



universidad
de león



Escuela de Ingenierías Industrial, Informática y Aeroespacial

MÁSTER EN INGENIERÍA AERONÁUTICA

Trabajo de Fin de Máster

ANÁLISIS DE TRANSFERENCIAS DE BAJA ENERGÍA AL PUNTO
L4 DE LAGRANGE EN EL SISTEMA TIERRA-LUNA

ANALYSIS OF LOW ENERGY TRANSFERS TO THE L4
LAGRANGE POINT IN THE EARTH-MOON SYSTEM

Autor: José Abraham Reina Corella
Tutor: Adrián Delgado Marcos

(Julio, 2023)

UNIVERSIDAD DE LEÓN
Escuela de Ingenierías Industrial, Informática y
Aeroespacial

MÁSTER EN INGENIERÍA AERONÁUTICA
Trabajo de Fin de Máster

ALUMNO: José Abraham Reina Corella

TUTOR: Adrián Delgado Marcos

TÍTULO: Análisis de transferencias de baja energía al punto L4 de Lagrange en el sistema Tierra-Luna

TITLE: Analysis of low energy transfers to the L4 Lagrange Point in the Earth-moon system

CONVOCATORIA: Julio, 2023

RESUMEN:

El propósito del presente estudio es encontrar las posibles órbitas de transferencias que trasladen un satélite pequeño desde la Tierra hasta el punto L4 de Lagrange en el sistema Tierra-Luna.

Para ello, se ha elaborado un algoritmo con un propagador orbital que permite calcular todas las posibles trayectorias orbitales entre dichos puntos, imponiendo una serie de restricciones y de condiciones iniciales. El origen de la trayectoria es una órbita terrestre de aparcamiento, y el destino es una órbita estable en torno al punto L4 de Lagrange en el sistema Tierra-Luna. El aporte energético se lleva a cabo a través de dos impulsos: el primero se efectúa sobre el satélite encontrándose éste en una órbita de aparcamiento terrestre de 160km de altitud y el segundo impulso se efectúa sobre el satélite a la llegada a las cercanías del punto L4 de Lagrange, de manera que el satélite quede orbitando en torno a dicho punto. Para el análisis de la misión se tienen en cuenta la presencia de tres cuerpos celestes: El Sol, la Tierra, y la Luna.

El algoritmo se ha escrito a través del software MATLAB, y está diseñado para estudiar tanto las transferencias convencionales de Hohmann como las posibles Transferencias de Baja Energía, que utilizan la asistencia gravitacional lunar y solar. Para ello, el código se basa en un propagador que aplica las ecuaciones del Problema Restringido Bicircular de los Cuatro Cuerpos, que tiene en cuenta la presencia lunar así como la presencia solar en las ecuaciones de movimiento del satélite. Una vez escrito el algoritmo, se ha validado a través del software GMAT y la literatura existente, obteniendo un error inferior al 1%.

Lo que se obtiene del algoritmo es una familia de todas las transferencias posibles entre la Tierra y el punto L4, tanto externas como internas, habiéndose encontrado 4.865 resultados. Se ha comprobado que la perturbación solar aumenta el número total de transferencias posibles, y se ha elaborado un catálogo de las transferencias más representativas. Además, se ha analizado la dependencia de las soluciones encontradas con las condiciones iniciales, tanto en posición, velocidad y tiempo. Una vez halladas todas estas trayectorias, se han encontrado aquellas transferencias más relevantes, como las de menor duración (siendo de 2,12 días), o las de menor consumo (siendo de 3,704 km/s).

ABSTRACT:

The purpose of the present study is to find the possible orbits that transfer a small satellite from the Earth to the L4 Lagrangian point in the Earth-Moon system.

For this purpose, an algorithm with an orbital propagator has been developed to calculate all possible orbital trajectories between these points, imposing a series of constraints and initial conditions. The origin of the trajectory is a parking Earth orbit, and the destination is a stable orbit around the Lagrangian point L4 in the Earth-Moon system. The energy is given through two impulses: the first with the satellite on an Earth parking orbit of 160km of altitude and the second one when it arrives near the L4 Lagrange point, so that the satellite remains orbiting around it. For the analysis of the mission, the presence of three celestial bodies is considered: the Sun, the Earth, and the Moon.

The algorithm has been written through MATLAB software, and designed to study both conventional Hohmann transfers and possible Low Energy Transfers, which use lunar and solar gravitational assistance. To do so, the code is based on a propagator that applies the equations of the Restricted Bicycle Four-Body Problem, which takes into account the lunar presence as well as the solar presence in the satellite's equations of motion. Once the algorithm was written, it has been validated through GMAT software and existing literature, obtaining an error of less than 1%.

The output product of the algorithm is a family of all possible transfers between the Earth and the L4 point, both external and internal, having found 4.865 results. It has been found that the solar perturbation increases the total number of possible transfers, and a catalog of the most representative transfers has been elaborated. In addition, the dependence of the solutions found with the initial conditions, both in position, velocity and time, has been analyzed. Once all these trajectories have been found, the most relevant transfers have been found, such as those with the shortest duration (2.12 days), or those with the lowest consumption (3.704 km/s).

Palabras clave: L4, Lagrange, Transferencia de Baja Energía, Optimización de Trayectorias

Firma del alumno:

VºBº Tutor/es:

Nomenclatura

Símbolos Griegos

α	Ángulo entre la posición del satélite en el momento del primer impulso y el vector Tierra-luna
β	Módulo de la velocidad del satélite tras el primer impulso adimensionalizado con la velocidad en la órbita aparcamiento
Δt	Tiempo entre el primer impulso y el segundo impulso
ΔV_1	Incremento de velocidad debido al primer impulso, en valor absoluto
ΔV_L	Incremento de velocidad debido al segundo impulso, en valor absoluto (también llamado ΔV_2)
ΔV_T	Incremento de velocidad debido a ambos impulsos, en valor absoluto. También expresado como ΔV .
ϕ	Ángulo entre el vector Tierra-Luna y el vector Tierra-Satélite
μ	Relación entre la masa de la Tierra y la masa de la luna
μ_t	Constante gravitacional geocéntrica
ρ	Distancia Sol-(Tierra-Luna) adimensionalizada
θ	Ángulo entre el vector Tierra-Sol y el vector Tierra-Luna en el momento del primer impulso
ξ	Energía mecánica específica de un satélite en órbita elíptica
Ω_3	Potencial efectivo del problema restringido de los tres cuerpos
Ω_4	Potencial efectivo del problema restringido de los cuatro cuerpos
ω_s	Velocidad de rotación del Sol respecto a la Tierra adimensionalizada

Símbolos Latinos

A	Área barrida por el vector Sol-Planeta en una órbita cónica
a	Semi-eje mayor de una cónica
a_s	Aceleración producida por la presencia solar
a_{em}	Aceleración producida por la presencia del sistema Tierra-Luna
a_x	Aceleración del satélite en la dirección del vector Tierra-Luna
a_y	Aceleración del satélite en la dirección perpendicular al vector Tierra-Luna
B	Baricentro del sistema Tierra-Luna
b	Semi-eje menor de una cónica
$BCRABP$	Problema restringido bi-circular de los cuatro cuerpos
C	Constante de Jacobi de un cuerpo en órbita
c	Distancia entre el centro y el foco de una cónica
DU	Longitud Característica
E	Anomalía excéntrica de una cónica
e	Excentricidad de una cónica
F	Foco de una cónica
F_g	Fuerza gravitatoria
f_m	Cociente entre la aceleración producida por la perturbación solar y la aceleración producida por el sistema Tierra-Luna
G	Constante de gravitación universal
h	Momento angular de un satélite en órbita elíptica
h_{OAT}	Altitud de la órbita de aparcamiento terrestre respecto al nivel del mar
L_4	Cuarto punto de Lagrange en el sistema Tierra-Luna
L_5	Quinto punto de Lagrange en el sistema Tierra-Luna
M	Anomalía media de una cónica
m	Masa de un cuerpo orbitando
m_s	Masa del Sol adimensionalizada
MU	Masa característica
np_α	Número de valores de α analizados
np_β	Número de valores de β analizados
np_θ	Número de valores de θ analizados
p	Semilado recto de una elipse
r	Distancia entre un satélite y el centro del cuerpo en torno al que orbita
\vec{r}	Vector posición de un satélite respecto al centro del cuerpo en torno al que orbita
r_1	Distancia entre un satélite y el centro del cuerpo primario en torno al que orbita
r_2	Distancia entre un satélite y el centro del cuerpo secundario en torno al que orbita
r_a	Radio en el apogeo de una órbita elíptica
R_{L4}	Distancia respecto al punto teórico L_4 a la que se produce el segundo impulso

r_{OAT}	Distancia entre la órbita de aparcamiento terrestre y el centro de la Tierra
$(R_{orb})_{max}$	Distancia máxima respecto al punto teórico L4 que adquiere el satélite tras el segundo impulso
R_m	Radio medio de la luna
r_p	Radio en el perigeo de una órbita elíptica
R_T	Radio medio de la Tierra
SOI	Esfera de influencia gravitacional de un cuerpo masivo
T	Periodo Orbital
t	Tiempo transcurrido en órbita desde el origen de tiempos
t_i	Tiempo en el que se produce el primer impulso
t_f	Tiempo en el que se produce el segundo impulso
t_{L4}	Tiempo entre el primer y el segundo impulso (también llamado Δ_t)
TU	Tiempo Característico
v	Módulo de la velocidad de un cuerpo orbitando
\vec{v}	Velocidad vectorial de un cuerpo orbitando
V_0	Módulo de la velocidad del satélite inmediatamente después del primer impulso
V_c	Módulo de la velocidad del satélite en la órbita circular de aparcamiento terrestre
v_{esc}	Velocidad de escape de un satélite
\vec{X}	Vector de estado del satélite
x	Posición del satélite en la dirección del vector Tierra-Luna
y	Posición del satélite en la dirección perpendicular al vector Tierra-Luna, contenido en el plano orbital lunar
z	Posición del satélite en la dirección perpendicular al vector Tierra-Luna y perpendicular al plano orbital lunar
\dot{x}	Velocidad del satélite en la dirección del vector Tierra-Luna
\dot{y}	Velocidad del satélite en la dirección perpendicular al vector Tierra-Luna, contenido en el plano orbital lunar
\dot{z}	Velocidad del satélite en la dirección perpendicular al vector Tierra-Luna y perpendicular al plano orbital lunar
x_0	Posición del satélite en el momento del primer impulso, en la dirección del vector Tierra-Luna
y_0	Posición del satélite en el momento del primer impulso, en la dirección perpendicular al vector Tierra-Luna

Índice general

	Página
Introducción	1
Objetivos	1
Estructura	2
Motivación del proyecto	3
1. Fundamentos teóricos	5
1.1. Leyes de Kepler	5
1.2. Ley de gravitación de Newton	7
1.3. Propiedades de las cónicas	8
1.4. Problema de los dos cuerpos	14
1.5. Problema de los n cuerpos	18
1.6. Esfera de influencia terrestre	20
1.7. Sistemas de referencia típicos	22
1.8. Transferencia de Hohmann	23
1.9. Asistencia Gravitacional	25
1.10.Historia de las Transferencias de Baja Energía	27
2. El Problema de los tres cuerpos	30
2.1. Problema Restringido Circular de los Tres Cuerpos	31
2.2. Puntos de Lagrange	34
2.3. Constante de Jacobi y Regiones de Hill	36
2.4. Problema Restringido Bicircular de los Cuatro Cuerpos	38
2.5. Sistema de Coordenadas específico	41
3. Análisis de la misión	45
3.1. Esquema de la misión	45
3.2. Órbita de aparcamiento terrestre	47
3.3. Colisión con la Tierra o la Luna	48
3.4. Criterio de llegada al punto L4 de Lagrange	48
3.5. Parametrización de las condiciones iniciales	55
3.6. Transferencias Externas e Internas	59
3.7. Constantes del problema	59
4. Implementación numérica	62
4.1. Planteamiento del problema	62
4.2. Implementación de las condiciones iniciales	64

4.3. Programación del propagador	66
4.4. Método de integración	67
4.5. Tiempo de integración	69
4.6. Comprobación de restricciones	69
4.7. Almacenamiento de datos del resultado	71
4.8. Resumen de la implementación	72
4.9. Validación del algoritmo	73
5. Resultados	79
5.1. Resultados generales	81
5.2. Efecto de las parámetros iniciales en los resultados	83
5.3. Parámetros de llegada al punto L4	95
5.4. Análisis de Trayectorias específicas	100
Conclusiones	117
Conclusiones	117
Trabajo futuro	121
Bibliografía	124
A. Diagrama de Grant	126
B. Código utilizado	127

