'Devuelve:  Tasa de cubrimiento de cada característica
*****

Para m = 1 hasta Número_de_características hacer
    Para n = 1 hasta Número_de_requerimientos hacer
        Establecer si existe relación del requerimiento con la característica
            - Si existe relación
                Determinar el grado de relación
                Realizar la suma de todos los requerimientos con ese grado
            - Si no existe relación, continuar con el siguiente requerimiento
        Establecer la tasa de cubrimiento para cada característica
    
```

Cuadro 5.46.

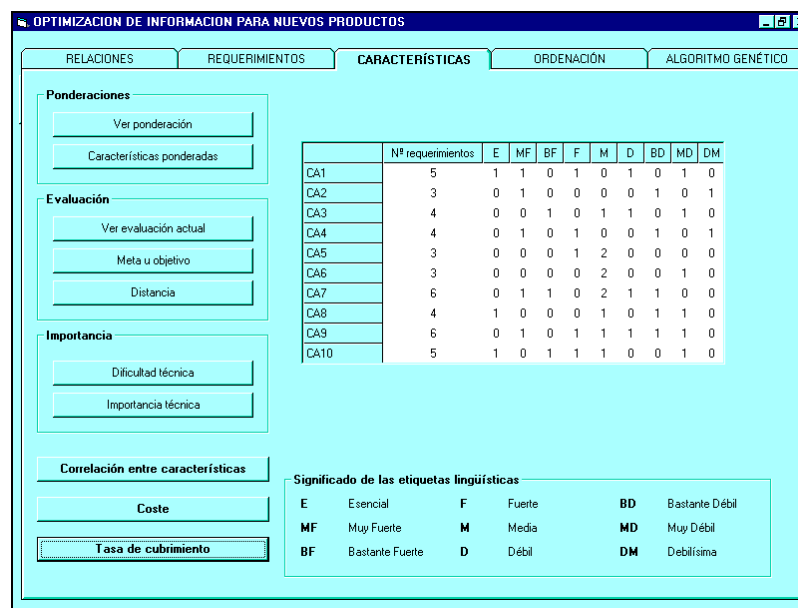


Figura 5.43.

## F. Ordenación de las características

La clasificación u ordenación de las características se puede establecer en los mismos términos que las analizadas para el caso de los requerimientos, es decir, es posible realizar una ordenación en función de las dos variables más relevantes, a saber: la importancia de cada característica y la distancia entre la situación actual y la deseada para cada característica.

En función del objetivo que se persiga con este análisis es posible efectuar una ordenación en base a los datos medios totales o posibles en cuyo caso se obtendría una visión de la posición de las características en sentido genérico, o bien ordenarlas en función de sus valores actuales, obteniendo en consecuencia una clasificación de las características en el momento actual, es decir, relacionando los valores de las características en este momento. En ambos casos lo que varía es el dominio a aplicar para establecer el valor medio tanto de la importancia como de la distancia, lo que a su vez incide en los resultados proporcionados por dicha clasificación.

De esta forma, el proceso de clasificación de las características en los cuatro grupos señalados se realiza con un código similar al utilizado en el caso de los requerimientos (recogido en los Cuadros 5.42. y 5.43.) y el resultado de aplicarlo al ejemplo práctico que se está desarrollando se muestra en la pantalla de la Figura 5.44.

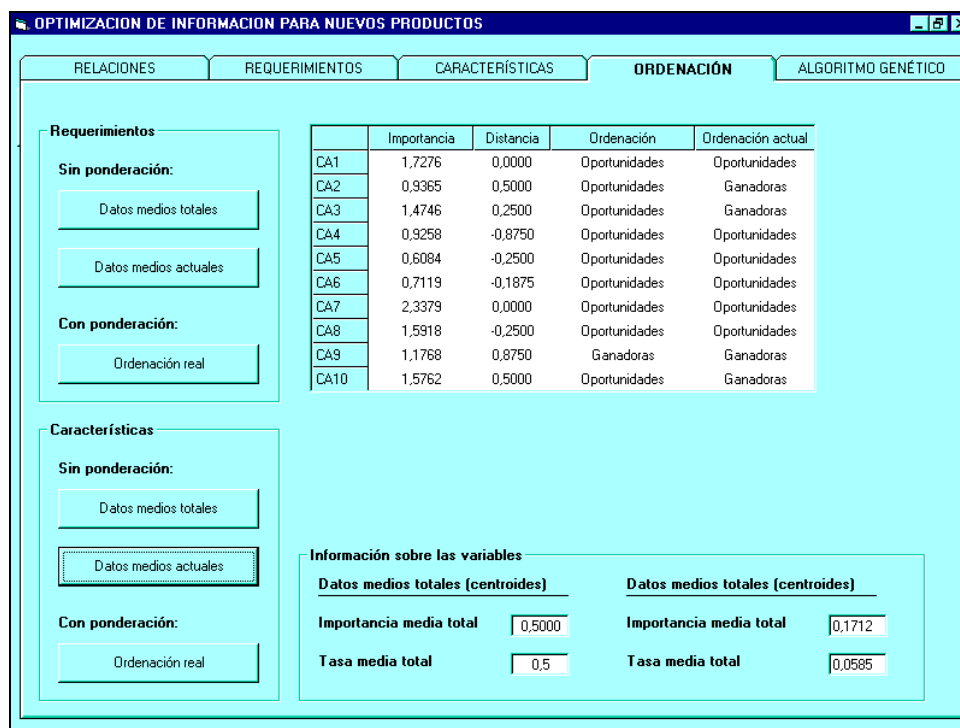


Figura 5.44.

La posibilidad de realizar una clasificación ponderada, es decir, considerando mayor o menor peso para la importancia o para la distancia, se puede realizar atendiendo al trabajo de TACU y STEFAN (1996b), en cuyo caso el resultado, para un factor de ponderación de la importancia del doble que la distancia, se muestra en la pantalla recogida en la Figura 5.45.

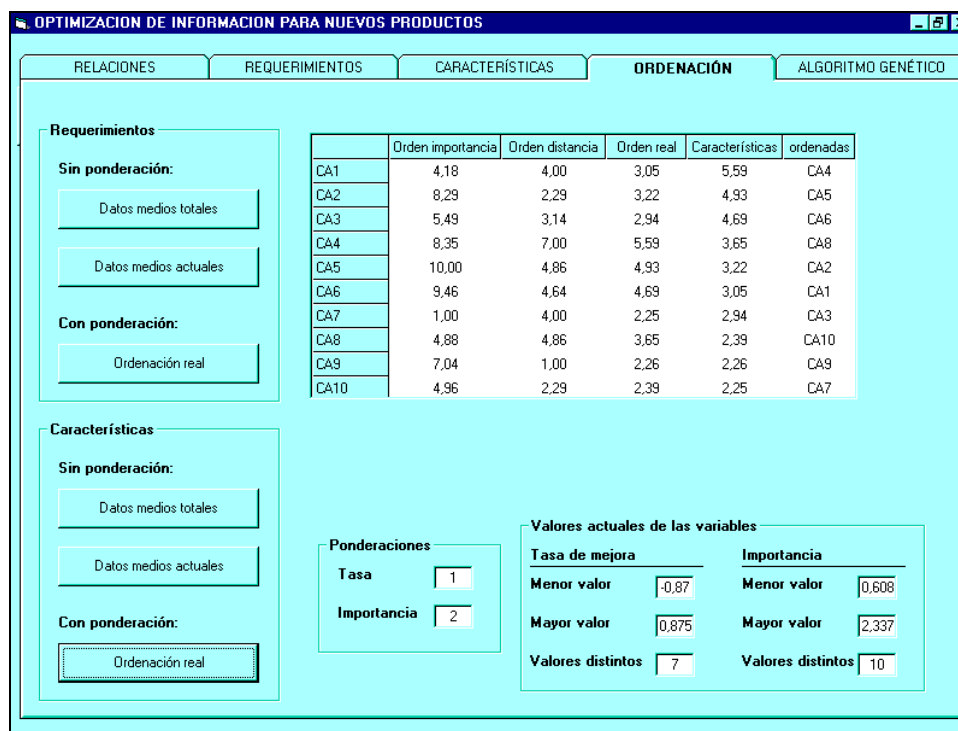


Figura 5.45.

### G. Coste de desarrollo de las características

La elección de las posibles características que se deben incluir en el desarrollo de un nuevo producto es una decisión que afecta al futuro y de la que habitualmente se carece de información cierta.

La necesidad de establecer el volumen de recursos de que es preciso disponer para poder incorporar al producto una característica en concreto es una información que difícilmente puede ser conocida, máxime si la empresa no la ha llevado a cabo en ningún otro producto. De esta forma, será necesario acudir a distintos mecanismos que permitan establecer el coste de cada característica como pueden ser estudios teóricos, análisis de características similares, opiniones de expertos, etc.

En cualquier caso, las cifras que determinan el coste de desarrollar una característica serán cifras estimadas, con cierto grado de incertidumbre, aún en el caso en que la empresa dispusiera de información pasada respecto a las mismas, dado que en el

futuro los costes de los componentes necesarios pueden verse modificados y resulta muy difícil establecer de manera exacta los importes futuros de incorporar una característica a un producto.

De esta forma, si se reconoce la dificultad de establecer un coste exacto, de forma que habitualmente se debe trabajar con cifras estimadas, resulta más conveniente recoger esta información en su totalidad, es decir, reconocer la incertidumbre y reflejarla en los datos que se utilicen. En este sentido, la utilidad de los números borrosos en la evaluación del coste permite a través de la base de incertidumbre de los mismos recoger las posibles variaciones en el volumen de recursos necesarios para desarrollar cada una de las características entre las que se desea o es posible optar.

De forma similar a los casos anteriores se han utilizado números borrosos trapezoidales para establecer el importe del coste de cada característica, siendo para el ejemplo numérico que sirve de ilustración práctica los que se muestran en la pantalla de la Figura 5.46.

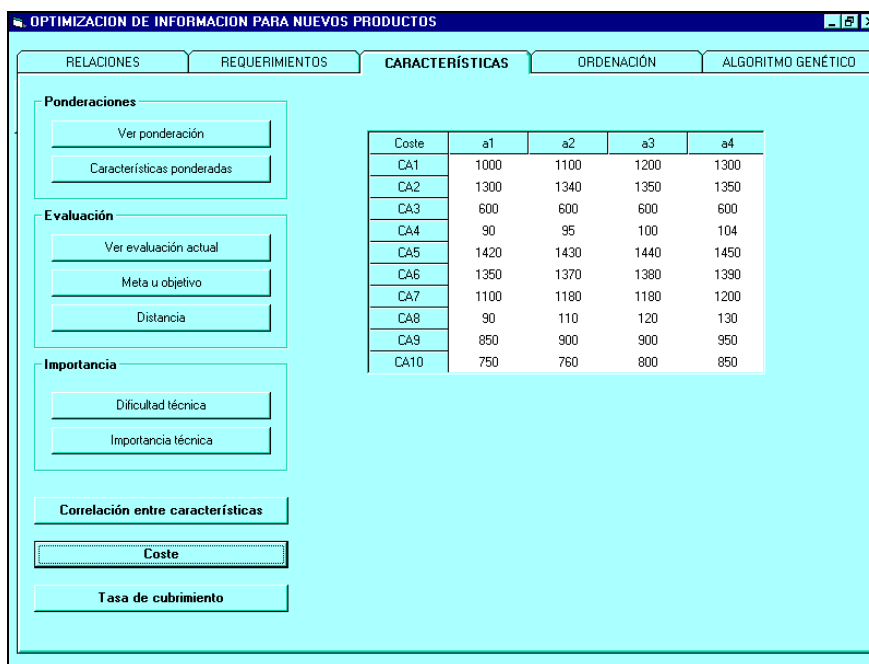


Figura 5.46.

### 5.2.2.1.3. Aplicación del modelo AG-DNP-Fuzzy a situaciones de restricción presupuestaria

La utilización de los datos referentes a las variables del modelo mediante números borrosos trapezoidales, además de afectar en los aspectos de procesamiento de la información que se han comentado en el apartado anterior, provocan determinadas

variaciones en el funcionamiento del propio AG. De ahí que, a continuación, se realice una descripción de las modificaciones incluidas en el mismo debidas a esta circunstancia, ya que en la medida de lo posible se ha optado por mantener los criterios y parámetros utilizados en el modelo anterior.

En este apartado se analiza el procedimiento para optimizar la información desde la perspectiva de la existencia de un volumen de recursos máximo para la implantación del nuevo producto. Esta restricción presupuestaria puede darse de forma cierta, es decir, la empresa conoce con exactitud el importe que desea destinar al desarrollo del producto, o bien, si la empresa dispone de un volumen de recursos aproximados, mediante la utilización de números borrosos trapezoidales para expresar dicho presupuesto es factible recoger los límites entre los que se pueden estar moviendo los fondos disponibles por la empresa para desarrollar el nuevo producto.

En la ejecución práctica el modelo construido solicita el importe del presupuesto, mediante los límites máximo y mínimo entre los que se encuentra el mismo, así como los valores de máxima verosimilitud. Si se dispone de una cifra exacta, bastará con introducir en todos los casos el presupuesto conocido y cierto.

De acuerdo con lo anterior, en los siguientes apartados se realiza una descripción en términos similares al caso anterior, de todos los criterios y parámetros utilizados en el desarrollo del modelo AG-DNP-Fuzzy, haciendo especial mención de aquellos aspectos que necesariamente han sido modificados por el tratamiento que precisa la información expresada en términos lingüísticos.

#### **A. Codificación (alfabeto y longitud)**

La representación utilizada así como la longitud de las cadenas es igual que en el caso anterior, dada la homogeneidad que se persigue en la construcción de todos los modelos.

De esta forma, se establece una representación basada en un vector de números enteros con una longitud igual al número de posibles características a incluir en el producto, con la misma decodificación que en los casos anteriores.

#### **B. Selección de la población inicial (operador de inicialización) y tratamiento de los individuos no factibles**

Los individuos que constituirán la población inicial son elegidos de forma aleatoria, generándose tantos vectores como número de individuos establezca el usuario final en el momento de establecer los parámetros del AG.



La generación aleatoria de soluciones iniciales debe ser sometida a evaluación con el fin de establecer hasta qué punto de la cadena representativa de características es posible llevar a cabo, dada la existencia de un presupuesto por parte de la empresa. De esta forma, se precisa establecer el tratamiento que se aplica a la población inicial con el fin de convertirla en una población de individuos factibles.

Las soluciones generadas a partir del operador de inicialización incluyen una combinación de "todas" las características posibles, sin considerar en ningún caso la restricción que se plantea en el problema. Esta restricción, igual que en el caso anterior y por los mismos motivos, se utiliza para convertir las soluciones iniciales en soluciones factibles.

La forma de establecer el punto de corte, o característica a partir de la cual en función del volumen de recursos no es posible continuar, se realiza en función del coste de cada individuo y su comparación con el presupuesto.

La utilización de números borrosos trapezoidales implica realizar una comparación entre el coste de desarrollo de cada solución inicial y el coste máximo o presupuesto establecido. La forma más general de realizar comparaciones entre este tipo de números es mediante el centroide, el cual se determina la forma siguiente:

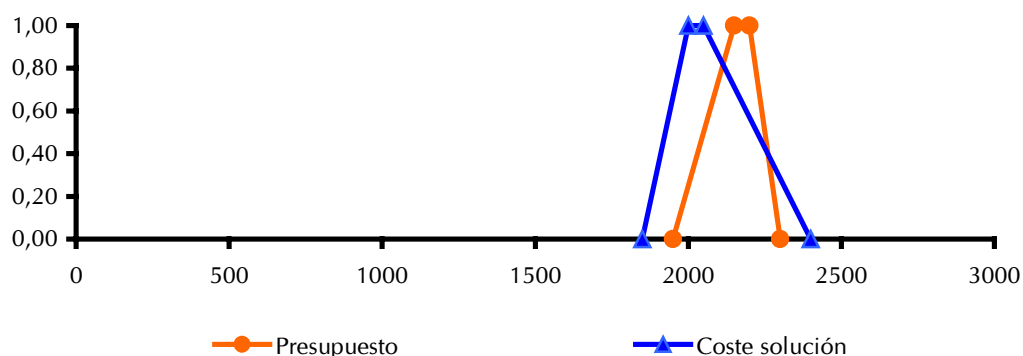
$$\text{Presupuesto (P)} = [p_1, p_2, p_3, p_4] \rightarrow \text{Centroide (P)} = \frac{p_1 + p_2 + p_3 + p_4}{4}$$

Para las soluciones iniciales, se comienza por el primer número del vector que representa las características y se va calculando el centroide del coste de desarrollo de cada solución y comparándolo con el centroide del presupuesto. En el momento en que la inclusión de una característica provoque que se supere este último, a partir de ahí se considera no factible desarrollar el resto y se sustituyen por ceros en la codificación para que no sean evaluadas con posterioridad.

La utilización del centroide como método para eliminar individuos no factibles provoca que como consecuencia de dicha comparación se pueda determinar una solución que, para ciertos niveles de presunción pueda no ser considerada como válida.

Un ejemplo de esta circunstancia se muestra la Figura 5.47., en la que se recoge la representación gráfica del coste de una posible solución y de un presupuesto en unidades monetarias cifrados en:

- Presupuesto  $[p_1, p_2, p_3, p_4] = [1.950, 2.150, 2.200, 2.300]$
- Coste  $[c_1, c_2, c_3, c_4] = [1.850, 2.000, 2.050, 2.400]$



**Figura 5.47.**

La comparación de ambos números, mediante el cálculo de los centroides correspondientes, establece que el presupuesto es superior al coste de la solución:

- Centroide presupuesto = 2.150 u.m.
- Centroide solución = 2.075 u.m.

Sin embargo, en la representación gráfica se puede comprobar que para ciertos niveles de presunción (inferiores al 0'4), existe la posibilidad de que el presupuesto no alcance para desarrollar la combinación de características proporcionada por la solución que, en principio, no habrá sido descartada.

Esta circunstancia es una peculiaridad intrínseca que se acepta desde el momento en que se trabaja en condiciones de incertidumbre. De ahí que la comparación entre centroides pueda ser considerada como válida si bien debe ir acompañada de los valores totales de los números borrosos asociados para mantener así la información sobre todas las posibles situaciones que puedan darse.

Con la finalidad de recoger este aspecto inherente al modelo se ha establecido un parámetro, denominado “fiabilidad” que recoge la relación que existe entre el presupuesto y el coste de cada solución, de forma que la comparación entre distintas alternativas se realizará asimismo atendiendo a este parámetro.

El cálculo de la fiabilidad se ha realizado estableciendo el porcentaje que supone respecto al presupuesto la diferencia entre el centroide del presupuesto y el centroide del coste de cada solución, de la forma siguiente:

$$\text{Fiabilidad } (F_s) = \frac{C_p - C_s}{C_p} \times 100$$

donde:

$C_p$       centroide del presupuesto

$C_s$       centroide del coste de la solución que se analiza

El objetivo que se persigue con el cálculo de esta variable es medir la distancia entre el presupuesto y el coste de cada solución, de forma que cuanto mayor sea ésta más posibilidades existen de que realmente el presupuesto sea suficiente para afrontar el desarrollo de las características que se recogen en la solución.

De acuerdo con las consideraciones anteriores, en el momento de reconvertir los individuos generados como población inicial en individuos factibles de acuerdo con la restricción presupuestaria, se establecerá asimismo la información acerca de las posibilidades de que realmente se pueda realizar la solución, de forma que cada solución irá establecida en términos, no sólo de su adecuación, sino también de la fiabilidad que representa en términos económicos.

El pseudo-código que desarrolla este procedimiento es el que se refleja en el Cuadro 5.47.

```

*****
'Propósito:  Modificar las soluciones iniciales para que sean soluciones factibles en base
              al presupuesto y la fiabilidad de cada solución inicial factible
'Entradas:   Soluciones iniciales
              Coste de las características
              Restricción presupuestaria
'Devuelve:  Individuos que constituyen la población inicial factible y nivel de fiabilidad
*****

Para i = 1 hasta Número_de_individuos hacer
    Para m = 1 hasta Número_de_características hacer
        1.  Calcular el centroide del presupuesto
        2.  Localizar el coste de las distintas características por el orden en que se
            encuentran dentro de la solución, comenzando por la primera
        3.  Acumular el coste de la misma como coste del individuo y calcular el
            centroide del coste del individuo
        4.  Comparar el coste del individuo con el presupuesto (sus centroides):
            - Si es inferior, continuar con el paso 2
            - Si es superior, ir al paso 5
        5.  Poner 0 en el lugar que ocupaba la característica evaluada
        6.  Determinar para cada solución factible el nivel de fiabilidad
    
```

**Cuadro 5.47.**

## **C. Cálculo de la adecuación de las soluciones iniciales**

La medida de la calidad de las soluciones generadas a través del operador de inicialización se realizará en los mismos términos que en el modelo AG-DNP-Crisp, es decir para su evaluación se incluirán las mismas variables en la función de adecuación y, en la medida de lo posible, con los criterios que fueron establecidos en la construcción del mismo.

La incorporación de la información en términos de números borrosos trapezoidales, debido a la matemática propia de los mismos, hace necesario en determinadas ocasiones aplicar operadores propios que permitan homogeneizar la información. De ahí que en los apartados siguientes se analicen las modificaciones introducidas como consecuencia de esta circunstancia.

### **C.1. INFORMACIÓN SOBRE LAS CARACTERÍSTICAS**

#### **C.1.1. Información sobre las características: Importancia**

La evaluación de las características ponderadas en función de sus relaciones con los requerimientos y del factor de ponderación que haya sido establecido para cada uno de ellos, deberá ser sometida a un proceso de normalización que permita incluirla en la función de adecuación en los mismos términos que el resto de variables del modelo.

La normalización de los números borrosos trapezoidales se realiza mediante una transformación lineal de los mismos en el intervalo [0, 1] atendiendo al dominio actual en el que se encuentran todos los valores de esta variable en el caso concreto de que se trate. Para ello será preciso establecer el menor y el mayor valor de todos los posibles, al objeto de establecer el dominio actual del problema.

Dado el significado de los elementos de un número borroso trapezoidal el dominio quedará establecido por el menor de todos los primeros elementos de la cuatuplas ( $a_1^{\min}$ ) y el mayor valor de todos los cuartos elementos de las mismas ( $a_4^{\max}$ ) y realizar la normalización del resto de valores de la forma siguiente:

$$a_{\text{normalizado}} = \frac{a - a_1^{\min}}{a_4^{\max} - a_1^{\min}}$$

La normalización de la importancia de las características se puede realizar mediante el código que se refleja en el Cuadro 5.48.

```

'Propósito: Homogeneizar la información correspondiente a la importancia de las características
'Entradas: Importancia de las características (características ponderadas)
'Devuelve: Información a incluir en la función de adecuación relativa a la importancia de las características
'*****

Para m = 1 hasta Número_de_características hacer
    Localizar el valor máximo de los últimos elementos correspondientes a las cuatuplas que representan la importancia de las características → Valor máximo del dominio actual
    Localizar el valor mínimo de los primeros elementos correspondientes a las cuatuplas que representan la importancia de las características → Valor mínimo del dominio actual

    Realizar la transformación lineal en [0,1] de todos los valores de la importancia cuantificada de las características en base a los valores máximo y mínimo anteriormente localizados
    
```

**Cuadro 5.48.**

### C.1.2. Información sobre las características: Situación actual

Los resultados obtenidos mediante la evaluación competitiva realizada para el listado de características proporciona valores tanto positivos como negativos, en función de si la situación actual de la empresa debe mejorar respecto a una característica o si por el contrario la situación de la empresa en dicha característica es competitiva frente al resto de empresas.

La información que proporciona esta evaluación sólo se considera relevante cuando pone de manifiesto una situación de necesidad de mejora, de forma que aquellas características con valores negativos en esta variable no se incluirán en la función de adecuación, ya que actuar sobre este tipo de características no supondrá una mejora de la situación de la empresa.

El establecimiento del dominio actual de esta variable atendiendo al razonamiento anterior significa que aquella variable correspondiente al menor valor positivo pasaría a ser cero, y de acuerdo con lo comentado en el caso del AG con datos numéricos ciertos, se asemejaría a aquellas características que tuvieran una distancia negativa o nula.

Sin embargo, en este caso, al utilizar números borrosos trapezoidales, la transformación lineal en  $[0, 1]$  proporciona, para la característica que representa el límite inferior del dominio, que dicho valor de la cuatupla que la representa fuera 0 pero el resto de elementos tendrían valores positivos. En consecuencia, no es necesario en este caso establecer como valor mínimo del dominio el 0, siendo una de las ventajas de la utilización de la información con la incertidumbre que conlleva realizar valoraciones.

El pseudo-código utilizado para este proceso se recoge en el Cuadro 5.49.

```
*****  
'Propósito: Homogeneizar la información correspondiente a la evaluación competitiva  
'Entradas: Situación actual de las características  
'Devuelve: Información a incluir en la función de adecuación relativa a la situación ac-  
tual de las características  
*****  
  
Para m = 1 hasta Número_de_características hacer  
    Localizar el valor máximo de los últimos elementos correspondientes a las cuatuplas  
    que representan la situación actual de las características → Valor máximo del domi-  
    nio actual  
  
    Localizar el valor mínimo de los primeros elementos correspondientes a las cuatu-  
    plas que representan la situación actual de las características → Valor mínimo del  
    dominio actual  
  
    Localizar los valores de la distancia actual de forma que:  
    - Para valores positivos, homogeneizar todos los valores de la evaluación compe-  
    titiva de las características en base a los valores máximo y mínimo anteriormen-  
    te localizados  
    - Para valores negativos o nulos, poner a cero la situación actual
```

**Cuadro 5.49.**

### **C.1.3. Información sobre las características: Dificultad técnica**

La dificultad de desarrollar una característica viene establecida a través de cinco etiquetas lingüísticas a las que se les asociarán los números borrosos trapezoidales correspondientes a cada una de ellas siguiendo una distribución simétrica en  $[0, 1]$  para dichos valores.

La inclusión de esta variable en la función de adecuación deberá ser tal que cuanto mayor sea la dificultad menor sea el importe en el que se incremente la bondad de la solución y viceversa. En el caso de datos numéricos ciertos esta situación impli-

caba el cálculo del valor complementario de la dificultad técnica. En el caso actual puede operarse en el mismo sentido o bien, al tratarse de una representación simétrica, asignar los números borrosos trapezoidales a las variables que determinan la dificultad en forma inversa. Por operatividad se ha optado por esta segunda alternativa, quedando en consecuencia la dificultad técnica en este caso representada de la forma siguiente:

Muy baja	[0'8125, 0'9375, 1, 1]
Baja	[0'5625, 0'6875, 0'8125, 0'9375]
Media	[0'3125, 0'4375, 0'5625, 0'6875]
Alta	[0'0625, 0'1875, 0'3125, 0'4375]
Muy alta	[0, 0, 0'0625, 0'1875]

La transformación lineal de esta variable no será precisa en aquellos casos en que exista al menos una característica con una evaluación de "Muy alta" y otra con una evaluación de "Muy baja", ya que en estos casos el dominio actual de la variable coincidiría con el dominio posible que es [0, 1]. Sin embargo, esta circunstancia no se puede conocer a priori, razón por la cual se introduce el código necesario para proceder a la homogeneización si fuera necesaria y que es el que muestra el Cuadro 5.50.

```

'*****
'Propósito: Homogeneizar la información correspondiente a la dificultad técnica de las
              características
'Entradas: Dificultad técnica
'Devuelve: Información a incluir en la función de adecuación relativa a la dificultad de
              desarrollo de las características
'*****

Para m = 1 hasta Número_de_características hacer
    Localizar el valor máximo de los últimos elementos correspondientes a las cuatuplas
    que representan la dificultad de desarrollo de las características → Valor máximo del
    dominio actual

    Localizar el valor mínimo de los primeros elementos correspondientes a las cuatu-
    plas que representan la dificultad de desarrollo de las características → Valor míni-
    mo del dominio actual

    Homogeneizar todos los valores de la dificultad técnica de las características en ba-
    se a los valores máximo y mínimo anteriormente localizados
    
```

**Cuadro 5.50.**

#### C.1.4. Información sobre las características: Correlación entre ellas

La valoración de la correlación entre las características depende de forma directa de la solución que se está evaluando, ya que sólo se reflejará la relación existente entre las características que se van a desarrollar en el producto, y éstas dependen directamente de cada solución.

En cuanto a la homogeneización de la información sobre las correlaciones, dado que están establecidas en el intervalo  $[-1, 1]$  y que pueden darse relaciones positivas y negativas, no será necesario someterlas a ningún tipo de transformación, consiguiendo que las correlaciones negativas afecten a la función de adecuación penalizando las combinaciones que contengan características relacionadas inversamente, mientras que los valores positivos representativos de características que se potencian entre sí agregarán valor a la medida de la bondad de la solución.

El código que se muestra en el Cuadro 5.51. recoge, por tanto, solamente aquellos aspectos correspondientes a la búsqueda, dentro de la solución que se está evaluando, de las características que representa el vector de números enteros, y de la acumulación de las valoraciones correspondientes a los grados de correlación existentes entre las mismas.

```
*****
'Propósito: Determinar la correlación entre las características que se recogen en cada
            solución
'Entradas: Correlación entre características
'Devuelve: Información a incluir en la función de adecuación relativa a la correlación
            entre características de la solución que se está evaluando
*****

Para i = 1 hasta Número_de_individuos hacer
    Para m = 1 hasta Número_de_características hacer
        Para m' = 1 hasta Número_de_características hacer
            1. Si m y m' se encuentran en la solución factible:
                - Localizar su valor de correlación
                - Asignar el número borroso trapezoidal correspondiente a la
                  etiqueta lingüística que determina el grado de correlación
                  entre m y m'
                - Sumar para conocer la correlación de cada solución
            2. Si m y/o m' no están en la solución factible, continuar
```

**Cuadro 5.51.**



## C.2. INFORMACIÓN SOBRE LOS REQUERIMIENTOS

Los aspectos más relevantes en el análisis y acumulación de la información relativa a los requerimientos desde la perspectiva de las características son considerados de forma similar a lo realizado en el caso anterior.

En primer lugar se analiza cada una de las variables que aportan información sobre los requerimientos para, con posterioridad, acumular dicha información en referencia a cada una de las características con las que se relacionan.

### C.2.1. Información sobre los requerimientos: Importancia

La importancia de los requerimientos obtenida en el apartado 5.2.2.1.1. debe ser sometida, al igual que el resto de variables, a una transformación lineal en  $[0, 1]$ . Las consideraciones efectuadas en el análisis de variables anteriores permiten establecer como dominio para realizar esta normalización el dominio actual de los valores de esta variable.

El pseudo-código utilizado para realizar este procedimiento es el que se muestra en el Cuadro 5.52.

```

*****
'Propósito: Homogeneizar la información correspondiente a la importancia de los requerimientos
'Entradas: Requerimientos ponderados
'Devuelve: Información relativa a la importancia de los requerimientos
*****

Para n = 1 hasta Número_de_requerimientos hacer
    Localizar el valor máximo de los últimos elementos correspondientes a las cuatuplas que representan la importancia de los requerimientos → Valor máximo del dominio actual
    Localizar el valor mínimo de los primeros elementos correspondientes a las cuatuplas que representan la importancia de los requerimientos → Valor mínimo del dominio actual
    Homogeneizar todos los valores de la importancia de los requerimientos en base a los valores máximo y mínimo anteriormente localizados
    
```

**Cuadro 5.52.**

### C.2.2. Información sobre los requerimientos: Evaluación comparativa

La evaluación de la situación de los requerimientos es similar a la evaluación competitiva realizada en el caso de las características, de forma que su tratamiento es el mismo que el utilizado en ese caso y, por tanto, no será necesario realizar consideraciones adicionales a las comentadas en su momento.

El procedimiento a realizar consistirá en establecer el dominio actual de la evaluación comparativa, dentro de los límites positivos, es decir, la información sobre aquellos requerimientos que se encuentran en la empresa mejor situados que en la competencia no se considera relevante de tal forma que no se incluirán en el momento de establecer el dominio actual.

El código correspondiente es el que se recoge en el Cuadro 5.53.

```
*****  
'Propósito: Homogeneizar la información correspondiente a la evaluación comparativa  
'Entradas: Situación actual de los requerimientos  
'Devuelve: Información relativa a la evaluación de los requerimientos  
*****  
  
Para n = 1 hasta Número_de_requerimientos hacer  
    Localizar el valor máximo de los últimos elementos correspondientes a las cuatuplas  
    que representan la evaluación comparativa de los requerimientos → Valor máximo  
    del dominio actual  
  
    Localizar el valor mínimo de los primeros elementos correspondientes a las cuatu-  
    plas que representan la evaluación comparativa de los requerimientos → Valor mí-  
    nimo del dominio actual  
  
    Localizar los valores de la situación actual de forma que:  
        - Para valores positivos, homogeneizar todos los valores de la evaluación  
        comparativa de los requerimientos base a los valores máximo y mínimo  
        anteriormente localizados  
        - Para valores negativos o nulos, poner a cero la situación actual
```

**Cuadro 5.53.**

### C.2.3. Información sobre los requerimientos: Correlación entre ellos

En este apartado corresponde acumular la información relativa a la correlación de cada requerimiento con todos los demás, a fin de poder establecer con posterioridad la incidencia que en el resto de requerimientos tiene cada uno de ellos. De esta forma, sin más que aplicar la matemática propia de los números borrosos trapezoidales, el código de este procedimiento es el que se muestra en el Cuadro 5.54.