Índice de Figuras

	Página
1.1. Dibujo esquemático de una elipse [10]	8
1.2. Representación de una órbita elíptica en torno a la Tierra [12]	10
1.3. Representación de una órbita parabólica en torno a la Tierra [12]	12
1.4. Representación de una órbita hiperbólica en torno a la Tierra [12]	13
1.5. Geometría de la ecuación de movimiento respecto al baricentro [12]	19
1.6. Aceleración gravitatoria debido a la Tierra, el Sol y Marte, de un satélite en transferencia a Tierra-Marte [12]	21
1.7. Detalle de la esfera de influencia de la Tierra [12]	21
1.8. Esquema de una transferencia de Hohmann [15]	24
1.9. Esquema de una Asistencia Gravitacional [12]	27
1.10. Comparación entre una transferencia de baja energía y una transferencia de Hohmann [12]	29
2.1. Esquema del sistema CR3BP [1]	33
2.2. Esquema de los puntos de Lagrange en el sistema Tierra-Luna [4]	35
2.3. Valor de la constante de Jacobi en el sistema Tierra-Luna [12]	37
2.4. Esquema del Problema Restringido Bicircular de los cuatro cuerpos [5]	40
2.5. Esquema del sistema de coordenadas en el problema BCR4BP [1]	42
2.6. Esquema del sistema de coordenadas en el problema BCR4BP [1]	44
3.1. Esquema de la misión que debe cumplirse para que el resultado se considere como válido.	46
3.2. Zona de estabilidad en torno a L4 para velocidad inicial nula, en coordenadas polares	49
3.3. Órbitas teóricas entorno al punto L4, en ejes adimensionalizados con la distancia Tierra-Luna [3]	50
3.4. Esquema de una órbita elíptica en torno a L4 y punto de aplicación del segundo impulso [4]	51
3.5. Efecto de la perturbación solar en las cercanías a la Tierra [5]	52

3.6.	Distancia máxima orbital en torno a L4 con respecto a la distancia inicial de la órbita, sin perturbación solar.	53
3.7.	Número de soluciones obtenidas con respecto a la distancia máxima orbital establecida, con perturbación solar	54
3.8.	Esquema de la posición inicial del satélite, mostrando el ángulo α	56
4.1.	Comparación entre los diferentes métodos de integración. Imagen obtenida de [20]	68
4.2.	Esquema lógico del código implementado	72
4.3.	Programa GMAT, de la NASA, usado para validar el algoritmo	73
4.4.	Programación del estado inicial de la misión de simulación en GMAT	74
4.5.	Comparación del resultado de una órbita en torno a la Tierra con el programa GMAT y el Algoritmo	76
4.6.	Detalle de la comparación del resultado de una órbita en torno a la Tierra con el programa GMAT y el Algoritmo	77
5.1.	Compilación de todas las trayectorias a L4 halladas	82
5.2.	División de las trayectorias halladas entre Trayectorias de Naja Duración y Trayectorias de Bajo Consumo.	83
5.3.	Comparación entre las soluciones halladas al tomar en cuenta el efecto del Sol y sin tomarlo en cuenta	84
5.4.	Comparación de dos trayectorias con la misma condición inicial, calculada con y sin el efecto del Sol	85
5.5.	Máxima distancia orbital con respecto al punto L4, mostrando resultados con y sin el efecto del Sol	86
5.6.	Comparación de dos órbitas con la misma condición inicial (punto cercano a L4), calculada con y sin el efecto del Sol	87
5.7.	Efecto de la posición del Sol (en el momento del primer impulso) en ΔV y Δt	88
5.8.	Repetitividad de la posición del Sol (en el momento del primer impulso) en los resultados encontrados	89
5.9.	Efecto de la posición del Sol (en el momento del primer impulso) en el consumo y en el tiempo	90
5.10.	Efecto de la ΔV del primer impulso en el consumo y en el tiempo	91
5.11.	Repetitividad de la ΔV del primer impulso en los resultados encontrados	91
5.12.	Efecto de la ΔV del primer impulso en el consumo y en el tiempo	92
5.13.	Efecto de la posición orbital (en el momento del primer impulso) en el consumo y en el tiempo	93
5.14.	Repetitividad de la posición orbital (en el momento del primer impulso) en los resultados encontrados	94
5.15.	Efecto de la posición orbital (en el momento del primer impulso) en el consumo y en el tiempo	95
5.16.	Velocidad de llegada al punto L4 según las condiciones iniciales	96
5.17.	Proporción de la ΔV_T que corresponde a la velocidad de llegada a L4, según varía β	96

5.18. Distancia máxima al punto L4 durante la órbita en torno al punto L4, según la distancia inicial	97
5.19. Órbita “MinDis1”, con la menor relación $(R_{orb})_{max}/R_{L4}$	98
5.20. Órbita con menor distancia al punto L4 durante la órbita en torno al punto L4 (MinDis2)	99
5.21. Trayectorias con una distancia a la Tierra mayor a 4DU comparadas con el resto de trayectorias	101
5.22. Trayectoria con la mayor distancia a la Tierra	102
5.23. Efecto de la posición del Sol (θ) en las órbitas de baja duración	103
5.24. Detalle del efecto de la posición del Sol (θ) en las órbitas de baja duración	104
5.25. Trayectorias de baja duración para $\theta = 0deg$ y tiempos menores a los 22 días	104
5.26. Ejemplos de trayectorias de baja duración (BD1 en azul, BD2 en rojo y BD3 en amarillo)	105
5.27. Trayectoria de mínima duración (MinDur1)	107
5.28. Trayectoria de mínimo consumo para tiempos menores a 20 días (MinDur2)	108
5.29. Conjunto de trayectorias de bajo consumo. Se etiquetan 4 trayectorias concretas con BC1, BC2, BC3, y BC4	109
5.30. Trayectoria del punto etiquetado como BC1	110
5.31. Trayectoria del punto etiquetado como BC2	111
5.32. Trayectoria del punto etiquetado como BC3	112
5.33. Trayectoria del punto etiquetado como BC4	114
5.34. Ejemplos de trayectorias numeradas según orden de hallazgo, en ejes rotatorios, con $\theta = 0 rad.$	116
5.35. Ejemplos de trayectorias numeradas según orden de hallazgo, en ejes inerciales, con $\theta = 0 rad.$	116
A.1. Diagrama de Grant del proceso de elaboración del TFM	126

Índice de Tablas

	Página
2.1. Posición de los puntos de Lagrange en el sistema Tierra-Luna (coordenadas adimensionalizadas) [6]	36
4.1. Comparación de resultados del proceso de Validación	77
5.1. Tabla de cantidades características	80
5.2. Descripción de los parámetros característicos de una misión .	81
5.3. Parámetros de tres trayectorias de Baja Distancia Orbital en torno a L4	100
5.4. Parámetros de la trayectoria con mayor distancia respecto a la Tierra	102
5.5. Parámetros más característicos de la trayectoria de menor duración (MinDur1)	107
5.6. Parámetros más característicos de la órbita de menor consumo con tiempos menores a 20 días (MinDur2)	108
5.7. Parámetros más característicos de la trayectoria BC1 (menor consumo para tiempos inferiores a los 30 días)	111
5.8. Parámetros más característicos de la trayectoria BC2 (menor consumo para tiempos inferiores a los 50 días)	112
5.9. Parámetros más característicos de la trayectoria BC3 (menor consumo para tiempos inferiores a los 75 días)	113
5.10. Parámetros más característicos de la trayectoria BC4 (menor consumo para tiempos inferiores a los 90 días)	114

Introducción

Objetivos

El principal propósito de la investigación del presente documento es encontrar y analizar las posibles transferencias entre la Tierra y el punto L4 de Lagrange (en el sistema Tierra-Luna).

Para ello, habrá que elaborar y validar un algoritmo con un propagador que permita calcular todas las posibles transferencias, teniendo en cuenta una serie de restricciones y condiciones iniciales. A fin de tener en cuenta la influencia de la presencia del Sol y la Luna, el propagador del algoritmo se deberá basar en el problema restringido bicircular de los cuatro cuerpos.

Una vez hallada toda la familia de transferencias posibles, se analizará el impacto de las condiciones iniciales en el tiempo y el coste de la misión. Además, se categorizarán las trayectorias encontradas, estudiando aquellas trayectorias con mínimo consumo y mínima duración.

Es importante mencionar que en este estudio se pretende analizar posibles soluciones de manera únicamente preliminar, aportando conocimiento de cómo afectan diferentes parámetros a los resultados posibles y expandiendo el conocimiento sobre las trayectorias encontradas. Este análisis preliminar es una etapa previa a los análisis detallados que pueden llevar a cabo otras herramientas que presenten mayor precisión. No es, por tanto, objetivo de este trabajo el realizar un estudio detallado y preciso de las órbitas, sino el hallar una familia de posibles trayectorias preliminares que puedan servir de punto de partida de futuros estudios más precisos.

En resumen, los objetivos del presente estudio son:

Objetivo Principal: Encontrar y analizar las posibles transferencias entre la Tierra y el punto L4.

Para ello, se tendrá que:

- Elaborar un código basado en el Problema Restringido Bicircular de los Cuatro Cuerpos que permita calcular trayectorias entre la Tierra y el punto L4 de Lagrange en el sistema Tierra-Luna.
- Encontrar todas las órbitas de transferencia posibles dentro de un rango de consumo y tiempo preestablecidos.

- Hallar, entre los resultados obtenidos, las órbitas de transferencia que requieran menor consumo y menor tiempo de transferencia.
- Analizar el efecto de las condiciones iniciales en el coste y el tiempo de transferencia.
- Categorizar las órbitas de transferencia encontradas.

Estructura

El presente documento se estructura de la siguiente manera:

1. **Fundamentos Teóricos:** Donde se exponen las teorías físicas y matemáticas sobre las que se ha realizado el estudio, incluyendo las leyes de Kepler y Newton y un resumen de la geometría cónica. Además, se explican conceptos básicos necesarios, como la esfera de influencia terrestre, las transferencias de Hohmann, o la asistencia gravitacional, que permitirán al lector entender mejor el planteamiento teórico del estudio realizado.
2. **Problema de los Tres Cuerpos:** Donde se exponen las ecuaciones que permiten calcular la trayectoria de un satélite en el entorno entre la Tierra y la Luna, tanto con la presencia solar como sin ella. También se explican conceptos concretos de gran interés, como los puntos de Lagrange, la constante de Jacobi o las regiones de Hill.
3. **Análisis de la Misión:** Donde se explica la misión que se lleva a cabo y que se pretende optimizar, detallando el uso de una órbita terrestre, la maniobra de doble impulso, las restricciones de colisión o tiempo máximo, o el criterio con el que se considera alcanzado el punto L4 de Lagrange.
4. **Implementación Numérica:** En donde se detalla cómo se ha implementado numéricamente el algoritmo que permite el cálculo de todas las trayectorias posibles. En este apartado, además se hablará sobre los criterios utilizados para seleccionar el método de integración y los tiempos de integración. Por último, en este apartado también se explicará el proceso de validación y verificación del código realizado.
5. **Resultados:** Donde se presentarán los resultados obtenidos en el análisis de las posibles trayectorias. Además, atendiendo a diferentes aspectos, se determinan las trayectorias de menor consumo, menor tiempo y menor distancia orbital. Por último, se categorizan las trayectorias encontradas.
6. **Conclusiones:** Se realiza una exposición de las conclusiones del estudio, así como una propuesta de posible trabajo futuro.
7. **Anexos:** En el anexo se incluye un diagrama de Gantt con el proceso de elaboración del proyecto, así como el algoritmo utilizado para hallar

las posibles trayectorias, y el código que se ha utilizado para dibujar todas las gráficas que se hallan en el capítulo de resultados.

Motivación del proyecto

La exploración espacial ha sido fuente de interés desde hace más de cincuenta años, cuando Estados Unidos y la Unión Soviética empezaron la carrera espacial para alcanzar la Luna. Los avances tecnológicos que han surgido gracias a dicha investigación espacial han beneficiado enormemente a la humanidad. Tras la carrera espacial, el interés por alcanzar la Luna y las zonas cercanas a ella se vio reducido durante algunas décadas. Sin embargo, en los últimos años se ha observado un renovado interés por las misiones a la Luna y a la zona cislunar (zona interior a la órbita lunar) [1].

El interés por regresar a la Luna ha crecido en los últimos años. Este hecho se puede observar, por ejemplo, en las actividades de Israel, Estados Unidos, o China, que tienen proyectos actualmente con el propósito de alcanzar la Luna [1]. Este renovado interés no se limita únicamente a aterrizar en la Luna, sino que además, varios autores en los últimos años han replanteado la idoneidad de la zona cercana a la órbita lunar como candidatos para determinadas misiones espaciales [2].