```

'Propósito:  Determinar la correlación de un requerimiento con todos los demás
'Entradas:   Correlación entre los requerimientos
'Devuelve:  Información relativa a la correlación de los requerimientos
'*****

Para n = 1 hasta Número_de_requerimientos hacer
    Para n' = 1 hasta Número_de_requerimientos hacer
        Establecer si existe relación entre n y n':
            - Si existe relación, sumar el grado de correlación de ambos requere-
              rimientos para conocer la correlación total del requerimiento n
            - Si no existe relación, continuar con el requerimiento n'
    
```

**Cuadro 5.54.**

#### C.2.4. Síntesis o resumen de la información sobre los requerimientos

La información relativa a los requerimientos debe establecerse en función de las características con las que se relaciona cada uno de ellos, ya que la medida de la bondad de cada solución está vinculada a la combinación de características que recoge la misma. Los requerimientos sólo son relevantes en la medida en que se vaya a desarrollar una característica que pueda modificar el estado de los mismos. Procede, por tanto, agregar para cada característica toda la información relativa a los requerimientos con los que se encuentra relacionada. La codificación del procedimiento anterior es el que se recoge en los cuadros 5.55., 5.56. y 5.57. que se recogen a continuación.

- Para la importancia de los requerimientos

```

'Propósito:  Determinar la importancia de los requerimientos desde la perspectiva de las
              características con que se encuentra relacionado
'Entradas:   Importancia normalizada de los requerimientos
'Devuelve:  Para cada característica, importancia de los requerimientos con que se rela-
              ciona
'*****

Para m = 1 hasta Número_de_características hacer
    Para n = 1 hasta Número_de_requerimientos hacer
        Establecer si existe relación con dicho requerimiento
            - Si existe relación, sumar la importancia de dicho requerimiento
              para calcular el total de la característica
            - Si no existe relación, continuar con el siguiente requerimiento
    
```

**Cuadro 5.55.**

- Para la evaluación comparativa de los requerimientos

```

*****
'Propósito: Determinar la situación de los requerimientos desde la perspectiva de las
              características con que se encuentra relacionado
'Entradas:  Evaluación comparativa de los requerimientos
'Devuelve:  Para cada característica, situación actual de los requerimientos con que se
              relaciona
*****

Para m = 1 hasta Número_de_características hacer
    Para n = 1 hasta Número_de_requerimientos hacer
        Establecer si existe relación con dicho requerimiento
            - Si existe relación, sumar la situación actual de dicho requerimiento
              para calcular el total de la característica
            - Si no existe relación, continuar con el siguiente requerimiento
    
```

**Cuadro 5.56.**

- Para la correlación entre los requerimientos

```

*****
'Propósito: Determinar la correlación entre los requerimientos desde la perspectiva de las
              características con que se encuentra relacionado
'Entradas:  Correlación entre los requerimientos
'Devuelve:  Para cada característica, correlación entre los requerimientos con que se
              relaciona
*****

Para m = 1 hasta Número_de_características hacer
    Para n = 1 hasta Número_de_requerimientos hacer
        Establecer si existe relación con dicho requerimiento
            - Si existe relación, sumar la correlación de dicho requerimiento
              con todos los demás para calcular el total de la característica
            - Si no existe relación, continuar con el siguiente requerimiento
    
```

**Cuadro 5.57.**

Una vez obtenida la información de los aspectos que inciden en los requerimientos desde la perspectiva de las características será preciso homogeneizar dicha información para poder incluirla en la función de adecuación en los mismos términos

que las variables que proporcionan información directa sobre las características. Este proceso se puede codificar como muestra el Cuadro 5.58.

<p>*****</p>	
'Propósito:	Determinar la valoración de cada característica respecto a los requerimientos con que se encuentra relacionada y normalizar dicha información en base al dominio actual
'Entradas:	Matriz de relaciones Importancia normalizada de los requerimientos Situación normalizada de los requerimientos Correlación entre los requerimientos
'Devuelve:	Para cada característica, valoración normalizada de los requerimientos con que se relaciona
<p>*****</p>	
1.	<p><i>Para m = 1 hasta Número_de_características hacer</i></p> <p>Localizar la importancia normalizada, la situación actual y la correlación total de los requerimientos con que dicha variable se relaciona</p> <p>Añadir los valores anteriores para cada característica</p> <p>/ Fase en la que se obtiene la acumulación de la información sobre requerimientos para cada característica /</p>
2.	<p><i>Para m = 1 hasta Número_de_características hacer</i></p> <p>Localizar el valor máximo de los últimos elementos correspondientes a las cuatuplas que representan la información obtenida en el punto 1 → Valor máximo del dominio actual</p> <p>Localizar el valor mínimo de los primeros elementos correspondientes a las cuatuplas que representan la información obtenida en el punto 1 → Valor mínimo del dominio actual</p> <p>Normalizar la información de los requerimientos respecto a las características en base al dominio calculado en el paso anterior</p> <p>/ Fase en la que se normaliza la información a incorporar en la función de adecuación /</p>

**Cuadro 5.58.**

Los procesos anteriores proporcionan la valoración de la información de forma homogénea con la finalidad de poder incluirla en la medida de la calidad de las soluciones en los mismos términos que el resto de valores. El proceso de cálculo de la adecuación de cada solución inicial es similar al realizado en el caso de trabajar con valoraciones numéricas exactas, tanto en las variables que incluye como en el procedimiento a utilizar, sin más que aplicar la matemática propia de los números borrosos trapezoidales en el momento de establecer la agregación de las variables.

#### **D. Operador de selección**

El operador de selección utilizado es el mismo que en la construcción del AG incorporado al modelo AG-DNP-Crisp, es decir, proporcional a la adecuación de las soluciones. Dado que el proceso es similar, se aplica el mismo código que en ese caso (apartado 5.2.1.3.4.).

#### **E. Operador de cruce y Operador de mutación**

Los operadores genéticos aplicados a las soluciones generadas así como su adaptación para que se obtengan soluciones factibles tras su aplicación son idénticos a los utilizados en el modelo anterior. Esto es así en la medida en que se pretende que ambos algoritmos sean homogéneos y la utilización de un mismo proceso de codificación de individuos en ambos casos facilita la utilización de los mismos operadores.

#### **F. Evaluación de las soluciones generadas tras los operadores genéticos**

La evaluación de las soluciones tras los procesos anteriores se realiza de forma idéntica a la establecida en el caso de las soluciones iniciales, de forma que sólo será preciso recalcular la variable que hace referencia la correlación entre las características.

Con anterioridad al proceso de evaluación propiamente dicho será necesario establecer la factibilidad de las soluciones y determinar la fiabilidad de cada una de ellas de acuerdo con la restricción presupuestaria que preside el cálculo de la solución. Ambos procesos son similares a los descritos para la población inicial.

#### **G. Criterio de terminación o parada**

El proceso de optimización establecido a través de la construcción del AG continúa utilizando como criterio de parada un número de generaciones establecido por el usuario.

Sin embargo, en este caso se podría determinar un criterio de terminación basado en un límite mínimo de fiabilidad, en el sentido de que dado que las soluciones factibles vienen condicionadas al presupuesto, y la comparación entre el coste de una solución y el presupuesto se ha establecido en base a los centroides de ambas variables, se podría establecer hasta qué punto la empresa quiere asegurarse el cumplimiento de la restricción presupuestaria.

En este caso se incluye asimismo el mecanismo de “elitismo”, el cual a su vez podría establecerse en relación con el nivel de fiabilidad. Sin embargo, debido a la similitud buscada con el modelo anterior, esta posibilidad no ha sido considerada.

La codificación de ambos procesos es, por tanto, similar a la realizada en la construcción del modelo AG-DNP-Crisp.

## H. Parámetros de funcionamiento del algoritmo genético

Los datos necesarios para el funcionamiento del modelo AG-DNP-Fuzzy deben ser introducidos por el usuario en cada ejecución del algoritmo. De esta forma, es preciso indicar la información relativa a probabilidades de cruce y mutación, número de individuos de que consta cada población y el número de generaciones que servirá como criterio de parada. En este caso, además, será preciso incluir la información relativa a la restricción presupuestaria que, como se comentó con anterioridad, es posible incluirla en términos inciertos.

Para los mismos valores de los parámetros utilizados en el ejemplo de aplicación práctica efectuado para el modelo AG-DNP-Crisp, la Figura 5.48. muestra el gráfico con la evolución de las sucesivas generaciones, así como la mejor solución, el coste asociado y la fiabilidad de la misma, tras el número de iteraciones considerado.

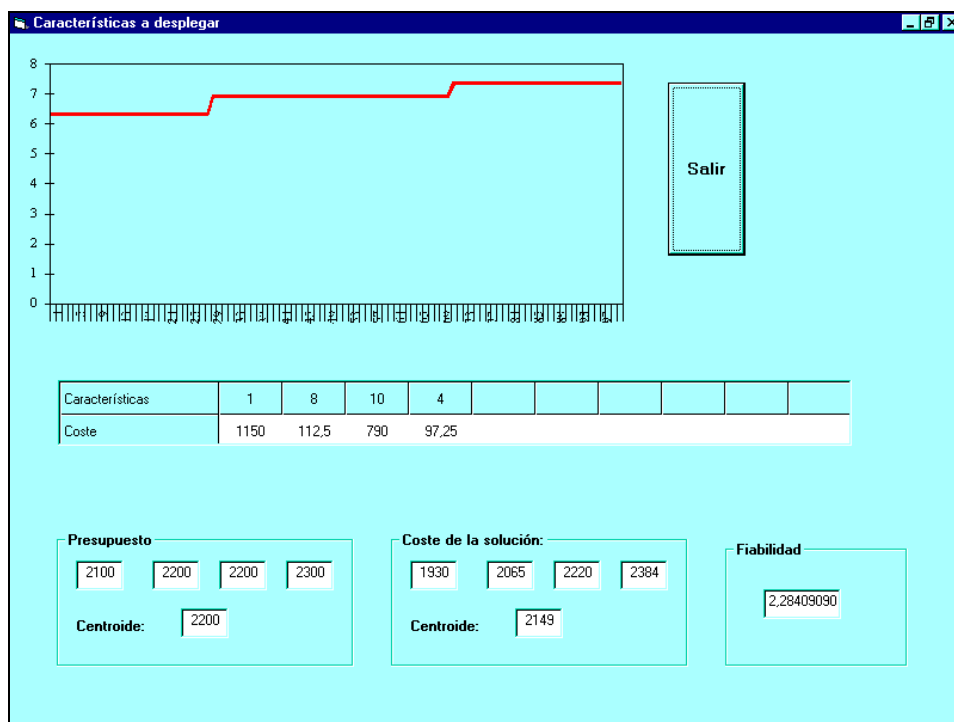


Figura 5.48.

#### **5.2.2.1.4. Aplicación del modelo AG-DNP-Fuzzy a situaciones de características sustitutivas**

El tratamiento de la información analizada en los apartados anteriores en su aplicación a la toma de decisiones en las que es preciso elegir entre posibles características que son sustitutivas entre sí se puede llevar a cabo a través de un AG similar al utilizado en el modelo AG-DNP-Fuzzy en el supuesto de restricción presupuestaria, dado que la información disponible para afrontar la decisión es similar en ambos casos. Sin embargo, la existencia de un tipo de restricción distintas, hace preciso introducir ciertas modificaciones en la implementación del AG para que pueda ser considerado válido en estas circunstancias.

La diferencia principal entre ambos tipos de restricciones se encuentra en el tratamiento de los individuos no factibles que mientras en el caso de la restricción presupuestaria ésta se utiliza para tratar de establecer que las posibles soluciones se encuentren dentro de los límites establecidos por el presupuesto, en el caso de existencia de características sustitutivas se trata de obtener soluciones que contengan una y solo una de las características pertenecientes a cada grupo.

La eliminación de individuos no factibles o reconversión de las soluciones tanto iniciales como generadas tras los operadores genéticos para hacerlas factibles, al encuadrarse en el mismo proceso de decisión, el tratamiento puede ser el mismo que ha sido expuesto en el caso de operar con valoraciones numéricas en la construcción del modelo AG-DNP- Crisp, sin más que aplicar la matemática propia de la operativa con incertidumbre.

La selección de la población inicial, los operadores genéticos, el criterio de parada y el cálculo de la adecuación de las soluciones tanto iniciales como de las sucesivas generaciones, son idénticos al modelo anterior debido a que la utilización del mismo criterio de codificación o representación de las soluciones permite el mantenimiento de los mismos criterios y parámetros que el caso anterior.

Los parámetros de funcionamiento del modelo AG-DNP-Fuzzy son introducidos por el usuario final de forma similar a los casos anteriores. La diferencia en este caso estriba en que al usuario se le solicitará información sobre el número de grupos y las características que se encuadran dentro de cada grupo.

La Figura 5.49. muestra los parámetros utilizados en el ejemplo de aplicación práctica mientras que la Figura 5.50. recoge la pantalla de la solución aportada por el modelo con los datos del ejemplo de estudio (existencia de tres grupos) y los parámetros utilizados en el resto de casos.



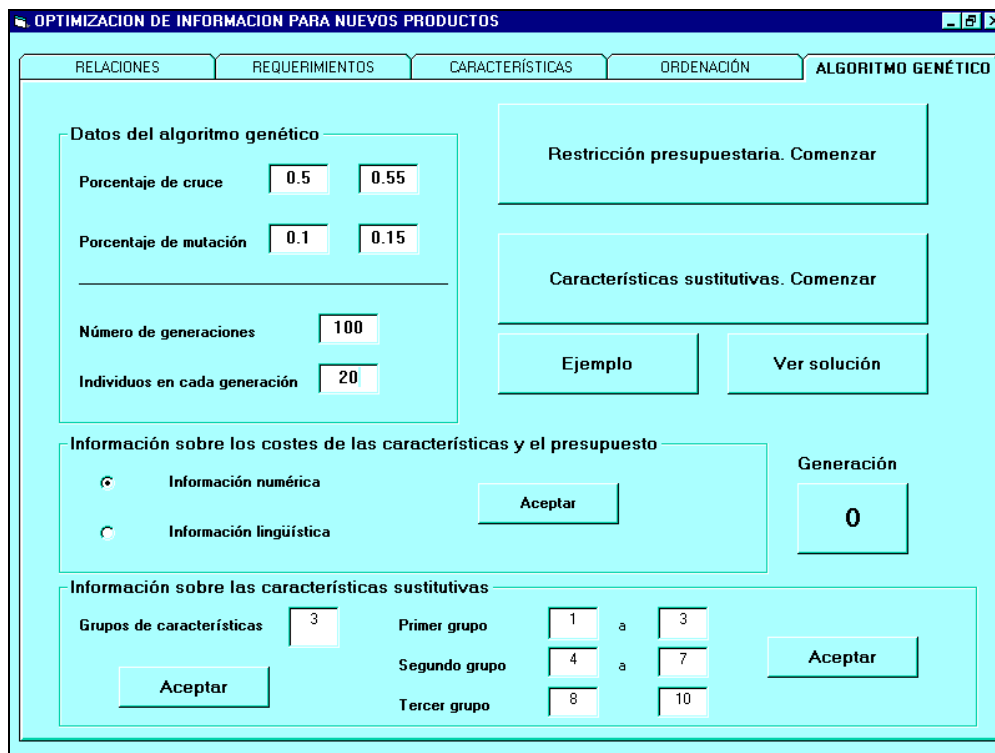


Figura 5.49.

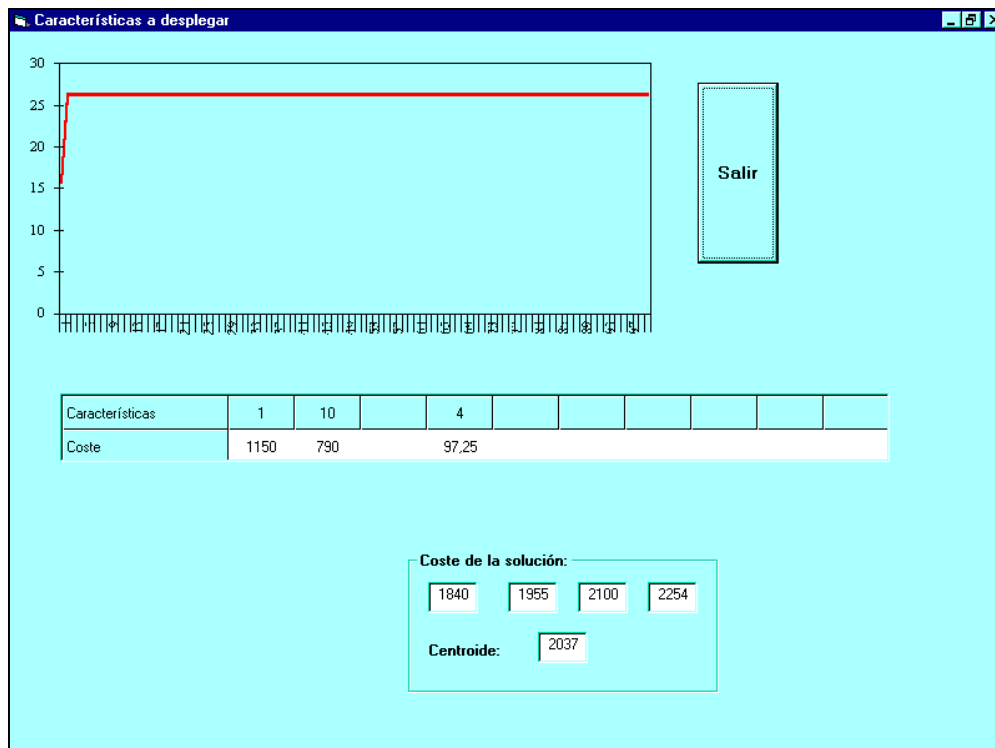


Figura 5.50.

### **5.2.2.2. Modelo basado en la representación mediante 2-tuplas: El modelo AG-DNP-2-tuplas**

La información sobre las variables que influyen en el modelo de decisión para establecer las características óptimas a incluir en el momento de desarrollar un nuevo producto obtenida mediante variables lingüísticas puede ser tratada sin necesidad de asociarle etiquetas lingüísticas con una función de pertenencia establecida.

En este apartado se pretende adaptar el modelo construido de forma que pueda utilizar la información lingüística de la que se dispone sin transformarla en la medida de lo posible. Es decir, se analizará la posibilidad de reconstruir el modelo para operar en la forma que lo hacen los modelos simbólicos, a diferencia del caso anterior en el que se establecía la operativa propia de los modelos basados en el Principio de Extensión y la necesidad de utilizar las funciones de pertenencia asociadas a las etiquetas lingüísticas.

Asimismo, y de acuerdo con lo analizado en los epígrafes anteriores, la información disponible sobre las variables del modelo es una información lingüística multi-granular, lo cual deberá ser considerado en el momento de establecer el modelo lingüístico a aplicar, dada la necesidad de utilizar distintos operadores entre los diferentes términos lingüísticos en los que la información está definida.

De esta forma, se plantea la necesidad de unificar dicha información en un único dominio de expresión, para lo cual existen diversos enfoques si bien la mayoría de ellos asumen cierta pérdida de información en este proceso.

Ante esta perspectiva se plantea utilizar como mecanismo representación el recogido en el trabajo de HERRERA y MARTÍNEZ (1999), en el cual plantea un modelo de representación de la información lingüística con 2-tuplas que permite operar con la información lingüística sin riesgo de pérdida de información. De esta forma será posible utilizar los operadores de agregación y comparación necesarios en el modelo para una representación de este tipo.

#### **5.2.2.2.1. Tratamiento de la información exógena: Voz del cliente**

Las variables que hacen referencia a la información proporcionada por los potenciales consumidores son las mismas en todos los modelos desarrollados, si bien, debido a la distinta forma de representación y obtención de la información que afecta a las mismas, la forma de procesarla difiere de unos casos a otros. Por este motivo, en los apartados siguientes se realiza una breve descripción de las diferencias que afectan al modelo desde la perspectiva de una representación mediante 2-tuplas.

### A. Importancia de los requerimientos desde la perspectiva del cliente

La importancia de los requerimientos viene establecida por las relaciones entre éstos y las características así como por el factor que establece la importancia que los posibles consumidores otorgan a cada uno de los requerimientos. La información recogida sobre estas dos variables se encuentra establecida mediante dos conjuntos de etiquetas con máxima granularidad y distinta semántica, siendo necesario a efectos de aplicar el modelo de decisión agregar el valor de ambas variables.

El proceso de agregación precisa en primer término de un mecanismo de normalización que permita unificar la información lingüística multigranular en un único dominio de expresión. En concreto, en este caso se parte de dos conjuntos de 5 y 9 etiquetas lingüísticas:

- Factor de ponderación de los requerimientos  $I(1,5)$
- Relaciones entre requerimientos y características  $I(2,9)$

El conjunto de términos lingüísticos  $\{s_0^5, s_1^5, s_2^5, s_3^5, s_4^5\}$  del factor de ponderación es el equivalente a las etiquetas lingüísticas:

Nulo	$(s_0^5)$	Importante	$(s_3^5)$
Poco Importante	$(s_1^5)$	Muy Importante	$(s_4^5)$
Medio	$(s_2^5)$		

Para las relaciones entre requerimientos y características, el conjunto de términos lingüísticos  $\{s_0^9, s_1^9, s_2^9, s_3^9, s_4^9, s_5^9, s_6^9, s_7^9, s_8^9\}$  equivale a:

Debilísima	$(s_0^9)$	Fuerte	$(s_5^9)$
Muy Débil	$(s_1^9)$	Bastante Fuerte	$(s_6^9)$
Bastante Débil	$(s_2^9)$	Muy Fuerte	$(s_7^9)$
Débil	$(s_3^9)$	Esencial	$(s_8^9)$
Media	$(s_4^9)$		

Si se establece como conjunto de términos lingüísticos para unificar dicha información en un único dominio el conjunto  $I(2,9)$ , mediante la función de transformación analizada en el Capítulo 3, los valores unificados para el caso del factor de ponderación de los requerimientos en el dominio elegido serán los siguientes:

$$TF_2^1(s_0^5, 0) = \Delta^{-1} \left( \frac{\Delta(s_0^5, 0) \cdot (9-1)}{(5-1)} \right) = \Delta^{-1}(0) = (s_0^9, 0)$$

$$TF_2^1(s_1^5, 0) = \Delta^{-1} \left( \frac{\Delta(s_1^5, 0) \cdot (9-1)}{(5-1)} \right) = \Delta^{-1}(2) = (s_2^9, 0)$$

$$TF_2^1(s_2^5, 0) = \Delta^{-1} \left( \frac{\Delta(s_2^5, 0) \cdot (9-1)}{(5-1)} \right) = \Delta^{-1}(4) = (s_4^9, 0)$$

$$TF_2^1(s_3^5, 0) = \Delta^{-1} \left( \frac{\Delta(s_3^5, 0) \cdot (9-1)}{(5-1)} \right) = \Delta^{-1}(6) = (s_6^9, 0)$$

$$TF_2^1(s_4^5, 0) = \Delta^{-1} \left( \frac{\Delta(s_4^5, 0) \cdot (9-1)}{(5-1)} \right) = \Delta^{-1}(8) = (s_8^9, 0)$$

De esta forma, será posible proceder al cálculo de la importancia de los requerimientos ponderados. El proceso es el siguiente:

Sean:

RC<sub>i</sub> con  $i = 1, \dots, n$  número de requerimientos

CA<sub>j</sub> con  $j = 1, \dots, m$  número de características

a<sub>ij</sub> relación del requerimiento  $i$  con la característica  $j$

u<sub>i</sub> importancia del requerimiento  $i$

Se define una función  $g(a_{ij}, u_i)$  que permite establecer la medida de la importancia de cada requerimiento  $i$  en base a la relación que tiene con la característica  $j$  y la importancia asignada a dicho requerimiento  $i$ , de la forma siguiente:

$$g(a_{ij}, u_i) = \text{MIN}(a_{ij}, u_i)$$

Dado que tanto las relaciones como la importancia de los requerimientos están establecidos en el mismo dominio es posible utilizar el operador mínimo.

Para conocer la relación de cada requerimiento  $i$  con todas las características será preciso proceder a agregar el resultado obtenido de aplicar la función  $g$  a cada característica. Los procedimientos de agregación pueden ser diversos, si bien dado que todo el proceso de construcción de los diferentes modelos se ha pretendido mantener un tratamiento homogéneo de la información, se establece que ambas variables tienen la misma importancia, motivo por el cual se utilizará como operador para agregar la

información de la importancia de cada requerimiento en función de todas las características el operador media de 2-tuplas, cuya expresión es:

$$\bar{x} = \Delta \left( \frac{\sum_{i=1}^n \Delta^{-1}(s_i, \alpha_i)}{n} \right)$$

Los resultados obtenidos tras este proceso darán una medida de la importancia de los requerimientos ponderados que, mediante la utilización de la representación en 2-tuplas, permite establecer una etiqueta para el mismo, pero sin perder la información debido a que si bien se realiza una aproximación al valor de la etiqueta más próximo para definir el resultado, se continúa el proceso de acumulación del resto del modelo trabajando con toda la información proporcionada, ya que la misma se mantiene mediante el valor de traslación simbólica.

En el caso del ejemplo de ilustración práctica, tras los procesos de unificación y agregación anteriormente descritos, se obtiene una valoración para la importancia de cada requerimiento, establecida a través del conjunto de términos lingüísticos siguientes:

$$\{s_0^9, s_1^9, s_2^9, s_3^9, s_4^9, s_5^9, s_6^9, s_7^9, s_8^9\}$$

definidos con las etiquetas: Nulo, Casi Nulo, Casi Nada Importante, Poco Importante, Medio, Importante, Bastante Importante, Muy Importante y Esencial, respectivamente.

La codificación de este proceso es la que recoge el Cuadro 5.59.

<p>*****</p>	
'Propósito:	Localiza, para cada requerimiento, la relación con cada una de las características y en función de dicha relación (E/MF/BF/F/M/D/BD/MD/DB) y del factor de ponderación del requerimiento de que se trate (MI/I/M/PI/N), realiza la valoración de la importancia del mismo
'Entradas:	Matriz de relaciones Etiqueta lingüística de la ponderación de los requerimientos
'Devuelve:	Importancia de los requerimientos
<p>*****</p>	
1.	<p>Determinar el dominio del conjunto de etiquetas utilizado para establecer las relaciones entre requerimientos y características y el dominio del conjunto de etiquetas utilizado para establecer el factor de ponderación de los requerimientos</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Si los dominios anteriores son iguales, continuar con el paso 2</li> <li>- Si los dominios anteriores son distintos, elegir el dominio único en el que se van a expresar ambas variables (en el ejemplo I(2,9))</li> </ul>

Aplicar la función de transformación para obtener los valores unificados de ambas variables

/ Fase en la que se realiza la normalización de la información lingüística multigranular en un único dominio de expresión /

2. Para  $n = 1$  hasta Número\_de\_requerimientos hacer

Para  $m = 1$  hasta Número\_de\_características hacer

Buscar si existe relación entre el requerimiento y la característica:

- Si existe relación, aplicar la función  $g$  para establecer la medida de la importancia de la relación
- Si no existe relación, continuar con la siguiente característica

Realizar la agregación de la información de cada requerimiento con todas las características utilizando el operador  $media$

/ Fase en la que se establece la 2-tupla que define la importancia de los requerimientos ponderados /

3. Para  $n = 1$  hasta Número\_de\_requerimientos hacer

Determinar la etiqueta lingüística más próxima a la 2-tupla obtenida en el paso anterior y mostrarla

Calcular el valor de traslación de cada requerimiento

/ Fase en la que se muestran los resultados /

Cuadro 5.59.

La aplicación al ejemplo de ilustración práctica da como resultado los que muestra la pantalla de la Figura 5.51., supuesta una ponderación similar al caso del modelo AG-DNP-Fuzzy.

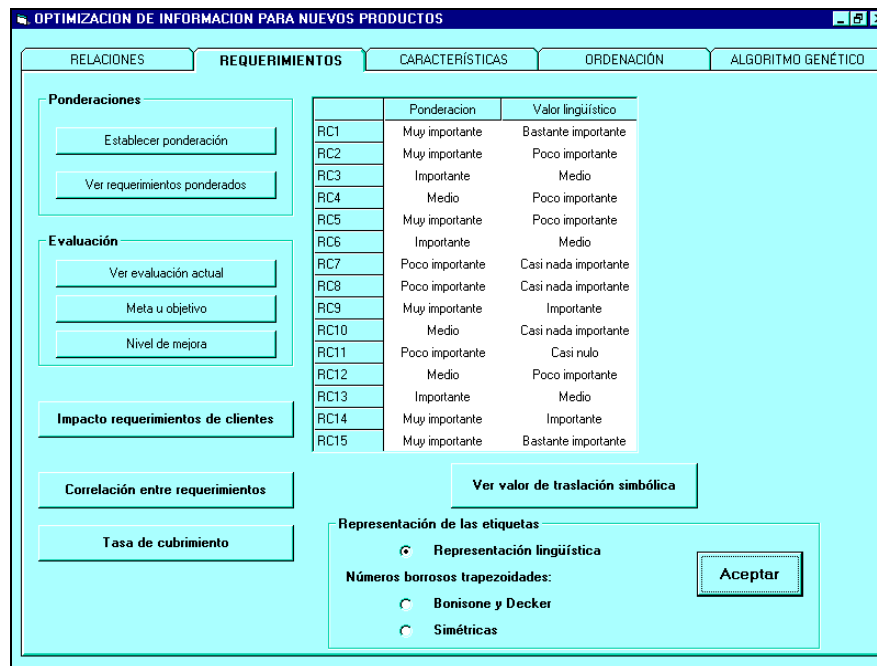


Figura 5.51.

Como se puede observar en la Figura anterior, el resultado obtenido proporciona la misma evaluación para varios requerimientos; sin embargo, es posible discernir entre ellos haciendo uso de la información que se recoge en la variable de traslación simbólica que, a efectos ilustrativos se muestra en la pantalla de la Figura 5.52. para el caso de los datos del ejemplo.

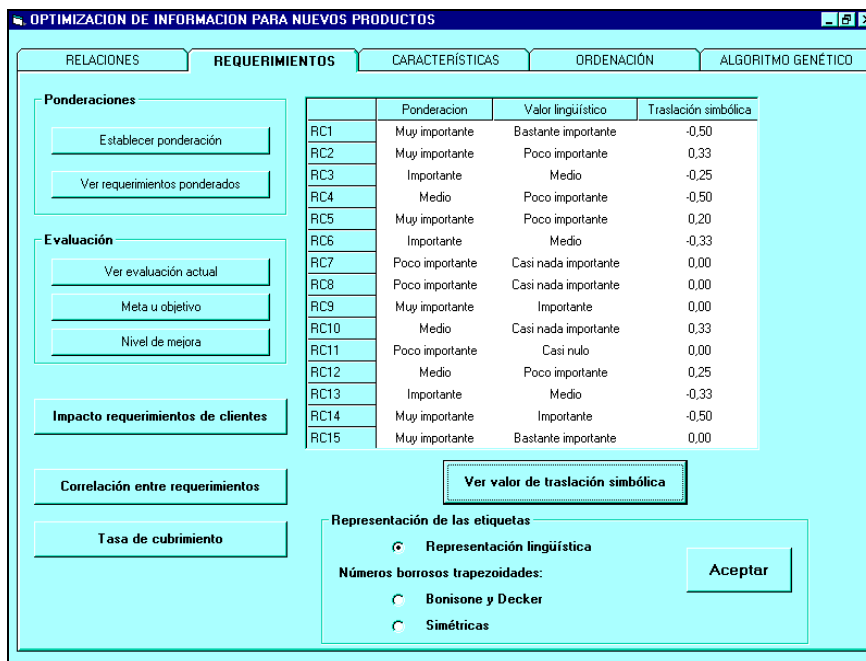


Figura 5.52.

De forma similar a la expuesta en este apartado, la información relativa a todas las variables que se incluyen el modelo, será sometida al mismo procedimiento: representación mediante 2-tuplas, agregación mediante el operador media y representación de resultados por aproximación a la etiqueta más cercana al dominio original, manteniendo la información a efectos de la operativa posterior mediante el segundo componente de la 2-tupla.

## B. Evaluación comparativa con productos concurrentes

La evaluación comparativa de los requerimientos proporciona información sobre la situación actual de la empresa respecto a los mismos y de la situación en la que se encuentran las empresas con las que se desea competir. Ambas variables están establecidas en términos lingüísticos y han sido establecidas en el mismo dominio de expresión  $[(1,5)]$ , de ahí que, dada la necesidad posterior de agregación con el resto de variables, se deba proceder a realizar la unificación de esta información para el dominio por el que se ha optado en el apartado anterior  $[(1,9)]$  y que servirá de base para todo el modelo.

La función de transformación aplicada a la información sobre la situación actual de la empresa y la situación de la competencia respecto a los requisitos de los consumidores permite unificar en el dominio elegido, de forma que el resultado obtenido para el nivel de mejora ya vendrá establecido en dicho dominio.

El cálculo de la meta o distancia se realiza aplicando el operador de comparación de 2-tuplas, de forma que el resultado proporciona una evaluación del nivel de mejora en términos lingüísticos, a la que se le han asociado 9 etiquetas cuya información hace referencia a la "necesidad de mejorar" y que, en concreto, son las siguientes: Positiva Extrema, Positiva Muy Fuerte, Positiva Fuerte, Positiva Débil, Prácticamente Nula, Negativa Débil, Negativa Fuerte, Negativa Muy Fuerte y Negativa Extrema.

En su incorporación posterior al cálculo de la bondad de las soluciones aquellos requerimientos que se encuentren igual o mejor situados (sus 2-tuplas representativas sean mayores o contengan la misma información) quedan relegados, ya que al igual que en los casos anteriores sólo se consideran relevantes aquellos requerimientos sobre los que la empresa debería incidir con el fin de mejorar.

El código necesario para realizar este proceso es el que se muestra en el Cuadro 5.60 y el resultado obtenido en su aplicación al ejemplo que se está considerando es el que recoge la pantalla de la Figura 5.53.

```
*****
'Propósito:  Determina, para cada requerimiento, la evaluación actual de la empresa y la
              compara con la evaluación de la competencia y establece la distancia entre
              ambas
'Entradas:   Evaluación actual de los requerimientos en la empresa
              Evaluación actual de los requerimientos en la competencia
              Conjunto de términos lingüísticos asociados a las etiquetas en I(1,5)
'Devuelve:   Evaluación lingüística del nivel de mejora para cada requerimiento
*****

Para n = 1 hasta Número_de_requerimientos hacer
    Determinar las 2-tuplas asociadas a cada etiqueta lingüística de la situación actual y
    de la meta u objetivo
    Realizar la transformación al dominio I(2,9) de los valores anteriores
    Realizar una comparación entre ambas
    Asignar una evaluación lingüística aproximando a la etiqueta más próxima en fun-
    ción del resultado
    Calcular, si es preciso, el valor de traslación simbólica
```

**Cuadro 5.60.**



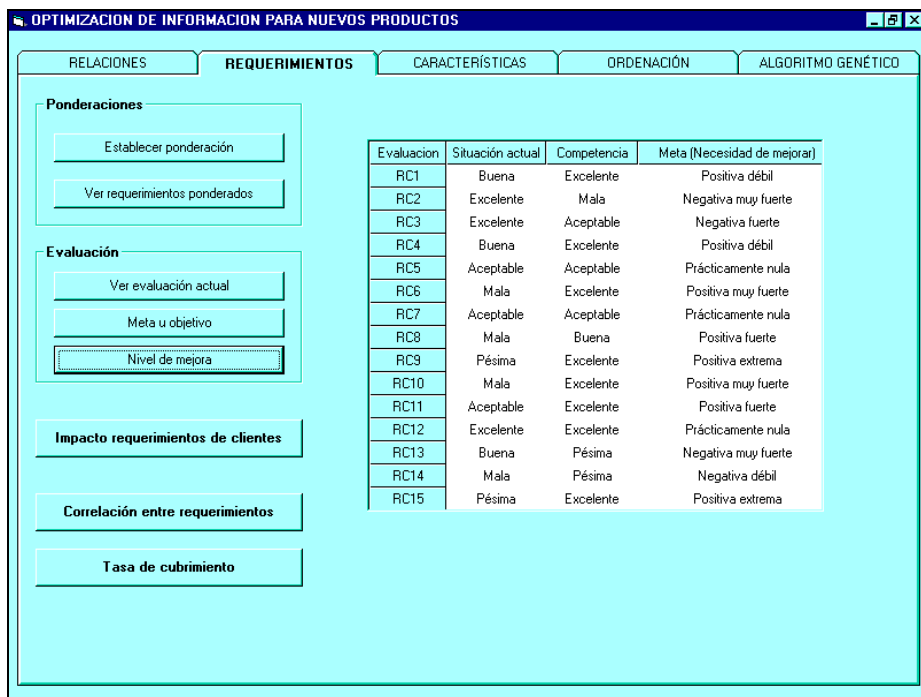


Figura 5.53.

En el desarrollo del modelo efectuado en el Capítulo 2, se ha establecido que la medida conjunta de los requerimientos ponderados y la evaluación comparativa puede ser representativa del impacto de los requerimientos. Debido al proceso de unificación de la información en un mismo dominio realizado en los pasos anteriores, las variables a que hace referencia el impacto de los requerimientos pueden ser agregadas sin ningún tipo de transformación.

Por homogeneidad con lo anterior, la agregación de esta información se realiza mediante la aplicación del operador media de 2-tuplas, siendo las valoraciones de la situación de la empresa y de la competencia las introducidas en el desarrollo del ejemplo, y el resultado de la evaluación de la distancia los que muestra la pantalla recogida en la Figura 5.54.

### C. Correlación entre los requerimientos

La información sobre la correlación entre requerimientos viene establecida en términos de 9 etiquetas lingüísticas y sobre la misma en el momento de captura de la información no es preciso realizar ninguna modificación.

En cuanto a su inclusión en la medida de la bondad de cada solución se procederá unificarla con el resto de información, cuyo procedimiento se reflejará en apartados posteriores.

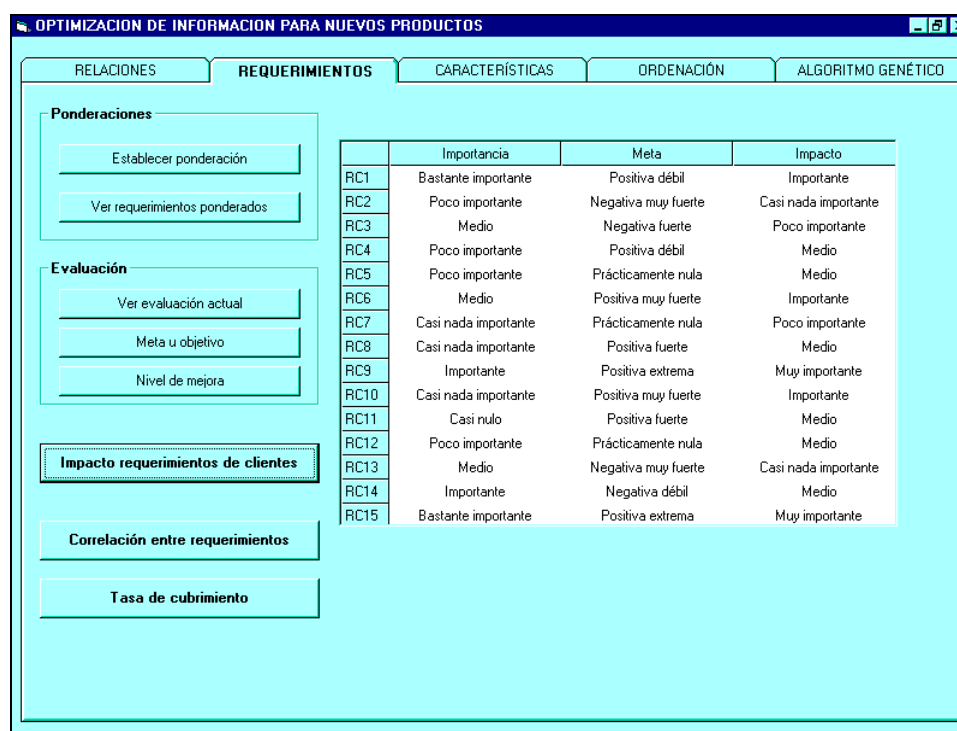


Figura 5.54.

### E. Tasa de cubrimiento de las características por parte de los requerimientos

El número de características relacionadas con cada requerimiento se establece de la misma forma que en casos anteriores. Asimismo, y dado que el ejemplo propuesto es el mismo que en la construcción del modelo AG-DNP-Fuzzy, el resultado y el proceso de codificación de este procedimiento es el reflejado en el Cuadro 5.46. recogido en la sección E del apartado 2.2.1.2. del presente Capítulo.

### F. Ordenación de los requerimientos

La ordenación de los requerimientos es posible realizarlo mediante la comparación de las dos 2-tuplas correspondientes a la importancia de los mismos y al nivel de mejora establecido mediante la evaluación comparativa.

El proceso y significado de dicha ordenación es similar a casos anteriores, razón por la cual se considera innecesario realizar consideraciones adicionales.

El resultado de aplicarlo a los valores del ejemplo que se está considerando es el que muestra la Figura 5.55.

	Tasa de mejora	Importancia	Ordenación
RC1	Positiva débil	Bastante importante	Ganador
RC2	Negativa muy fuerte	Poco importante	Cuestionable
RC3	Negativa fuerte	Medio	Oportunidad o Cuestionable
RC4	Positiva débil	Poco importante	Dormido
RC5	Prácticamente nula	Poco importante	Cuestionable o Dormido
RC6	Positiva muy fuerte	Medio	Dormido o Ganador
RC7	Prácticamente nula	Casi nada importante	Cuestionable o Dormido
RC8	Positiva fuerte	Casi nada importante	Dormido
RC9	Positiva extrema	Importante	Ganador
RC10	Positiva muy fuerte	Casi nada importante	Dormido
RC11	Positiva fuerte	Casi nulo	Dormido
RC12	Prácticamente nula	Poco importante	Cuestionable o Dormido
RC13	Negativa muy fuerte	Medio	Oportunidad o Cuestionable
RC14	Negativa débil	Importante	Oportunidad
RC15	Positiva extrema	Bastante importante	Ganador

Figura 5.55.

#### 5.2.2.2. Tratamiento de la información endógena: Voz del ingeniero

La información obtenida en el seno de la empresa puede ser asimismo tratada mediante la representación en 2-tuplas, de forma análoga a lo realizado con la información externa.

En los apartados siguientes se analizan las distintas variables que proporcionan información endógena para su incorporación en el modelo que se desea desarrollar. En este sentido, en varios casos será preciso la unificación del dominio de expresión en que se encuentra expresada la información. Asimismo, y de forma similar al resto de modelos, se mostrarán los resultados obtenidos al operar con las distintas variables en base a este tipo de representación.

#### A. Importancia de las características

La importancia de las características viene determinada por la relación que mantiene cada una de ellas con los requerimientos y la importancia de los mismos, es decir, se utiliza la misma información que para ponderar los requerimientos pero analizado desde la perspectiva de las características.

En la evaluación de los requerimientos ponderados se realizó la transformación de las etiquetas que describían la ponderación de los mismos al conjunto  $I(2,9)$  por el que se optó para unificar toda la información procesada por el modelo. De esta forma, en el momento de determinar la importancia de las características, no es necesario realizar ninguna transformación dado que ambas variables se encuentran ya en el mismo dominio de expresión.

Este procedimiento será similar a la evaluación realizada en el caso de los requerimientos, sin más que aplicar la función  $g$ , ya definida, para establecer la medida de la importancia de cada requerimiento en base a la relación que mantiene con todas las características y proceder a agregar el resultado, en este caso desde la perspectiva de cada característica. El operador de agregación aplicado será asimismo el operador media para 2-tuplas utilizado en el caso anterior.

Los resultados de la evaluación de la importancia de las características estarán definidos, por tanto, en 9 etiquetas, cuyo significado ha sido mencionado con anterioridad.

El código para procesar este mecanismo es el que muestra el Cuadro 5.61.

```
*****
'Propósito: Localiza, para cada característica, la relación con cada una de los requeri-
            mientos y en función de dicha relación (E/MF/BF/F/M/D/BD/MD/DB) y del
            factor de ponderación del requerimiento de que se trate (MI/I/M/PI/N), realiza
            la valoración de la importancia de la misma
'Entradas: Matriz de relaciones
            '
            Etiqueta lingüística de la ponderación de los requerimientos
'Devuelve: Importancia de las características
*****

Para m = 1 hasta Número_de_características hacer
    Para n = 1 hasta Número_de_requerimientos hacer
        Buscar si existe relación entre la característica y el requerimiento:
        - Si existe relación, aplicar la función g para establecer la medida de la
          importancia de la relación
        - Si no existe relación, continuar con el siguiente requerimiento
        Sumar para cada característica los valores obtenidos de la operación anterior.
    / Fase en la que se establecen las 2-tuplas que determinan la importancia de las ca-
      racterísticas ponderadas /
```

**Cuadro 5.61.**

Los resultados obtenidos con los datos del ejemplo de desarrollo son los que muestran la Figura 5.56. En este sentido, en dicha Figura la evaluación ha sido determinada mediante la etiqueta lingüística más próxima el valor de la 2-tupla que determina la importancia. No obstante, se continúa manteniendo toda la información mediante el segundo componente de la 2-tupla, de forma que la importancia de las características en su inclusión en la medida de la calidad de las soluciones se realizará con toda la información.

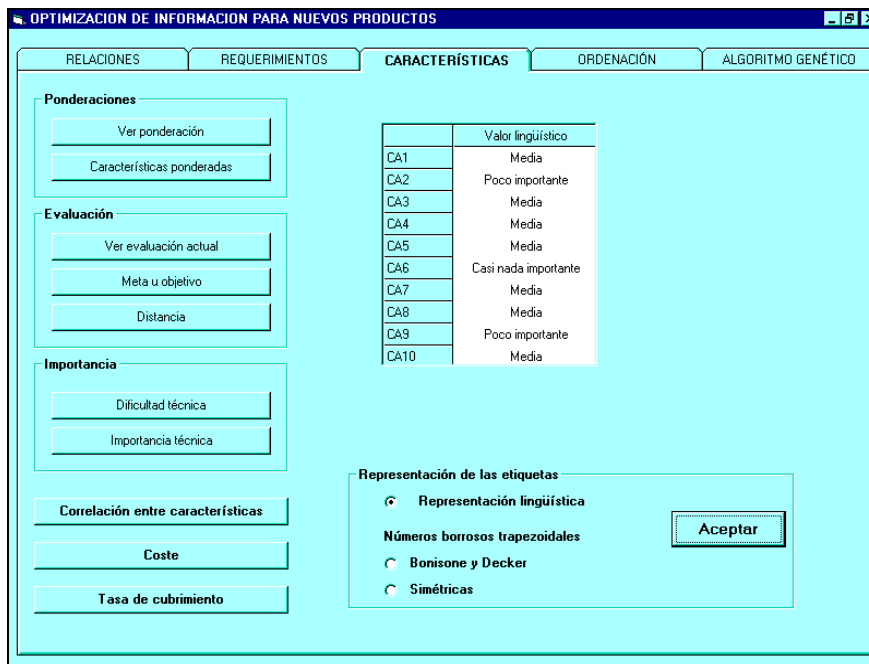


Figura 5.56.

## B. Situación actual de las características técnicas

La información de la situación de la empresa respecto al desarrollo de las características así como la situación de la competencia respecto a las mismas viene establecida, en función de los datos del ejemplo en el modelo AG-DNP-Fuzzy, en el dominio  $I(1,5)$  de forma que será preciso, antes de proceder a su comparación, unificar dicho dominio con respecto al resto de la información que recoge el modelo  $I(2,9)$ .

La información unificada en el dominio  $I(2,9)$  permite aplicar el operador de comparación a las 2-tuplas representativas, de forma que el resultado vendrá dado en dicho dominio, habiendo considerado la utilización de las mismas etiquetas lingüísticas que en el caso de la evaluación comparativa de los requerimientos.

La codificación de este proceso es la que se recoge en el Cuadro 5.62. y el resultado de aplicarla al problema del ejemplo desarrollado se muestra la Figura 5.57.