Entre las zonas cercanas a la órbita lunar que más interés suscitan se encuentran dos puntos conocidos como los puntos “L4 y L5 de Lagrange”, que han sido presentados académicamente como posiciones destacables para situar satélites o estaciones espaciales [3]. Estos dos puntos se encuentran a la misma distancia de la Tierra que de la Luna, en el plano orbital lunar, formando un triángulo equilátero con la Tierra y la Luna, y poseen ciertas propiedades que los hace especialmente interesantes. El uso de estos puntos como potenciales candidatos para colocar satélites o estaciones espaciales se ha discutido desde hace mucho tiempo, remontándose a los años setenta [1].

Las propiedades que hacen que estos dos puntos sean de especial interés se basan principalmente en su estabilidad. Debido a su posición estratégica, desde un punto de vista teórico, un satélite puede ser colocado en uno de estos dos puntos sin sufrir ninguna perturbación que lo saque de su posición [4]. De esta manera, se podría colocar un satélite en estos puntos y que mantuviera su posición (relativa a la Tierra y la Luna) sin necesidad de consumir combustible [3]. Además, estos puntos se encuentran a la misma distancia de la Tierra que de la Luna, y mantienen dicha distancia indefinidamente, por lo que presentan una localización atractiva para satélites de comunicaciones u observación [1]. La capacidad de mantener satélites en un punto fijo (relativo a la Tierra) con un consumo de combustible virtualmente nulo, convierte a estos puntos como principales alternativas a las órbitas geoestacionarias, que cada vez se encuentran más pobladas [1].

El uso en comunicaciones no es la única utilidad que se le ha encontrado

a estos puntos. En los últimos años se han propuesto multitud de posibles misiones, tanto civiles como militares, que podrían aprovechar las cualidades únicas de los puntos L4 y L5 de Lagrange [1]. Entre otras, destaca la propuesta de O'Neill en los años setenta, que proponía crear una colonia en el punto L5 [3]. Otros académicos han propuesto estos puntos para posicionar un telescopio espacial, debido a la estabilidad de los mismos, y la distancia respecto a la Tierra; otros proyectos estudian cómo colocar una estación espacial que facilite los viajes entre la Tierra y la Luna [5]. No obstante, existen más ejemplos de posibles usos que han sido propuestos, entre los que se encuentran propuestas para posicionar sistemas de localización y navegación, sistemas de vigilancia de meteoritos, sistemas para detección anticipada de tormentas solares y puntos de comunicación con vehículos espaciales lejanos [1].

Todas estas potenciales aplicaciones suscitan el interés de muchos investigadores, que en los últimos años han estudiado las propiedades de estos puntos, así como las posibles misiones que podrían llevarse a cabo para transportar vehículos espaciales entre la Tierra y dichos puntos. Para que posicionar un satélite en estas ubicaciones no conlleve costes prohibitivos, es necesario buscar trayectorias que minimicen el gasto de combustible, sin penalizar en exceso el tiempo de transferencia [6]. Es así como surge la necesidad de estudiar las transferencias de baja energía, que aprovechan la presencia de la Luna para ayudar a colocar un satélite en los puntos L4 y L5, reduciendo el combustible necesario.

Sin embargo, el estudio de dichas trayectorias está en proceso, y aún queda mucha investigación que realizar al respecto. Algunos autores, como F. J. T. Salazar [3] realizan un estudio de las trayectorias de baja energía, pero teniendo en cuenta solamente la física del problema de los tres cuerpos (es decir, sin tener en cuenta el efecto del Sol). Otros, como Minghu Tan [5] realizan el estudio de transferencias que requieren un único impulso, para satélites que no lleven combustible que permita un segundo impulso. Autores como Francesco Topputo [7] y Kenta Oshima [8] estudian posibles transferencias entre la Tierra y los puntos L4 o L5 con dos impulsos, y teniendo en cuenta el efecto de la presencia del Sol, pero limitan sus resultados a tiempos de transferencias cortos.

El propósito de este documento es, basándose en el trabajo de [3], [4], [5], [7], [8], y [9], elaborar un algoritmo que permita calcular las posibles trayectorias de transferencia entre la Tierra y el punto L4 de Lagrange, encontrando las transferencias que menor consumo requieran para un tiempo permitido. El cálculo se hace basándose en el modelo del problema restringido bicircular de cuatro cuerpos (Sol-Tierra-Luna-Satélite) utilizando dos impulsos, uno para salir de la órbita circular terrestre y otro para entrar en la órbita en torno al punto L4 de Lagrange. El resultado principal busca ser un catálogo que muestre el consumo y el tiempo de transferencia de cada trayectoria. Una vez obtenida, se identificarán una serie de puntos de interés para analizar sus órbitas, estudiarlas y categorizarlas.

Capítulo 1

Fundamentos teóricos

En el presente capítulo se explicarán los fundamentos teóricos de la mecánica orbital en los que se basa el estudio realizado. Para ello, se repasarán las leyes de Kepler, que definen el movimiento de los planetas, así como las leyes de Newton, a fin de establecer las bases del movimiento de un satélite. Además, se expondrán las propiedades de las cónicas, para entender la geometría del movimiento orbital, y se explicarán los sistemas de referencias que se utilizarán en el trabajo. Por último, se presenta un breve resumen de la historia de las transferencias de baja energía.

Es importante mencionar que en el presente capítulo solo se presentarán las leyes, fórmulas y ecuaciones del movimiento orbital, pero no se explicará el proceso matemático para llegar a dichas expresiones, ni se demostrarán la validez de las mismas. El lector interesado en las demostraciones matemáticas puede consultarlas en la literatura [10], [11], y [12].

1.1. Leyes de Kepler

Durante muchos siglos, el movimiento planetario fue un misterio para las mentes más brillantes, debido a su complejidad y aparente anarquismo. Muchos científicos han dedicado su vida al estudio del comportamiento de los objetos fuera de la Tierra. Entre todos ellos, dos científicos destacan por sus aportaciones a esta materia: Johhanes Kepler e Isaac Newton [10].

Johannes Kepler es responsable del nacimiento de la mecánica orbital tal y como la conocemos hoy en día, al enunciar a principios del siglo diecisiete las tres leyes conocidas como “Leyes de Kepler”. Estas 3 leyes definen la cinemática planetaria, y son la base del estudio de la mecánica orbital. Estas tres leyes son las siguientes [11]:

1. **Ley de las órbitas:** *“Los planetas se mueven a lo largo de trayectorias elípticas con el Sol en uno de los focos”*

2. **Ley de las áreas:** “La razón de área por el radio vector en movimiento es constante en el tiempo”
3. **Ley de los periodos:** “La relación del cuadrado del periodo de revolución de cada planeta al cubo del semieje mayor de su órbita es el mismo para todos los planetas”

La primera ley de Kepler permite definir analíticamente la trayectoria de los planetas usando la figura matemática de las cónicas. Nótese que, aunque Kepler define las trayectorias como elípticas, más adelante Newton demostraría que las órbitas parabólicas e hiperbólicas también son posibles [10, pp. 110]. La expresión que define la posición de un planeta con respecto al Sol (situado en uno de los focos de la elipse) es [11, pp. 41]:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cdot \cos(\theta)}, \quad (1.1)$$

donde r es la distancia entre el planeta y el Sol, a es el semieje mayor de la elipse, e es la excentricidad de la elipse, θ es el ángulo que forma el vector Sol-Planeta con el vector Sol-Perigeo (siendo el perigeo el punto de la órbita más cercano al Sol). En la sección 1.3 se explicará más sobre las propiedades de las cónicas.

Esta primera ley de Kepler define la trayectoria geométrica de los planetas, mientras que la segunda ley de Kepler determina la tasa de movimiento de dicho planeta, estableciendo que el área barrida por el vector Sol-Planeta debe ser constante [13]. De esta manera, se fija la velocidad a la que se traslada el planeta en cada instante. Esta segunda ley se puede describir matemáticamente de la siguiente manera [11, pp. 42]:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = cte, \quad (1.2)$$

donde A define el área barrida por el vector Sol-Planeta. Esta ley, por tanto, ayudará a calcular la velocidad a la que viaja un planeta según el punto de la órbita en el que se encuentre.

La tercera ley de Kepler define la relación entre el tamaño de la órbita del planeta y el tiempo que tarda en recorrer la órbita completa [11, pp. 44]. Esta ley se puede expresar matemáticamente de la siguiente manera, donde T es el periodo de la órbita:

$$\frac{a^3}{T^2} = cte. \quad (1.3)$$

Esta expresión establece una relación entre el tamaño de una órbita y el tiempo que tarda en recorrer dicha órbita.

Aunque estas 3 leyes fueron definidas originalmente para explicar el movimiento planetario, su aplicación se puede extender a cualquier tipo de

objeto que orbite en torno al Sol o en torno a otro planeta, como es el caso de los satélites, ya sean naturales (como la Luna) o artificiales (los creados por el hombre). Es por esta razón que el estudio de estas leyes es de utilidad para el desarrollo del presente documento.

1.2. Ley de gravitación de Newton

Las leyes de Kepler fueron un hito muy importante en el camino hacia la comprensión de la mecánica orbital, ya que describen la geometría de las órbitas. Sin embargo, las leyes de Kepler no llegan a proponer una explicación al origen (la dinámica) de dicho movimiento [10, pp. 113]. Dicha explicación física no llegará hasta medio siglo después, con Isaac Newton y su ley de gravitación universal. Antes de llegar a ella, a finales del siglo diecisiete, Isaac Newton enunció sus famosas 3 leyes del movimiento, que son las siguientes [12, pp. 11]:

1. *“Todo cuerpo continúa en su estado de reposo, o de movimiento uniforme en línea recta, a menos que se vea obligado a cambiar de estado por fuerzas que actúen sobre él.”*
2. *“El cambio de movimiento es proporcional a la fuerza motriz ejercida y se realiza en la dirección de la línea recta en la que se encuentra dicha fuerza”*
3. *“A toda acción se opone siempre una reacción igual, o bien, las acciones recíprocas de dos cuerpos entre sí son siempre iguales y dirigidas a partes contrarias.”*

Junto a estas tres famosas leyes, escribió la conocida Ley de Gravitación Universal, que define la base física del movimiento orbital. Esta ley establece que un cuerpo de masa m_1 ejerce una fuerza gravitatoria sobre un cuerpo de masa m_2 que actúa a lo largo de la línea que une los centros de sus masas, y que es proporcional al producto de las masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que separa sus centros [11]. Esta ley se expresa matemáticamente de la siguiente manera:

$$\vec{F}_g = -G \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \cdot \frac{\vec{x}}{r}, \quad (1.4)$$

donde \vec{F}_g es la fuerza gravitatoria producida, \vec{x} es el vector que une el centro de ambos cuerpos, y G es la constante de gravitación universal, que tiene un valor de $6.67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}$.

Esta expresión será la base para deducir las ecuaciones del problema de los tres cuerpos, ya que durante una trayectoria extra-planetaria, las únicas fuerzas que experimentará el satélite serán la fuerza gravitatoria de los cuerpos cercanos. En nuestro caso, el satélite que estudiemos estará bajo los efectos de tres fuerzas gravitatorias: El Sol, la Luna, y la Tierra.

1.3. Propiedades de las cónicas

Como se ha visto, las leyes de Kepler definen que el movimiento orbital responde a la geometría de una cónica, y por lo tanto, es de especial interés estudiar en detalle las propiedades y características de este grupo de curvas geométricas para entender el comportamiento orbital de los satélites.

Las cónicas son las curvas resultantes de la intersección de un cono con diferentes tipos de planos. Estas figuras geométricas que se pueden definir matemáticamente como “*el lugar geométrico de los puntos tales que la razón de sus distancias a un punto fijo, foco, y a una recta también fija, directriz, es una constante $e > 0$, que llamaremos excentricidad*” [10, pp. 110]. Existen 3 tipos de cónicas, que se definen según el valor de su excentricidad, conocidas como “elipse”, “parábola” e “hipérbola”. Nótese que el círculo es un tipo de elipse, con excentricidad nula. A continuación se explicarán las propiedades generales de las tres cónicas:

Elipses

Las elipses son cónicas con excentricidad entre cero y uno. La elipse se caracteriza por tener un valor máximo y mínimo de distancia con respecto a los focos, conocidos como apogeo y perigeo respectivamente [10, pp. 111]. La Figura 1.1 muestra un esquema de una elipse, con las principales distancias más características, donde los puntos F y F' son los focos. En la figura se observan las distancias a y b , que son el semieje mayor y el semieje menor respectivamente, c , que es la distancia entre el foco y el centro, y r_p , que es el radio del perigeo.