```

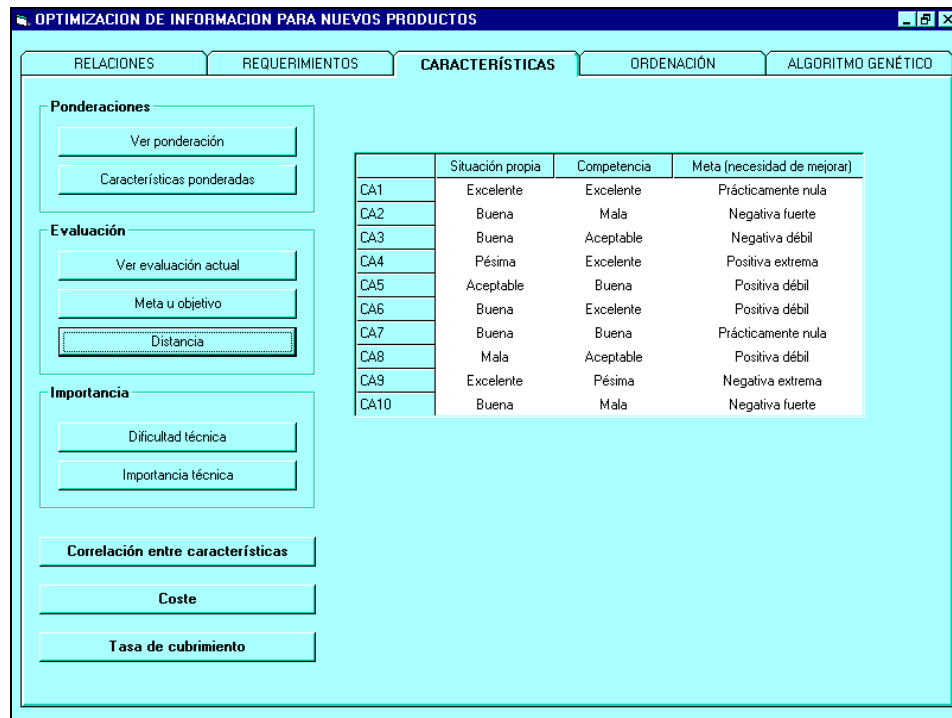
*****
'Propósito:  Determina, para cada característica, la evaluación actual de la empresa y la
              compara con la evaluación de la competencia y establece la distancia entre
              ambas
'Entradas:   Evaluación actual de las características en la empresa
              Evaluación actual de las características en la competencia
              Conjunto de términos lingüísticos asociados a las etiquetas en I(1,5)
'Devuelve:  Evaluación lingüística del nivel de mejora para cada característica
*****

```

Para  $m = 1$  hasta Número\_de\_características hacer

- Determinar las 2-tuplas asociadas a cada etiqueta lingüística de la situación actual y de la meta u objetivo
- Realizar la transformación al dominio I(2,9) de los valores anteriores
- Realizar una comparación entre ambas
- Asignar una evaluación lingüística aproximando a la etiqueta más próxima en función del resultado
- Calcular, si es preciso, el valor de traslación simbólica

Cuadro 5.62.



### C. Importancia técnica de las características

La dificultad técnica de desarrollar una característica es una información con valor por sí misma, es decir, no es necesaria ni su comparación ni su agregación con otra información para establecer los valores necesarios para medir la adecuación de cada combinación de características que representan las soluciones.

Sin embargo, y de acuerdo con la necesidad de unificación del dominio de expresión de las variables, dado que la dificultad técnica viene determinada en el dominio I(1,5) será preciso aplicar la función de transformación para establecer su información en el mismo dominio de expresión que el resto de variables I(2,9). El proceso de codificación de la transformación es el mismo que el realizado en casos anteriores.

En lo que se refiere a la información acerca de esta variable en el ejemplo es la utilizada en el resto de casos de estudio.

En el modelo propugnado en el Capítulo 2 se presentaba la utilidad que podría tener realizar una visión de la importancia de una característica conjuntamente con la dificultad que supone su desarrollo. Para establecer esta medida, que ha sido denominada "importancia técnica", se plantea el mismo desarrollo que el caso del impacto de los requerimientos, por lo que su tratamiento y codificación será similar, no siendo preciso realizar ninguna consideración adicional.

En su aplicación al caso de estudio, los resultados de la medida de dicha importancia técnica son los que se muestran en la pantalla recogida en la Figura 5.58.

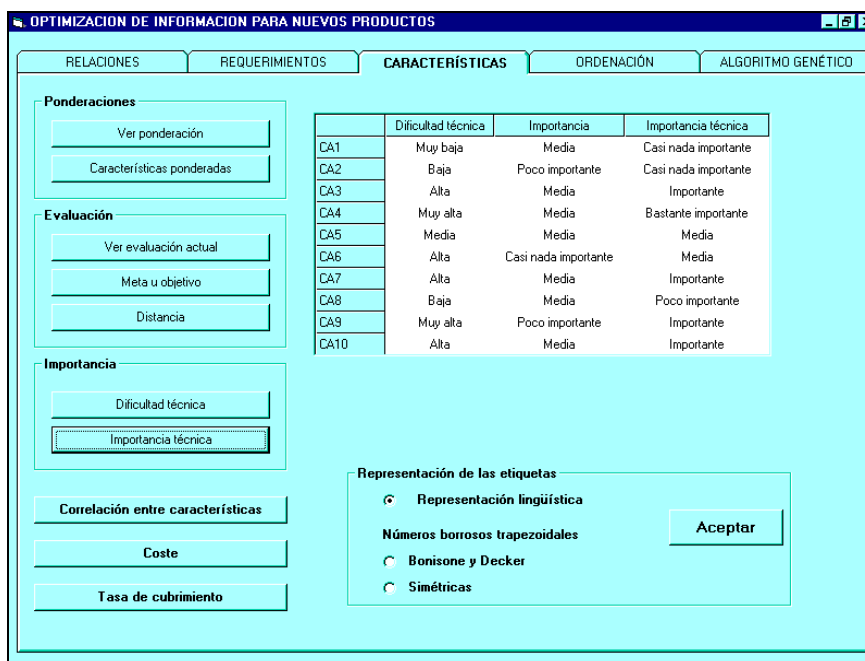


Figura 5.58.

#### D. Correlación entre las características

La correlación entre las posibles características, de forma análoga al caso de la correlación entre requerimientos, viene establecida dentro del dominio unificado del problema, de ahí que en este punto no sea preciso realizar ningún tipo de modificación en esta variable. En efecto, la incorporación a la medida de la bondad de las soluciones de la información sobre la correlación entre características se puede realizar en los mismos términos en que viene establecida en su origen.

#### E. Tasa de cubrimiento de los requerimientos por parte de las características

El número de requerimientos y la relación que mantiene con cada característica son los mismos que en casos anteriores, tanto desde la perspectiva de su tratamiento como desde el desarrollo concreto del ejemplo de estudio, no siendo preciso ningún tipo de modificación adicional a las ya consideradas.

#### F. Ordenación de las características

Las características pueden ser ordenadas en función de la importancia que tienen y del nivel de mejora que se estima necesario para cada una de ellas. Para ello se realiza la comparación de las 2-tuplas asociadas a ambas variables, siendo el resultado en el ejemplo de estudio el que recoge la pantalla de la Figura 5.59.

Figura 5.59.



### G. Coste de desarrollo de las características

El establecimiento del coste de desarrollo de una característica puede venir definido de cualquiera de las formas utilizadas hasta el momento: un valor cierto (cuando se dispone de esta información parece más razonable utilizarla), mediante un intervalo o valores entre los que se puede encontrar dicho coste o bien a través de una evaluación lingüística que establezca el coste de una característica bien respecto al resto de características o bien respecto a lo que la persona que realiza la valoración considera como oportuno o normal.

El modelo construido puede utilizar todos los tipos de evaluaciones anteriores, de forma que en el momento de establecer los parámetros que hacen referencia al coste de desarrollo de cada característica es posible operar con valores conocidos y ciertos, con valores establecidos dentro de un intervalo (por ejemplo mediante números borrosos triangulares o trapezoidales) o bien con evaluaciones lingüísticas. Dado que el resto de circunstancias ya ha sido analizado, se recoge simplemente el caso de la utilización de evaluaciones lingüísticas, en la cual se ha optado por las siguientes etiquetas para establecer el coste de cada característica: La Más Cara, Muy Cara, Bastante Cara, Cara, Normal, Barata, Bastante Barata, Muy Barata y La Más Barata.

Por homogeneidad con el resto del modelo que se está desarrollando, a efectos del ejemplo práctico, en este apartado se considera que el coste viene determinado en términos lingüísticos, en concreto se ha supuesto el coste asociado a cada característica que se recoge en la Figura 5.60.

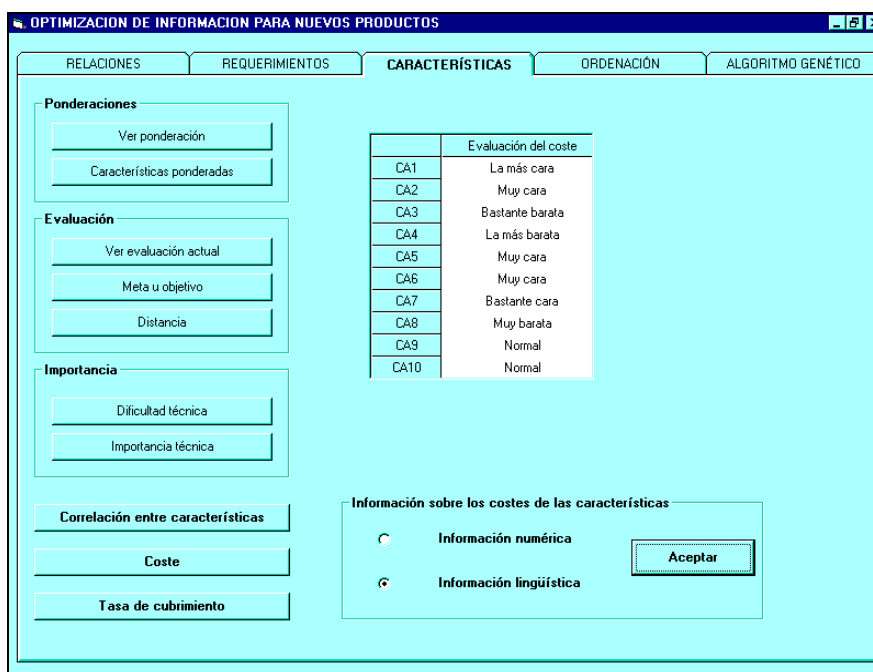


Figura 5.60.

Si en el modelo de utilidad práctica se opta por utilizar información numérica para establecer el coste, los valores incorporados al ejemplo desarrollado son los mismos que en los casos anteriores, siendo en consecuencia el tratamiento similar al comentado con anterioridad.

#### **5.2.2.2.3. Aplicación del modelo AG-DNP-2-tuplas a situaciones de restricción presupuestaria**

La construcción de un algoritmo genético que permita optimizar la información de que se dispone para establecer la mejor combinación del listado de características posibles tiene un planteamiento similar al modelo AG-DNP-Fuzzy, sin más que utilizar los operadores específicos de la representación mediante 2-tuplas.

En una primera aproximación se considera la existencia de un volumen de recursos limitados que actúa como restricción de forma similar a los casos anteriores. En cuanto a la forma de evaluar dicha restricción presupuestaria, por homogeneidad con lo analizado en el caso del coste de las distintas características, se podrá establecer de forma numérica o lingüística, es decir, será posible incluir una restricción presupuestaria mediante una evaluación en términos numéricos o bien mediante una evaluación lingüística, en cuyo caso para determinar el presupuesto se han establecido las siguientes etiquetas: Máximo, Muy Alto, Bastante Alto, Alto, Medio, Bajo, Bastante Bajo, Muy Bajo y Mínimo.

En cuanto a la construcción del modelo AG-DNP-2-tuplas que actúe en este caso para optimizar la información en los términos establecidos en los apartados anteriores, los criterios utilizados son homogéneos con los determinados en los casos anteriores.

La codificación de los individuos representativos de las soluciones, tanto en lo referente al alfabeto utilizado como a la longitud de las cadenas es el mismo, así como el operador de inicialización aplicado para la selección de la población inicial.

En referencia al tratamiento de los individuos no factibles generados en la población inicial, su tratamiento es similar tanto en el caso de utilizar un presupuesto numérico como lingüístico, es decir, se tratará de establecer en base al presupuesto el punto a partir del cual no es posible el desarrollo de ninguna característica más, determinando de esta forma hasta qué punto un vector representativo de la combinación de características que supone una solución es considerado factible.

En la primera opción se utilizará, de forma análoga a lo descrito en el caso del modelo AG-DNP-Fuzzy, el centroide de dicho presupuesto y su comparación con el

centroide del coste de las soluciones generadas, lo que permitirá establecer el vector de números enteros que representará la solución factible.

En la segunda opción, será necesario proceder a la comparación entre las dos 2-tuplas que representan el presupuesto y el coste de cada combinación inicial. Para ello, en primer término es preciso determinar las 2-tuplas asociadas a las etiquetas que evalúan el presupuesto, estableciendo para ello que un presupuesto calificado como "Máximo" es aquel que podría hacer frente a todas las características posibles, mientras que el presupuesto sería "Mínimo" si no pudiera cubrir más que la característica más barata.

En este sentido, tanto un presupuesto máximo como mínimo haría que no fuera necesario ningún tipo de búsqueda de mejor combinación en base a la información, ya que en ambos casos la restricción daría como factible una única solución en la que se recogerían o bien todas las características o bien sólo la más barata, respectivamente. En consecuencia, el establecimiento de los valores asociados a "Máximo" y "Mínimo" presupuesto se efectúa para determinar los márgenes de las 2-tuplas asociadas a la evaluación del mismo, siendo el resto establecidas en el conjunto  $I(2,9)$  en el que se recoge toda la información, permitiendo aplicar el operador de comparación de 2-tuplas para establecer el punto en el que un individuo deja de ser factible.

Una vez establecidas las soluciones iniciales que en base al presupuesto son factibles, se procede a evaluar la adecuación de dichas soluciones. El proceso es similar al descrito en el caso anterior, sin más que utilizar los operadores asociados a la representación mediante 2-tuplas, dado que en el proceso de captura y tratamiento de la información de las distintas variables que recoge el modelo se ha procedido a la unificación de todas ellas en un único dominio de expresión, de tal forma que no es necesario en este punto realizar ningún tipo de modificación.

El cálculo de la calidad de las soluciones se determina en función de la agregación de los valores que cada solución aporta en las distintas variables que inciden en la adecuación. El procedimiento utilizado es la suma de los distintos valores en cada variable de cada una de las posibles combinaciones de características, mediante el operador preciso para este tipo de representación de la información lingüística.

La medida de la adecuación de una solución vendrá de esta forma determinada por la agregación del valor de la importancia, de la evaluación competitiva y de la dificultad técnica de las características ponderadas que componen dicha solución, a la cual se deberá añadir las posibles correlaciones entre las características que se recojan en la misma. En cuanto a la información sobre los requerimientos, de forma similar a

los casos anteriores, se encuentra agregada en una única variable que vendrá determinada para característica de acuerdo con los requerimientos con los que ésta se relaciona.

El resultado anterior permite establecer una medida de la adecuación de las soluciones iniciales que servirá para poder aplicar el operador de selección que, como en los casos anteriores, se mantiene proporcional a la medida de dicha adecuación.

Los operadores genéticos, tanto el de cruce como el de mutación, siguen siendo similares a los casos anteriores, así como la evaluación de las soluciones generadas tras la aplicación de los mismos.

El criterio de terminación o parada es asimismo el número de iteraciones que establezca el usuario en cada caso concreto en el momento de establecer los parámetros de funcionamiento del AG.

La diferencia fundamental en este caso es la evaluación del presupuesto que como se comentó con anterioridad, en función de la decisión del usuario sobre la forma de representar el coste de las distintas características, éste deberá ser introducido de forma numérica o lingüística. En este último caso, la captura de la información que afecta al presupuesto, el usuario deberá responder mediante una pantalla como la que muestra la Figura 5.61.

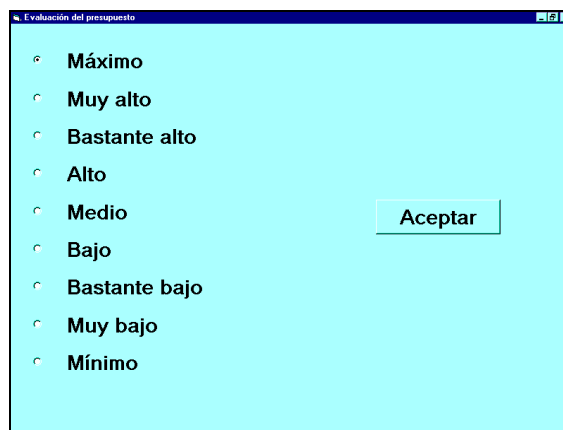


Figura 5.61.

El funcionamiento en el caso del ejemplo desarrollado, suponiendo los mismos parámetros que en los casos anteriores, da como resultados los que recogen las Figuras 5.62. y 5.63. en el caso de que la información sobre el coste de desarrollo de las características y el presupuesto se establecen de forma numérica y cuando la información

sobre el coste de desarrollo de las características y el presupuesto se establecen mediante evaluaciones lingüísticas, respectivamente.

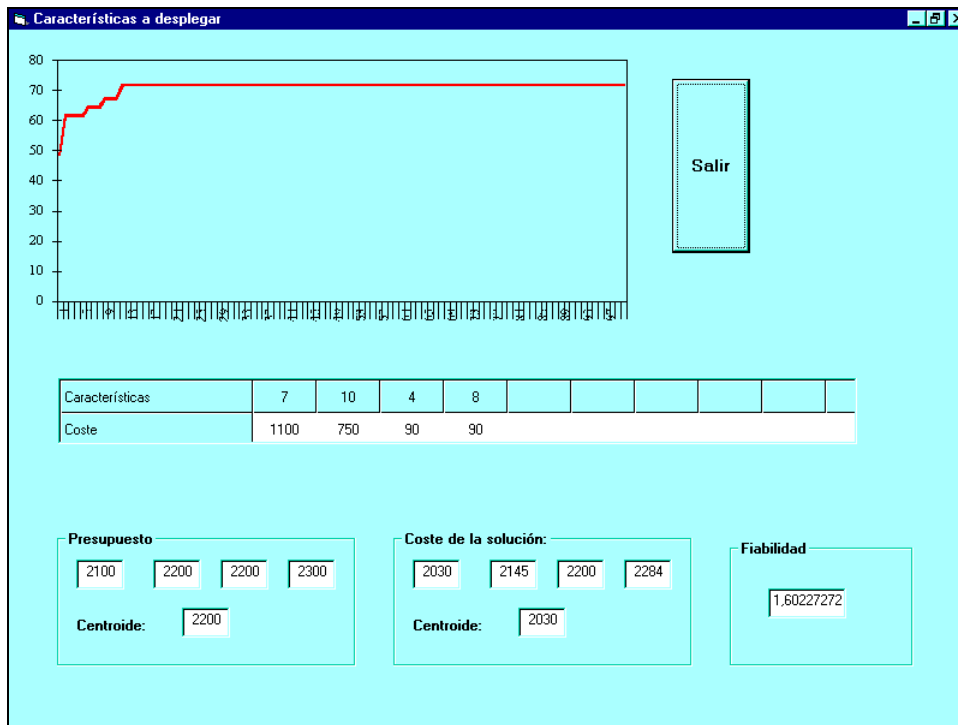


Figura 5.62.

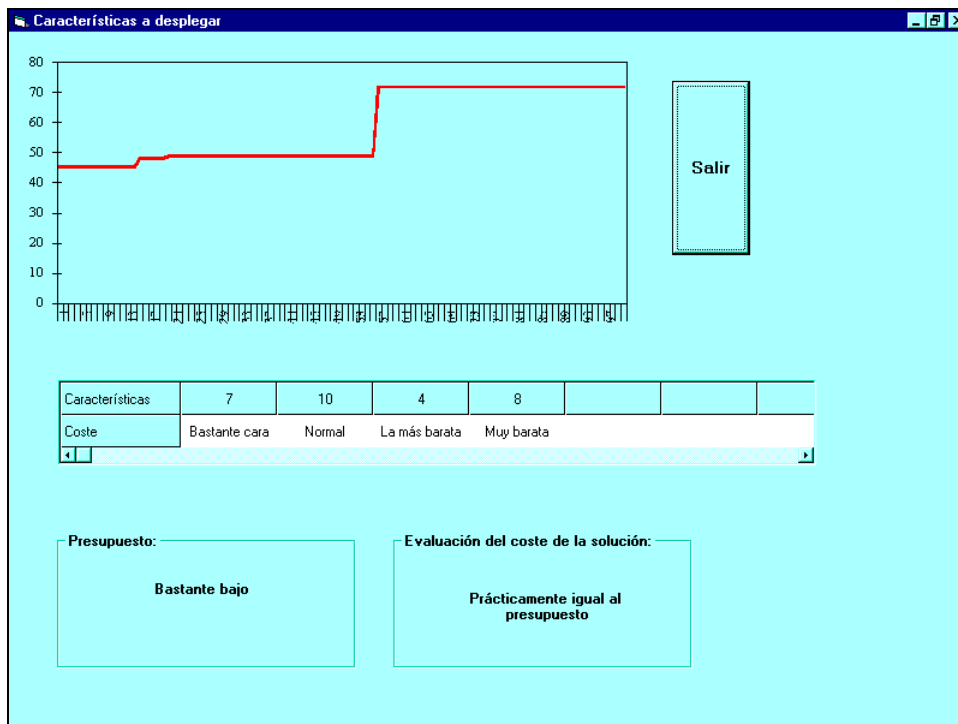


Figura 5.63.

#### **5.2.2.4. Aplicación del modelo AG-DNP-2-tuplas a situaciones de características sustitutivas**

La construcción de un algoritmo genético para optimizar la información relativa a las variables que se incorporan al modelo desarrollado para ayudar a la decisión sobre las características a incorporar en un nuevo producto desde la perspectiva de la existencia de características sustitutivas entre sí y utilizando información representada mediante 2-tuplas es similar a los casos anteriormente analizados sin más que utilizar los operadores propios de este tipo de representación.

El proceso de codificación, inicialización, eliminación de individuos no factibles, operadores genéticos y parámetros de funcionamiento son semejantes al AG construido en el caso de información numérica. La principal diferencia que presenta encuentra en el cálculo de los incrementos en el coste que suponen las distintas soluciones el cual se plantea, de forma semejante al caso anterior, en dos opciones distintas en función de la representación utilizada para los costes de las características, a saber:

- Si el coste de desarrollo de las características viene establecido en términos numéricos, a través de cualquier tipo de representación de los ya analizados, el cálculo de los incrementos en el coste de cada solución se realizará en los mismos términos que en dichos casos.
- Si el coste de desarrollo de las características se establece en términos lingüísticos, para proceder a la comparación entre el coste de dos posibles soluciones será preciso acumular, a través del operador de agregación de 2-tuplas, el coste que supone cada combinación de características y proceder a su comparación para evaluar el incremento.

De acuerdo con lo anterior, la medida de la bondad de las soluciones vendrá dada no sólo por su calidad sino que ésta hace referencia asimismo al coste que supone cada solución evaluada. De esta forma, para que una solución sea preferible a otra, el incremento en su adecuación debe ser superior al incremento que supondría en el coste desarrollarla.

En el ejemplo práctico desarrollado, supuestos los mismos valores para la información disponible y utilizando los parámetros de los casos anteriores, la evolución y la solución aportada por el AG es la que muestran las pantallas de las Figuras 5.64. y 5.65.

- Si la información sobre el coste de desarrollo de las características se establece de forma numérica:

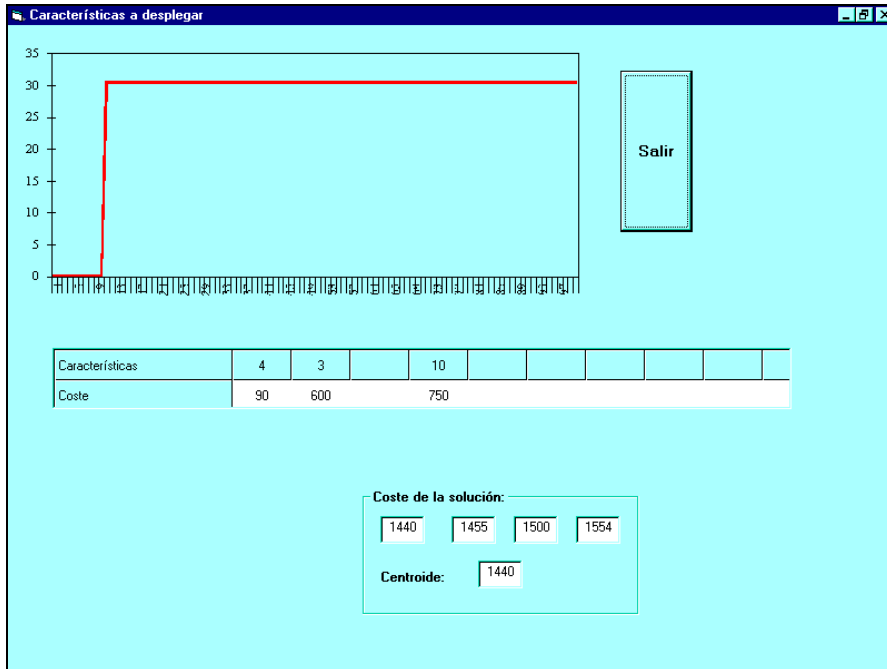


Figura 5.64.

- Si la información sobre el coste de desarrollo de las características se establece mediante evaluación lingüística:

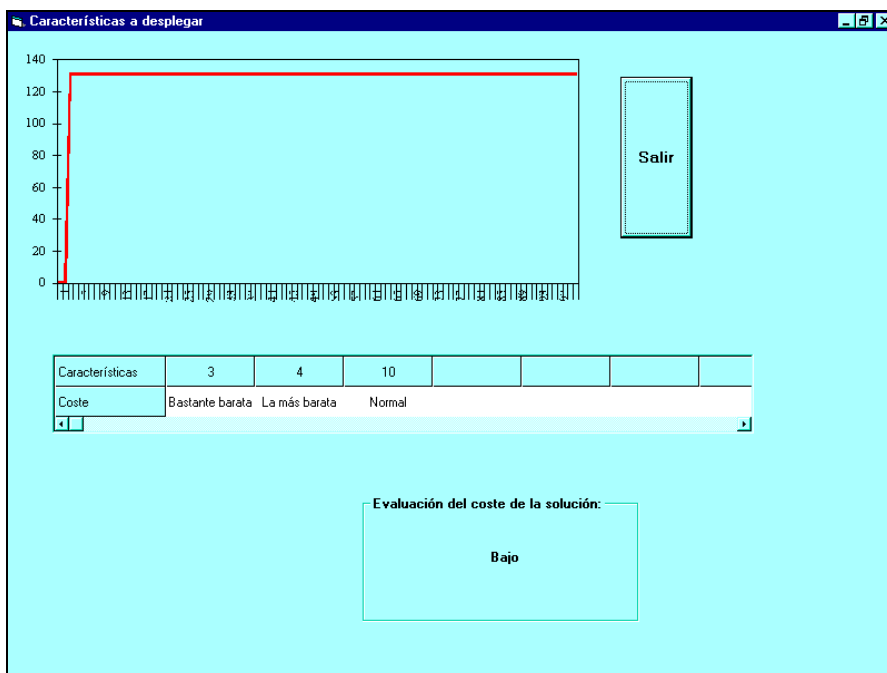


Figura 5.65.

### 5.3. MODELOS DE DESARROLLO DE NUEVOS PRODUCTOS CON SISTEMAS DE HORMIGAS

Los algoritmos de optimización mediante colonias de hormigas (ACO) son actualmente uno de los algoritmos que ofrecen mejores prestaciones. Desde la primera aplicación del denominado Sistema de Hormigas (Ant System) para el QAP (MANIEZZO, COLORNI y DORIGO, 1994), se han propuesto varias mejoras para esta aplicación, en concreto se han utilizado algoritmos como el MAX-MIN, HAS, etc.

En la aplicación de los sistemas de hormigas a problemas de asignación cuadrática la información heurística que se emplea, tal como se analizó en el epígrafe 5.1., viene representada por las matrices de flujo y distancia y la representación de la solución es una representación de orden, una permutación de  $n$  números enteros.

Los casos disponibles se clasifican en cuatro categorías, en función de la fuente de obtención y la composición de los mismos (STÜTZLE, 1997), a saber:

1. Instancias no estructuradas y generadas aleatoriamente. Son instancias cuya matriz de distancia y de flujo se han generado de manera aleatoria siguiendo una distribución uniforme.
2. Instancias con una matriz de distancias basada en cuadrícula. En esta clase de instancias, la matriz de distancias se deriva de una cuadrícula de  $n_1 \times n_2$  y las distancias están definidas como la distancia de Manhattan entre los puntos de la cuadrícula.
3. Instancias de la vida real. Como indica su denominación, las instancias de esta clase son instancias recuperadas de la vida real, de aplicaciones prácticas del QAP.
4. Instancias como la vida real (*real-life-like*). Debido a que las instancias de la vida real en la QAPLIB son de tamaño muy pequeño, se han propuesto un conjunto particular de problemas generados aleatoriamente. Esta generación se produce de tal forma que las matrices de entrada se parecen a las distribuciones encontradas en los problemas reales.

Si bien los SH ya han sido analizados con anterioridad en el epígrafe 3 del Capítulo 3, en este apartado se trata de exponer su posible utilización en problemas de QAP por su similitud con el modelo de desarrollo de nuevos productos, que constituye el objeto de estudio de la presente Memoria de Tesis Doctoral.



Los aspectos específicos de este problema, que merecen una mención especial son los siguientes:

1. **La búsqueda local.** En la aplicación a QAP se puede realizar con la versión de ascensión de colinas del 2-opt, en cuyo caso será preciso especificar, para este problema en concreto, la forma en que se reevalúan las nuevas permutaciones que se van generando.

El 2-opt consiste en un intercambio de dos posiciones de la solución. En la variante de ascensión de colinas este cambio se produce buscando entre todos los posibles índices de la misma (se realizan todas las permutaciones posibles). Cuando se realiza el intercambio entre los contenidos de dos posiciones dadas de la solución, no es necesario volver a evaluar dicha solución, sino que se puede obtener el nuevo coste de la solución realizando una diferencia de objetivos, es decir, lo que se ha quitado al eliminar los arcos concernientes a las posiciones intercambiadas y lo que se ha añadido debido a los nuevos arcos que introduce este intercambio. En efecto, si el coste de una solución  $p$  viene dado por la expresión:

$$\text{coste}(\pi) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_{ij} \cdot d_{\pi_i \pi_j}$$

la diferencia de costes  $\delta$ , entre una solución  $\pi$  y una solución candidata  $\pi'$  se puede calcular como sigue:

$$\delta = \text{coste}(\pi') - \text{coste}(\pi)$$

Sin embargo, existe un proceso menos costoso para calcular  $\delta$  cuando el vecino (nueva solución candidata) se ha calculado mediante un movimiento de intercambio. Este proceso es el siguiente:

Sean  $i$  y  $j$  las dos unidades que se han intercambiado. Los sumandos que afectan a estas unidades son:

$$\sum_{k \neq i, j} (f_{ik} \cdot d_{\pi_i \pi_k} + f_{jk} \cdot d_{\pi_j \pi_k} + f_{ki} \cdot d_{\pi_k \pi_i} + f_{kj} \cdot d_{\pi_k \pi_j})$$

siendo los sumandos nuevos para  $\pi'$  los siguientes:

$$\sum_{k \neq i, j} (f_{ik} \cdot d_{\pi_j \pi_k} + f_{jk} \cdot d_{\pi_i \pi_k} + f_{ki} \cdot d_{\pi_k \pi_j} + f_{kj} \cdot d_{\pi_k \pi_i})$$

La diferencia  $\delta = \text{coste}(\pi') - \text{coste}(\pi)$  viene dada por la expresión siguiente:

$$\sum_{k \neq i, j} (f_{ik} \cdot (d_{\pi, \pi_k} - d_{\pi', \pi_k}) + f_{jk} \cdot (d_{\pi, \pi_k} - d_{\pi', \pi_k}) + f_{ki} \cdot (d_{\pi_k, \pi_i} - d_{\pi_k, \pi_i'}) + f_{kj} \cdot (d_{\pi_k, \pi_i} - d_{\pi_k, \pi_i'}))$$

Este procedimiento resulta menos costoso de calcular que toda la solución completa.

2. **Información Heurística.** El QAP utiliza el flujo entre las actividades y la distancia entre las localizaciones como base de la información heurística, de forma que ésta se representará tanto por la matriz de flujo entre las actividades (o unidades) como por la matriz de distancia entre las localizaciones.

La información heurística se aplica de forma directa como si estuviera contenida en una única matriz de datos y, en el momento de realizar un cambio de estado, se busca que la información heurística ( $\eta$ ) sea lo mayor posible.

En el caso del QAP, al disponer de dos matrices que representan aspectos diferentes y que no son directamente proporcionales, se debe proceder a realizar un cambio en su representación, de la forma siguiente:

Se calculan dos vectores  $d$  y  $f$ , en los que la  $i$ -ésima componente representa respectivamente la suma de las distancias desde la localización  $i$  a todas las demás localizaciones y la suma de los flujos desde la unidad  $i$  a todas las demás unidades (actividades). Cuanto más baja sea la distancia potencial de la localización  $i$  ( $d_i$ ), más centrada estará la localización. Por el contrario, cuanto más alto sea el flujo potencial de la unidad  $i$  ( $f_i$ ), más importante será dicha unidad.

A continuación se construye una matriz  $E = f \cdot d^T$ , de dimensión  $n \times n$ , donde  $e_{ij} = f_i \cdot d_j$ . Por tanto, la "deseabilidad" heurística de asignar la facilidad  $i$  a la localización  $j$  vendrá dada por  $\eta_{ij} = 1/e_{ij}$ .

La motivación para utilizar este tipo de información heurística es que, intuitivamente, las buenas soluciones asociarán las actividades con gran flujo potencial a las localizaciones con baja distancia potencial.

Una vez realizados estos pasos la representación obtenida para la información heurística es directamente aplicable todas las fórmulas en donde aparece  $\eta$ .

3. **Memoria compartida.** Una de las características más importantes de los algoritmos de hormigas es la capacidad para mantener una memoria a largo plazo que permite comunicarse a las hormigas de forma indirecta, la cual está consti-

tuida por los rastros de feromona que las hormigas dejan a su paso y que se representa mediante la matriz de feromona,  $\tau$ .

La matriz de feromona es de dimensiones  $n \times n$ , siendo  $n$  el tamaño del problema (número de actividades o número de localizaciones) y  $\tau_{ij}$  indica la cantidad de feromona acumulada en el arco que asigna la unidad  $i$  a la localización  $j$ , con  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ , es decir, indica la deseabilidad de asignar la unidad  $i$  a la localización  $j$ .

- 4. Construcción de las soluciones.** Para la aplicación práctica de las meta-heurísticas ACO al QAP, es conveniente usar una dirección de asignación de actividades a localizaciones (o viceversa) fija. Por tanto, las hormigas asignan actividades en un orden determinado a las localizaciones.

Este orden de asignación puede ser de dos tipos: aleatorio, siguiendo una distribución uniforme, o de acuerdo a algún tipo de información heurística. Para el primer caso, cada hormiga elige aleatoriamente la siguiente unidad a la que se le va a asignar una localización, y ésta es distinta para cada hormiga. En particular, la probabilidad de que la hormiga  $k$  asigne la unidad  $i$  a la localización  $j$  es:

$$p_{ij}^k(t) = \frac{[\tau_{ij}(t)]^\alpha \cdot [\eta_{ij}]^\beta}{\sum_{l \in N_i^k} [\tau_{il}(t)]^\alpha \cdot [\eta_{il}]^\beta}$$

si  $j \in N_i^k$ , donde  $N_i^k$  son las localizaciones libres para la hormiga  $k$ .

Para el segundo caso, se realiza una ordenación decreciente del vector  $f$  (de unidades), eligiendo las unidades en orden según aparecen en  $f$ . Por tanto, en este caso, la elección de unidades es común para todas las hormigas.

El interés por analizar la validez de la utilidad de los sistemas de hormigas como mecanismo de optimización en el modelo de desarrollo de nuevos productos planteado en el Capítulo 2 de la presente Memoria, se basa en el reconocimiento ya expresado de la consideración de dicho modelo de decisión como un problema de asignación cuadrática. Las referencias anteriores acerca de la utilidad contrastada de dichos algoritmos en su aplicación a problemas de esta naturaleza plantean la posibilidad de su aplicación al problema que se está desarrollando.

De forma similar a los modelos construidos en los apartados anteriores, en los cuales se establece como mecanismo de optimización el concurso de algoritmos genéticos, en los siguientes apartados se pretende exponer la posibilidad de aplicar al modelo de desarrollo de nuevos productos la metodología propia de los algoritmos de optimización basados en colonias de hormigas.

En el apartado 3.3. de la presente Memoria se han expuesto los distintos algoritmos mediante colonias de hormigas, analizando las similitudes y diferencias entre los mismos así como su utilidad como mecanismos de optimización. En el presente apartado se pretende establecer las bases de funcionamiento del modelo propugnado en el Capítulo 2 para el desarrollo de nuevos productos mediante la incorporación de un mecanismo de optimización basado en este tipo de algoritmos. De las distintas propuestas consideradas en dicho apartado, en el desarrollo de los distintos modelos se ha optado por utilizar un sistema de hormigas (SH) por la generalidad que supone la aplicación del mismo al ser considerado el progenitor de los demás estudios realizados en este ámbito.

En el problema planteado las posibles soluciones al mismo vienen establecidas por una combinación de las distintas características que se analizan en cada caso, de forma que éstas pueden representarse en un grafo como el que muestra la Figura 5.66., en la que se establecen todas las combinaciones entre cinco características alternativas a incorporar en un nuevo producto.

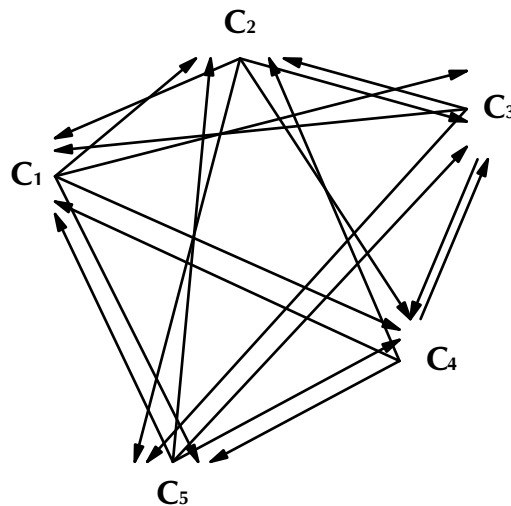


Figura 5.66.

La Figura anterior pone de manifiesto la similitud entre el problema así planteado y la representación de posibles recorridos a realizar por una colonia de hormigas reales, lo que permite proponer la resolución del mismo mediante la utilización de hormigas artificiales.

De acuerdo con el apartado 3.3.1., cada hormiga construirá su recorrido, estableciendo una posible solución al problema, partiendo de un punto aleatorio y eligiendo el siguiente punto del recorrido en función de una medida de deseabilidad del mismo. La elección entre los distintos puntos del recorrido vendrá determinada por la regla de transición de estados que dependerá de la información que exista en cada posible arco del recorrido.

En analogía con el problema plantado, cada hormiga construirá una posible solución al problema partiendo de la elección de una característica al azar, y eligiendo la siguiente característica, entre las que no han sido incorporadas a la solución, en función de una medida que represente la bondad de la misma.

El paso de una característica a otra representa la incorporación de la misma a la solución construida por cada hormiga, de forma que se establece como un arco en el recorrido, el cual tiene asociada una medida de deseabilidad que actúa como peso del mismo en el momento de proceder a elegir la siguiente característica que compone la solución.

La feromona o medida de la deseabilidad es obtenida a través de dos tipos de información contenidos en cada arco: la información heurística y la información memorística.

La información heurística, representativa de la medida del coste (o bondad) de cada arco, se calcula antes de comenzar el algoritmo y es mantenida a lo largo de la ejecución del mismo. En el modelo planteado, esta información representa el conocimiento que se tiene tanto sobre las variables que componen la información exógena obtenida de los clientes como por las variables representativas de la información endógena proporcionada por los ingenieros de la empresa, relativa a cada característica o punto del recorrido.

La información memorística vendrá determinada por la cantidad de feromona depositada en cada arco y será modificada durante la ejecución del algoritmo en función de la regla de actualización de la feromona. En el modelo planteado como sistema de hormigas, el rastro de feromona se modifica en función de las soluciones aportadas en cada iteración y de la bondad que representen las mismas. La medida de la bondad de las soluciones se realizará en los mismos términos aplicados en el caso de la resolución mediante algoritmos genéticos en el momento de evaluar las soluciones aportadas por los distintos individuos.

De acuerdo con las consideraciones anteriores, la implementación de un sistema de hormigas para la resolución del modelo de desarrollo de nuevos productos planteado en la presente Memoria, precisa establecer los mecanismos principales para el funcionamiento del mismo: la regla de transición de estados y la regla de actualización de feromona.

La regla de transición de estados en un sistema de hormigas se denomina regla proporcional-aleatoria y establece la probabilidad de que una hormiga situada en el nodo  $r$  elija para moverse un  $s$  que no haya sido visitado, es decir, la probabilidad de que, partiendo de una determinada característica, se elija otra característica que no se

encuentre en la solución construida por la hormiga hasta este momento, y que viene dada por la siguiente expresión:

$$p_k(r, s) = \begin{cases} \frac{[\tau(r, s)]^\alpha \cdot [\eta(r, s)]^\beta}{\sum_{u \in J_k(r)} [\tau(r, u)]^\alpha \cdot [\eta(r, u)]^\beta}, & \text{si } s \in J_k(r) \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde  $\tau(r,s)$  representa el nivel de feromona del arco  $(r,s)$ ,  $\eta(r,s)$  la información heurística,  $J_k(r, s)$  el conjunto de los nodos alcanzables desde el nodo  $r$  no visitados aún por la hormiga  $k$  (para hacer la solución factible) y  $\alpha$  y  $\beta$  son parámetros que determinan la importancia relativa de la feromona en relación con la información heurística

La regla de transición de estados precisa establecer una medida de la información heurística así como de los niveles de feromona existentes en cada arco. En su aplicación al modelo planteado, estos parámetros son determinados de la siguiente forma:

#### **a. Información heurística**

La información heurística vendrá establecida a priori por la medida de la bondad que representa en una solución el hecho de que se incorpore una determinada característica.

En el modelo desarrollado, cada característica se ve afectada en primer término por su relación con los requerimientos solicitados por los clientes en el nuevo producto, es decir, la información exógena o voz del cliente. En segundo término, la información endógena o información proporcionada por los ingenieros de la empresa, afecta a la medida de la deseabilidad a priori de cada característica. Por tanto, y en consonancia con las consideraciones realizadas en el apartado 2.1. del presente Capítulo, el proceso de recopilación, procesamiento y normalización de ambos tipos de información constituye el paso previo al desarrollo del modelo y que en el caso del presente apartado, constituirá la información heurística con la que operará el sistema de hormigas.

En el apartado 5.2.1.1. se ha analizado el tratamiento de la información exógena, determinando la medida de las variables que incorporan información relativa a los requerimientos de los clientes, es decir, la importancia, la evaluación competitiva y la correlación entre los mismos. Por su parte, en el apartado 5.2.1.2. se han establecido las premisas que permiten establecer una valuación de la información endógena, en concreto, la importancia, la evaluación comparativa y la correlación entre características. En el desarrollo de los modelos basados en sistemas de hormigas el tratamiento de

dicha información es similar al expuesto en dichos apartados, no siendo preciso realizar ninguna consideración adicional.

La información heurística estará compuesta, para cada característica, por la agregación de la información disponible respecto a la misma. El proceso de agregación es similar al analizado en el apartado 5.2.1.3.3. para el caso de la medida de la bondad de las soluciones proporcionada por los algoritmos genéticos y el resultado permitirá establecer una medida a priori de la deseabilidad que presenta cada característica para ser incluida en la solución.

#### **b. Nivel de feromona**

La regla de transición de estados precisa de la información sobre los niveles de feromona de cada arco que, en el caso del modelo de desarrollo servirán para determinar la probabilidad de que una hormiga que contiene en su solución varias características, elija una nueva característica frente al resto de características que no se encuentran en dicha solución.

En principio, los niveles de feromona son idénticos para cada arco, es decir se establece un nivel de feromona inicial igual para cada característica. Durante la ejecución del algoritmo, y en función del número de hormigas que incluyan una característica en su solución (que visiten el arco) y de la bondad de las soluciones que generen cada una de ellas, mediante la regla de actualización de la feromona, se establece la aportación que cada hormiga realiza al nivel de feromona de cada arco.

En los sistemas de hormigas la actualización de la feromona se realiza mediante una regla de actualización global que modifica los niveles de feromona en dos formas: evaporando feromona de los arcos que no fueron visitados por ninguna hormiga en cada iteración (características poco prometedoras) e incrementando la feromona de los arcos visitados en función de la bondad de la solución que generó la hormiga que los visitó (características prometedoras).

La expresión de dicha regla es la siguiente:

$$\tau(r, s) = \underbrace{(1 - \rho) \cdot \tau(r, s)}_{\text{EVAPORACIÓN}} + \underbrace{\sum_{k=1}^H \Delta \tau_k(r, s)}_{\text{APORTE}}$$

donde  $\rho$  representa el parámetro de evaporación de feromona,  $H$  el número de hormigas de la iteración y  $\Delta \tau_k(r, s)$  viene dado por:

$$\Delta\tau_k(r, s) = \begin{cases} f(S_k), & \text{si la hormiga } k \text{ ha visitado el arco } (r, s) \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

siendo  $f(S_k)$  la cantidad de feromona directamente proporcional a la bondad de la solución generada por la hormiga  $k$ .

Los sistemas de hormigas se caracterizan, a diferencia de otros algoritmos ACO, en que todas las hormigas aportan feromona a los arcos que constituyen su solución, de forma que todas aquellas características que forman parte de la solución proporcionada por alguna hormiga, reciben feromona de forma proporcional a la bondad de la solución en la que se encuentran incluidas.

Una vez analizado de forma genérica el funcionamiento del sistema de hormigas en su aplicación en el modelo de desarrollo de nuevos productos propugnado en la presente Memoria, en los apartados siguientes se establece la posibilidad de aplicar los mismos en las situaciones planteadas en apartados anteriores referentes a la disponibilidad de la información, es decir, en ambientes de certeza y en ambientes de incertidumbre, aplicando en este último caso un modelo basado en el principio de extensión y un modelo basado en la representación mediante 2-tuplas. Asimismo, se ha analizado la utilidad del modelo en los dos ámbitos de decisión afrontados mediante el concurso de algoritmos genéticos, es decir, en situaciones presididas por la existencia de un volumen de recursos limitado o restricción presupuestaria y situaciones en las que es posible optar por características sustitutivas entre sí en el desarrollo del nuevo producto.

### 5.3.1. En condiciones de certidumbre: El modelo SH-DNP-Crisp

El modelo denominado SH-DNP-Crisp pretende servir de soporte a la toma de decisiones en aquellos casos en los que la información disponible acerca de las variables que afectan a la decisión sobre las características a incorporar en un nuevo producto se encuentre expresada en términos ciertos, de forma que sea posible proceder a la optimización de dicha información, teniendo en cuenta las posibles relaciones entre las variables relevantes, utilizando la metodología propia de los algoritmos basados en sistemas de hormigas.

Este modelo se desarrolla en los mismos términos en los que se implementó el modelo AG-DNP-Crisp, de forma que el tratamiento de la información tanto exógena como endógena, así como las distintas variables que proporcionan la información relevante en el proceso de decisión, son similares a los expuestos en ese caso, razón por la



cual no se precisa realizar ninguna consideración adicional a las expuestas en los apartados 5.2.1.1. y 5.2.1.2.

Por otra parte, a efectos ilustrativos, los datos relativos al ejemplo de aplicación práctica se han mantenido en el modelo SH-DNP-Crisp, con la finalidad de poder establecer conclusiones sobre la utilidad de los distintos algoritmos de optimización en los mismos términos.

#### **5.3.1.1. Aplicación del modelo SH-DNP-Crisp a situaciones de restricción presupuestaria**

La consideración de la existencia de un volumen de recursos limitado para afrontar el desarrollo de un nuevo producto y establecer la elección entre las distintas características que se deben incorporar en el mismo sujetas a dicha restricción, se puede plantear como un problema de asignación de un determinado importe de recursos a una serie de acciones a desplegar.

La implementación del modelo en estas circunstancias precisa establecer el sistema de inicialización de los recorridos, la regla de transición de estados y la regla de actualización de feromona, que se pasan a exponer en los apartados siguientes.

##### **5.3.1.1.1. Fase de inicialización**

La selección del punto inicial del recorrido se realiza de forma aleatoria, es decir, cada hormiga elige para construir su solución una característica al azar que sirve de punto de partida para establecer el resto de características que constituyen su solución.

La elección aleatoria de una característica como punto inicial del recorrido puede plantear problemas de reiteración en los recorridos ya que la elección de la siguiente característica, realizada mediante la regla de transición de estados, provoca que todas las hormigas situadas en el mismo punto de inicio construyan en la primera iteración la misma solución. Esto es debido a que la transición se realiza mediante una regla proporcional-aleatoria, basada en la información heurística (que nunca se modifica) y en el nivel de feromona de cada característica, que en la primera iteración es igual para cada una de ellas. Sin embargo, el funcionamiento de los sistemas de hormigas, y de todos los algoritmos ACO en general, se plantea para un número suficientemente elevado de agentes e iteraciones que hagan irrelevante el problema anteriormente planteado. No obstante, si se considera preciso es posible establecer un mecanismo que provoque una inicialización dirigida en el que el mismo número de hormigas partan de la misma característica inicial para construir la solución

Si se parte de un volumen de recursos especificado a priori, la combinación de características que constituye cada solución estará limitada al cumplimiento de dicho presupuesto, de forma que la construcción de la solución por parte de cada hormiga se irá realizando incorporando características, mediante la aplicación de la regla de transición de estados, siempre que la inclusión de una nueva característica a la solución cumpla con la restricción presupuestaria.

De acuerdo con lo anterior, en la construcción de cada solución será preciso mantener el cumplimiento del presupuesto, de forma que en el momento de elegir la primera característica se debe comprobar que el coste de desarrollo de la misma cumpla con el presupuesto estipulado. Asimismo, en el momento de optar por la siguiente característica, proporcionada por la regla de transición, se debe comprobar nuevamente el cumplimiento del presupuesto, de forma que el recorrido se limita a la combinación de características que cumplan el mismo.

A efectos de analizar la repercusión de la existencia de una restricción presupuestaria, supóngase que de acuerdo con la regla de transición el recorrido a realizar por un agente en una determinada iteración, para una combinación de 5 posibles características y entendiendo como medida de la deseabilidad de una característica la distancia que la separa de la anterior, sea el que muestra la Figura 5.67.

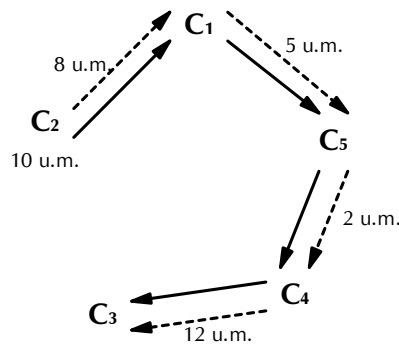


Figura 5.67.

En la situación anterior, en la que las líneas punteadas representan el coste de incorporar cada característica a la solución, si se establece una restricción presupuestaria de 20 u.m., el recorrido realizado por la hormiga en ese caso estaría compuesto solamente por las características 2 y 1, ya que la incorporación de la siguiente característica establecida por la regla de transición, es decir la característica 5, supondría una solución que no sería realizable desde el punto de vista económico.

No obstante, se podría establecer un mecanismo que permitiera analizar el resto de características que permitirían cumplir el presupuesto, en este caso la característica 4 pero, con la finalidad de mantener los criterios establecidos para el funcionamiento del modelo AG-DNP-Crisp, se ha optado por no considerar dicha posibilidad.

Asimismo, y de acuerdo con el razonamiento expuesto en el apartado 5.2.1.3.2.1. al analizar el tratamiento de individuos no factibles en los algoritmos genéticos, no se considera la posibilidad de desarrollo parcial de las características, de forma que cuando la inclusión de una característica en el recorrido representativo de la solución suponga superar el presupuesto, se opta por eliminar dicha característica del recorrido realizado por el agente de que se trate.

El código para implementar el proceso de inicialización del sistema de hormigas es el que se recoge en el Cuadro 5.63.

```

*****
'Propósito:  Operador de inicialización
'Entradas:  Número de hormigas
            Número de características
            Coste de las características
            Restricción presupuestaria
'Devuelve:  Punto de inicio de cada recorrido
*****

Para h = 1 hasta Número_de_hormigas hacer
1.  Elegir una característica al azar
2.  Comprobar si el coste de desarrollo de dicha característica cumple la restricción
    presupuestaria
    - Si la cumple, considerar dicha característica como el punto de inicio
    - Si no la cumple, volver la paso 1
3.  Anotar la característica en la lista de nodos visitados por la hormiga h
    
```

**Cuadro 5.63.**

Asimismo, en el momento de iniciar el sistema de hormigas es preciso incorporar la feromona inicial a cada arco, es decir, a cada posible combinación de características. En general, el nivel de feromona inicial es el mismo en cada arco y la codificación del proceso es la que se ha establecido de forma genérica en el apartado 3.1. del Capítulo 3.

**5.3.1.1.2. Regla de transición de estados**

Una vez establecido el punto de partida del recorrido para cada hormiga y evaluado el cumplimiento del presupuesto, el paso siguiente consiste en establecer, mediante la regla de transición de estados, la probabilidad de incorporar a la solución el resto de características.

Este procedimiento facilita construir un recorrido completo para cada hormiga con el único límite de la restricción presupuestaria. En consecuencia, se deberá aplicar de forma consecutiva la regla de transición de estados hasta que la incorporación de una característica exceda el volumen de recursos disponibles en cuyo caso se establece que la hormiga ha completado su recorrido y facilitado, en consecuencia, una posible solución al problema.

El cálculo de la probabilidad asociada a cada característica será función de la información heurística y del nivel de feromona que, para la primera iteración, será el mismo en todos los casos.

En el cálculo de la información heurística se incorporará la medida de las variables analizadas con anterioridad que, de acuerdo con lo expuesto en el apartado 5.2.1.3.3. estará compuesta por la siguiente información normalizada: importancia de las características, situación actual de las características, dificultad técnica de las características e información sobre los requerimientos con los que se relaciona cada característica.

De esta forma, el numerador de la probabilidad de transición de la característica que constituye el punto de partida ( $r$ ) hacia el resto de características disponibles ( $s$ ) se efectuará teniendo en consideración los valores de las anteriores variables de forma específica para cada característica  $[\eta(r, s)]$  y el valor de la feromona inicial  $[\tau(r, s)]$ .

El denominador de la probabilidad de transición  $\sum_{u \in J_k(r)} [\tau(r, u)] \cdot [\eta(r, u)]$  estará formado por la suma de los valores de todas características que no representen el punto de partida de la solución que se evalúa y que constituyen en consecuencia los posibles nodos por visitar para cada hormiga.

Sin embargo, en el modelo desarrollado si bien la correlación existente entre las características se puede considerar información heurística en el sentido que no se modifica durante la ejecución del algoritmo, su inclusión en la medida de la probabilidad de transición dependerá de que cada par de características se encuentren o no en la solución aportada por cada hormiga.

De acuerdo con lo anterior, en el cálculo de la probabilidad de transición se deberá incorporar dentro de la información heurística, la relación de cada característica con el resto de características que componen hasta el momento la solución que se está construyendo. En el momento inicial sólo será preciso agregar la correlación que tiene cada característica con el punto inicial del recorrido de cada hormiga, pero con poste-

rioridad, a medida que cada hormiga va construyendo su solución, tanto el numerador como el denominador deberán verse afectados por las posibles correlaciones que se establecen entre la “nueva” característica y las características que se encuentran en la lista de los nodos visitados por cada hormiga.

El cálculo de la probabilidad de transición puede establecerse en los términos que se recogen en el Cuadro 5.64.

*****	
'Propósito:	Regla de transición de estados
'Entradas:	Importancia de las características Situación actual de las características Dificultad técnica de las características Información de los requerimientos para cada característica Correlación entre características Matriz de feromona inicial Característica en la que se encuentra la hormiga en su recorrido
'Devuelve:	Probabilidad de transición desde una característica al resto
*****	
<i>Para h = 1 hasta Número_de_hormigas hacer</i>	
<i>Para m = 1 hasta Número_de_características hacer</i>	
1.	Si la característica m se encuentra en la lista de nodos visitados por la hormiga h, entonces continuar con la siguiente característica
2.	Si la característica m no se encuentra en la lista de nodos visitados por la hormiga h, entonces
	Calcular el numerador de la probabilidad de transición:
-	Determinar la información heurística correspondiente a la característica m
-	Añadir la información relativa a la correlación entre la característica m y el resto de características incluidas en la lista de nodos visitados por la hormiga h
-	Multiplicar por la feromona representativa de la transición de la característica en la que se encuentra la hormiga y la característica m
	Calcular el denominador de la probabilidad de transición: agregar la información obtenida en los puntos anteriores para todas las características no incluidas en la lista de nodos visitados por la hormiga h
	Determinar el cociente que representa la probabilidad de transición

**Cuadro 5.64.**

El cálculo de la probabilidad de transición evaluado en los términos anteriores establece una medida de la “bondad” de las características pendientes de visitar en términos positivos, es decir, la característica con mayor probabilidad será deseada frente al resto de características. Sin embargo, la posibilidad de que la hormiga incorpore dicha característica al recorrido representativo de su solución al problema dependerá del cumplimiento de la restricción presupuestaria. En consecuencia, con anterioridad a la incorporación de la característica con mayor probabilidad al listado de nodos visitados por cada hormiga será preciso realizar la comprobación del incremento que supone en el coste de la solución dicha incorporación.

El código correspondiente a las consideraciones anteriores se recoge en el Cuadro 5.65.

```
*****
'Propósito:  Completar para cada hormiga el recorrido
'Entradas:   Lista de nodos visitados por cada hormiga
              Probabilidad de transición para cada característica
              Coste de las características
              Restricción presupuestaria
'Devuelve:   Característica que representa el siguiente nodo a visitar
*****

Para h = 1 hasta Número_de_hormigas hacer
  Para m = 1 hasta Número_de_características hacer
    1.  Determinar la característica m que representa el valor máximo de las
        probabilidades de transición desde el nodo actual (característica) y no
        se encuentra en la lista de nodos visitados por la hormiga h
    2.  Situar la hormiga h en el nodo m
    3.  Evaluar el coste de la solución construida hasta el momento por la
        hormiga h y compararlo con la restricción presupuestaria de forma
        que:
        - Si cumple la restricción presupuestaria, agregar la característica m
          a la lista de nodos visitados por la hormiga h y continuar
        - Si no cumple la restricción presupuestaria, no incluir la caracterís-
          tica m en la lista de nodos visitados y fin del recorrido de la hormi-
          ga h

  / Fase en la que cada hormiga construye su solución /
```

**Cuadro 5.65.**

Este proceso de codificación recoge la consideración anteriormente realizada acerca de que si la característica elegida, en función de la probabilidad de transición, para ser considerada la siguiente visita no cumple la restricción presupuestaria, se da por concluido el recorrido de la hormiga, no considerando la posibilidad de continuar analizando el resto de características.

#### 5.3.1.1.3. Regla de actualización de feromona

La actualización de los niveles de feromona en los sistemas de hormigas se realiza mediante una regla de actualización global en la que todas las hormigas aportan feromona a los arcos que componen sus soluciones, en función de la bondad de éstas, produciéndose evaporación en aquellos arcos que no han sido visitados por ninguna hormiga.

En el modelo construido, los niveles de feromona se actualizarán evaporando feromona de aquellas características que no forman parte de ninguna solución en cada iteración y aportando feromona a las características que compongan las soluciones realizadas por cada hormiga en cada iteración, teniendo en consideración la bondad que representa cada una de ellas en relación al resto de soluciones. La actualización de feromona precisa, por tanto, de una evaluación de la bondad que representa la solución aportada por cada hormiga. La medida de la adecuación dependerá de los nodos (características) que componen la lista de nodos visitados por cada hormiga en su recorrido para la construcción de la solución.

De forma análoga al cálculo de la bondad de las soluciones proporcionadas por los individuos en la ejecución de los algoritmos genéticos en los modelos anteriores, la evaluación de la adecuación vendrá dada por la suma de la información heurística asociada a cada característica así como por la incorporación de las correlaciones existentes entre todas las características incluidas en cada solución.

El proceso de cálculo de la bondad de las soluciones y su acumulación para determinar la adecuación total y establecer la bondad relativa se recoge en el Cuadro 5.66. Dicho proceso permitirá conocer la proporción en que cada hormiga afectará al proceso de actualización de los niveles de feromona.

En el modelo desarrollado el aporte de feromona  $f(S_k)$  es función de la medida de la bondad relativa de cada solución y de la contribución de cada característica, mediante su adecuación particular, a dicha bondad.

De esta forma, y dado que la medida de la bondad de cada característica vendrá dada por la información heurística proporcionada por la misma, el proceso de cálculo de la feromona que recibe cada característica  $\Delta \tau_k(r, s)$ , puede realizarse mediante el código que se recoge en el Cuadro 5.67.

```

*****
'Propósito:  Calcular la bondad de las soluciones
'Entradas:   Información heurística
             Lista de nodos visitados por cada hormiga
'Devuelve:   Bondad de la solución aportada por cada hormiga en relación al resto
*****

1. Para h = 1 hasta Número_de_hormigas hacer
    Para m = 1 hasta Número_de_características hacer
        Comprobar si la característica m se encuentra en la lista de nodos visitados
        por la hormiga h
        - Si se encuentra:
            Agregar la información de la bondad de la característica m a la bondad
            de la solución aportada por la hormiga h
            Agregar la correlación de la característica m con el resto de caracterís-
            ticas incluidas en la lista de nodos visitados por la hormiga h a la bon-
            dad de la solución aportada por la hormiga h
        - Si no se encuentra, continuar con la siguiente característica
    / Fase en la que se calcula la bondad de cada solución /

2. Para h = 1 hasta Número_de_hormigas hacer
    Acumular la bondad de la solución de la hormiga h calculada en la fase anterior pa-
    ra determinar la bondad total de las soluciones obtenidas en la iteración actual
    / Fase en la que se calcula la bondad total de la iteración /

3. Para h = 1 hasta Número_de_hormigas hacer
    Dividir la bondad de la solución de la hormiga h calculada en el punto 1 entre la
    bondad total de la iteración calculada en el punto 2
    / Fase en la que se calcula la bondad relativa de cada solución /
    
```

**Cuadro 5.66.**

```

*****
'Propósito:  Calcular el aporte de feromona
'Entradas:   Lista de nodos visitados por cada hormiga
             Bondad relativa de cada solución
             Bondad de cada característica (información heurística)
'Devuelve:   Nivel de feromona aportado para cada característica
*****

Para h = 1 hasta Número_de_hormigas hacer
    Para m = 1 hasta Número_de_características hacer
        Comprobar si la característica m se encuentra en la lista de nodos visitados
        por la hormiga h
        - Si no se encuentra, continuar con la siguiente característica
    
```



<ul style="list-style-type: none"> <li>- Si se encuentra:                     <ul style="list-style-type: none"> <li>Localizar la bondad relativa de cada solución</li> <li>Localizar la bondad de la característica m</li> <li>Determinar el nivel de feromona que se aporta a la característica m en función de los datos anteriores                             <ul style="list-style-type: none"> <li>Agregar para cada característica la feromona que se aporta por todas las hormigas</li> </ul> </li> </ul> </li> </ul>
--

**Cuadro 5.67.**

En cuanto al proceso de evaporación de feromona, éste se produce en aquellos nodos que no han sido visitados por ninguna hormiga en su recorrido para construir la solución, es decir, en aquellas características que no han sido incorporadas a ninguna solución. El cálculo de la cantidad evaporada de feromona depende del nivel de feromona de cada arco  $\tau(r, s)$  y del parámetro de evaporación de feromona ( $\rho$ ). En la primera iteración, el nivel de feromona inicial en el modelo desarrollado se considera un parámetro a definir por el usuario, si bien es habitual que dicho nivel sea similar para todos los arcos. En las sucesivas iteraciones, el nivel de feromona utilizado para evaluar la evaporación que se produce dependerá de los resultados obtenidos en las iteraciones anteriores. Por su parte, el parámetro que define la evaporación de feromona es asimismo incorporado por el usuario final antes de proceder a la ejecución del algoritmo.

El proceso de cálculo del nivel de feromona que se evapora en cada iteración se muestra en el Cuadro 5.68.

<pre> ***** 'Propósito:  Calcular la evaporación de feromona 'Entradas:   Lista de nodos visitados por cada hormiga               Nivel de feromona actual de cada nodo               Parámetro de evaporación de feromona 'Devuelve:  Nivel de feromona evaporado en cada característica *****  Para h = 1 hasta Número_de_hormigas hacer   Para m = 1 hasta Número_de_características hacer     Comprobar si la característica m se encuentra en la lista de nodos visitados     por la hormiga h       - Si se encuentra, continuar con la siguiente característica       - Si no se encuentra, determinar la evaporación que se produce en la         característica m <math>(1 - \rho) \cdot \tau(r, s)</math>     Agregar para cada característica la evaporación debida a cada hormiga         </pre>
--

**Cuadro 5.68.**

Los procedimientos señalados en los Cuadros 5.67. y 5.68. permiten actualizar los niveles de feromona, sin más que considerar la aportación que realiza cada hormiga en función de su recorrido calculado en el primer proceso, y los cálculos derivados de la evaporación establecidos en el segundo proceso.

Este procedimiento se puede implementar de acuerdo con el código recogido en el Cuadro 5.69.

```
*****
'Propósito: Actualización de la feromona
'Entradas: Aporte de feromona para cada nodo o característica
           Evaporación de feromona para cada nodo o característica
'Devuelve: Nivel de feromona de todos los nodos tras cada iteración
*****

Para m = 1 hasta Número_de_características hacer
    Localizar el nivel de feromona actual
    Agregar el aporte de feromona
    Disminuir en el nivel de evaporación
```

**Cuadro 5.69.**

#### 5.3.1.1.4. Parámetros de funcionamiento del sistema de hormigas

La operativa del sistema de hormigas precisa establecer una serie de parámetros necesarios para la ejecución del algoritmo. Si bien existen estudios que permiten determinar los valores habituales, dado que el funcionamiento general del algoritmo es independiente de dichos valores, en el modelo desarrollado se ha optado por dejar libertad al usuario final para introducir los valores de los parámetros más generales como son el número de hormigas, el número de iteraciones, el nivel de feromona inicial y el parámetro de evaporación de feromona.

No obstante, dada la importancia de los niveles de feromona en el cálculo de la probabilidad de transición, la evaluación de este parámetro es la más relevante para el buen funcionamiento del sistema, ya que un nivel sobrevalorado de feromona y para determinados arcos provoca que el mismo sea recogido en todas las soluciones.

La pantalla de recogida de información del modelo SH-DNP-Crisp se muestra en la Figura 5.68.

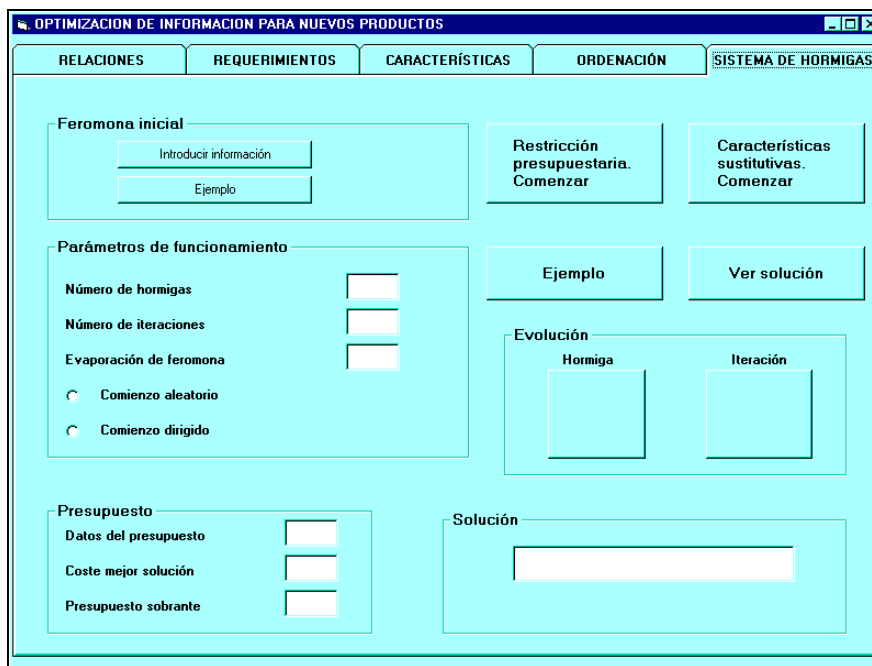


Figura 5.68.

Como se puede comprobar en la Figura anterior, en el caso del modelo SH-DNP-Crisp en su aplicación al caso actual se solicita al usuario final que incorpore asimismo la información relativa a la restricción presupuestaria que tiene establecida la empresa para el desarrollo del nuevo producto en términos ciertos.

Asimismo, es posible optar por un inicio dirigido en cada iteración para el número total de hormigas, recomendable en el caso de que se trabaje con un número poco elevado de agentes. En el resto de los casos, y siguiendo el procedimiento general de funcionamiento de este tipo de algoritmos, se permite que la selección del nodo inicial de cada hormiga se produzca de forma aleatoria, ya que los efectos perversos que pueda tener la utilización de una visita inicial al azar se ve subsanada por el número de agentes que actúan en todas las iteraciones del funcionamiento.

A efectos ilustrativos del funcionamiento del sistema de hormigas se plantea un ejemplo aplicando como valores de los parámetros los siguientes:

- Número de hormigas: 50
- Número de iteraciones: 10
- Parámetro de evaporación de feromona: 0'5
- Restricción presupuestaria: 2.200 u.m.

La evolución de la adecuación de las soluciones obtenidas durante las sucesivas iteraciones, así como la mejor combinación obtenida mediante la evaluación que se realiza en cada iteración, se muestra en la pantalla que recoge la Figura 5.69., en la

que se puede comprobar que la mejor solución coincide con la combinación más repetida, es decir, con el recorrido realizado por un mayor número de hormigas.

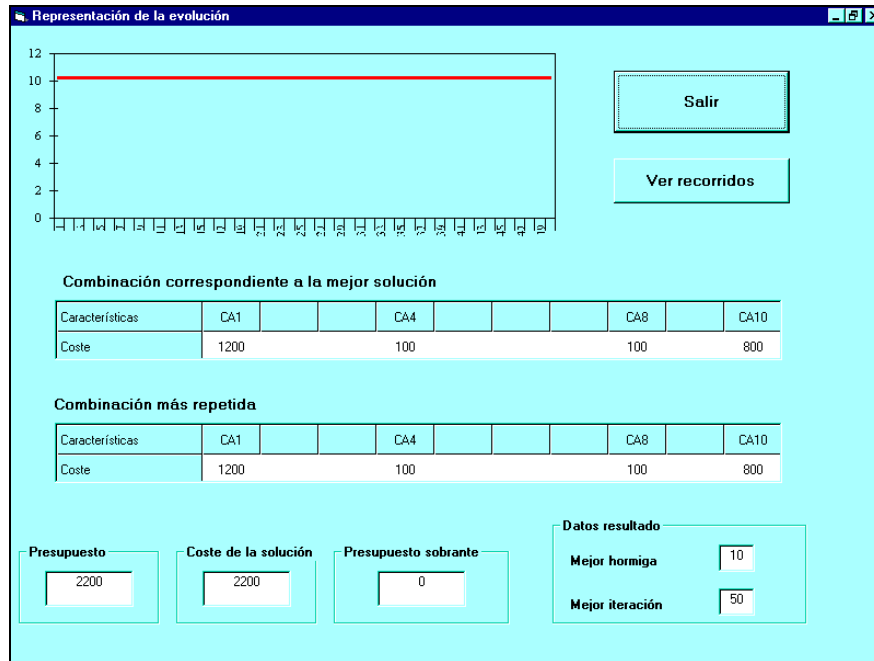


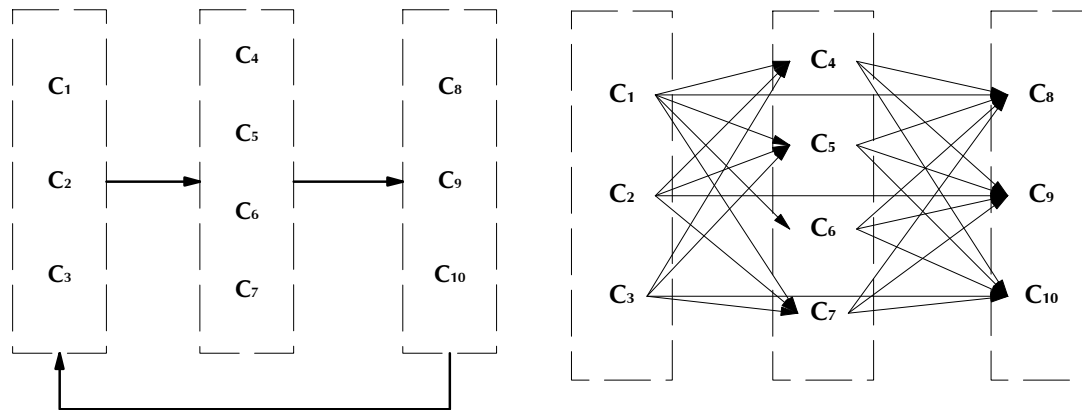
Figura 5.69.

### 5.3.1.2. Aplicación del modelo SH-DNP-Crisp a situaciones de características sustitutivas

La aplicación del modelo de desarrollo de nuevos productos con la metodología de los algoritmos basados en colonias de hormigas en situaciones en las que se contempla la posibilidad de optar entre distintas características que se consideran sustitutivas entre sí, se puede afrontar mediante el modelo SH-DNP-Crisp, si bien será preciso realizar ciertas modificaciones.

La existencia de grupos de características sustitutivas plantea la necesidad de incorporar restricciones para que los recorridos realizados por cada hormiga en cada iteración no incluyan dos nodos correspondientes al mismo grupo de características, siendo necesaria la incorporación de una característica de cada uno de los grupos en cada recorrido.

Las consideraciones anteriores ponen de manifiesto que los posibles recorridos a realizar por cada hormiga en cada iteración quedan restringidos, para el ejemplo de aplicación práctica y supuestos los mismos grupos de características que en casos anteriores, a los que recoge la Figura 5.70. En dicha Figura, por simplificar la representación, se recogen los posibles recorridos en la situación hipotética de que éste se produzca por orden de grupos, si bien dependerá del punto de inicio de cada hormiga.



**Figura 5.70.**

De forma similar al apartado anterior a continuación se describen los principales parámetros del modelo construido en este ámbito de decisión.

#### **A. Fase de inicialización**

La selección del nodo inicial, es decir, la elección de la primera característica que se recoge en la solución generada por cada hormiga, se realiza de forma aleatoria, de acuerdo con las consideraciones efectuadas en el apartado 3.1.1.1. del presente Capítulo. Asimismo, el usuario final puede optar por un comienzo dirigido, especialmente útil en aquellas ejecuciones con un número significativamente pequeño de agentes.

La operativa general del sistema de hormigas implica que una vez determinado el punto de inicio y comprobadas las restricciones existentes en el caso de estudio, dicho punto debe ser incluido en la lista de los nodos visitados por cada hormiga. En el caso de existencia de características sustitutivas, la incorporación a la solución de una característica implica que en las sucesivas transiciones en el recorrido de una hormiga  $h$  el resto de características comprendidas en el mismo grupo deben ser desechadas. La solución más eficaz consiste en, una vez incorporada una característica a la solución de la hormiga  $h$ , incluir en la lista de nodos visitados todas las características correspondientes a su mismo grupo.

En las sucesivas transiciones se irán estableciendo los puntos en el recorrido de cada hormiga, de forma que la elección de una nueva característica para formar parte de la solución repercute en la incorporación de todas las características de su grupo en la lista de nodos visitados por dicha hormiga.

El proceso de codificación para proceder a la inicialización, considerando los distintos grupos de características, se recoge en el Cuadro 5.70.

*****	
'Propósito:	Operador de inicialización
'Entradas:	Número de hormigas Número de grupos de características sustitutivas Características contenidas en cada grupo
'Devuelve:	Punto de inicio de cada recorrido
*****	
<i>Para h = 1 hasta Número_de_hormigas hacer</i>	
1.	Elegir una característica al azar
2.	Comprobar el grupo de características en que se encuentra
3.	Anotar todas las características del grupo correspondiente en la lista de nodos visitados por la hormiga h

**Cuadro 5.70.**

**B. Regla de transición de estados**

La aplicación de la regla de transición analizada en el modelo SH-DNP-Crisp para el caso de situaciones con restricciones presupuestarias es similar al caso que se analiza en el presente apartado.

En efecto, la inclusión de todos los nodos correspondientes al grupo de la característica considerada como punto de inicio en la lista de nodos visitados por cada hormiga permite la utilización de la regla de transición de estados sin ningún tipo de consideración adicional. El proceso de codificación recogido el Cuadro 5.64., realizado con el propósito de establecer la probabilidad de transición, es aplicable en el caso de características sustitutivas sin ningún tipo de modificación. Asimismo, y dado que no existe ningún otro tipo de restricción, dicho proceso se repite de forma consecutiva hasta que cada hormiga construya su solución, con lo cual no es preciso incluir la codificación recogida en el Cuadro 5.65. cuyo objetivo venía establecido por la existencia de la restricción presupuestaria.

**C. Regla de actualización de feromona**

El proceso de actualización de los niveles de feromona mediante los mecanismos de aporte y evaporación en función de las características incluidas en las soluciones aportadas por cada hormiga en cada iteración y la bondad de las mismas, es idéntico al analizado en el punto 5.3.1.1.3., no precisando ninguna consideración adicional a las realizadas en el mismo.

Sin embargo, la variable coste a la que hace referencia la anterior aplicación del modelo SH-DNP-Crisp, al no considerarse como una restricción, se ha incorporado al modelo como clave para establecer la medida de la bondad de cada solución. En este sentido, se ha operado de forma similar a la selección del individuo elitista en el caso de aplicación de algoritmos genéticos, de forma que una solución será “preferida” a otra y, por tanto, tendrá mayor bondad siempre que el incremento que produzca en la adecuación el recorrido realizado por una hormiga sea superior al incremento que produzca en la necesidad de recursos para proceder a desarrollar las características que se incluyen su solución.

El Cuadro 5.71. recoge el código necesario para proceder a establecer la mejor solución en cada iteración.

```

*****
'Propósito:  Calcular la bondad de las soluciones
'Entradas:   Bondad de la mejor solución hasta el momento
             Coste de la mejor solución hasta el momento
             Bondad de las soluciones actuales
             Coste de las soluciones actuales
'Devuelve:  Valores de los incrementos en costes y en adecuación en relación a la mejor
            solución aportada hasta el momento
*****

Para h = 1 hasta Número_de_hormigas hacer
    Para h' = 1 hasta Número_de_hormigas hacer
1.    Determinar el incremento en el coste y el incremento en la adecuación de los recorridos realizados por h y h'
2.    Comparar ambos incrementos, de forma que:
        - Si es mayor el incremento en la adecuación de h respecto h' que el incremento en el coste, seleccionar h como mejor solución
        - Si es menor, continuar con h' como mejor solución
    
```

**Cuadro 5.71.**

#### **D. Parámetros de funcionamiento del sistema de hormigas**

Los parámetros para el funcionamiento del modelo SH-DNP-Crisp son similares a los considerados en el caso anterior. Sin embargo, debido a las peculiaridades de aplicación del modelo, en primer término será preciso introducir la información relativa a los diferentes grupos de características sustitutivas, de forma que la pantalla de la

Figura 5.71. recoge esta información para el ejemplo numérico que se está desarrollando.

Figura 5.71.

La selección de los grupos anteriores, para unos parámetros similares a los utilizados con anterioridad, produce una evolución y un resultado como los recogidos en la pantalla de la Figura 5.72.

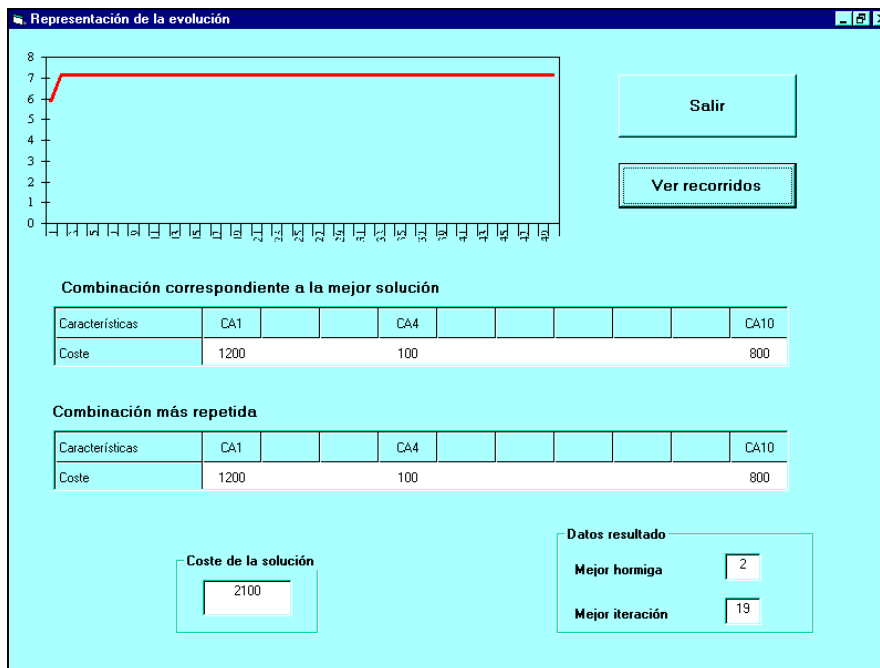


Figura 5.72.



De forma similar al modelo AG-DNP-Crisp, el gráfico de evolución de la Figura anterior representa las diferencias que se producen entre incrementos en coste y en adecuación, de ahí la tendencia del mismo.

### **5.3.2. En condiciones de incertidumbre**

En el apartado 2.2. del presente Capítulo se han establecido las consideraciones sobre la necesidad de adaptar el modelo desarrollado a fin de que resulte de utilidad en circunstancias en las que la información disponible con la que poder abordar la decisión sobre el desarrollo de un nuevo producto se encuentre expresada en términos inciertos.

La principal circunstancia que provoca esta adaptación viene dada por el hecho de que los valores de muchas variables del modelo son obtenidos a través de opiniones de personas, siendo en consecuencia más coherente procurar que dichas opiniones sean emitidas en lenguaje natural y no someter a las personas a la obligación de expresarse mediante valores numéricos.

Asimismo, se analizaron las posibilidades que presenta la Teoría de los Subconjuntos Borrosos para operar con variables lingüísticas, sin necesidad de transformarlas a valores numéricos para poder trabajar con ellas.

De acuerdo con lo anterior, en los apartados siguientes se pretende exponer las modificaciones introducidas en el modelo desarrollado con el concurso de sistemas de hormigas para poder aplicarlos en las circunstancias anteriores.

#### **5.3.2.1. Modelo basado en el Principio de Extensión: el modelo SH-DNP-Fuzzy**

Los modelos computacionales basados en el Principio de Extensión operan con las variables lingüísticas mediante las funciones de pertenencia asociadas a las etiquetas lingüísticas que representa a dichas variables.

En el apartado 5.2.2.1. se ha analizado con profundidad las posibilidades que presentan este tipo de modelos así como las distintas funciones de pertenencia que se pueden asociar a cada etiqueta. Asimismo, y en lo referente a la información propia del modelo de desarrollo de nuevos productos, en dicho apartado se han establecido las modificaciones precisas así como los datos propios del ejemplo que se está desarrollando a efectos ilustrativos, y que por homogeneidad servirá de base para el análisis del modelo SH-DNP-Fuzzy.

De acuerdo con lo anterior, en el presente apartado no se considera necesario reiterar el tratamiento al que es sometida la información disponible, de forma que a continuación se pasa a analizar las consideraciones propias de la construcción del modelo SH-DNP-Fuzzy basado en el principio de extensión en su aplicación a situaciones con volúmenes de recursos limitados, para con posterioridad dedicar un apartado a las justificaciones precisas en su aplicación al caso de características sustitutivas.

#### **5.3.2.1.1. Aplicación del modelo SH-DNP-Fuzzy a situaciones de restricción presupuestaria**

El volumen de recursos que la empresa desea aplicar al desarrollo de un nuevo es, a menudo, una cifra estimada o aproximada que sirve de referencia para establecer los límites entre los que el presupuesto se puede encontrar. No obstante, es posible que la empresa conozca de forma cierta la restricción presupuestaria que preside la decisión que se está abordando. Por estos motivos, en la aplicación del modelo SH-DNP-Fuzzy para afrontar la decisión del desarrollo de un nuevo producto en circunstancias de restricción presupuestaria de forma similar al modelo AG-DNP-Fuzzy, se ha establecido la posibilidad de incorporar la información sobre el presupuesto en términos ciertos o bien mediante un número borroso trapezoidal que represente el volumen máximo y mínimo de recursos así como los valores más posibles en los que se encuadra dicho presupuesto.

Las consideraciones sobre las modificaciones precisas en el modelo para su aplicación en estas circunstancias se referencian en los apartados siguientes.

##### **A. Fase de inicialización**

El proceso de selección del punto inicial del recorrido se realiza, de forma similar a los casos anteriores, mediante un proceso aleatorio. Sin embargo, y debido a la necesidad de cumplir la restricción presupuestaria, si bien es posible que el volumen de recursos disponibles siempre sea superior al coste de cada una de las características de forma individual, una vez seleccionado el punto de inicio es preciso comprobar que el coste de la característica elegida se encuentra dentro del presupuesto.

En el apartado anterior se sugirió la posibilidad de establecer el presupuesto bien en términos ciertos o bien con los valores asociados a un número borroso trapezoidal permitiendo mayor flexibilidad. En cualquier caso, la comparación del coste de desarrollo de la característica inicial con el presupuesto, implica la necesidad de establecer el centroide, bien de ambas variables o bien sólo del coste de desarrollo de la característica.

En cualquier caso, y debido a las implicaciones comentadas en la sección B del apartado 2.2.1.3. del presente Capítulo, se ha establecido el cálculo de la variable denominada “fiabilidad” que permite conocer la relación existente entre el presupuesto y el coste de cada solución. De esta forma, el modelo SH-DNP-Fuzzy establece si, en base al centroide, el coste se encuentra dentro del presupuesto pero a su vez establece el grado de fiabilidad con que se cumple dicho presupuesto, de forma que cuanto mayor sea el valor de dicha variable, mayor es la posibilidad de que realmente el volumen de recursos sea suficiente para atender el desarrollo de dicha característica.

El planteamiento anterior se deberá mantener durante la ejecución del algoritmo, de forma que cada vez que se incorpore una nueva característica a la solución generada (cada vez que una hormiga visite un nuevo nodo en su recorrido) se debe proceder a realizar la comparación anteriormente descrita y recalculer el valor del parámetro “fiabilidad”.

El código que desarrolla este procedimiento se muestra en el Cuadro 5.72.