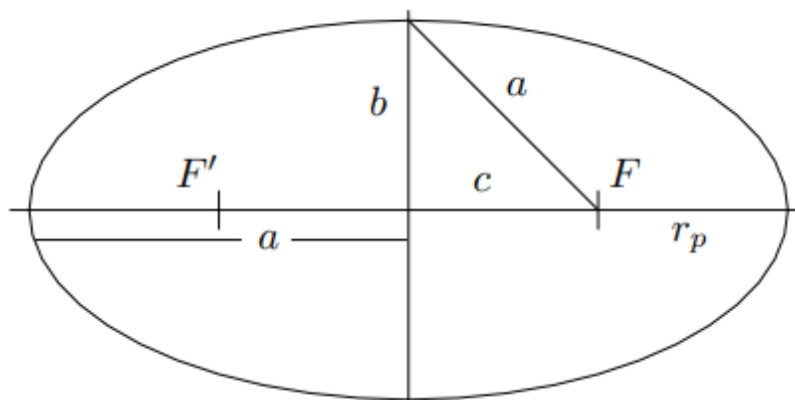


Figura 1.1: Dibujo esquemático de una elipse [10]

Matemáticamente, una elipse se puede describir a partir de la siguiente ecuación, que define la distancia entre cualquier punto de la curva y el foco (r) a partir de dos constantes propias de la elipse y el ángulo θ (ángulo formado entre el vector \vec{r} y el vector que une el foco y el perigeo) [11, pp. 41].

$$r = \frac{p}{1 + e \cdot \cos(\theta)}, \quad (1.5)$$

donde e es la excentricidad de la elipse y p es un parámetro conocido como “Semilado Recto” (a veces llamado “semiparámetro”), que se define de la siguiente manera [12, pp. 17]:

$$p = \frac{b^2}{a} = a \cdot (1 - e^2). \quad (1.6)$$

A partir de la ecuación de la elipse se puede calcular fácilmente la distancia máxima y mínima de la trayectoria (perigeo y apogeo respectivamente) usando las siguientes expresiones [10, pp. 111]:

$$r_p = \frac{p}{1 + e}, \quad (1.7)$$

$$r_a = \frac{p}{1 - e}, \quad (1.8)$$

donde r_p es la distancia entre el foco y el punto más cercano de la trayectoria (conocido como perigeo), mientras que r_a es la distancia entre el foco y el punto más alejado de la trayectoria (conocido como apogeo). La excentricidad es unacarácterística propia de la elipse, que puede ser calculado si se conocen dos de los tres parámetros a , b o c , usando una de las siguientes ecuaciones [13, pp. 11]:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}. \quad (1.9)$$

El radio del perigeo y del apogeo también se puede expresar a partir del semieje mayor, en lugar de usar el semilado recto, con las siguientes expresiones, que pueden resultar más sencillas [10, pp. 111]:

$$r_p = a(1 - e), \quad (1.10)$$

$$r_a = a(1 + e). \quad (1.11)$$

Todas estas estas expresiones nos permiten definir la posición de un satélite que se encuentre orbitando un planeta, o una estrella, conociendo las constantes que definen sus órbitas.

Con estas expresiones, también se puede definir la posición de un punto de la elipse en coordenadas cartesianas usando la siguiente fórmula [10, pp. 111]:

$$\left. \begin{aligned} x &= c + \frac{p \cdot \cos \theta}{1 + e \cdot \cos \theta} \\ y &= \frac{p \cdot \sin \theta}{1 + e \cdot \cos \theta} \end{aligned} \right\} \quad (1.12)$$

La elipse será la figura geométrica más común en trayectorias orbitales en torno al Sol, la Tierra o la Luna. En estos casos, el centro del cuerpo planetario se sitúa en el foco de la elipse, de manera que la distancia entre el satélite y el planeta varía al trasladarse dentro de la órbita. Existirán órbitas circulares, que será conceptualmente iguales que las elípticas solo que con excentricidad nula (y por lo tanto, el radio en el perigeo y en el apogeo serán iguales).

La Figura 1.2 muestra el ejemplo de una órbita elíptica en torno a la Tierra. Se puede observar que la Tierra está situada en uno de los focos, mientras que el centro de la elipse y el segundo foco son puntos meramente matemáticos. Los vectores \vec{r} y \vec{v} de la imagen representan la posición y la velocidad del satélite que se encuentra en dicha órbita. Junto a la imagen se pueden consultar los valores de la elipse que forman la trayectoria representada.

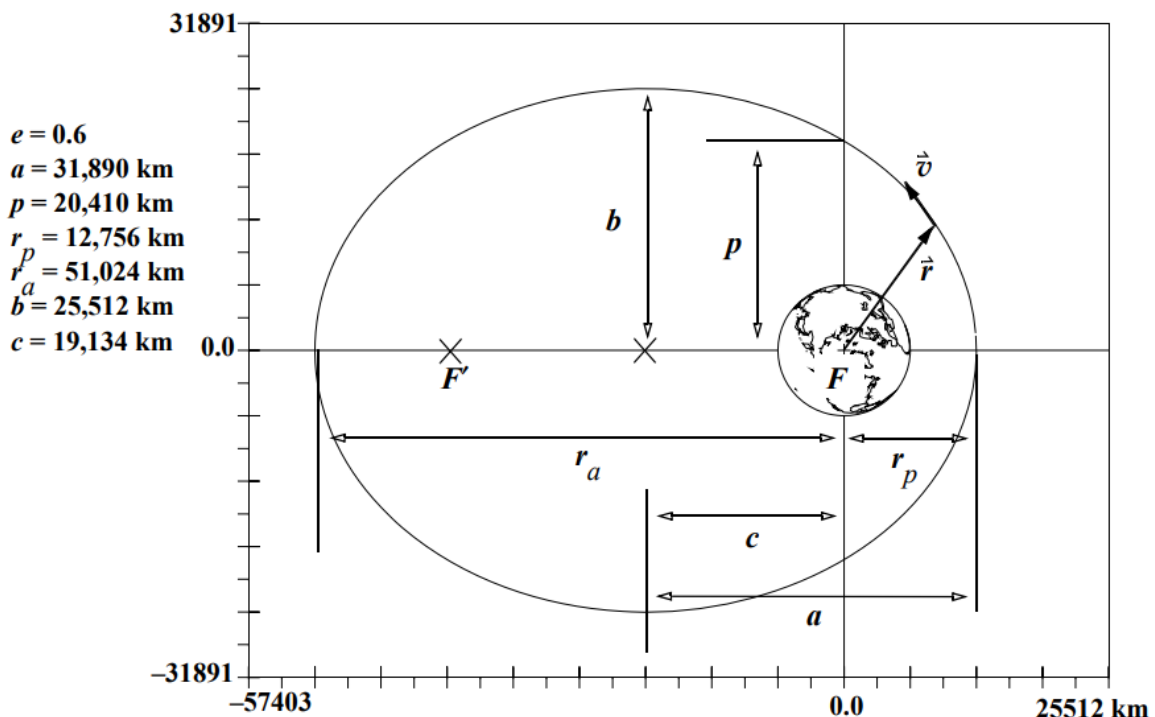


Figura 1.2: Representación de una órbita elíptica en torno a la Tierra [12]

Es importante mencionar que existen otros parámetros característicos de las trayectorias orbitales, como pueden ser la anomalía verdadera, anomalía excéntrica, la anomalía media, o el ángulo de la trayectoria de vuelo, que pueden resultar útiles a la hora de realizar cálculos orbitales, pero que no explicaremos en detalle en el presente apartado, ya que no son propiedades

de la propia cónica. De especial interés podrían ser la anomalía excéntrica y la anomalía media, ya que fueron utilizadas por Kepler para formular la Ecuación de Kepler, que impone la siguiente relación:

$$E - e \cdot \text{sen}(E) = M, \quad (1.13)$$

donde E es la anomalía excéntrica y M es la anomalía media. Se puede consultar más sobre estos ángulos, la ecuación de Kepler, y su utilidad en la mecánica orbital en [11, pp. 46].

Parábolas

La parábola es una cónica en la que la excentricidad vale exactamente la unidad. Es fácil deducir que si la excentricidad vale uno, el valor del radio en el apogeo tiende a infinito, por lo que el apogeo estará situado en el infinito (es decir, la distancia con respecto al foco aumenta constantemente). Por otro lado, si existirá perigeo (distancia mínima al foco) que tendrá el valor de $p/2$.

$$Parabola = \begin{cases} e = 1 \\ a = \infty \\ r_a = \infty \\ r_p = p/2 \end{cases} \quad (1.14)$$

Es posible definir la posición de un satélite en coordenadas cartesianas en órbita parabólica con la siguiente expresión [10, pp. 112]:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{p}{2} + \frac{p \cdot \cos\theta}{1 + \cos\theta} \\ y &= \frac{p \cdot \text{sen}\theta}{1 + \cos\theta} \end{aligned} \right\} \quad (1.15)$$

Nótese que, al contrario que en la elipse, el segundo foco está situado en el infinito [12, pp. 17]. Además, el valor del semieje mayor (a) también tiende a infinito. La parábolas también se pueden expresar matemáticamente con la siguiente ecuación:

$$y^2 = 2px. \quad (1.16)$$

La Figura 1.3 muestra un dibujo esquemático de una órbita parabólica, en la que se muestra el carácter “abierto” de su geometría. Se puede observar que el segundo foco está situado en el infinito. A la izquierda de la imagen se muestran los parámetros característicos de la parábola dibujada.

Debido a las propiedades geométricas de una parábola, un satélite que quiera orbitar en torno a un planeta no presentará una trayectoria parabólica, debido a que la distancia con respecto a dicho planeta aumentaría constantemente. La única excepción será para adquirir trayectorias de escape,

o maniobras de asistencia gravitacional, en las que la órbita tenga como propósito alejarse continuamente del planeta.

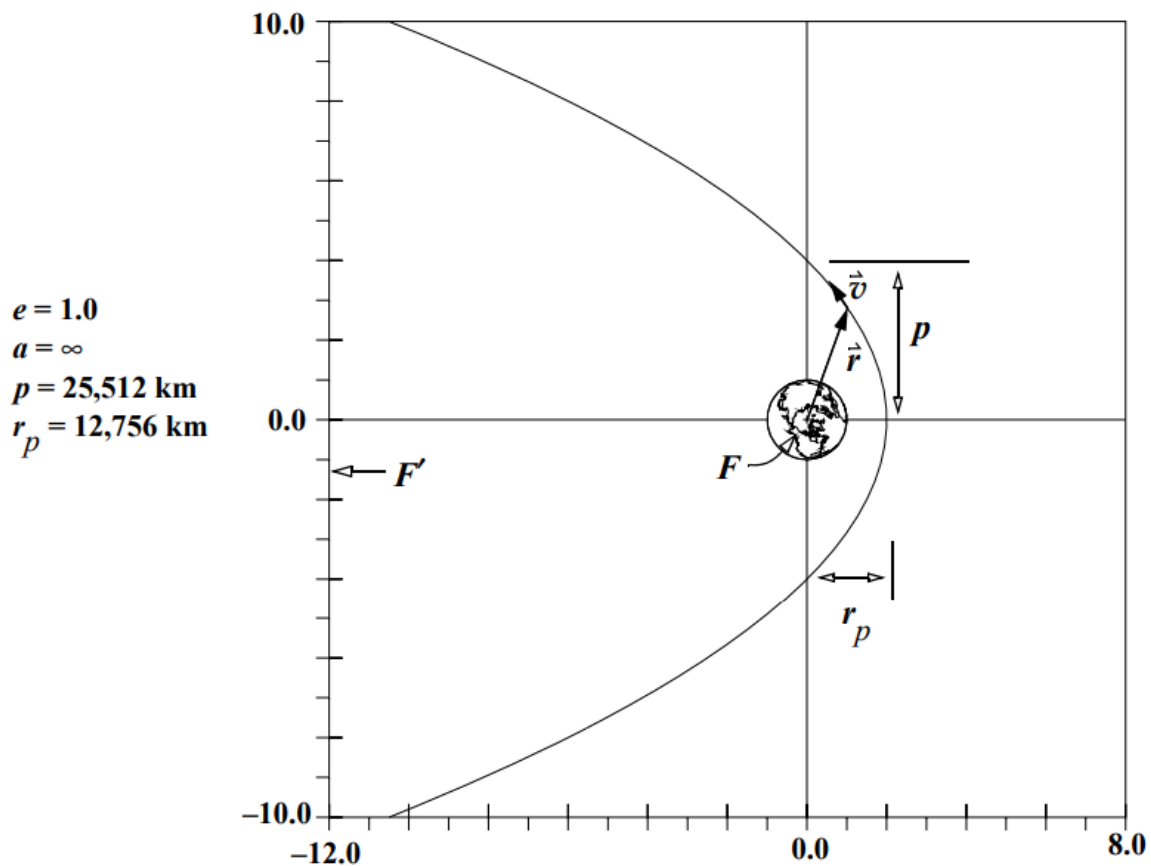


Figura 1.3: Representación de una órbita parabólica en torno a la Tierra [12]

Hipérbolas

Las hipérbolas son cónicas con una excentricidad mayor que la unidad. Al igual que con las parábolas, no poseen apocentro, por lo que se las considera curvas abiertas (tienden a alejarse continuamente del foco). La expresión de la posición de un satélite en órbita hiperbólica en coordenadas cartesianas es la siguiente [10, pp. 113]:

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cdot e + \frac{p \cdot \cos \theta}{1 + e \cdot \cos \theta} \\ y &= \frac{p \cdot \sin \theta}{1 + e \cdot \cos \theta} \end{aligned} \right\} \quad (1.17)$$

Las hipérbolas también pueden expresarse matemáticamente a través de la siguiente expresión:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (1.18)$$

Una de las diferencias con respecto a la parábola es que la hipérbola sí tiene dos focos, al igual que la elipse, y que el valor del semieje mayor en lugar de tender a infinito, tiene un valor negativo. Además, las ramas de la hipérbola presentan un carácter asintótico. Sin embargo, al igual que con las parábolas, las hipérbolas son curvas abiertas (es decir, no presentan repetitividad [12, pp. 18]) por lo que el uso de una órbita hiperbólica se limita a las maniobras de escape o las asistencias gravitacionales.