```

*****
'Propósito:  Operador de inicialización
'Entradas:   Número de hormigas
             Número de características
             Coste de las características
             Restricción presupuestaria
'Devuelve:  Punto de inicio de cada recorrido
*****

Para h = 1 hasta Número_de_hormigas hacer
    Calcular el centroide del presupuesto
    Elegir una característica al azar y calcular el centroide de su coste
    Comparar si el coste de desarrollo de dicha característica con la restricción presupuestaria (sus centroides):
        - Si es inferior, considerar dicha característica como el punto de inicio
        - Si es superior, volver al paso 2
    Anotar la característica en la lista de nodos visitados por la hormiga h
    Determinar el nivel de fiabilidad
    
```

**Cuadro 5.72.**

Asimismo, en el momento de iniciar la ejecución del algoritmo será preciso incorporar la información sobre la feromona inicial en cada arco del recorrido que, como se comentó con anterioridad, puede establecerse de forma específica por cada usuario final en el momento de introducir los parámetros de funcionamiento del sistema.

## **B. Regla de transición de estados**

La aplicación de la regla de transición de estados permite incorporar a los recorridos realizados por cada hormiga en la construcción de su solución el resto de características significativas atendiendo a esta regla, siempre con el único requisito del cumplimiento de la restricción de recursos que preside su aplicación en este caso concreto.

La evaluación de la probabilidad de cada característica de constituir el siguiente nodo en el recorrido realizado por cada agente se realizará de forma similar al caso analizado en el modelo SH-DNP-Crisp, sin más que considerar la matemática propia de los números borrosos trapezoidales ya que la información disponible se encuentra expresada en estos términos. Asimismo, la incorporación de una característica en base a su mayor probabilidad de transición está sujeta al cumplimiento del presupuesto, siendo preciso que una vez determinada ésta se compruebe la existencia de recursos disponibles para su ejecución.

El procedimiento de codificación del proceso anterior es similar al reflejado en los Cuadros 5.64. y 5.65., sin más que aplicar la operativa de los números borrosos trapezoidales, razón por la cual no se considera preciso reincidir en su desarrollo.

## **C. Regla de actualización de feromona**

La regla de actualización global de feromona aplicada en los sistemas de hormigas permite actualizar los niveles de feromona mediante la evaporación que sufren aquellos nodos no visitados por ninguna hormiga en cada iteración y mediante el aporte que realiza cada hormiga a los nodos visitados en función de la bondad de la solución que suponga cada solución.

En consecuencia, con independencia del tipo de información procesada, los niveles de feromona evaporados son similares en todos los casos, siendo válido el código recogido en el Cuadro 5.68.

Por su parte, el aporte que realiza cada agente es función directa de la adecuación de su solución, de forma que una vez determinada la bondad de cada solución se procede a evaluar su aporte de feromona en los mismos términos que en el modelo SH-DNP-Crisp sin más que considerar la adecuación obtenida mediante números borrosos trapezoidales. En este sentido, el código incluido en el Cuadro 5.66. para evaluar la bondad relativa de cada solución es válido en presente modelo, pudiendo asimismo aplicarse el proceso de codificación del Cuadro 5.67. a efectos de conocer el aporte realizado a cada nodo del recorrido por cada hormiga.

Las consideraciones anteriores permiten comprobar que el proceso de codificación de la regla de actualización de feromona es similar al caso genérico, siendo factible utilizar el pseudo-código reflejado en el Cuadro 5.69.

#### D. Parámetros de funcionamiento del sistema de hormigas

Los valores necesarios para el funcionamiento del sistema en este caso son similares a los casos anteriores, de forma que se deja libertad al usuario final para determinar el valor de los mismos. Asimismo, y como se comentó con anterioridad, la restricción presupuestaria puede ser establecida como una magnitud conocida y cierta o bien mediante los valores que permitan definir un número borroso trapezoidal.

A efectos ilustrativos, en su aplicación al ejemplo de estudio, utilizando los mismos valores que en los casos precedentes, la posible solución y la evolución del sistema durante las iteraciones es la que se recoge en la pantalla de la Figura 5.73.

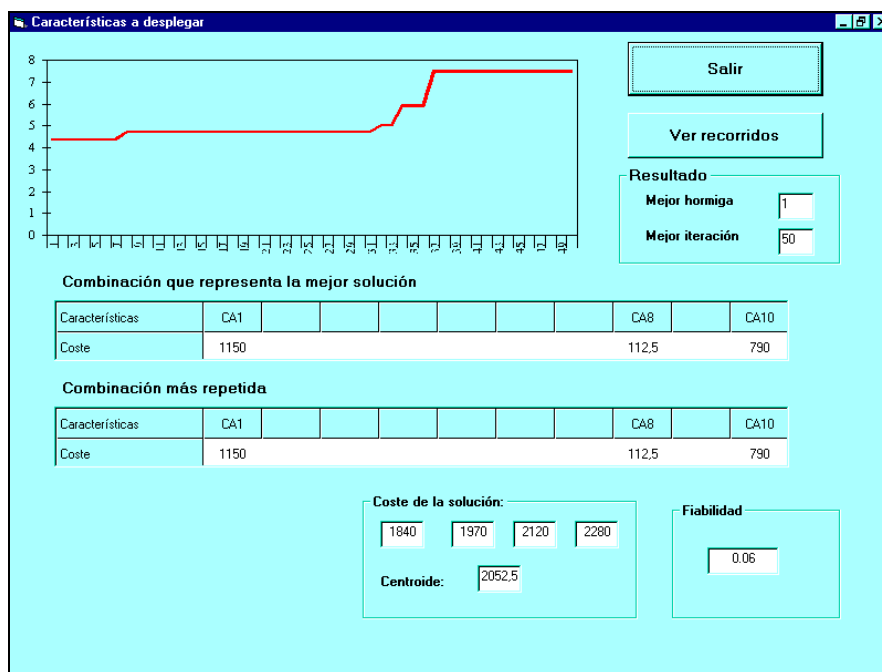


Figura 5.73.

#### 5.3.2.1.2. Aplicación del modelo SH-DNP-Fuzzy a situaciones de características sustitutivas

La utilidad del modelo SH-DNP-Fuzzy en circunstancias en las que es posible optar entre características que se consideran alternativas entre sí, no plantea diferencias significativas respecto al caso anteriormente analizado. La diferencia principal radica en que si se considera la existencia de grupos de características sustitutivas entre sí, una vez que un agente incluye en su lista de nodos visitados, en base al proceso de inicialización o mediante la aplicación de la regla de transición de estados, una característica correspondiente a un determinado grupo, no es posible incorporar a su recorrido ninguna otra característica de dicho grupo.

La situación anterior se puede incorporar al modelo incluyendo una variable que recoja los grupos de características que defina el usuario, de forma que siempre que una característica pase a formar parte de una solución, el resto de características de su mismo grupo se incluyan a su vez en la lista de nodos visitados por la hormiga. De esta forma, cuando se proceda a aplicar la regla de transición de estados, el algoritmo no valorará las probabilidades inherentes a las características sustitutivas (del mismo grupo) al estar incluidas en la lista de nodos visitados por esa hormiga.

La regla de actualización de feromona será similar al caso anterior, si bien sólo percibirán feromona una característica de cada grupo en concreto, debido a la restricción que se ha establecido en los recorridos a realizar por cada agente.

En su aplicación al ejemplo que se está desarrollando a efectos ilustrativos, si se consideran los mismos parámetros que en las situaciones anteriores, incluyendo el número de grupos de características y las componentes de cada grupo, la pantalla de la Figura 5.74. muestra la evolución proporcionada por el algoritmo.

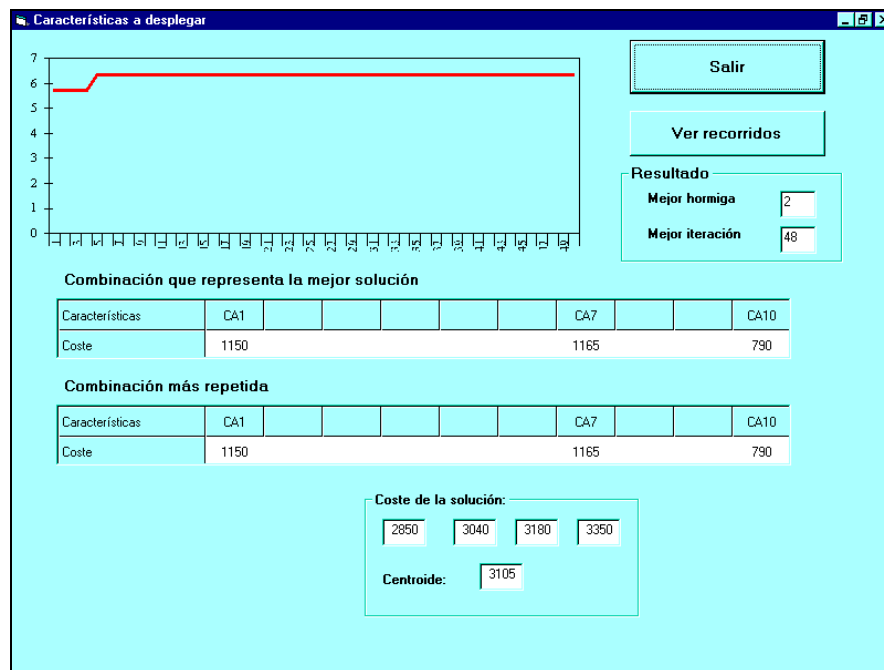


Figura 5.74.

La evolución del gráfico de la Figura anterior recoge la diferencia entre los incrementos en la adecuación y en el coste de las mejores soluciones aportadas en cada iteración por el algoritmo, de forma análoga al resto de modelos construidos, de ahí la tendencia del gráfico. Esto es así en la medida en que para que una solución sea preferida a otra, el aumento en su adecuación debe ser mayor que el aumento en el coste de desarrollar la combinación de características que recoge.

### **5.3.2.2. Modelo basado en la representación mediante 2-tuplas: El modelo SH-DNP-2-tuplas**

El tratamiento de la información obtenida mediante etiquetas lingüísticas así como la operativa posterior con este tipo de información, puede ser realizada sin utilizar las funciones de pertenencia asociadas a cada etiqueta, es decir, sin transformar en la medida de lo posible la información disponible.

Una alternativa, analizada en el Capítulo 4 y aplicada en el apartado 2.2.2. del presente Capítulo, consiste en utilizar la representación de la información lingüística mediante 2-tuplas, y operar con la información mediante los operadores de agregación y comparación establecidos para una representación de este tipo (HERRERA y MARTÍNEZ, 1999).

La posibilidad de utilizar la representación mediante 2-tuplas en lo referente a la información primaria del modelo así como a las modificaciones y operaciones precisas sobre dicha información se ha estudiado en los apartados 5.2.2.2. y siguientes, en su aplicación al modelo AG-DNP-2-tuplas, no siendo necesario realizar ninguna consideración adicional en lo referente a este aspecto.

En consecuencia, tanto en el tratamiento de la información proporcionada por los clientes como en el tratamiento de la información endógena, las consideraciones efectuadas en el desarrollo del modelo AG-DNP-2-tuplas son válidas a efectos de implementar la resolución del modelo mediante la aplicación de algoritmos de hormigas. Sin embargo, en la aplicación de este tipo de mecanismos de optimización a los problemas planteados en la presente Memoria, es preciso realizar ciertas modificaciones que se pasan a considerar en los apartados siguientes.

#### **5.3.2.2.1. Aplicación del modelo SH-DNP-2-tuplas a situaciones de restricción presupuestaria**

El modelo SH-DNP-2-tuplas puede ser utilizado en situaciones en las que exista un presupuesto fijado para el desarrollo del nuevo producto. En este apartado se pretende analizar su implementación y desarrollar el ejemplo numérico desde esta perspectiva.

La utilización de etiquetas lingüísticas para soportar la información precisa en el modelo SH-DNP-2-tuplas puede ser transportada a la evaluación del presupuesto, de forma que es posible incorporar el volumen de recursos como un número cierto, mediante la utilización de una etiqueta lingüística que lo defina y su correspondiente función de pertenencia asociada, y a través de una evaluación lingüística del mismo. En cualquier caso, la forma de proceder será similar a la analizada en el modelo desarrollado mediante algoritmos genéticos, es decir, será preciso en cada punto del recorrido

proceder a establecer si la solución aportada por cada hormiga se encuentra dentro del presupuesto, de forma que en función de la opción elegida en el momento de establecer el mismo, la comparación se realizará utilizando la matemática propia del caso particular.

El establecimiento del presupuesto como un número cierto normalmente implica el conocimiento del coste de las características alternativas mediante valores numéricos, de forma que en este caso la comparación resultará trivial. No obstante, es posible que o bien ambas variables o bien una de las dos esté expresada en términos inciertos, por la incertidumbre inherente a los aspectos relativos a variables monetarias que afectan al futuro. En estos casos, se ha optado por utilizar el centroide como método de comparación entre ambos valores y el operador de comparación de 2-tuplas lingüísticas cuando se utiliza esta representación.

En el caso particular de que tanto el presupuesto como el coste de desarrollo de las características se encuentren expresados en términos lingüísticos, será posible optar por utilizar la representación mediante 2-tuplas, consiguiendo la homogeneidad con el resto de la información. En cualquier caso, los procedimientos son similares a los descritos en apartados anteriores, sin más que utilizar los operadores propios de cada situación en particular.

La utilización de un presupuesto numérico permite realizar la comprobación anterior mediante la comparación del centroide representativo de dicho presupuesto con el centroide del coste de la característica que se pretende evaluar.

El empleo de variables lingüísticas para establecer el presupuesto provoca la necesidad de transformar la etiqueta representativa en un valor que haga referencia a los posibles costes de desarrollo de las características. De esta forma, se establecerá el presupuesto máximo como aquel que permitiría implementar todas las características posibles, siendo el mínimo aquel volumen de recursos que sólo permite desarrollar la característica de menor coste entre todas las alternativas. Estos valores servirán de base para establecer los márgenes de las 2-tuplas que servirán para evaluar el presupuesto establecido de forma lingüística.

En cuanto a la construcción del modelo propiamente dicho, el proceso de selección del origen de los recorridos se realizará de forma aleatoria, procediendo a comparar el coste de la característica elegida como punto inicial con el presupuesto establecido a priori y desechando como inicio aquellas características que no cumplan el mismo.

El recorrido completo por parte de cada hormiga se realizará en base a la regla de transición de estados, de forma semejante a los casos anteriormente descritos, sin



más que utilizar los operadores de la representación basada en 2-tuplas, ya que el proceso de captura y posterior tratamiento de la información ha sido unificado en un único dominio de expresión, de forma que no resulta necesario realizar ningún tipo de modificación.

De forma similar, la regla de actualización de la feromona se realizará en función de las soluciones aportadas en cada iteración por todas las hormigas, siendo preciso evaluar la bondad de cada solución. El cálculo de la adecuación se realiza de forma similar a lo expuesto en el modelo AG-DNP-2-tuplas, sirviendo dicha evaluación para establecer los niveles de feromona que aportan cada hormiga a cada nodo visitado. En cuanto al cálculo de la evaporación de la feromona, su evaluación es idéntica a los casos anteriores, ya que ésta sigue establecida en términos ciertos.

El funcionamiento del algoritmo propiamente dicho dependerá de los parámetros que en cada caso introduzca el usuario final. Dadas las condiciones anteriormente descritas en cuanto a la evaluación del presupuesto, es posible mostrar para parámetros iguales a los casos anteriores, la evolución y la solución encontrada por el algoritmo en ambos casos. La pantalla de la Figura 5.75. recoge la solución en el caso en que el presupuesto y el coste de las características se realice de forma numérica, mientras que la pantalla de la Figura 5.76. recoge la evolución en el caso de evaluar el presupuesto y el coste en términos lingüísticos.

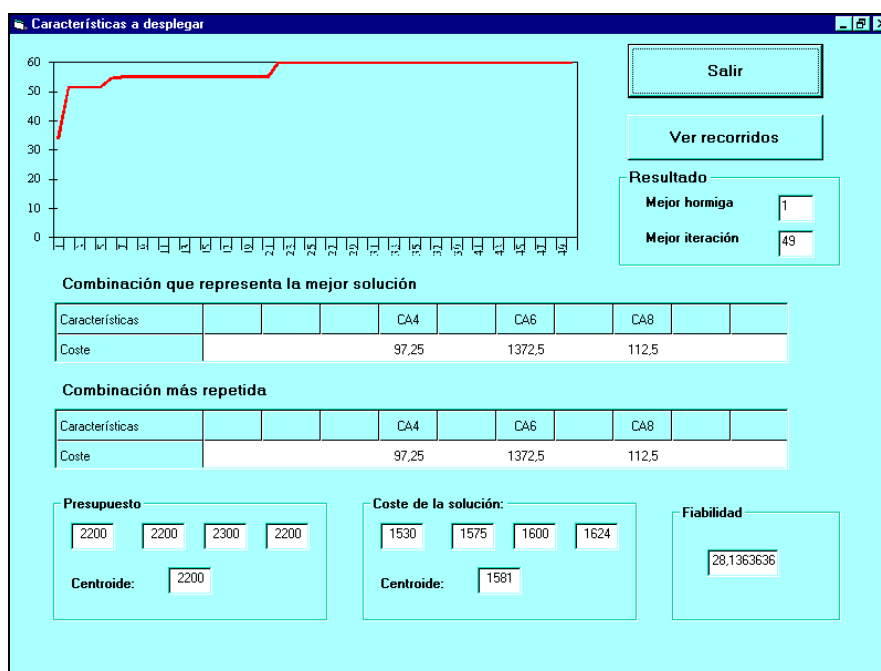


Figura 5.75.

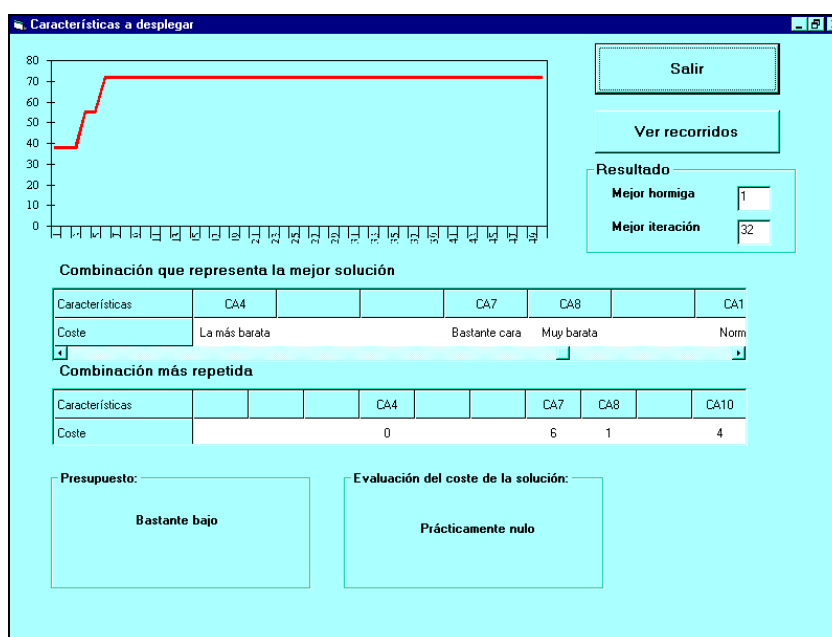


Figura 5.76.

#### 5.3.2.2.2. Aplicación del modelo SH-DNP-2-tuplas a situaciones de características sustitutivas

El modelo SH-DNP-2-tuplas puede ser adaptado para su utilización en situaciones con características sustitutivas. En este sentido, las modificaciones introducidas en el mismo tienen como punto de referencia las analizadas en el modelo SH-DNP-Crisp así como las consideradas en la implementación del modelo AG-DNP-2-tuplas.

La principal incidencia reside en el cálculo de la transición de un nodo a otro por parte de cada agente, debido a la obligatoriedad de no incorporar características pertenecientes a un mismo grupo en el recorrido realizado por el mismo. La solución adoptada en este caso, comentada en apartados anteriores, consiste en que una vez realizado el proceso aleatorio de selección del nodo de inicio, incorporar a la lista de nodos visitados por cada hormiga el total de las características pertenecientes al grupo de la característica que sirve de punto de inicio del recorrido. De forma sucesiva, y a medida que cada hormiga construye su solución en base a la regla de transición de estados, se incorporarán a la lista de nodos visitados el total de características del grupo de la elegida como "nueva visita" por parte de cada hormiga, de manera que durante la ejecución posterior del algoritmo dichas características no serán consideradas para su evaluación como nodos factibles.

Por otra parte, la aplicación del modelo en estas circunstancias implica la consideración del coste de la solución como una variable añadida para evaluar la bondad de las soluciones. En estas circunstancias, y en función del mecanismo utilizado para establecer la información sobre los mismos, el incremento en los costes que supone una solución frente a otra se deberá realizar con los mecanismos propios del tipo de

representación que se esté utilizando. A este respecto, en el apartado 5.2.2.4. se han descrito ambas posibilidades.

La aplicación del modelo SH-DNP-2-tuplas a situaciones de características sustitutivas da como resultado los mostrados en las pantallas recogidas en las Figuras 5.77. y 5.78. En la primera se muestra la evolución si la información sobre el coste de desarrollo de las características está establecido de forma numérica, mientras que la segunda recoge la evolución cuando dicha información se expresa mediante una evaluación lingüística.

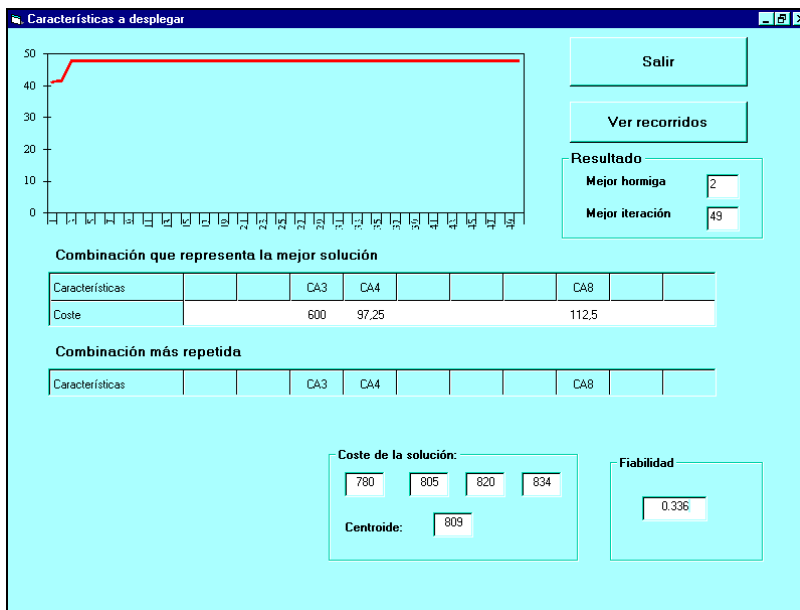


Figura 5.77.

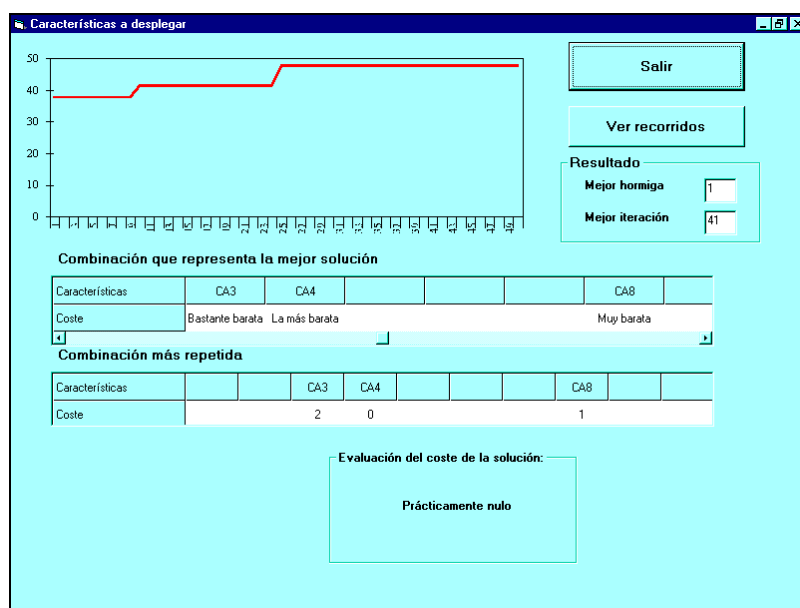


Figura 5.78.

# Capítulo 6

## Conclusiones

A modo de resumen, se recogen en este apartado las principales conclusiones derivadas de la labor investigadora que pueden servir de base para establecer el logro del propósito inicial de la presente Memoria de Tesis Doctoral.

A este respecto, se presentan a continuación cuáles han sido los resultados obtenidos y qué líneas de acción futura se plantean llevar a cabo a partir de estos resultados, eludiendo una excesiva pormenorización con objeto de no reiterar argumentaciones realizadas con anterioridad.

### 6.1. RESULTADOS OBTENIDOS

Los resultados obtenidos del desarrollo de la actividad investigadora realizada se pueden sintetizar, a modo de conclusiones, en los aspectos más relevantes relativos a cada una de las proposiciones inicialmente formuladas.

**1ª Proposición.** *Las metodologías empleadas hasta la actualidad en el desarrollo de nuevos productos, y especialmente el Despliegue de la Función de Calidad (DFC), presentan ciertas limitaciones, tanto en su concepción como en su aplicación al entorno actual, lo que conlleva la necesidad de su adecuación o reformulación, al objeto de facilitar la adopción de decisiones en un corto espacio de tiempo y adaptar las mismas a situaciones de cambio continuo.*

- El análisis de los métodos tradicionalmente utilizados en el ámbito de la Contabilidad de Gestión en su aplicación a la toma de decisiones sobre el desarrollo de nuevos productos puso de manifiesto el empleo generalizado del modelo del Despliegue de la Función de Calidad (DFC).
- El estudio de la metodología del Despliegue de la Función de Calidad (DFC), como método común de apoyo en la decisión sobre el desarrollo de productos, permitió identificar y relacionar las principales limitaciones que dicha metodología presenta en las circunstancias del entorno actual en el que se desenvuelven las organizaciones.
- La investigación efectuada puede presentar alguna utilidad como marco de referencia para el desarrollo de una metodología particular que permita abordar el tratamiento de la información disponible sobre las posibilidades de desarrollar un nuevo producto, teniendo en consideración tanto la necesidad de tratamiento de información cualitativa como la complejidad que supone este problema y la necesidad de contar con nuevos sistemas que faciliten el aprendizaje organizativo.

**2ª Proposición.** *La flexibilidad y adaptabilidad como características inherentes a la elaboración de información que facilite la adopción de decisiones en entornos altamente cambiantes, hacen preciso la utilización de herramientas matemáticas y computacionales que permitan el tratamiento de la información y su procesamiento de una forma robusta y rápida.*

- El análisis efectuado reveló que si bien la metodología del DFC reconoce la necesidad de operar con información cualitativa, no propone ninguna metodología apropiada para este tipo de información, optando por someterla a transformaciones que permitan manejarla como si se tratara de información numérica.
- Por otra parte, se ha podido constatar que, debido al elevado número de requisitos y características que pueden considerarse en la decisión sobre el desarrollo de un nuevo producto, así como la multiplicidad de relaciones existentes entre las variables que proporcionan información tanto sobre los requerimientos efectuados por los clientes como sobre las posibles acciones a desplegar, la representación visual proporcionada por el método de DFC, provoca que en su aplicación a la toma de decisiones se convierta en un método largo, complejo y con escaso rigor matemático.

- La consecución de las necesidades anteriores ha desembocado en que, tomando como base el enfoque constructivo en el que se circunscribe la línea de trabajo de la presente Memoria, se plantee entonces la utilidad de ampliar la labor investigadora llevada a cabo con la construcción de distintos modelos que permitan abordar la toma de decisiones sobre el desarrollo de un nuevo producto en distintos ámbitos de decisión.

**3ª Proposición.** *El comportamiento no lineal de las variables relevantes en la toma de decisiones sobre el desarrollo de nuevos productos exige que los métodos cuantitativos empleados para asistir a dicha toma de decisiones sean adecuados a tales situaciones. A su vez, el volumen e interrelación de tales variables hace preciso la incorporación al modelo de algoritmos de búsqueda y optimización que sean resolutivos ante problemas de gran complejidad combinatoria, lo que suscita el interés por considerar la aplicación de heurísticas basadas en la naturaleza, y más específicamente, los Algoritmos Genéticos y los Sistemas de Hormigas.*

- La investigación ha permitido constatar los procedimientos y metodologías que presentan los distintos métodos de búsqueda y optimización, considerando las limitaciones que los métodos tradicionales presentan en su aplicación a problemas complejos, lo que ha supuesto la necesidad de analizar en profundidad nuevos algoritmos de búsqueda y optimización, centrandó el interés por las heurísticas basadas en la naturaleza (HBNs), como algoritmos que permiten abordar problemas de alto grado combinatorio, al objeto de incorporar los mismos en el diseño de tales sistemas.
- El análisis anterior provocó, en primer término, que en el estudio llevado a cabo se considerase con detalle la estructura y el funcionamiento genérico de los Algoritmos Genéticos (AGs), como herramienta heurística de optimización ampliamente utilizada, ya que las soluciones facilitadas por este tipo de algoritmos, si bien pueden no ser las óptimas, sí que alcanzan un mayor grado de representatividad que las obtenidas mediante otro tipo de algoritmos.
- Asimismo, y debido al interés que su aplicación está suscitando en la comunidad científica, se analizó la posibilidad de utilizar como método de optimización algún tipo de Algoritmo Basado en Colonias de Hormigas (ACOs), más concretamente el interés que pudieran plantear los Sistemas de Hormigas (SH).
- El estudio detallado de ambos tipos de algoritmos permitió poner de manifiesto su adecuación para la resolución del problema que se pretende abordar, considerando en consecuencia la construcción de los modelos anteriormente comentados mediante el concurso de ambos tipos de algoritmos de optimización.

**4ª Proposición.** *La información de que disponen las empresas para afrontar la decisión sobre el desarrollo de un nuevo producto, en cuanto proviene en su mayor parte de opiniones emitidas por personas (clientes e ingenieros) no debería ser deformada para adecuarla a las necesidades de los métodos matemáticos utilizados tradicionalmente en su tratamiento, debiéndose procurar mantenerla en los términos en los que ha sido expresada, surgiendo entonces la necesidad de contemplar como posible alternativa la aplicación de la Teoría de los Subconjuntos Borrosos.*

- La constatación de carencias significativas en los modelos tradicionales en su aplicación a situaciones inciertas permitió justificar el interés por la aplicación de la Teoría de los Subconjuntos Borrosos, enunciada por Zadeh en 1965, como alternativa que permita representar la información imprecisa, ambigua o subjetiva de utilidad en la toma de decisiones empresariales.
- Asimismo, siguiendo las aportaciones seminales de los profesores Kaufmann y Gil Aluja, en las que se introduce la aplicación de los subconjuntos borrosos a diversos ámbitos de gestión de empresas, se ha profundizado en las implicaciones que provocaría realizar la formulación del problema de toma de decisiones en el ámbito del desarrollo de un nuevo producto más cercana a lo que la realidad económica demanda, es decir, no sujeta a las necesidades de las herramientas o modelos tradicionalmente utilizados.
- El interés de la aplicación de la Teoría de los Subconjuntos Borrosos ha surgido al observar que si el conocimiento de que se dispone sobre las variables pertinentes en el proceso de toma de decisiones es impreciso, se debe incluir entonces la noción de nivel presunción, lo que supone un acercamiento hacia aquellas herramientas que permitan acumular conocimiento y procesar información basados en valoraciones subjetivas.
- La necesidad de someter la información del modelo a procesos de agregación, comparación, etc., provocó que el estudio desarrollado se haya centrado en el análisis de las operaciones que la nueva matemática borrosa plantea, lo que ha permitido comprobar la aplicabilidad de los números borrosos (fuzzy) en el tratamiento de la incertidumbre, en un intento de recoger un fenómeno tal cual se presenta en la realidad y realizar su tratamiento sin intentar deformarlo para hacerlo preciso (crisp).

**5ª Proposición.** *La necesidad de realizar operaciones con información establecida mediante variables lingüísticas precisa la aplicación de técnicas computacionales que tengan definidos los operadores básicos para el tratamiento de este tipo de información. En este sentido, se plantea la utilidad de los modelos basados en el Principio de Extensión que operan con la información mediante las funciones de pertenencia asociadas a los términos lingüísticos.*

- Los estudios efectuados sobre la utilidad de los distintos modelos computacionales han puesto de manifiesto las distintas posibilidades que ofrecen cada uno de ellos en el tratamiento de la información lingüística. Asimismo, y por la incidencia en la investigación desarrollada, se ha dedicado parte del estudio a las operaciones de agregación, comparación, etc. que permitan trabajar con información expresada en términos lingüísticos.
- El análisis de los modelos basados en el Principio de Extensión ha permitido constatar la utilidad de los mismos como mecanismo para trabajar con información lingüística así como las ventajas que su incorporación a los modelos que se pretenden construir pueden suponer en el tratamiento de la información relativa a las variables que se manejan.
- Ante la necesidad que plantean este tipo de modelos de operar con la información mediante las funciones de pertenencia asociadas a los términos lingüísticos, el interés del trabajo investigador se enfocó, entonces, en el cuestionamiento de las posibilidades existentes en referencia a los tipos de funciones a asociar a cada variable lingüística.
- El estudio de los distintos tipos de números borrosos, así como de la literatura especializada al respecto, centró el interés por los números borrosos trapezoidales al comprobar que las funciones de pertenencia trapezoidales son suficientemente válidas para captar la imprecisión de las estimaciones lingüísticas. Por otra parte, y ante la necesidad de establecer las funciones de pertenencia trapezoidales, se estudiaron las posibilidades existentes, concluyendo que si bien la representación propuesta por Bonissone y Decker está muy extendida en la literatura al respecto, la representación simétrica puede resultar asimismo interesante por la generalidad que representa. De esta forma, se planteó la posibilidad de que los modelos construidos trabajen con ambos tipos de representaciones.



**6ª Proposición.** *Los modelos simbólicos, basados en el orden que ocupa una etiqueta lingüística en su conjunto de términos, pueden resultar de interés como herramienta para afrontar el tratamiento de la información lingüística que se utiliza en el modelo de desarrollo de nuevos productos. En particular, el modelo que utiliza como base de representación un par de valores o 2-tupla, en su aplicación a problemas en los que las valoraciones que se utilizan para resolverlos pertenecen a distintos dominios de expresión puede resultar una representación válida para la construcción de un modelo de desarrollo de nuevos productos.*

- El análisis efectuado sobre los distintos modelos simbólicos ha permitido comprobar que el enfoque lingüístico borroso presenta como inconveniente la pérdida de información al utilizar una representación discreta de la información lingüística y utilizar operadores que actúan en un rango continuo.
- La comprobación anterior suscitó el interés por analizar un nuevo modelo de tratamiento de la información lingüística basado en la representación mediante 2-tuplas y las posibilidades que cabría considerar al objeto de convertir las etiquetas lingüísticas en su equivalente en este tipo de representación, lo que permitió poner de manifiesto su utilidad en los modelos objeto de estudio.
- La necesidad de someter a la información disponible sobre las variables del modelo a distintas operaciones de comparación, agregación, etc. planteó el interés por analizar los distintos operadores de la representación con 2-tuplas, tanto operadores de agregación simbólicos extendidos para 2-tuplas como los basados en operadores de agregación numérica. Este estudio facilitó el contraste que los operadores desarrollados hasta la actualidad para este tipo de representación son lo suficientemente sofisticados como para permitir afrontar las operaciones precisas en los modelos objeto de la investigación.