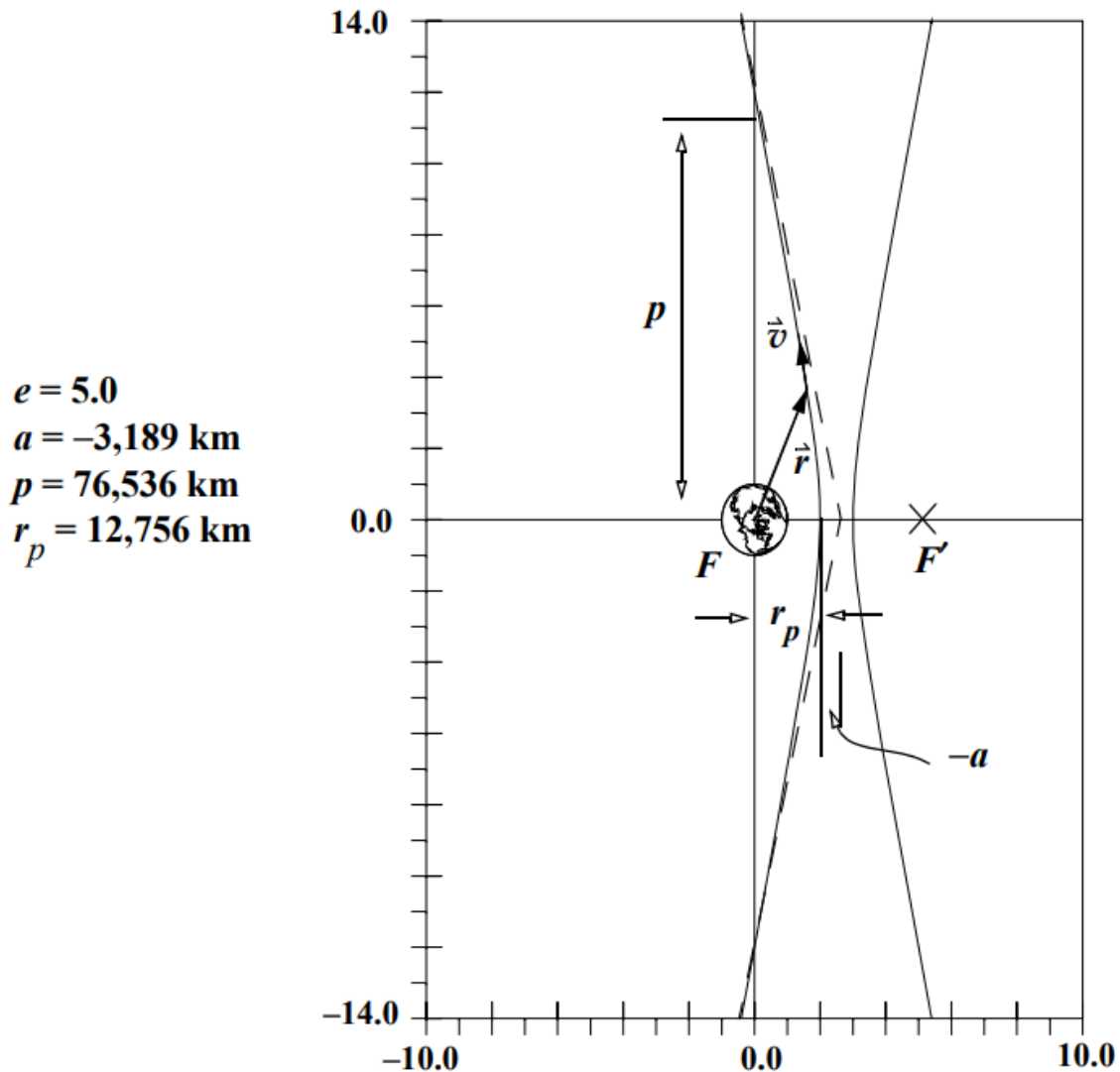


Figura 1.4: Representación de una órbita hiperbólica en torno a la Tierra [12]

La Figura 1.4 muestra un dibujo esquemático de una órbita hiperbólica. Se puede observar que existen dos focos, al igual que en la elipse, aunque el valor del semieje mayor es negativo. También se observa el carácter asintótico de las ramas de la cónica, cuya pendiente dependerá de la excentricidad de la hipérbola (en este caso, de cinco). Los parámetros característicos de la hipérbola se pueden consultar a la izquierda de la imagen. Nótese que aunque en la imagen aparecen las dos ramas de la hipérbola por fidelidad

matemática, la trayectoria del satélite solo seguirá una de las dos ramas.

1.4. Problema de los dos cuerpos

Una vez conocidas las leyes de Kepler y las de Newton, se puede definir matemáticamente el comportamiento de dos cuerpos que se encuentran bajo la influencia mutua de la fuerza gravitatoria. Este estudio se denomina “Problema de los dos cuerpos”, y pretende predecir el movimiento de un cuerpo únicamente bajo la influencia gravitatoria de un segundo basándose en los descubrimientos de Kepler y Newton [12, pp. 20]. Entender la dinámica del comportamiento del problema de dos cuerpos nos servirá de base para poder analizar el problema de los tres cuerpos más adelante.

En primer lugar hay que comprender la importancia de la primera ley de Newton en el estudio del problema de los dos cuerpos. Antes de que Newton demostrase su primera ley, el pensamiento general era que los objetos tendían a reducir su velocidad con el tiempo. El conocimiento de que un objeto podía mantener su velocidad indefinidamente si ninguna fuerza actúa sobre él, fue revolucionario [12].

La segunda ley de Newton establece una relación entre la fuerza que se ejerce sobre un objeto y la variación en su velocidad. Esta relación se puede expresar matemáticamente de la siguiente manera:

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}. \quad (1.19)$$

Esta ley, expresada vectorialmente, en realidad representa tres ecuaciones, ya que esta igualdad debe respetarse en cada una de las direcciones cartesianas. De esta manera, conociendo las fuerzas que actúan sobre un cuerpo en cada dirección, es posible calcular el movimiento de dicho cuerpo con el tiempo. La expresión para calcular la fuerza gravitatoria sobre un objeto también se la debemos a Newton, tal y como se vio anteriormente.

Es importante entender que, para resolver el problema de los dos cuerpos, es necesario realizar algunas hipótesis. En primer lugar, en este problema asumimos que no existen más fuerzas sobre el cuerpo estudiado, más allá de la gravitatoria del segundo cuerpo considerado. Esto no es realista, ya que siempre existirán otras fuerzas que actúen sobre él. Sin embargo, cuando se encuentra orbitando un cuerpo de suficiente tamaño, como el caso de un satélite al rededor de la Tierra, estas otras fuerzas son muy pequeñas comparadas con la atracción gravitatoria del planeta. En segundo lugar, para resolver el problema de los dos cuerpos, asumiremos que la masa de los dos cuerpos son constantes. Esto tampoco es estrictamente cierto en todos los casos, especialmente si los satélites consumen combustible durante la misión. Sin embargo, a fin de simplificar el estudio del problema, se asumirá que ambas masas son constantes. En tercer lugar, asumiremos que una de las masas es considerablemente mayor que la otra. Aunque esto puede

no ser cierto en algunos casos, en el tema de estudio que nos concierne (un satélite al rededor de la Tierra), esta hipótesis es absolutamente válida. En último lugar, se utilizará un sistema de coordenadas inercial.

A fin de comprender mejor la resolución del problema de los dos cuerpos, tomaremos como ejemplo que los dos cuerpos estudiados son La Tierra y el satélite, a pesar de que los resultados obtenidos pueden ser extrapolables a cualquier conjunto de cuerpos que cumplan con las hipótesis previamente mencionadas, como pueden ser el Sol y la Tierra.

Como se ha visto, la fuerza gravitatoria que actúa sobre el satélite debido a la presencia de la Tierra se puede expresar como.

$$\vec{F}_g = -\frac{G \cdot m_t \cdot m_{sat}}{r^2} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right), \quad (1.20)$$

donde m_t y m_{sat} son las masas de la Tierra y del satélite, \vec{r} es el vector que une los centros de la Tierra y del satélite, y r es la distancia entre los centros de la Tierra y el satélite. Utilizando la segunda ley de Newton, podemos expresar la aceleración que sufrirá el satélite de la siguiente manera [12, pp. 23]:

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{G \cdot (m_t + m_{sat})}{r^2} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right). \quad (1.21)$$

Es posible simplificar la fórmula asumiendo que la masa del satélite es mucho menor que la masa de la Tierra, y utilizando la constante μ_t , conocida como “Parámetro Gravitacional estándar de la Tierra”, que se calcula de la siguiente manera $\mu_t = G \cdot m_t$. De esta forma, la aceleración que experimenta el satélite se puede expresar como:

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu_t}{r^2} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right). \quad (1.22)$$

Esta ecuación define la aceleración que sufrirá el satélite en cada punto de la órbita en torno a la Tierra. Para definir la trayectoria del satélite y su posición en ella, se pueden usar varios métodos, como por ejemplo utilizando el vector de estado, o utilizando los elementos orbitales clásicos. Para entender la relación entre la posición del satélite y su velocidad, se puede optar por definir el momento angular del satélite (h), de la siguiente manera:

$$\vec{h} = \vec{r} \times \vec{v} = cte. \quad (1.23)$$

El valor del momento angular del satélite será constante en todo punto de la órbita [12, pp. 24]. Nótese que este momento angular en realidad es un momento angular específico, ya que no tiene en cuenta la masa del satélite. Al ser un producto vectorial entre dos vectores coplanares, el vector del

momento angular será perpendicular al plano de la órbita. El módulo del momento angular es fácilmente calculable usando la posición y velocidad de un satélite en su apogeo o perigeo, ya que en estos puntos los vectores de posición y velocidad son perpendiculares:

$$h = r_a \cdot v_a = r_p \cdot v_p, \quad (1.24)$$

donde los sufijos a y p en esta ecuación responden al valor en el apogeo y en el perigeo. El valor de la energía mecánica específica del satélite (ξ) se puede calcular también a partir de las siguientes dos ecuación [12, pp. 26]:

$$\xi = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu_t}{r} = -\frac{\mu_t}{2a}. \quad (1.25)$$

Se puede observar que el valor de la energía mecánica del satélite es constante a lo largo de toda la órbita (asumiendo la inexistencia de perturbaciones). Esta energía tendrá un valor diferente si es una órbita elíptica, parabólica o hiperbólica: En el caso de las órbitas elípticas, la energía mecánica del satélite tendrá un valor negativo; en las órbitas hiperbólicas, tendrá un valor positivo; y en el caso de las órbitas parabólicas, valdrá cero [12, pp. 33]. A partir de la definición de la energía mecánica se puede calcular la velocidad que tendrá un satélite en cada punto de la órbita a partir de la siguiente ecuación:

$$v = \sqrt{\mu_t \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)}. \quad (1.26)$$

Se aprecia que el valor de la velocidad del satélite solo dependerá de su posición, que puede ser calculada a partir de las ecuaciones de una elipse. A partir de la segunda ley de Kepler vista anteriormente también se puede calcular el tiempo que tardará el satélite en efectuar una órbita completa (T), que responderá a la siguiente expresión [12, pp. 30], que como puede observarse, solo depende del tamaño de la órbita:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu_t}}. \quad (1.27)$$

También es interesante ver cómo, en el caso de las órbitas parabólicas, dado que la energía es nula, la velocidad del satélite responderá a la siguiente ecuación [12, pp. 33]. Esta velocidad también se define como la “Velocidad de Escape”, ya que a partir de esa velocidad, la órbita será parabólica o hiperbólica, ambas cónicas abiertas:

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2\mu_t}{r}}. \quad (1.28)$$

Las fórmulas matemáticas expuestas en esta sección permiten definir la posición y la velocidad de un satélite orbitando la Tierra en todo momento, además de dar la información sobre su energía, periodo y velocidad de escape. Sin embargo, estas fórmulas solo serán válidas si se cumplen las hipótesis mencionadas, y sobretodo, si solo existe un único cuerpo que ejerza su fuerza gravitatoria sobre el satélite. Sin embargo, la realidad es que sobre el satélite actúan muchas fuerzas, además de la atracción gravitatoria del cuerpo primario. El efecto de las demás fuerzas involucradas, así como las correcciones necesarias por haber impuesto hipótesis restrictivas, se tienen en cuenta en la forma de perturbaciones.

Una perturbación es “*cualquier efecto que causa una desviación en la órbita kepleriana teórica*” [14]. A la hora de modelizar el movimiento de un satélite, cuantas más perturbaciones se tengan en cuenta, más realista será el modelo desarrollado. Algunas de las perturbaciones que se suelen tener en cuenta a la hora de definir modelos orbitales son las siguientes [14]:

- Fricción atmosférica, debido a la fuerza aerodinámica de las capas superiores de la atmósfera sobre un satélite que orbita a baja altitud, provocando decaimiento orbital.
- Heterogeneidad del campo gravitacional, debido a la no esfericidad de la Tierra (achatamiento terrestre), causando que la gravedad no sea constante en toda la órbita, a pesar de mantener la distancia respecto al centro de la Tierra constante.
- Presión por radiación solar, debido a la fuerza que ejerce la radiación solar sobre la superficie del satélite.
- Atracción gravitatoria de otros cuerpos, debido a la presencia constante de otros cuerpos celestes, como la Luna o el Sol, que ejercen una fuerza gravitatoria considerable sobre el satélite si la distancia respecto a la Tierra es suficientemente elevada.

La última perturbación es de especial interés en este trabajo, debido a las elevadas distancias respecto a la Tierra que se deben obtener para situar el satélite en el punto L4. Debido a ello, el satélite estudiado se verá afectado no solamente por la gravedad de la Tierra, sino también por la gravedad de la Luna y del Sol. El efecto de la atracción gravitatoria del Sol y la Luna se puede introducir en el modelo orbital como perturbaciones, si dicho efecto es pequeño. Sin embargo, si el efecto de la atracción gravitatoria solar y lunar son suficientemente grandes, una mejor aproximación consiste en utilizar un modelo matemático que incluya dichas fuerzas, en lugar de introducir las en forma de perturbaciones. El modelo matemático en cuestión es el problema de los n cuerpos, tal y como se verá en la sección 1.5.

1.5. Problema de los n cuerpos

La resolución del problema de los dos cuerpos nos proporciona las fórmulas necesarias para calcular la posición, trayectoria, velocidad y aceleración de un satélite orbitando un único cuerpo, como puede ser la Tierra. Esta es la situación más simplificada, ya que en realidad existen otros muchos efectos que intervienen en el movimiento orbital. Por tanto, es posible realizar una aproximación más realista considerando la influencia de un segundo o tercer cuerpo. Es así como nace el problema de los n cuerpos, en donde “ n ” hace referencia a un número indeterminado de cuerpos celestes que aplican su influencia sobre el satélite. Aunque matemáticamente n puede tomar cualquier valor arbitrario, la realidad es que el número de cuerpos celestes que influyen de forma apreciable en la trayectoria de un satélite es reducido. En nuestro caso, por ejemplo, n será igual a cuatro, ya que nuestro problema incluye la presencia de la Tierra, la Luna, y el Sol.

Es importante empezar mencionando la necesidad de introducir un sistema de referencia inercial en el problema de los n cuerpos. En el caso anterior, cuando solo teníamos dos cuerpos, asumíamos que el cuerpo primario (por ejemplo, la Tierra) se comportaba de manera inercial. Sin embargo, al asumir la existencia de múltiples cuerpos, dichos cuerpos ejercerán su fuerza gravitatoria entre ellos, por lo que no pueden considerarse inerciales. Es por ello que para calcular la aceleración de un satélite bajo la influencia de varios cuerpos necesitamos utilizar un sistema de referencia inercial externo a los cuerpos en cuestión [12, pp. 34].

La aceleración que experimentará el satélite debido a la influencia de los n cuerpos se puede expresar como un sumatorio, de la siguiente manera [12, pp. 35]:

$$\ddot{\vec{r}}_i = -G \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{m_j}{r_{ji}^3} \vec{r}_{ji} \quad \vec{r}_{ji} = \vec{r}_i - \vec{r}_j \quad i = 1, \dots, n \quad (1.29)$$

donde los sufijos i y j hacen referencia a todos los cuerpos involucrados. Es posible calcular la aceleración usando como origen de coordenadas el cuerpo primario (que podría ser, por ejemplo, la Tierra, o el Sol). Denotaremos este cuerpo primario con el sufijo 1. La aceleración sobre el satélite con respecto al cuerpo primario se puede expresar de la siguiente manera [12, pp. 35]:

$$\ddot{\vec{r}}_{1sat} = -\frac{G(m_1 + m_{sat})\vec{r}_{1sat}}{r_{1sat}^3} + G \sum_{j=3}^n m_j \left(\frac{\vec{r}_{satj}}{r_{satj}^3} - \frac{\vec{r}_{1j}}{r_{1j}^3} \right).$$

Con esta ecuación se puede calcular la aceleración del satélite independientemente de los cuerpos que actúan sobre él, usando un cuerpo primario (como la Tierra) como referencia.

Otra opción es usar como referencia el baricentro entre los cuerpos, especialmente si solo se tienen en cuenta tres cuerpos. El baricentro es el centro de masas de los cuerpos que se están estudiando. En la Figura 1.5 se muestra una representación de este sistema de coordenadas, usando como ejemplo el sistema Tierra-Luna-Satélite, donde los vectores XYZ hacen referencia al centro inercial, mientras que $X_B Y_B Z_B$ hacen referencia al centro de coordenadas del baricentro. Se puede observar que el baricentro es un punto medio entre la Tierra, la luna y el satélite. Esto es de especial importancia si tenemos en cuenta que la masa del satélite es despreciable frente a la masa de la Tierra o la Luna, por lo que el baricentro se situará en un punto de la recta que une los centros de la Tierra y la Luna.

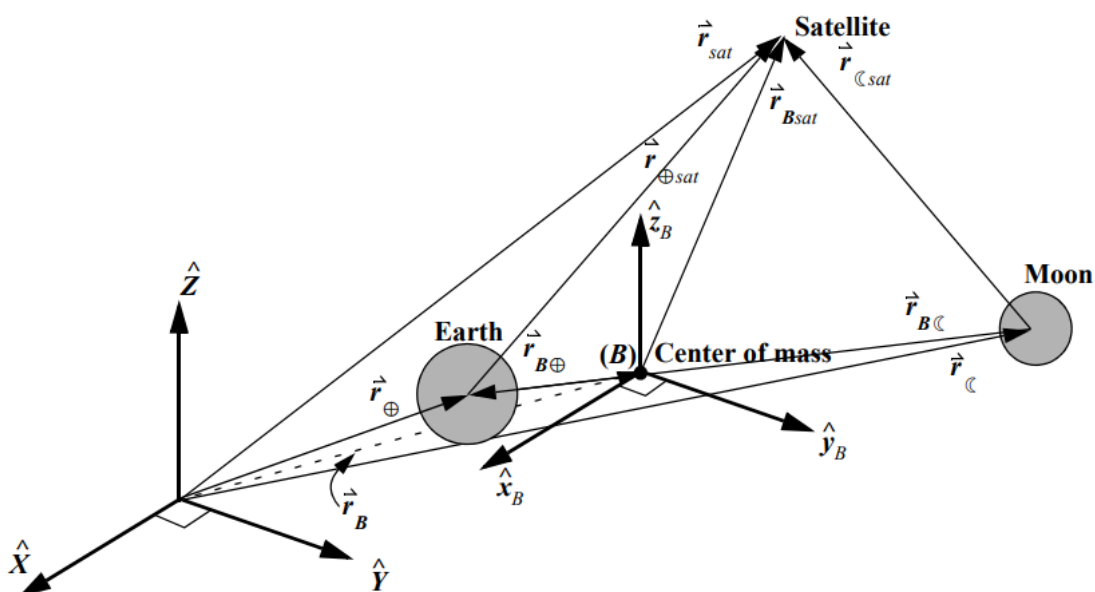


Figura 1.5: Geometría de la ecuación de movimiento respecto al baricentro [12]

Utilizando el baricentro (B) como centro de coordenadas, la aceleración del satélite respecto al baricentro se podría expresar como

$$\ddot{\vec{r}}_{Bsat} = \ddot{\vec{r}}_{sat} - \ddot{\vec{r}}_B. \quad (1.30)$$

Pero como la aceleración del baricentro es nula, debido a la conservación de momento lineal [12, pp. 36], se puede concluir que las ecuaciones de movimiento del satélite respecto al baricentro son inerciales. Por esta razón, se usará el baricentro Tierra-Luna como origen de coordenadas para el estudio del movimiento del satélite en el presente documento.

A partir de esta información es posible calcular el valor de la aceleración del satélite en sistemas de tres cuerpos o cuatro cuerpos, de manera numérica. El desarrollo de este cálculo se verá en detalle en el capítulo 2.

1.6. Esfera de influencia terrestre

Al estudiar el problema de los n cuerpos puede surgir la siguiente duda: ¿En qué momento pasamos de usar el problema de los dos cuerpos al problema de los n cuerpos?. Esta duda es coherente, ya que en realidad, desde el punto de vista estrictamente matemático, cualquier objeto está bajo la influencia gravitatoria del Sol, la Luna, y los demás planetas en todo momento. Sin embargo, nuestro sentido común nos indica que la influencia gravitatoria de Neptuno sobre un satélite geostacionario es prácticamente nula y completamente despreciable. A fin de responder a esta duda, se definen las esferas de influencias.

La esfera de influencia (*SOI*) de un cuerpo central es una esfera imaginaria dentro de la cual la gravedad producida por dicho cuerpo es la fuerza principal que actúa sobre las ecuaciones de movimiento [12, pp. 26]. Fuera de esta esfera, la presencia de otros cuerpos tienen un papel relevante en las ecuaciones de movimiento. Esta esfera de influencia es importante en el estudio del presente documento, ya que impondrá la barrera a partir de la cual hay que pasar de utilizar el problema de los dos cuerpos, a usar fórmulas que tengan también en cuenta la presencia del Sol y de la Luna. Es decir, dentro de la esfera de influencia terrestre, el uso de las ecuaciones del movimiento obtenidas a través del problema de los dos cuerpos serán suficientes para definir el comportamiento de un satélite, ya que el efecto gravitatorio de otros cuerpos (como el Sol o la Luna) serán tan pequeños en comparación con el de la Tierra que se consideran despreciables. Por otro lado, fuera de la esfera de influencia terrestre, el valor de la fuerza gravitatoria terrestre se reduce lo suficiente como para que la fuerza gravitatoria causada por otros cuerpos (como el Sol o la Luna) sean de suficiente relevancia como para que las ecuaciones de movimiento obtenidas a través del problema de los dos cuerpos no sean válidas, y haya que pasar a utilizar ecuaciones de movimientos obtenidas a partir del problema de los n cuerpos.

Para entender este concepto, a continuación se muestra el ejemplo de una transferencia de un satélite entre la Tierra y Marte [12, pp. 946]. La Figura 1.6 muestra una gráfica en la que se representa el valor de la aceleración gravitacional sobre un satélite debido a la influencia del Sol, la Tierra y Marte, a lo largo de una trayectoria que se aleja de la Tierra y se acerca a Marte. Nótese que el eje de ordenadas está en escala logarítmica. Se puede observar como la aceleración debido a la presencia solar se mantiene más o menos constante a pesar de la distancia, mientras que el valor de la aceleración gravitacional debido a la Tierra o a Marte dependen mucho de la distancia, de manera que durante la mayor parte de la trayectoria el satélite solo se encuentra bajo la influencia solar, exceptuando los primeros días de la transferencia y los últimos.