- Asimismo, y ante la necesidad planteada en el modelo de desarrollo de nuevos productos de operar con información proveniente de distintas fuentes y, por tanto, expresada en distintos dominios lingüísticos, se suscitó el interés por analizar las posibilidades existentes de agregación de información lingüística multigranular, considerando su utilización en el caso de la representación mediante 2-tuplas lingüísticas.
- Las consideraciones anteriores permitieron comprobar la posibilidad de aplicar en los modelos que se pretenden construir la representación mediante 2-tuplas como mecanismo alternativo a los anteriormente analizados.

---

**7ª Proposición.** *Los Algoritmos Genéticos pueden resultar una poderosa herramienta en el proceso de optimización de la información susceptible de ser considerada en la decisión acerca de las acciones a desplegar en el desarrollo de un nuevo producto, ya que los operadores propios de este tipo de algoritmos, al actuar sobre las variables del modelo, permiten realizar una exploración y una explotación del espacio de búsqueda a través de las distintas posibilidades de combinación entre las características que debería contener el nuevo producto.*

- El trabajo realizado permitió constatar que los modelos tradicionales se encuentran con dificultades en el momento de afrontar problemas que incluyen variables de comportamiento impreciso y no lineal. En su aplicación práctica la solución adoptada por este tipo de modelos consiste en proceder a transformar la información con el fin de adaptarla a los parámetros que de funcionamiento que precisan. Esta consideración provocó la necesidad de utilizar alguna herramienta que no precise modificar las condiciones iniciales con el fin de asegurar un procesamiento de la información lo más riguroso posible.
- El estudio sobre el funcionamiento y operativa de los Algoritmos Genéticos como herramienta heurística de optimización ampliamente utilizada, supuso que el interés investigador se enfocase en analizar las posibilidades que los mismos podrían ofrecer en los modelos que se pretendían construir, dado que estos algoritmos permiten plantear los problemas de gestión sin necesidad de modificarlos sustancialmente y proporcionan soluciones que, si bien pueden no ser las óptimas, sí alcanzan un alto grado de representatividad.
- La necesidad de implementar los modelos construidos con la finalidad de poder comprobar su utilidad, cuestionó la oportunidad de realizar un estudio en profundidad de los distintos parámetros y operadores precisos para el funcionamiento de un AG, lo que ha supuesto la construcción de diversos modelos con el concurso de AGs con los parámetros y operadores más genéricos.

**8ª Proposición.** *La necesidad conjunta de aplicar mecanismos que permitan procesar la información en términos inciertos con herramientas que faciliten los procedimientos de búsqueda y optimización en problemas de gran complejidad como el que constituye el objeto de estudio, plantean el interés por construir un modelo que, utilizando un algoritmo genético, procese información expresada en variables lingüísticas. A este respecto, puede resultar de interés construir un modelo que actúe con las funciones de pertenencia de las variables lingüísticas así como un modelo que se base en la representación mediante 2-tuplas lingüísticas.*

- En el estudio se ha podido comprobar que la complejidad del problema, tanto en lo relativo al tratamiento de la información como en la necesidad de contar con métodos que permitan en un tiempo razonable obtener una solución a un problema de estas dimensiones, puede hacer necesaria la implementación de distintos modelos, construidos mediante lenguaje de Programación Visual.
- De esta forma, el estudio se ha centrado en el desarrollo de AGs que abordan dos situaciones posibles en dichos ámbitos, a saber: (i) la posibilidad de enfrentarse a una restricción presupuestaria en la decisión sobre las características a desarrollar en un nuevo producto y (ii) la posibilidad de considerar características sustitutivas en la elección de las acciones a desplegar en dicho desarrollo.
- Adicionalmente, el enfoque propugnado se ha basado en la consideración de los distintos entornos en los que se puede afrontar la necesidad de tomar la decisión sobre el desarrollo de un nuevo producto, a saber: (i) en ambientes de certeza, caracterizados por un conocimiento preciso de las variables que afectan a la decisión y (ii) en ambientes de incertidumbre, en los que la información disponible se encuentra expresada en términos inciertos o mediante valoraciones lingüísticas.
- El primero de los modelos construidos, denominado modelo AG-DNP-Crisp, permitió comprobar la posibilidad de afrontar la decisión en ambientes de certeza, abordando las posibilidades anteriormente apuntadas sobre las posibles restricciones a incluir en la decisión. Este modelo ha permitido también poner de manifiesto la utilidad que presentan los Algoritmos Genéticos en su aplicación a problemas complejos y, en concreto, en su incorporación como mecanismo de optimización en la decisión sobre las características que se deben incorporar en el desarrollo de un nuevo producto.
- Esta consideración facilitó la posibilidad de generalizar el empleo de estos algoritmos en ambientes de incertidumbre, lo que llevó a la construcción de un modelo que trabaja con información expresada en términos inciertos, denominado modelo AG-DNP-Fuzzy, el cual ha permitido contrastar las posibilidades de la Teoría de los Subconjuntos Borrosos en el tratamiento de la información incierta o expresada mediante variables lingüísticas. Más específicamente, en este modelo se ha constatado la validez de los operadores basados en funciones de pertenencia trapezoidales como mecanismo para el tratamiento de este tipo de información.
- Asimismo, y en función de las conclusiones obtenidas sobre la relevancia de la representación mediante 2-tuplas lingüísticas para el tratamiento de la información expresada en términos lingüísticos, se construyó el modelo denominado AG-DNP-2-tuplas que aborda el problema objeto de estudio considerando la información mediante este tipo de representación.

- Por último, y ante la necesidad de operar con información expresada en dominios distintos, con la construcción de este modelo se contrastó la validez del método propugnado para la normalización de información multigranular.

**9ª Proposición.** *Los Algoritmos Basados en Colonias de Hormigas, por la sencillez en los métodos que utilizan en los procesos de búsqueda y la rapidez que ofrecen en la consecución de soluciones pueden considerados como algoritmos válidos en la ayuda a la toma de decisión sobre la combinación óptima de características a desplegar en un nuevo producto.*

- Los buenos resultados obtenidos con la construcción de los modelos anteriormente descritos, aplicando la metodología de Algoritmos Genéticos, suscitaron el interés por la posibilidad de desarrollar similares problemáticas con el concurso de algún otro tipo de heurística basada en la naturaleza. El esfuerzo investigador se centró entonces en la construcción de una serie de modelos que, mediante la incorporación como mecanismo de optimización los denominados Sistemas de Hormigas (SH), permitieran abordar el tópico de estudio principal de esta Memoria en similares términos que los modelos anteriores.

**10ª Proposición.** *La aplicación al modelo de un Sistema de Hormigas como mecanismo de optimización de la información expresada en términos lingüísticos puede plantar la necesidad de construir un modelo basado en el principio de extensión para operar con las etiquetas lingüísticas así como un modelo que represente la información mediante 2-tuplas para las variables lingüísticas.*

- La necesidad de implementar los modelos en los dos ámbitos señalados, y con la finalidad de afrontar los dos tipos de decisiones a los que ha sido sometido el desarrollo de nuevos productos, suscitó el interés por la construcción de modelos mediante el concurso de un Sistema de Hormigas, a fin de constatar la utilidad que dicho sistema puede representar en la búsqueda de una solución válida en un corto espacio de tiempo.
- La construcción del modelo denominado SH-DNP-Crisp, cuya aplicación tiene sentido en ambientes de certeza, puso de manifiesto la utilidad de los Sistemas de Hormigas en la resolución de este tipo de problemas, permitiendo obtener una solución al problema planteado cuando la información disponible se encuentra expresada en términos numéricos, tanto en situaciones de restricción presupuestaria como con características sustitutivas entre sí.
- Por su parte, el modelo construido denominado SH-DNP-Fuzzy permitió constatar la posibilidad de la aplicación de los Sistemas de Hormigas en circunstancias en las que la información se encuentra expresada en términos inciertos, en concreto, permitió contrastar la validez de este tipo de algoritmos en su opera-

tiva conjunta con el tratamiento de la información incierta basada en las funciones de pertenencia de dichas variables lingüísticas, considerando las mismas números borrosos trapezoidales. Asimismo, la implementación de este modelo se realizó considerando los ámbitos de decisión similares al resto de modelos.

- También se construyó el modelo denominado SH-DNP-2-tuplas, permitiendo comprobar la validez de la representación mediante 2-tuplas y el método propugnado para la normalización de distintos dominios de expresión en su operativa conjunta con los Sistemas de Hormigas, aplicándose también con restricciones similares a los modelos anteriormente descritos.

De acuerdo con las proposiciones anteriores es posible poder constatar la proposición principal propugnada al inicio de la presente Memoria de Tesis Doctoral, cuyo enunciado cabe recordar:

*En los mercados actuales, caracterizados por una incertidumbre creciente y un acortamiento en el ciclo de vida de los productos, la información se convierte en uno de los principales instrumentos para la gestión eficaz de las organizaciones. En este sentido, si bien la contabilidad representa un importante trabajo de campo para la planificación y el control del desarrollo de un nuevo producto, el entorno descrito plantea cuestiones con difícil respuesta en los modelos tradicionales, cuestionándose entonces el concurso de metodologías y técnicas alternativas que faciliten tal operativa, con información incierta y compleja, que permitan la elaboración de información relevante, flexible y adaptable a las condiciones cambiantes del entorno.*

- Los modelos comúnmente utilizados por la Contabilidad de Gestión para afrontar la toma de decisiones sobre el desarrollo de un nuevo producto, deben ser modificados para adaptarlos a las condiciones cambiantes del entorno, en concreto para afrontar el volumen, la complejidad y la incertidumbre de la información.
- Los resultados obtenidos con los modelos aquí construidos permiten concluir en primer término que es factible la utilización de heurísticas basadas en la naturaleza (HBNs) para abordar el principal tópico de estudio de la presente Memoria, proporcionando soluciones al problema en un espacio corto de tiempo y aportando la flexibilidad de la que carecían los modelos tradicionales aplicados a este problema.
- Finalmente, se ha podido constatar la utilidad de la Teoría de los Subconjuntos Borrosos para el tratamiento de la información incierta, tanto mediante la metodología de los modelos basados en el principio de extensión como mediante modelos simbólicos. En ambos casos se ha comprobado la flexibilidad que aporta para operar con este tipo de información y las posibilidades que ofrece en su aplicación en entornos inciertos.

## 6.2. TRABAJOS FUTUROS

El esfuerzo investigador no sólo ha permitido obtener resultados de interés, sino que también ha abierto nuevos caminos cuya exploración parece ser prometedora.

De hecho en la gestión de las organizaciones en el mundo real existe una gran amplitud de situaciones que se pudieran requerir la utilización de heurísticas basadas en la naturaleza, donde podría resultar de interés la toma de decisiones asistida con alguno de los modelos aquí desarrollados.

De esta forma, nuestros esfuerzos futuros irán encaminados en las siguientes líneas principales de actuación:

- En referencia a los Algoritmos Genéticos, se plantea la posibilidad de ampliar su aplicación en distintos ámbitos de la Contabilidad de Gestión y, en particular, la consideración del empleo de alguno de los modelos construidos para incorporarlos en el Grupo de Trabajo vinculado al Proyecto Compete (COMMon Platform for Extended Enterprise) desarrollado en el seno de programa ESPRIT de la Comunidad Europea (Project nº 29933). Asimismo, es posible considerar en referencia a los modelos construidos, la utilidad de otro tipo de parámetros para el funcionamiento del AGs, tanto de construcción como de operativa, y la comparación de los resultados obtenidos.
- Respecto a los Algoritmos Basados en Colonias de Hormigas se plantea realizar desarrollos en distintos ámbitos de aplicación, tanto de los Sistemas de Hormigas como del resto de algoritmos de este tipo. Asimismo, se considera factible realizar comparaciones de los modelos desarrollados en la presente Memoria mediante Sistemas de Hormigas, con el resto de algoritmos basados en colonias de hormigas. Por otra parte, y debido a la incidencia de los parámetros de funcionamiento de este tipo de algoritmos, puede resultar de interés analizar la influencia de los mismos en la resolución de los problemas a los que se apliquen.



## Referencias Bibliográficas

- AARTS, E.H.L. y KORST, J.H.M. (1989): *"Simulated Annealing and Boltzmann Machines"*. Willey, Chichester.
- AARTS, E.H.L. y VAN LAARHOVEN, P.J.M. (1985): "Statistical Cooling: A general Approach to Combinatorial Optimization Problems". *Philips Journal of Research*, 40, págs. 193-226.
- ADAMS, D.A.; IRGENS, C.; LEES, B. y MACARTHUR, E. (1997): *"Using Case Outcome to Integrate Customer Feedback into Quality Function Deployment Process"*. ([www.informatik.uni-kl.de/pub/GBR/GWGBR87](http://www.informatik.uni-kl.de/pub/GBR/GWGBR87))
- AKAO, Y. (ed.) (1990): *"Quality Function Deployment: Integrating Customer Requirements Into Product Design"*. Productivity Press, Portland.
- ALTENBERG, L. (1995): "The Schema Theorem and Price's Theorem". Incluido en WHITLEY, L.D. y VOSE, M.D. (eds.): *"Foundations of Genetic Algorithms"*, Morgan Kaufmann, San Mateo.
- BAKER, J.E. (1985): "Adaptive Selection Methods for Genetic Algorithms". Incluido en GEFENSTETTE, J.J. (ed.): *"Proceedings to the First International Conference on Genetic Algorithms and Their Applications"*. Lawrence Erlbaum, New Jersey, págs. 101-111.
- BAKER, J.E. (1987): "Reducing Bias and Inefficiency in the Selection Algorithm". Incluido en GEFENSTETTE, J.J. (ed.): *"Proceedings of the Second International Conference on Genetic Algorithms"*. Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale New York, págs. 14-21.



- BALUJA, S. y CARUANA, R. (1995): "Removing the Genetics from the Standard Genetic Algorithm". Incluido en PRIEDITIS, A. y RUSELL, S. (eds.): "*Machine Learning: Proceedings of the Twelfth International Conference*". Morgan Kaufmann Publishers, págs. 38-46.
- BANZHAF, W. (1990): "The 'Molecular' Travelling Salesman". *Biological and Cybernetics*, 64, págs. 7-14.
- BARDOSSY, L. y DUCKSTEIN, L. (1995): "Fuzzy Rule-Based Modelling with Application to Geophysical". *Biological and Engineering Systems*, CRC Pres.
- BENTLEY, J.L. (1992): "Fast Algorithms for Geometric Travelling Salesman Problems". *ORSA Journal on Computing*, Vol. 4, págs. 387-411.
- BERNÉ, C. (1997): "Modelización de la Poscompra: Satisfacción y Lealtad". Incluido en MÚGICA, J.M. y RUIZ DE MAYA, S. (eds.): "*El Comportamiento del Consumidor*". Ariel Economía, págs. 163-181.
- BEYTH-MAROM, R. (1982): "How Probable is Probable?. A Numerical Taxonomy Translation of Verbal Probability Expressions". *Journal of Forecasting*, 1, págs. 257-269.
- BICKLE, T. y THIELE, L. (1995): "A Comparison of Selection Schemes used in Genetic Algorithms". *TIK-Report-11 Computer Engineering and Communication Networks Lab*, Swiss Federal Institute of Technology.
- BLOEMER, J.M.M. y KASPER, H.D.P. (1995): "The Complex Relationship between Consumer Satisfaction and Brand Loyalty". *Journal of Economic Psychology*, Vol. 16, nº 2, julio, págs. 311-329.
- BONABEAU, E.; DORIGO, M. y THÉRAULAZ, G. (1999): "*From Natural to Artificial Swarm Intelligence*". Oxford University Press.
- BONISSONE, P.P. (1982): "A Fuzzy Sets based Linguistic Approach: Theory and Applications". Incluido en GUPTA, M.M. y SANCHEZ, E. (eds.): "*Approximate Reasoning in Decision Analysis*". North-Holland, págs. 329-339.
- BONISSONE, P.P. y DECKER, K.S. (1986): "Selecting Uncertainty Calculi and Granularity: An Experiment in Trading-off Precision and Complexity". Incluido en: KANAL, L.H. y LEMMER, J.F. (eds.): "*Uncertainty in Artificial Intelligence*". North-Holland, págs. 217-247.
- BORDOGNA, G. y PASSI, G. (1993): "A Fuzzy Linguistic Approach Generalizing Boolean Information Retrieval: A Model and Its Evaluation". *Journal of the American Society for Information Science*, 44, págs. 70-82.
- BORDOGNA, G. y PASSI, G. (1997): "A Linguistic Modelling of Consensus in Group Decision Making based on OWA Operators". *IEEE Transactions On Systems, Man and Cybernetics, Part A: Systems and Humans*, 27, págs. 126-132.

- BOWER, J.L. y HOUT, T.M. (1988): "Fast Cycle Capability for Competitive Power". *Harvard Business Review*, Vol. 66, noviembre-diciembre, págs.110-118.
- BULLNHEIMER, B.; HARTL, R.F. y STRAUSS, C. (por aparecer): "A New Rank Based Version of the Ant System - A Computational Study". *Central European Journal for Operations Research and Economics*.
- BURILLO, P. y SOLER, J. (1985): "Introducción a la Teoría de Conjuntos Difusos y Aplicaciones Económicas". *Revista Estudios Financieros y de Matemática Aplicada*, nº 4, Universidad de Valencia.
- BURKARD, R.E. y OFFERMANN, J. (1977): "Entwurf von Schreibmaschinentastaturen mittels quadratischer Zuordnungsprobleme". *Zeitschrift für Operations Research*, 21, págs. B-121-B-132.
- BURKARD, R.E.; CELA, E. y KARISH, S.E. (1997): "QAPLIB – A Quadratic Assignment Problem Library". *Journal of Global Optimization*, nº 10, págs. 391-403.
- BURRELL, G. y MORGAN, G. (1979): "*Sociological Paradigms and Organizational Analysis*". Cower, London.
- CÁMARA, D. (1995): "*Diccionario de Marketing*". Universidad de Deusto.
- CARUANA, R.A. y SCHAFFER, J.D. (1988): "Representation and Hidden Bias: Gray versus Binary Coding for Genetic Algorithms". *Proceedings of the Fifth International Conference on Machine Learning*, págs. 153-162.
- CHANG, P. y CHEN, Y. (1994): "A Fuzzy Multicriteria Decision Making Method for Technology Transfer Strategy Selection in Biotechnology". *Fuzzy Sets and Systems*, 63, págs. 131-139.
- CHEN, S.J. y HWANG, C.L. (1992): "*Fuzzy Multiple Attribute Decision-Making Methods and Applications*". Springer-Verlag.
- CLARK, K. (1989): "What Strategy Can Do For Technology". *Harvard Business Review*, Vol. 67, noviembre-diciembre, págs.94-98.
- CLAUSING, D. (1994): "*Total Quality Development: A step-by-step Guide to World-Class Concurrent Engineering*". ASME, New York.
- COLORNI, A.; DORIGO, M. y MANIEZZO, V. (1991): "Distributed Optimization by Ant Colonies". Incluido en VARELA, F. y BOURGINE, P. (eds.): "*Proceedings of ECAL-91 - European Conference on Artificial Life*". Elsevier Publishing, Paris, págs.134-142.
- COLORNI, A.; DORIGO, M.; MAFFIOLI, F.; MANIEZZO, V.; RIGHINI, R. y TRUBIAN, M. (1996): "Heuristics from Nature for Hard Combinatorial Optimization Problems". *International Transactions in Operational Research*, 3, 1, págs. 1-21.
- CONTI, T. (1989): "Process Management and Quality Function Deployment". *Quality Progress*, 22, 12, págs. 45-48.

- CORDON, O.; HERRERA, F. y LOZANO, M. (1996): "On the Bidirectional Integration of Fuzzy Logic and Genetic Algorithms". *Second Online Workshop on Evolutionary Computation*, Nagoya (Japón), págs. 13-17.
- CORDON, O.; HERRERA, F. y MORENO, LI. (1999): "Integración de Conceptos de Computación Evolutiva en un Nuevo Modelo de Colonias de Hormigas". *Actas de la Conferencia de la Asociación Española para la Inteligencia Artificial – CAEPIA'99*, Murcia.
- CRAWFORD, C.M. (1980): "The Hidden Cost of Accelerated Product Development". *Journal of Product Innovation Management*, Vol. 9, págs.188-199.
- DARWIN, C. (1859): "*On the Origin of Species by Means of Natural Selection*". John Murray, Londres.
- DAVIS, L. (1989): "Adapting Operator Probabilities in Genetic Algorithms". Incluido en SCHAFFER, J.D. (ed.): "*Proceedings of the Third International Conference on Genetic Algorithms*". Kaufmann, San Mateo, págs. 375-378.
- DAY, G.S. y WENSLEY, R. (1988): "Assessing Advantage: A Framework for Diagnostic Competitive Superiority". *Journal of Marketing*, Vol. 52, abril, págs.188-199.
- DAY, R. (1984): "Modeling Choices among Alternatives Responses to Dissatisfaction". *Advances in Consumer Research*, Vol. 11, págs. 496-499.
- DE JONG, K.A. (1975): "An Analysis of the Behaviour of a Class of Genetic Adaptive Systems". *Tesis Doctoral*, University of Michigan.
- DEGANI, R. y BORTOLAN, G. (1988): "The problem of Linguistic Approximation in Clinical Decision Making". *International Journal of Approximate Reasoning*, nº 2, págs. 143-162.
- DELGADO, M., VERDEGAY, J.L. y VILA, M.A. (1993a): "Linguistic Decision Making Models". *International Journal Intelligent Systems*, 7, págs. 479-492.
- DELGADO, M., VERDEGAY, J.L. y VILA, M.A. (1993b): "On Aggregation Operations of Linguistic Labels". *International Journal Intelligent Systems*, 8, págs. 351-370.
- DELGADO, M.; HERRERA, F.; HERRERA-VIDEAMA, E. y MARTÍNEZ, L. (1998): "Combining Numerical and Linguistic Information in Group Decision Making". *Information Sciences*, nº 107, págs. 177-194.
- DICKEY, J.W. y HOPKINS, J. (1972): "Campus Building Arrangement using TOPAZ". *Transportation Science*, Vol. 6, págs. 59-68.
- DORIGO, M. y DI CARO, G. (1999): "The Ant Colony Optimization Meta-Heuristic". Incluido en CORNE, D.; DORIGO, M. y GLOVER, F. (eds.): "*New Ideas in Optimization*". McGraw-Hill.

- DORIGO, M. y GAMBARDELLA, L.M. (1995): "Ant-Q: A Reinforcement Learning Approach to the Travelling Salesman Problem". *Proceedings of the Eleventh International Conference on Machine Learning*, Morgan Kaufmann, págs. 252-260.
- DORIGO, M. y GAMBARDELLA, L.M. (1997a): "Ant Colony System: A Cooperative Learning Approach to the Travelling Salesman Problem". *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, Vol. 1, nº 1, abril.
- DORIGO, M. y GAMBARDELLA, L.M. (1997b): "Ant Colonies for the Travelling Salesman Problem". *BioSystems*, nº 43, págs. 73-81.
- DORIGO, M.; MANIEZZO, V. y COLORNI, A. (1996): "The Ant System: Optimization by a Colony of Cooperating Agents". *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics-Part B*, Vol.26, nº 2, págs. 29-41.
- DRURY, C. y TAYLES, M. (1995): "Issues Arising from Surveys of Management Accounting Practice". *Management Accounting Research*, Vol. 6, págs. 267-280.
- DUBOIS, D. y PRADE, H. (1980): "Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications". Academic Press, Nueva York.
- DUBOIS, D. y PRADE, H. (1985): "A Review of Fuzzy Set Aggregation Connectives". *Information Science*, nº 36, págs. 85-121.
- DUBOIS, D. y PRADE, H. (1986): "Weighted Minimum and Maximum Operations in Fuzzy Set Theory". *Information Science*, nº 39, págs. 205-210.
- DUNK, A. (1989): "Management Accounting Lag". *Abacus*, nº 2, págs. 149-155.
- EDGEETT, S.; SHIPLEY, D. y FORBES, G. (1992): "Japanese and British Companies Compared: Contributing Factors to Success and Failure in NPD". *Journal of Product Innovation Management*, Vol. 9.
- EISELT, H.A. y LAPORTE, G. (1991): "A Combinatorial Optimization Problem Arising in Dartboard Design". *Journal of the Operational Research Society*, 42, págs. 113-118.
- ELSHAFEI, A.E. (1977): "Hospital Layout as a Quadratic Assignment Problem". *Operations Research Quarterly*, 28, págs. 167-169.
- ENGLISH, T.M. (1997): "Information is Conserved in Optimization". *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, Computer Science Department, Texas Tech University.
- ESHELMAN, L.J. (1991): "The CHC Adaptive Search Algorithm: How to Safe Search when Engaging in Non-traditional Genetic Recombination". Incluido en RAWLINS, G.J.E. (ed.): "Foundations on Genetic Algorithms". Morgan Kaufmann Publishers, págs. 265-283.
- EUREKA, W. y RYAN, N. (1994): "The Customers-Driven Company: Managerial Perspectives on Quality Function Deployment". ASI Press. Dearborn.

- FAIGLE, U. y KERN, W. (1989): "Some Convergence Results for Probabilistic Tabu Search". *Internal Report 822*, Faculty of Applied Math, University of Twente.
- FANG, H. (1994): "Genetic Algorithms in Timetabling and Scheduling". *Doctoral Dissertation*. Department of Artificial Intelligence. University of Edinburg.
- FONSECA, C.M. y FLEMING, P.J. (1993): "Genetic Algorithms for Multiobjective Optimization: Formulation, Discussion and Generalization". Incluido en FORREST, S. (ed.): "Proceedings of the Fifth International Conference on Genetic Algorithms". Kaufmann, San Mateo, págs. 416-423.
- FORNELL, J. (1995): "Productivity, Quality and Customer Satisfaction as Strategic Success Indicators at Firm and National Levels". *Advances in Strategic Management*, Vol. 11, págs. 217-229.
- FORTUNA, R.M. (1988): "Management for Quality Improvement: The Seven New QC Tools". Productivity Press.
- GAMBARDELLA, L.M.; TAILLARD, E.D. y DORIGO, M. (1997): "Ant Colonies for the QAP". *Informe Técnico IDSIA-4-97*, Lugano.
- GARVIN, D.A. (1984): "What does "product quality" really mean?". *Sloan Management Review*, 26, págs. 245-56.
- GEOFFRION, A.M. y GRAVES, G.W. (1976): "Scheduling Parallel Production Lines with Changeover Costs: Practical Applications of a Quadratic Assignment/LP Approach". *Operations Research*, 24, págs. 595-610.
- GIL ALUJA, J. (1995): "Towards a new concept of economic research". *Fuzzy Economic Review*, nº 0, págs. 5-23.
- GIL ALUJA, J. (1996): "La Gestión Interactiva de los Recursos Humanos en la Incertidumbre". Pirámide, Madrid.
- GIL ALUJA, J. (1998): "The Interactive Management of the Human Resources Function". Kluwer Academic Publishers, Boston.
- GIL ALUJA, J. (1999): "Elements for a Theory of Decision in Uncertainty". Kluwer Academic, Dordrecht.
- GIL ALUJA, J. (1999): "Investment in Uncertainty". Kluwer Academic, Dordrecht.
- GIL LAFUENTE, A.M. (1993): "Fundamentos de Análisis Financiero". Ariel Economía, Barcelona.
- GLOVER, F. (1989): "Tabu Search, Part I". *ORSA Journal on Computing*, 1, 3, págs. 190-206.
- GLOVER, F. (1990): "Tabu Search, Part II". *ORSA Journal on Computing*, 2, págs. 4-32.
- GOLD, B. (1987): "Approaches to Accelerating Product and Process Development". *Journal of Product Innovation Management*, Vol. 4, marzo, págs. 81-88.

- GOLDBERG, D.E. (1985): "Optimal Initial Population Size for Binary-Coded Genetic Algorithms". *TCGA Report n° 850001*. The Clearinghouse for Genetic Algorithms. Tuscalossa. University of Alabama.
- GOLDBERG, D.E. (1989): "*Genetic Algorithm in Search, Optimization and Machine Learning*". Addison-Wesley, Reading, Massachusetts.
- GOLDBERG, D.E. (1993): "Rapid, Accurate Optimizacion of Difficult Problems using Fast Messy Genetic Algorithms". *IlligAL Report n° 93004*, febrero.
- GOLDBERG, D.E. y DEB, K. (1991): "A Comparative Analysis on Selection Schemes used in Genetic Algorithms". *Foundations of Genetic Algorithms, 1*, Kaufmann, San Mateo, págs. 69-93.
- GOLDBERG, D.E.; DEB, K. y CLARK, J.H. (1992): "Genetic Algorithms, Noise and The Sizing of Populations". *Complex Systems, Vol. 6*, págs. 333-362.
- GOMORY, F. (1989): "From the 'Ladder of Science' To the Product Development Cycle". *Harvard Business Review, Vol. 67*, noviembre-diciembre, págs.99-105.
- GOULD, S.J. y ELREDGE, N. (1977): "Punctuated Equilibria: The Tempo and Mode of Evolution Reconsidered". *Paleobiology, 32*, págs. 115-151.
- GRIFFIN, A. (1991): "*Evaluating Development Processes: QFD as an Example*". Marketing Science Institute. Cambridge, Massachusetts.
- GRIFFIN, A. (1992): "Evaluating QFD's Use in U.S. Firms as a Process for Developing Products". *Journal Production Innovation Management, 9*, págs. 171-187.
- GRIFFIN, A. (1997): "PDMA Research on New Project Development Practices: Updating Trends and Benchmarking Best Practices". *Journal of Product Innovation Management, Vol. 14*, noviembre, págs.429-458.
- GRIFFIN, A. y HAUSER, J.R. (1992): "Patterns of Communication Among Marketing, Engineering and Manufacturing. A Comparison between two New Product Teams". *Management Science, 38, 3*, págs. 68-77.
- GRIFFIN, A. y PAGE, A.L. (1993): "Metrics for Measuring New Product Development Cycle Time". *Journal of Product Innovation Management, Vol. 10*, marzo, págs.112-125.
- GRIFFIN, A. y PAGE, A.L. (1996): "PDMA Success Measurement Project: Recommended Measures for Product Success and Failure". *Journal of Product Innovation Management, Vol. 13*, págs.478-496.
- GUPTA, A.K. y WILEMON, D. (1990): "Accelerating the Development of Technology-Based New Products". *California Management Review, Vol. 32*, invierno, págs.24-67.

- GUPTA, A.K.; RAJ, S.P. y WILEMON, D. (1986): "A Model for Studying the R&D Interface in Product Innovation Race". *Journal of Marketing*, Vol. 50, abril, págs.7-17.
- GUTMAN, J. (1982): "A Means-Ends Chain Model Based on Consumer Categorization Processes". *Journal of Marketing*, primavera, págs. 60-72.
- HARIK, G.; CANTÚ-PAZ, E.; GOLDBERG, D.E. y MILLER, B. (1996): "The Gambler's Ruin Problem, Genetic Algorithms, and Sizing of Populations". *IlligAL Report n° 96004*. University of Illinois at Urbana-Champaign.