La Figura 1.7 muestra el detalle de los primeros días de la transferencia, en la que se puede ver claramente la comparación entre la influencia de la aceleración gravitatoria terrestre y solar con la distancia. Se puede observar

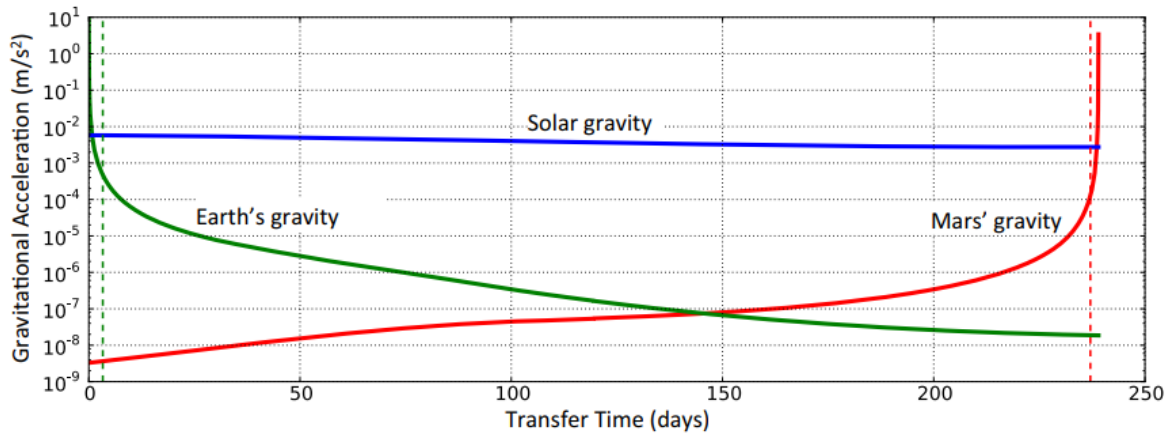


Figura 1.6: Aceleración gravitatoria debido a la Tierra, el Sol y Marte, de un satélite en transferencia a Tierra-Marte [12]

como en las proximidades de la Tierra, la aceleración debido a la influencia terrestre es mucho mayor que la solar, sin embargo, al alejarse de la Tierra la aceleración gravitatoria debido a la influencia terrestre disminuye drásticamente, mientras que la solar se mantiene constante, de forma que poco después de iniciar la transferencia, la presencia solar es suficientemente importante como para tener que utilizar las ecuaciones del problema de los tres cuerpos. Sin embargo, por encima de cierta distancia, la influencia terrestre es tan pequeña en comparación a la solar que se puede volver a utilizar las ecuaciones de movimiento del problema de los dos cuerpos utilizando únicamente al Sol como cuerpo principal.

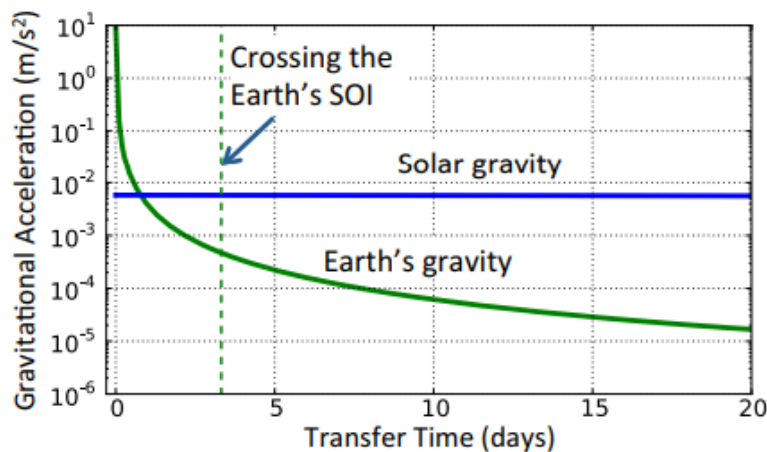


Figura 1.7: Detalle de la esfera de influencia de la Tierra [12]

Es por esta razón que, a partir de cierta distancia a la Tierra, es necesario utilizar las ecuaciones de movimiento del problema de los n cuerpos. Esta distancia no es fija, y dependerá del grado de exactitud que se quiera en los resultados. Una alternativa cuando un satélite está cerca de la frontera del SOI es introducir el efecto solar como perturbación, pero seguir usando las ecuaciones del problema de los dos cuerpos. Sería posible establecer un

orden de magnitud del error admisible, y calcular una distancia respecto a la Tierra a partir de la cual se pasase de usar únicamente las ecuaciones del problema de los dos cuerpos usando el sistema Tierra-Luna a usar el problema de los n cuerpos, añadiendo la presencia del Sol y de la Luna.

Sin embargo, en el presente estudio se ha decidido que se usará en todo momento las ecuaciones del problema de los n cuerpos, principalmente por que así reducimos la complejidad del código utilizado sin afectar a la calidad de los resultados, con una penalización en tiempo computacional muy reducida, ya que el porcentaje de tiempo que el satélite pasa en las cercanías de la Tierra es muy pequeño con respecto al tiempo que pasa alejado de la Tierra. La única excepción será en la órbita circular de aparcamiento en la que comenzará el satélite (como se verá en la sección 3.2), ya que debido a su corta distancia a la Tierra, se considerará que en dicha órbita se cumplen las ecuaciones del movimiento orbital del problema de los dos cuerpos, despreciando el efecto de la perturbación solar y lunar sobre el satélite mientras se encuentre en la órbita de aparcamiento. Sin embargo, durante el resto de la transferencia se utilizarán las ecuaciones del problema de los n cuerpos, tal y como se describirán en el capítulo 2.

1.7. Sistemas de referencia típicos

A la hora de estudiar la mecánica orbital, es muy importante definir claramente el sistema de referencia, a fin de que los cálculos y los resultados sean coherentes. La elección del sistema de referencia utilizado es delicado, ya que dependerá del tipo de misión que se vaya a efectuar y las hipótesis que se vayan a asumir. Para determinar cuál se usa, es necesario establecer el centro de coordenadas y los 3 ejes (que denominaremos O_x , O_y , y O_z) que definirán las coordenadas cartesianas (o polares, si fuese el caso). Además, habrá que establecer si el sistema utilizado es inercial. A continuación se enumeran algunas de los principales sistemas de referencia que se suelen utilizar en mecánica orbital. No se entrará en detalle de cómo está definido cada uno. Para facilitar la comprensión, se utilizará la Tierra como ejemplo de cuerpo primario, pero debe recordarse que estos sistemas de referencia se pueden usar con el Sol, la Luna, o cualquier otro cuerpo como centro de coordenadas. Mas información al respecto puede consultarse en [10, pp. 146]:

- **Sistema espacial:** Sistema de referencia inercial con el centro de coordenadas en el centro del cuerpo primario (por ejemplo, la Tierra), y los ejes según direcciones e_1 , e_2 y e_3 , con e_1 y e_2 con dirección ecuatorial, y el vector e_3 perpendicular a los dos anteriores. En este sistema, para definir la posición del satélite se utilizan los ángulos de ascensión recta y declinación, además de la distancia con respecto al centro de la Tierra.
- **Sistema nodal-espacial:** Similar al anterior, pero sustituyendo la dirección del eje O_x por la dirección de la línea de nodos (l). Este sistema

es análogo a aplicarle un giro al sistema espacial en torno al vector e_3

- **Sistema nodal:** Similar al anterior, pero con el eje O_z coincidiendo con la dirección del momento angular terrestre (n). Este sistema de referencia es análogo a aplicar un giro sobre el vector l que habíamos obtenido en el sistema nodal-espacial.
- **Sistema apsidal:** Similar al sistema nodal, pero utilizando la línea de los ápsides para el eje O_x en lugar de la línea de los nodos, manteniendo la dirección de n para el eje O_z .
- **Sistema orbital:** Este sistema, al contrario de los anteriores, no es inercial, sino que el eje O_x se fija en la dirección radial (es decir, en la dirección que une el centro de la Tierra y el satélite). O_z se mantiene en la dirección de n . De esta manera, la posición del satélite siempre será $(r, 0, 0)$.
- **Sistema de Frenet:** Sistema no inercial en el que el plano O_{xy} siempre coincide con el plano del movimiento, y que el eje O_x coincide con la dirección de la velocidad.

Sin embargo, ninguno de estos sistemas de referencia nos beneficia en nuestro estudio del comportamiento del satélite por diversas razones. La principal es la hipótesis de que el satélite se moverá siempre en el plano que forma la órbita lunar. Esta hipótesis se basa en el hecho de que cualquier aceleración del satélite en la dirección perpendicular al plano orbital lunar no contribuirá a acercarlo al punto L4, ya que este punto orbita la Tierra en el mismo plano que la órbita lunar (se hablará más detalladamente de este tema en el capítulo 2). Por ello, en el estudio de la misión que nos concierne en el presente documento, asumiremos que todo el movimiento del satélite se produce en el plano. En segundo lugar, tal y como se vio en el apartado anterior, nos resulta conveniente utilizar el baricentro Tierra-Luna como centro de coordenadas. Es por ello que para el estudio de nuestro problema utilizaremos un sistema de coordenadas que se adapte mejor a las necesidades de nuestra misión. Este sistema de coordenadas se explicará detalladamente en la sección 2.5.

1.8. Transferencia de Hohmann

A la hora de analizar posibles transferencias orbitales entre dos puntos en el espacio, es conveniente mencionar la transferencia de Hohmann, ya que esta representa la manera más eficiente para trasladar un satélite entre dos órbitas coplanarias [7]. La transferencia de Hohmann se obtiene uniendo dos arcos cónicos diferentes, definidos dentro de dos problemas de dos cuerpos, y se considera que sólo una atracción gravitatoria actúa sobre cada tramo [9]. De esta manera, sería posible (y sencillo) transferir un satélite desde una órbita cercana a la Tierra a la órbita objetivo usando una órbita elíptica intermedia, que es tangente a la órbita original y a la órbita objetivo

en los dos puntos en los que se produce los impulsos instantáneos, que deberán ser el apogeo y el perigeo de las órbitas.

La transferencia de Hohmann es altamente conocida gracias a su eficiencia y sencillez. Al estar basada únicamente en el problema de los dos cuerpos (asumir que solo existe influencia gravitacional de un solo cuerpo), permite calcular los parámetros de la transferencia de una manera sencilla, hasta el punto de que puede realizarse los cálculos a mano. Para ello, sólo es necesario utilizar las ecuaciones que definen la velocidad de un satélite según su posición y las propiedades de la elipse en la que se encuentren.

Como se ha visto, la fórmula que define la velocidad de un satélite orbitando en una órbita elíptica en el problema de los dos cuerpos depende directamente de la posición del satélite, de la masa del cuerpo principal, y del tamaño de la órbita en la que se encuentre el satélite. En otras palabras, el tamaño de la órbita elíptica que vaya a recorrer un satélite en una posición dada, depende directamente de la velocidad que tenga el satélite en dicho punto. Es por ello que si en un punto espacial determinado se quiere modificar el tamaño de la órbita, solo es necesario aumentar o disminuir su velocidad, haciendo uso de un impulso instantáneo.

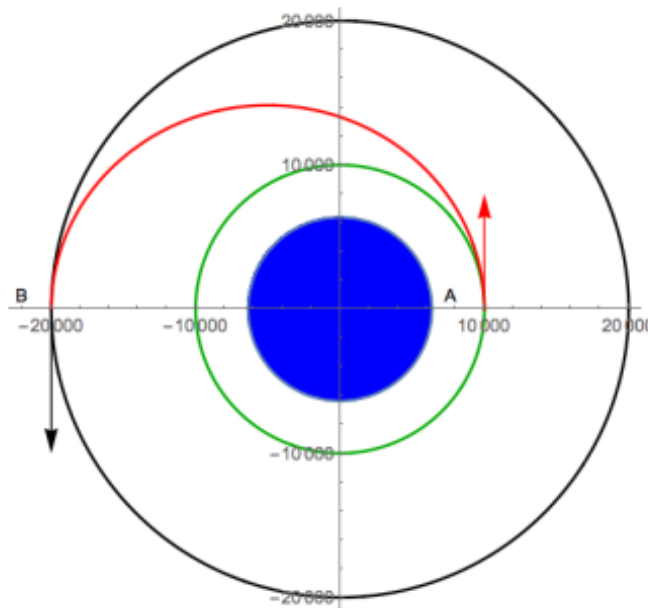


Figura 1.8: Esquema de una transferencia de Hohmann [15]

La Figura 1.8 muestra un esquema de una transferencia de Hohmann entre dos órbitas circulares. En esta figura, la órbita original se representa en verde, la objetivo en negro, y la de transferencia en rojo. Así mismo, los dos impulsos se representan respectivamente con una flecha roja y una flecha negra. Para calcular el primer impulso será necesario calcular la diferencia entre la velocidad propia de la órbita de transferencia en su perigeo y la velocidad de la órbita circular original. Para calcular el valor del segundo impulso, se debe calcular la diferencia entre la velocidad del satélite en la

órbita circular objetivo y la velocidad del satélite en el apogeo de la órbita de transferencia.

Este cálculo se puede realizar entre órbitas circulares u órbitas elípticas, de manera análoga. Matemáticamente, se puede realizar de la siguiente manera:

$$\Delta v = \sqrt{\mu_t} \left[\sqrt{\left(\frac{2}{r_p} - \frac{1}{a_H}\right)} - \sqrt{\left(\frac{2}{r_p} - \frac{1}{a_1}\right)} + \sqrt{\left(\frac{2}{r_a} - \frac{1}{a_2}\right)} - \sqrt{\left(\frac{2}{r_a} - \frac{1}{a_H}\right)} \right], \quad (1.31)$$

donde los sufijos 1, 2 y H hacen referencia a la órbita original, órbita objetivo y órbita de transferencia respectivamente, y los radios en el perigeo y en el apogeo hacen referencia a la órbita de transferencia.