- HAUSER, J.R. y CLAUSING, D. (1988): "The House of Quality". *Harvard Business Review*, 66, 3, págs. 63-73.
- HAUSER, J.R. y CLAUSING, D.P. (1998): "The House of Quality". *Harvard Business Review*, Vol. 66, mayo-junio, págs.63-73.
- HERRERA, F. y HERRERA-VIDEVA, E. (1997): "Aggregation Operators for Linguistic Weighted Information". *IEEE Transactions on System, Man and Cybernetics, Systems and Humans* 5, Vol. 27, págs. 646-656.
- HERRERA, F. y MARTÍNEZ, L. (1999a): "A 2-tuple Fuzzy Linguistic Representation Model for Computing with Words". *Technical Report#DECSAI-990102*. Departamento de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial, Universidad de Granada. (<http://decsai.ugr.es/~herrera/public.html#TecRep>).
- HERRERA, F. y MARTÍNEZ, L. (1999b): "A Fusion Method for Multi-Granularity Linguistic Information based on the 2-tuple Fuzzy Linguistic Representation Model". *Technical Report#DECSAI-990107*. Departamento de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial, Universidad de Granada.
- HERRERA, F. y MARTÍNEZ, L. (1999c): "An Approach for combining Linguistic and Numerical Information based on the 2-tuple Fuzzy Linguistic Representation Model in Decision-Making". *Technical Report#DECSAI-990111*. Departamento de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial, Universidad de Granada.
- HERRERA, F. y MARTÍNEZ, L. (1999d): "A 2-tuple Fuzzy Linguistic Representation Model Based on a Symbolic Translation". *Proceedings EUROFUSE-SIC'99 Conference*, Budapest, págs. 25-28.
- HERRERA, F. y MARTÍNEZ, L. (2000): "A Fusion Approach for Managing Multi-Granularity Linguistic Terms Sets in Decision Making". *Fuzzy Sets and Systems*, n° 114, págs. 43-58.
- HERRERA, F. y MARTÍNEZ, L. (2000): "A Model Based on Linguistic 2-tuples for Dealing with Multigranularity Hierarchical Linguistic Context in Multiexpert Decision-Making". *Technical Report#DECSAI-00111*. Departamento de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial, Universidad de Granada.

- HERRERA, F. y MARTÍNEZ, L. (2000): "The 2-tuple Linguistic Computational Model Based on the Extension Principle Analysis of the Linguistic Description, Accuracy and Consistency". *Technical Report#DECSAI-00110*. Departamento de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial, Universidad de Granada.
- HERRERA, F. y VERDEGAY, J.L. (1993): "Linguistic Assessments in group decision". *Proceedings of First European Congress on Fuzzy and Intelligent Technologies*, Aachen, págs. 941-948.
- HERRERA, F.; HERRERA VIEDMA, E. y LÓPEZ, E. (1996): "On Linguistic Approach in Multi-Person Decision Making". *International Conference on Intelligent Technologies in Human-Related Sciences (ITHURS'96)*, León, Vol. II, págs. 205-213.
- HERRERA, F.; HERRERA-VIEDMA, E. y VERDEGAY, J.L. (1995): "A Sequential Selection Process in Group Decision Making with Linguistic Assessment". *Information Sciences*, 85, págs. 223-239.
- HERRERA, F.; HERRERA-VIEDMA, E. y VERDEGAY, J.L. (1996): "A Model of Consensus in Group Decision Making Under Linguistic Assessments". *Fuzzy Sets and Systems*, nº 79, págs. 73-87.
- HERRERA, F.; LÓPEZ, E. y RODRÍGUEZ, M. (2000): "A Linguistic Decision model for Promotion Mix Management with Genetic Algorithms". *Fuzzy Sets and Systems: Special Issue on Frontiers in Soft Decision Analysis* (en proceso de publicación).
- HERRERA, F.; LÓPEZ, E.; MENDAÑA, C. y RODRÍGUEZ, M. (1999): "A Linguistic Decision Model to Suppliers Selection in International Purchasing". Incluido en ZADEDH, L. y KACPRICYK, J. (eds.): "Computing with Words in Information/Intelligent Systems". Physica-Verlag. Heidelberg, págs. 500-524.
- HERRERA, F.; LÓPEZ, E.; MENDAÑA, C. y RODRÍGUEZ, M. (1999): "Solving an Assignment Problem under Linguistic Valuations with Genetic Algorithms". *European Journal of Operations Research*, nº 119, págs. 326-337.
- HERRERA, F.; LÓPEZ, E.; MENDAÑA, C. y RODRÍGUEZ, M. (2000): "A Linguistic Decision Model for Personnel Management Solved with a Linguistic Biobjective Genetic Algorithm". *Fuzzy Sets and Systems* (en proceso de publicación).
- HERRERA, F.; LOZANO, M. y VERDEGAY, J.L. (1996a): "Dynamic and Heuristic Fuzzy Connectives Based Crossover Operators for Controlling the Diversity and Convergence of Real Coded Genetic Algorithms". *International Journal Intelligent Systems*.
- HERRERA, F.; LOZANO, M. Y VERDEGAY, J.L. (1996b): "Direct Approach Processes in Group Decision Making Using Linguistic OWA Operators". *Fuzzy Sets and Systems*, nº 79, págs. 175-190.



- HERZWURM, G. y MELLIS, W. (2000): "Higher Customer Satisfaction with Prioritizing and Focused Software Quality Function Deployment". ([www.informatik.Uni-Koeln.DE/wininfo/prof.mellis/qfdid.htm](http://www.informatik.Uni-Koeln.DE/wininfo/prof.mellis/qfdid.htm))
- HINES, R. (1988): "Financial accounting: In Communicating Reality, We Construct Reality". *Accounting, Organizations and Society*, Vol. 13, nº 3, págs. 251-261.
- HIROTA, K. (1993): "*Industrial Applications of Fuzzy Technology*". Springer-Verlag.
- HISE, R.T.; O'NEIL, L.; PARASURAMAN, A. y McNEAL, J.U. (1990): "Marketing/R&D Interaction in New Product Development: Implications for New Product Success Rate". *Journal of Product Innovation Management*, Vol. 7, febrero, págs.142-155.
- HOLLAND, J.H. (1975): "*Adaptation in Natural and Artificial Systems*". University of Michigan Press.
- HOPPER, T. y POWELL, A. (1985): "Making Sense of Research into the Organizational and Social Aspects of Management Accounting: A Review of its Underlying Assumptions". *Journal of Management Studies*, septiembre, págs. 429-465.
- HOPWOOD, A. (1983): "On Trying to Study Accounting in the Contexts in Which It Operates". *Accounting, Organizations and Society*, nºs 2 y 3, págs. 287-305.
- HORN, J.; NAFPLIOTIS, N. y GOLDBERG, D.E. (1994): "A Niche Pareto Genetic Algorithm for Multiobjective Optimization". *Proceedings to the First IEEE Conference on Evolutionary Computation*, Vol. 1, Piscataway, New York, Service Center, págs. 82-87.
- HUXLEY, J. (1942): "*Evolution, the Modern Synthesis*". Harper, New York.
- JACOBY, J. y KYNER, D. (1973): "Brand Loyalty vs. Repeat Purchasing Behavior". *Journal of Marketing Research*, Vol. 10, febrero, págs. 1-19.
- JAMES, W. (1955): "*Pragmatism and Four Essays from the Meaning of Truth*". The New American Library, New York.
- JOHNSON, D.S. y McGEOCH, L.A. (1997): "The Travelling Salesman Problem. A Case Study in Local Optimization". Incluido en AARTS, E.H.L. y LENSTRA, J.K. (eds.): "*Local Search in Combinatorial Optimization*". John Wiley & Sons, págs. 215-310.
- JOHNSON, H. y KAPLAN, R. (1988): "*La Contabilidad de Costes: Auge y Caída de la Contabilidad de Gestión*". Plaza & Janés, Barcelona.
- JONES, T.; CURRIE, W. y DUGDALE, D. (1993): "Accounting and Technology in Britain and Japan: Learning from Field Research". *Management Accounting Research*, Vol. 4, págs. 109-137.
- JONES, T.O. y SASSER, W.E. (1995): "Why Satisfied Customers Defect". *Harvard Business Review*, Vol. 21, marzo, págs. 695-707.

- KACPRZYK, J. (1986): "Group Decision Making with a Fuzzy Linguistic Majority". *Fuzzy Sets and Systems*, nº 18, págs. 105-118.
- KAUFMANN, A. y GIL ALUJA, J. (1986): "Introducción de la Teoría de los Subconjuntos Borrosos en la Gestión de Empresas". Milladoiro, Santiago de Compostela.
- KAUFMANN, A. y GIL ALUJA, J. (1987): "Técnicas Operativas de Gestión para el Tratamiento de la Incertidumbre". Hispano Europea, Barcelona.
- KAUFMANN, A. y GIL ALUJA, J. (1990): "Las Matemáticas del Azar y de la Incertidumbre". Centro de Estudios Ramón Areces, Madrid.
- KAUFMANN, A. y GIL ALUJA, J. (1991): "Nuevas Técnicas para la Dirección Estratégica". Universidad de Barcelona, Barcelona.
- KAUFMANN, A. y GIL ALUJA, J. (1992): "Técnicas de Gestión de Empresas. Previsiones, decisiones y estrategias". Pirámide, Madrid.
- KAUFMANN, A. y GIL ALUJA, J. (1993): "Técnicas Especiales para la Gestión de Expertos". Milladoiro, Santiago de Compostela.
- KAUFMANN, A. y GIL ALUJA, J. (1995): "Grafos Neuronales para la Economía y la Gestión de Empresas". Pirámide, Madrid.
- KAUFMANN, A.; GIL ALUJA, J. y TERCEÑO, A. (1994): "Matemática para la Economía y la Gestión de Empresas. Vol. I: Aritmética de la incertidumbre". Foro Científico, Barcelona.
- KENNY, A.A (1988): "New Paradigm for Quality Assurance". *Quality Progress*, 21, junio, págs. 23-36.
- KIMURA, M. (1968): "Evolutionary Rate at the Molecular Level". *Nature*, 217, págs. 624-626.
- KING, B. (1989): "Better Designs in half the time: Implementing Quality Function Deployment in America". GOAL/QPC, Methuen.
- KIRKPATRICK, S.; GELATT, C.D. y VECCHI, M.P. (1983): "Optimization by Simulated Annealing". *Science*, 220, págs. 671-680.
- KLIR, G.J. y YUAN, B. (1995): "Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications". Prentice Hall PTR, Upper Saddle River, NJ.
- KOGURE, M. y AKAO, Y. (1983): "Quality Function Deployment and CWQC in Japan". *Quality Progress*, 16, 10 págs. 345-354.
- KOOPMANS, T.C. y BECKMAN, M.J. (1957): "Assignment Problems and the Location of Economic Activities". *Econometrica*, nº 25, págs. 53-76.
- KOTLER, P. y ARMSTRONG, G. (1989): "Principles of Marketing". Englewood Cliffs, 4ª Ed., NJ. Prentice Hall.

- KOZA, J. R. (1992): "Genetic Programming. On the Programming of Computers by Means of Natural Selection". The MIT Press.
- LAMBIN, J. (1991): "Marketing Estraté". McGraw-Hill, Madrid.
- LANGTON, C.G. (1989): "Artificial Life". *Artificial Life 1*. Addison-Wesley, Santa Fe NM, págs. 1-47.
- LARRAÑAGA, P., GRAÑA, M., D'ANJOU, A. y TORREALDEA, F.J. (1993): "Genetic Algorithms Elitist Probabilistic of Degree 1, A Generalization of Simulated Annealing". Incluido en TORASSO, P. (ed.): "Lecture Notes in Computer Science. Advance in Artificial Intelligence". Springer Verlag, págs. 208-217.
- LIN, S. (1965): "Computer Solutions of the Travelling Salesman Problem". *Bell Syst. J.*, Vol.44, págs. 2245-2269.
- LIU, X.F. y TIAO, A.W. (1997): "A Systematic Tradeoff Analysis for Conflicting Imprecise Requirements". *Proceedings of Third IEEE International Symposium on Requirements Engineering*, enero, págs.87-96.
- LIU, X.F. y YEN, J. (1996): "An Analytic Framework for Specifying and Analyzing Imprecise Requirements". *Proceedings of the 18<sup>th</sup> International Conference on Software Engineering*, págs.60-69.
- LÓPEZ GONZÁLEZ E.; MENDAÑA CUERVO, C. y RODRÍGUEZ FERNÁNDEZ, M. (1998): "La gestión de Inventarios con Algoritmos Genéticos". *Revista Iberoamericana de Inteligencia Artificial*, primavera, nº 5, págs. 85-90.
- LÓPEZ GONZÁLEZ, E. (1992): "The role of Chaos and Fuzzy Subsets Theories in Strategic Management Accounting to the Competitive Advantages: Emergence of a New Paradigm". *Fuzzy Systems & A.I.*, Vol. 1, nº 2, págs. 79-87.
- LÓPEZ GONZÁLEZ, E. (1993): "Chaos-Theory and Fuzzy Sets in Strategic Management Accounting". *First European Congress on Fuzzy and Intelligent Technologies*, Aachen, septiembre, Vol. 2, págs. 997-1002.
- LÓPEZ GONZÁLEZ, E. (1993): "Nuevas Tendencias en la Contabilidad Directiva: Contabilidad Estratégica e Incertidumbre. El Caso de la Decisión de Hacer o Comprar". *III Congreso Internacional de Costos y I Congreso Nacional de la Asociación Española de Contabilidad Directiva (ACODI)*, Madrid.
- LÓPEZ GONZÁLEZ, E. (1999): "A Methodology for Building Fuzzy Expert Systems (FES) with Spreadsheet to Quality Function Deployment (QFD) of the Target Costing". Incluido en GIL ALUJA, J. (ed): "Handbook of Management under Uncertainty". Kluwer Academic Publishers. Dordrecht (en proceso de publicación).

- LÓPEZ GONZÁLEZ, E. y MENDAÑA CUERVO, C. (1993): "An Application of the Kaufmann and Gil Aluja Fuzzy Chains to Management Control: Fuzzy Cash Management". *Fuzzy Systems & A.I.*, Vol. 2, nº 3, págs. 21-40
- LÓPEZ GONZÁLEZ, E. y MENDAÑA CUERVO, C. (1994): "The Outsourcing Decision in Fuzzy Economic Environments". *International AMSE Conference Fuzzy Systems and Neural Networks*, AMSE Press, Lyon, págs. 39-54.
- LÓPEZ GONZÁLEZ, E. y RODRÍGUEZ FERNÁNDEZ, M. (1999): "ALGEB01: Desarrollo de un Algoritmo Genético para la Gestión de Personal en Condiciones de Incertidumbre". Servicio de Publicaciones, Universidad de León.
- LÓPEZ GONZÁLEZ, E. y RODRÍGUEZ FERNÁNDEZ, M. (2000): "Genetic Optimization of a Fuzzy Distribution Model". *International Journal of Physical Distribution and Logistics Management*. Vol. 30, nº 8, págs. 681-696.
- LÓPEZ GONZÁLEZ, E.; MENDAÑA CUERVO, C. y RODRÍGUEZ FERNÁNDEZ, M. (1995): "GENIAVIS: Modelo de Algoritmo Genético para el Análisis de Inventario con Programación Visual". V Congreso de la Asociación Española de Tecnologías y Lógica Fuzzy (ESTYLF'95), Murcia, septiembre, Vol. II: "Transferencia de Tecnología Fuzzy", págs. 101-102.
- LÓPEZ GONZÁLEZ, E.; MENDAÑA CUERVO, C. y RODRÍGUEZ FERNÁNDEZ, M. (1995): "CAJAGEN: Un Algoritmo Genético para la Gestión Económica de los Cajeros Automáticos en Programación Visual". *Actas del II Congreso de la Sociedad Internacional de Gestión y Economía Fuzzy (SIGEF'95)*, Santiago de Compostela, noviembre, págs. 233-241.
- LÓPEZ GONZÁLEZ, E.; MENDAÑA CUERVO, C. y RODRÍGUEZ FERNÁNDEZ, M. (1996): "Aplicación de los Algoritmos Genéticos en el Control de Gestión del Personal: El modelo TARAG". *Actas del III Congreso Internacional de la Sociedad Internacional de Gestión y Economía Fuzzy (SIGEF'96)*, Buenos Aires, Argentina.
- LÓPEZ GONZÁLEZ, E.; MENDAÑA CUERVO, C. y RODRÍGUEZ FERNÁNDEZ, M. (1997): "La Selección de Personal con un Algoritmo Genético Borroso". *Investigaciones Europeas de Dirección y Economía de la Empresa*, Vol. 2, nº 2, mayo-agosto, págs. 61-76.
- LÓPEZ GONZÁLEZ, E.; MENDAÑA CUERVO, C. y RODRÍGUEZ FERNÁNDEZ, M. (1998): "Fijación de Estrategias del Mix de Promoción Mediante un Algoritmo Genético Borroso". *XIX Congrès de la Association Française Comptabilité*, Nantes, mayo, págs. 442-443.

- LÓPEZ GONZÁLEZ, E.; RODRÍGUEZ FERNÁNDEZ, M.; MENDAÑA CUERVO, C. y FLÓREZ LÓPEZ, R. (1999): "Distribution Information Systems with Genetic Algorithm and Fuzzy Sets". *Proceedings to the 1999 EUSFLAT – ESTYLF Joint Conference*, Universidad de las Islas Baleares, Palma de Mallorca, septiembre, págs-323-326.
- LÓPEZ GONZÁLEZ, E; MENDAÑA CUERVO, C. y RODRÍGUEZ FERNÁNDEZ, M. (1997): "Global Sourcing: An Approach to Suppliers Selection Problems using Genetic Algorithm and Linguistic Valuations". *VI International Conference of the European Association of Management and Business Economics*, Chania (Grecia), págs. 117-130
- LÓPEZ GONZÁLEZ, E; MENDAÑA CUERVO, C. y RODRÍGUEZ FERNÁNDEZ, M. (1998): "The Election of a Portfolio Through a Fuzzy Genetic Algorithm: The Pofugena Model". Incluido en ZOPOUNIDIS, C. (ed.): "New Operational Tools in the Management of Financial Risk". Kluwer Academics Publishers, Norwell.
- LÓPEZ GONZÁLEZ, E; MENDAÑA CUERVO, C.; MIERES FUERTES, J. y RODRÍGUEZ FERNÁNDEZ, M. (1996): "The selection of an Entry Mode Strategy into Foreign Markets under Conditions of Environmental Uncertainty". *Fuzzy Economic Review*, Vol. 1, nº 1, mayo, págs. 93-118.
- LU, M.; MADU, C.; KUEI, C. y WINOKUR, D. (1994): "Integrating QFD, AHP and Bechmarking in Strategic Marketing". *Journal of Business & Industrial Marketing*, 9, 1 págs. 41-50.
- LUKKA, K. (1990): "Ontology and Accounting: The Concept of Profit". *Critical Perspectives on Accounting*, nº 3, págs. 239-261.
- MAHFOUD, S.W. (1994): "An Analysis of Boltzman Tournament Selection". *ILLiGAL Report nº 94007*. University of Illinois at Urbana-Champaign.
- MAIDIQUE, M.A. y ZIRGER, B.J. (1984): "A Study of Success and Failure in Product Innovation: The Case of the U.S. Electronic Industry". *IEEE transactions in Engineering Management*, Vol. 4.
- MAIER, M.W. (1995): "Quantitative Engineering Analysis with QFD". *Quality Engineering*, 7, 4, págs.733-46.
- MANASH, R. (1994): "Cost Management for Product Development". *Journal of Cost Management*, primavera, págs. 52-64.
- MANIEZZO, V.; COLORNI, A. y DORIGO, M. (1994): "Then Ant System Applied to the Quadratic Assignment Problem". *Technical Report IRIDIA 94-28*. Université Libre de Bruxelles.
- MARTÍNEZ, L. (1999): "Un Nuevo Modelo de Representación de Información Lingüística basado en 2-tuplas para la Agregación de Preferencias Lingüísticas". *Tesis Doctoral*. Universidad de Granada.

- McCLOSKEY, D. (1983): "The Rhetoric of Economics". *Journal of Economic Literature*, junio, págs. 481-517.
- MENDEL, G. (1865): "Versuche über Pflanzen-Hybriden". *Verhandlungen des Naturforschenden Vereines in Brünn*, 4.
- MICHALEWICZ, Z. (1992a): "Genetic Algorithms + Data Structures = Evolution Programs". Springer-Verlag, Berlin.
- MICHALEWICZ, Z. (1992b): "A Genetic Algorithm for the Linear Transportation Problem". *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 21, págs. 445-452.
- MILLER, B.L. y GOLDBERG, D.E. (1997): "Genetic Algorithms, Selection Schemes and the Varying Effects of Noise". *Evolutionary Computation*, Vol. 4, nº 2, págs. 113-131.
- MILLER, G.A. (1956): "The Magical Number Seven or Minus Two: Some Limits On Our Capacity of Processing Information". *Psychological Review*, nº 63, págs. 81-97.
- MIZUMOTO, M. (1989): "Pictorial Representations of Fuzzy Connectives. Part I: Cases t-Norms, t-Conorms and Averaging Operators". *Fuzzy Sets and Systems*, nº 31, págs. 217-242.
- MONTOYA-WEISS, M. y CALANTONE, R. (1994): "Determinants of New Product Performance: A Review and Meta-analysis". *Journal of Product Innovation Management*, Vol. 11.
- NARVER, J.C. y SLATER, S.F. (1990): "The Effect of Market Orientation on Business Profitability". *Journal of Marketing*, Vol. 54, octubre, págs.20-28.
- NORMAN, M.G. y MOSCATO, P. (1991): "A Competitive-Cooperative Approach to Complex Combinatorial Search". *Proceedings of the 20<sup>th</sup> Joint Conference on Informatics and O.R.* (20<sup>th</sup> JAIIO), Buenos Aires, págs. 315-329.
- OEI, C.K.; GOLDBERG, D.E. y CHANG, S.J. (1991): "Tournament Selection, Nicheing and the Preservation of Diversity". *ILLIGAL Report n° 91011*. University of Illinois at Urbana-Champaign.
- PAGE, A.L. (1993): "Assessing New Product Development Practices and Performance: Establishing Crucial Norms". *Journal of Product Innovation Management*, 10, 4, págs. 273-290.
- PEDRYCZ, W. (1996): "Fuzzy Modelling: Paradigms and Practice". Kluwer Academic.
- PEIRCE, C. (1955): "The Scientific Attitude and Fallibilism". Incluido en BUCHLER, J. (ed.): "Philosophical Writings of Peirce". Dover Publications.
- RADCLIFFE, N.J. (1992): "Non-Linear Genetic Representations". Incluido en MÄNNER, R. y MANDERICK, B. (eds.): "Parallel Problem Solving From Nature 2". Elsevier Science Publishers, Amsterdam, págs. 259-268.

- RAY, M.R. (1995): "Cost Management for Product Development". *Journal of Cost Management*, Vol. 9, primavera, págs.52-61.
- REEVES, C.R. (1993a): "Modern Heuristic Techniques for Combinatorial Problems. *Advanced Topics in Computer Science*". Blackwell Scientific Publications, Oxford
- REEVES, C.R. (1993b): "Using Genetic Algorithms with Small Populations". Incluido en FORREST, S. (ed.): "Proceedings of the Fifth International Conference on Genetic Algorithms", Morgan Kaufmann, San Mateo CA, págs. 92-99.
- REICH, Y. (1995): "Computational Quality Function Deployment is Knowledge Intensive Engineering". *Proceedings of KIC-1 (Knowledge Intensive CAD)*, IFIP WG 5.2, Helsinki, septiembre.
- RESCHER, N. (1984): "The Limits of Science". University of California Press, Berkeley.
- ROSENAU, M.D. (1988): "From Experience Faster New Product Development". *Journal of Product Innovation Management*, Vol. 5, febrero, págs.150-153.
- ROSS, P. (1988): "The Role of Taguchi Methods and Design of Experiments in QFD". *Quality Progress*, 21, junio, págs. 23-34.
- ROUBENS, M. (1997): "Fuzzy Sets and Decision Analysis". *Fuzzy Sets and Systems*, 90, págs. 199-206.
- RYAN, M.J.; BUZAS, T.H. y RAMASWAMY, V. (1995): "Making CSM a Power Tool". *Marketing Research*, Vol. 7, nº 1, verano, págs. 11-16.
- SAHNI, S. y GONZÁLEZ, T. (1976): "P-complete Approximation Problems". *Journal of the ACM*, nº 23, págs. 555-565.
- SAHNI, S. y GONZÁLEZ, T. (1976): "P-complete Approximation Problems". *Journal of the ACM*, 23, págs. 555-565.
- SANCHEZ, R. (1995): "Strategic Flexibility in Product Competition". *Static Management Journal*. Vol. 16, verano, págs.135-159.
- SANTOS, M.L. y VÁZQUEZ, R. (1997): "Factores Condicionantes del Resultado de Nuevos Productos en las Empresas de Alta Tecnología". *Revista Española de Investigación de Marketing ESIC*, Vol. 1.
- SCHAFFER, J.D. (1985): "Multiple Objective Optimizacion with Vector Evaluated Genetic Algorithms". Incluido en GEFENSTETTE, J.J. (ed.): "Proceedings of the First International Conference on Genetic Algorithms". Lawrence Erlbaum, New Jersey, págs. 93-100.

- SCHAFFER, J.D.; CARUANA, R.A.; ESHELMAN, L.J. y DAS, R. (1989): "A Study of Control Parameters Affecting online Performance of Genetic Algorithms for Function Optimization". Incluido en SCHAFFER, J.D. (ed.): "Proceedings of the Third International Conference on Genetic Algorithms". Morgan Kaufmann, San Mateo, págs. 51-60.
- SETHI, R. (2000): "New Product Quality and Product". *Journal of Marketing*, Vol. 64, abril, págs.1-15.
- SIITONEN, A. (1984): "Demarcation of Science from the Point of View of Problems and Problem-Stating". *Philosophia Naturalis*, Heft 2-4, págs. 339-353.
- SINGH, J. (1988): "Consumer Complaint Intentions and Behavior: Definitional and Taxonomical Issues". *Journal of Marketing*, Vol. 52, enero, págs. 93-107.
- SOUDER, W.E. (1988): "Managing Relations Between R&D and Marketing in New Product Development Projects". *Journal of Product Innovation Management*, Vol. 5, marzo, págs.6-19.
- SPEARS, W.M. y DE JONG, K.A. (1991): "On the Virtues of Parameterized Uniform Crossover". Incluido en BELEW, R. y BOOKER, L.B. (eds.): "Proceedings of the Fourth International Conference on Genetic Algorithms". Kaufmann, San Mateo, págs. 230-236.
- SPRENG, R.A.; MACKENZIE, S.B. y OLSHAVSKY, R.W. (1996): "A Reexamination of the Determinants of Consumer Satisfaction". *Journal of Marketing*, Vol. 60, nº 3, julio, págs. 15-32.
- STOWELL, D. (1989): "Quality in the Marketing Process". *Quality Progress*, 22, 10, págs. 34-51.
- STÜTZLE, T. (1997): "MAX-MIN Ant System for Quadratic Assignment Problems". *Technical Report AIDA 97-04*.
- STÜTZLE, T. y DORIGO, M. (1992a): "ACO Algorithms for the Travelling Salesman Problem". Université Libre de Bruxelles, Bélgica.
- STÜTZLE, T. y DORIGO, M. (1992b): "ACO Algorithms for the Quadratic Assignment Problem". Université Libre de Bruxelles, Bélgica.
- STÜTZLE, T. y HOOS, H. (1997): "MAX-MIN Ant System and Local Search for the Traveling Salesman Problem". *IEEE 4ª Conferencia Internacional sobre Computación Evolutiva (ICEC'97)*, IEEE Press.
- STÜTZLE, T. y HOOS, H. (1998): "Improvements on the Ant-System: Introducing the MAX-MIN Ant System". Incluido en ALBRECHT, R.F.; SMITH, G.D. y STEELE, N.C. (eds.): "Artificial Neural Networks and Genetic Algorithms". Springer Verlag, Wien New York, págs. 245-249.



- STÜTZLE, T. y HOOS, H. (1999): "MAX-MIN Ant System and Local Search for Combinatorial Optimization Problems". Incluido en VOSS, S.; MARTELLO, S.; OSMAN, I.H. y ROUCAIROL, C. (eds.): "Meta-Heuristics: Advances and Trends in Local Search Paradigms for Optimization". Kluwer, Boston, págs. 313-329.
- SULLIVAN, L. (1986): "Quality Function Deployment: A system to Assure that Customers Needs Drive the Product Design and Production Process". *Quality Progress*, 19, junio, págs. 14-26.
- SYSWERDA, G. (1989): "Uniform Crossover in Genetic Algorithms". Incluido en SCHAFFER, J.D. (ed.): "Proceedings of the Third International Conference on Genetic Algorithms". Morgan Kaufmann, San Mateo CA, págs. 2-9.
- TACU, A.P. y STEFAN, V. (1996a): "The Method of Forming on a Hierarchy System Depending on Multiple Characteristics by Using Real Ranks". Incluido en LÓPEZ GONZÁLEZ, E. (ed.): "Proceedings of International Conference on Intelligent Technologies in Human-Related Sciences". Secretariado de Publicaciones, Universidad de León, Vol. I, págs. 295-299.
- TACU, A.P. y STEFAN, V. (1996b): "The Problem of Multicriterial Decision using Real Ranks". Incluido en LÓPEZ GONZÁLEZ, E. (ed.): "Proceedings of International Conference on Intelligent Technologies in Human-Related Sciences". Secretariado de Publicaciones, Universidad de León, Vol. I, págs. 321-326.
- TAGUCHI, G. y CLAUSING, D. (1990): "Robust Quality". *Harvard Business Review*, 90, 1, págs. 66-75.
- TAILLARD, E.D. y GAMBARDELLA, L.M. (1997): "Adaptive Memories for the Quadratic Assignment Problem". *Technical Report IDSIA-87-97*, IDSIA, Lugano.
- TAKEUCHI, H. y NONAKA, I. (1986): "The New Product Development Game". *Harvard Business Review*, Vol. 64, enero-febrero, págs.137-146.
- TATE, D. Y SMITH, A.E. (1995): "A Genetic Approach to the QAP". *Computers and Operations Research*, Vol. 22, págs. 73-73.
- TETTAMANZI, A.G. (1995): "Evolutionary Algorithms and Fuzzy Logic: A Two-way Integration". *2<sup>nd</sup> Joint Conference on Information Sciences, Wrightsville Beach, NC*, págs. 464-467.
- TONG, M. y BONISSONE, P. P. (1980): "A Linguistic Approach to Decision Making with Fuzzy Sets". *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 10, págs. 716-723.
- TORRA, V. (1996): "Negation Functions Based Semantics for Ordered Linguistic Labels". *International Journal of Intelligent Systems*, 11, págs. 975-988.
- TORRA, V. (1999): "Linguistic Aggregation in Non-unified domains". *Proceedings EUROFUSE-SIC 99*, Budapest, págs. 188-193.

- TRILLAS, E. y VALVERDE, L. (1985): "On Implication and Indistinguishability in the Setting of Fuzzy Logic" Incluido en KACPRZYK, J. y YAGER, R.R. (eds.): "Management Decision Support System using Fuzzy Sets and Possibility Theory". Verlag TÜV Rheinland, págs. 198-212.
- TURBAN, E. y MEREDITH, J.R. (1991): "Fundamentals of Management Science". IRWIN, Boston.
- URBAN, G.L.; CARTER, T.; GASKINS, S. y MUCHA, Z. (1986): "Market Share Rewards to Pioneering Brands: An Empirical Analysis and Strategic Implications". *Management Science*, Vol. 32, págs. 645-659.
- VAN LAARHOVEN, P.J.M. y AARTS, E.H.L. (1987): "Simulated Annealing: Theory and Applications". D. Reidel Publisher.
- VERYZER, R.W. (1998): "Discontinuous Innovation and the New Product Development Process". *Journal of Product Innovation Management*, Vol. 15, págs.304-321.
- VOSE, M.D. (1991): "Generalizing the notion of schema in genetic algorithms". *Artificial Intelligence*, 50, págs. 385-396.
- WASSERMAN, G.S. (1991): "On How to Prioritize Design Requirements During the QFD Planning Process". *IIE Transactions*, 25, 3, págs. 59-65.
- WHITLEY, L.D. (1987): "Using reproductive evaluation to improve genetic search and heuristic discovery". Incluido en GREFENSTETTE, J.J. (ed.): "Proceedings of the Second International Conference on Genetic Algorithms". Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, págs. 116-121.
- WIND, Y. y MAHAJAN, V. (1988): "New Product Development Process: A Perspective for Reexamination". *Journal of Product Innovation Management*, Vol. 5, diciembre, págs.304-310.
- WOLPERT, D.H. y MACREADY, W.G. (1995): "No Free Lunch Theorems for Search". *Technical Report SFI-TR-95-02-010*, Santa Fe Institute.
- WOLPERT, D.H. y MACREADY, W.G. (1997): "No Free Lunch Theorems for Optimization". *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 1, págs. 67-82.
- YAGER, R.R. (1988): "On Ordered Weighted Averaging Aggregation Operators in Multicriteria Decision Making". *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics* 18, págs. 183-190.
- YAGER, R.R. (1991): "Connectives and Quantifiers in Fuzzy Sets". *Fuzzy Sets and Systems*, nº 40, págs. 39-75.
- YAGER, R.R. (1992a): "Fuzzy Screening Systems". Incluido en LOWEN, R. (ed.): "Fuzzy Logic: State of the Art", Kluwer Academic Publishers, Boston, págs. 251-261.

- YAGER, R.R. (1992b): "Applications and Extension of OWA Aggregation". *International Journal of Man-Machine Studies*, 37, págs. 103-132.
- YAGER, R.R. (1993): "Non-Numeric Multi-Criteria Multi-Person Decision Making". *Group Decision and Negotiation*, 2, págs. 81-93.
- YAGER, R.R. (1995a): "An Approach to Ordinal Decision Making". *International Journal Approximate Reasoning*, 12, págs. 237-261.
- YAGER, R.R. (1995b): "An Unified Approach to Aggregation Based Upon MOM and MAM Operators". *International Journal Intelligent Systems*, nº 10, págs. 809-855.
- YAGER, R.R. (1998): "Fusion of Ordinal Information using Weighted Median Aggregation". *International Journal of Approximate Reasoning*, nº 18, págs. 32-35.
- YAGER, R.R. y FILEV, D.P. (1993): "Parameterized And-Like and Or-Like OWA Operators". *International Journal of General Systems*, nº 22, págs. 297-316.
- ZADEH, L.A. (1965): "Fuzzy Sets". *Information and Control*, nº 8, págs. 338-353.
- ZADEH, L.A. (1973): "Outline of a New Approach to the Analysis of Complex Systems and Decision Processes". *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 3, 1, págs. 28-44.
- ZADEH, L.A. (1975): "The Concept of a Linguistic Variable and its Applications to Approximate reasoning". Parte 1, *Information Sciences* 8, págs. 199-249, Parte II, *Information Sciences* 8, págs. 301-357, Parte III, *Information Sciences* 9, págs. 43-80.
- ZADEH, L.A. (1983): "A Computational Approach to Fuzzy Quantifiers in Natural Languages". *Computers and Mathematics with Applications*, 9, págs. 149-184.
- ZADEH, L.A. y KACPRZYK, J. (eds.) (1999): "Computing with Words in Information/Intelligent Systems". Vol. I y Vol. II. Physica-Verlag, Heidelberg.
- ZIMMERMANN, H.J. (1985): "Fuzzy Sets: Theory and its Applications". Kluwer Academic Publishers, Berlin.