Sin embargo, el uso de una transferencia de Hohmann para el análisis de la misión que se estudia en el presente documento no puede aplicarse, por dos motivos: En primer lugar, la transferencia de Hohmann solo tiene en cuenta la presencia de un único cuerpo, y por lo tanto, en cuanto se salga de la esfera de influencia terrestre, ésta no será adecuada para realizar el cálculo de la transferencia. En segundo lugar, al no tener en cuenta la presencia de otros cuerpos, no aprovecha la asistencia gravitacional de dichos cuerpos, y por lo tanto, la transferencia de Hohmann no asegura el mínimo consumo posible.

Por ello, la transferencia de Hohmann se utilizará como base teórica para validar el código que se desarrollará en el presente documento, pero no se utilizará de manera directa para calcular la trayectoria entre la Tierra y el punto L4 de Lagrange. De todas maneras, aunque el cálculo de la transferencia no se vaya a realizar directamente a través de las ecuaciones propias de la transferencia de Hohmann, sí es posible que la herramienta creada encuentre transferencias directas que puedan considerarse como Transferencias de Hohmann.

1.9. Asistencia Gravitacional

A la hora de entender las trayectorias de baja energía, es preciso comprender el papel que juega la asistencia gravitacional lunar y terrestre. Como se acaba de ver, las transferencias de Hohmann son la manera más sencilla de trasladar un satélite entre dos órbitas, si solo se tiene en cuenta la influencia de un único cuerpo central (problema de los dos cuerpos). Además, si la transferencia de Hohmann se hace de manera correcta (aplicando los dos impulsos en el momento preciso), dicha transferencia es la manera más eficiente de trasladar el satélite entre ambas órbitas [15]. Sin embargo, este método económico de transferencia solo tiene en cuenta la presencia de un único cuerpo masivo (por ejemplo, la Tierra), y por lo tanto, solo es válido para órbitas cercanas a la Tierra.

Existe una alternativa para obtener transferencias eficientes (es decir, de baja energía), a través de la asistencia gravitacional, siendo posible obtener una velocidad muy elevada con menos combustible. La asistencia gravitacional consiste en una modificación significativa de la velocidad de un satélite debido a la proximidad con un cuerpo masivo, como puede ser la Luna. Esta variación de velocidad depende de la geometría con la que el satélite sobrevuele el cuerpo, y dependiendo de la dirección del movimiento, la asistencia gravitacional puede acelerar o frenar el satélite [12].

En el caso de utilizar la Luna como asistente gravitacional, es importante entender que la energía del satélite con respecto a la Luna no se modifica, mientras que la energía con respecto a la Tierra puede aumentar o disminuir, dependiendo de la geometría. Esta variación energética procede de la energía potencial gravitatoria producida por el cuerpo que asiste gravitacionalmente. La energía del satélite cambia según las Leyes de Newton, en una cantidad igual y opuesta a la fuerza gravitacional producida por el cuerpo asistente, debido al sobrevuelo [12].

La variación energética del satélite se traduce en una modificación de la velocidad, tanto en módulo como en dirección. Esta modificación dependerá de la geometría con la que el satélite aproxima al cuerpo. En la Figura 1.9 se muestra un esquema de una asistencia gravitacional, según la dirección de aproximación. La imagen muestra dos casos en los que un satélite modifica su dirección en el mismo ángulo debido a la presencia de un cuerpo (que se mueve con dirección hacia la derecha), con la diferencia de que en el caso de la derecha acelera, mientras que en la izquierda frena. Debajo se muestra el esquema vectorial de las velocidades del planeta y del satélite (tanto antes como después de la asistencia), representando cómo se calcula el ángulo de variación de la dirección de la velocidad. Se observa que si el satélite sobrevuela el planeta “por delante” (es decir, si el ángulo que forma la velocidad del satélite antes del sobrevuelo y la velocidad del planeta es menor a noventa grados), el planeta introducirá una energía contraria al movimiento, de manera que el satélite frenará. En términos coloquiales, se puede decir que el planeta “tira” del satélite en su dirección, y por lo tanto, al satélite le cuesta alejarse del planeta. Por otro lado, en el caso de la derecha, el satélite sobrevuela al cuerpo “por detrás” del planeta (es decir, si el ángulo que forma la velocidad del satélite antes del sobrevuelo y la velocidad del planeta es mayor a noventa grados), el planeta introduce una energía en el mismo sentido que el movimiento del satélite, por lo que aumenta su velocidad. En términos coloquiales, el planeta arrastra consigo al satélite, acelerándolo. Todas estas modificaciones de velocidad (tanto en módulo como en dirección) se producen sin usar nunca el combustible del satélite, siendo virtualmente con coste cero.

La asistencia gravitacional puede ser usada para transferir satélites entre planetas (por ejemplo, usar la asistencia gravitacional de Marte para llegar a Júpiter utilizando menos combustible). En nuestro caso, se pretende hacer uso de la asistencia gravitacional lunar para llegar al punto L4 con menos combustible. A las transferencias que aprovechan la asistencia gravitacio-

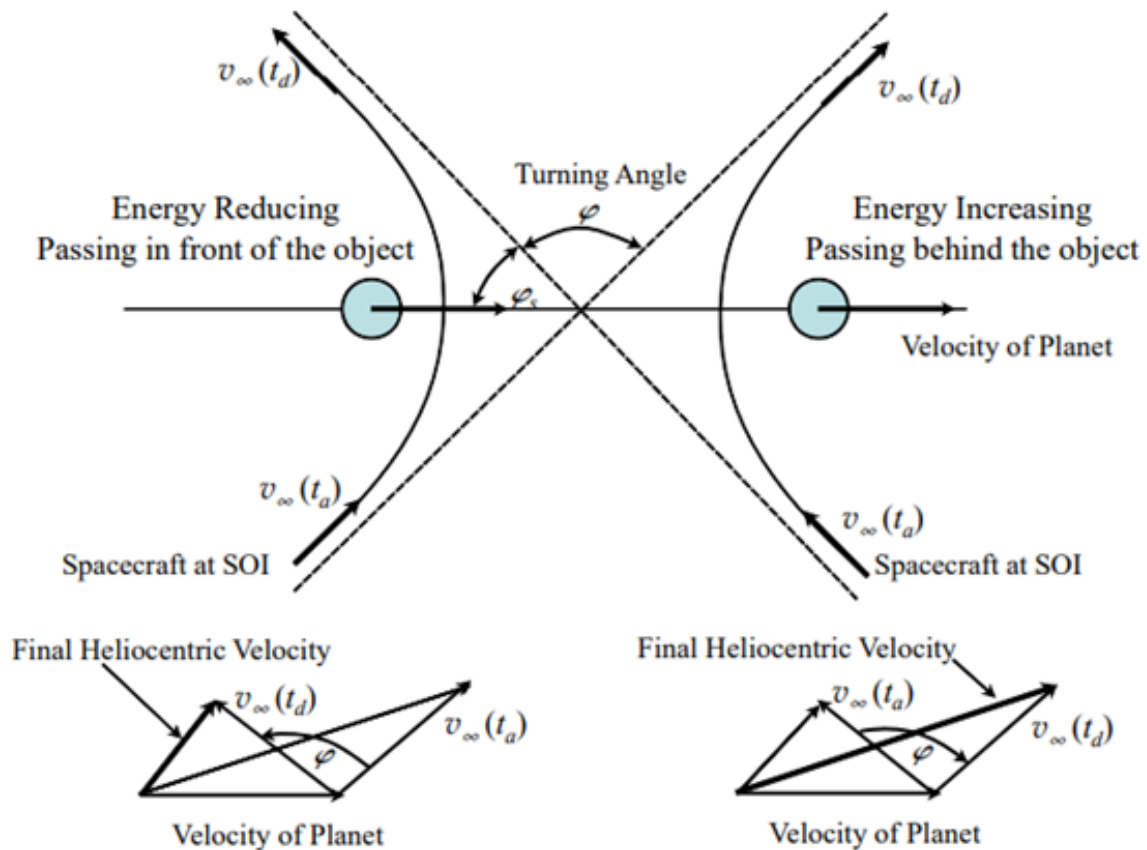


Figura 1.9: Esquema de una Asistencia Gravitacional [12]

nal lunar se las conoce comúnmente como “transferencias de baja energía”. Es importante mencionar que a pesar de que se llame de esta manera, la energía del satélite no es en absoluto baja, ni la Luna va a reducir la energía del satélite. Todo lo contrario, la energía del satélite en estos tipos de transferencias es elevada, y la Luna aporta parte de esa energía. El motivo de denominarlo “baja energía” es por la reducción del consumo de combustible que conllevan, y no por la reducción energética total del satélite.

1.10. Historia de las Transferencias de Baja Energía

A pesar de que el conocimiento matemático sobre las leyes de astrodinámica lleva siendo conocida desde el siglo XVII, la exploración espacial no comienza realmente hasta la segunda mitad del siglo XX, que comienza con el lanzamiento del Sputnik en 1957 por parte de la Unión Soviética. Tras este logro, se inicia una carrera espacial entre la Unión Soviética y Estados Unidos, que se convirtió en un símbolo de proeza económica y orgullo nacional [12]. Las primeras victorias en la carrera espacial fueron soviéticas, no solo por el lanzamiento del Sputnik, sino también por hitos como tener al primer humano en viajar al espacio exterior (Yuri Gagarin en 1961) o ser

los primeros en enviar instrumentos a la Luna (en 1959) o Marte (1971). Por otro lado, Estados Unidos es el responsable de enviar al primer hombre que pisó la Luna, en 1969 [12].

La exploración espacial no se limitó a la zona cercana a la Tierra. En los años setenta se lanzaron muchas misiones con el propósito de estudiar los planetas del Sistema Solar. En 1971 los soviéticos lanzaron el Mars 3, que aterrizó en Marte y consiguió enviar 20 segundos de datos. Por otro lado, el programa americano US Mariner exploró Mercurio, Venus y Marte, y el Viking 1 aterrizó en Marte en 1976. Misiones como la Pioneer 10 y 11, y las Voyager 1 y 2 fueron lanzadas en los años setenta para explorar Júpiter, Saturno, Urano y Neptuno [12].

En lo que respecta a la Luna, todas las misiones que se efectuaron en los años sesenta, setenta y ochenta se basaban en la teoría de la transferencia de Hohmann para transportar las naves entre la Tierra y la Luna. Con este método, alcanzaban la Luna usando teorías Keplerianas de dos cuerpos, que minimiza el tiempo de trayectoria con bajos consumos. Sin embargo, la velocidad inicial que requiere la nave para realizar este tipo de transferencias es muy elevada [16]. Esto cambió en 1991, con una misión japonesa llamada Muses-A, que tenía una cantidad de combustible que no le permitía llegar a la Luna a través de los métodos habituales en la época. Basándose en los trabajos teóricos de Belburno y Miller, se diseñó una nueva trayectoria que utilizaba una transferencia de baja energía con una captura balística en la Luna, haciendo uso de la perturbación solar para reducir considerablemente la necesidad de combustible [16]. Esta misión, denominada Hiten, fue todo un éxito, y abrió la puerta a nuevas misiones a la Luna con un menor requerimiento de combustible.

Esta nueva forma de transportar vehículos entre la Tierra y la Luna fue innovadora, permitiendo menores velocidades iniciales, a cambio de tiempos de transferencia mucho mayores [8]. Este tipo de trayectorias se denominan de “Baja Energía”, y hacen uso de la asistencia gravitacional de la Luna y del Sol. Desde entonces, muchas misiones han aprovechado este tipo de trayectorias para reducir el coste de la misión, como es el caso de misiones como ISEE-3, WMAP, SOHO, Genesis, WIND, ARTEMIS, o GRAIL, entre otras [12].

A fin de poder entender mejor la ventaja de este tipo de maniobras, se puede analizar, por ejemplo, la misión GRAIL. La nave espacial GRAIL fue lanzada a una órbita muy grande en torno a la Tierra, de manera que se hallaba significativamente influenciada por la perturbación solar. Por ello, la gravedad del Sol aumentó su energía, desviando su trayectoria y elevando su velocidad sin necesidad de uso de combustible. Gracias a ello pudieron llegar a la Luna usando 200 m/s menos de impulso que si hubieran utilizado una maniobra convencional [12].

La Figura 1.10 muestra una comparación entre una transferencia de baja energía entre la Tierra y la Luna (de 84 días), y una transferencia convencional de Hohmann (de 4 días). Se puede observar cómo la transferencia de

baja energía se aleja mucho de la Tierra, hasta alcanzar una distancia en la que el satélite se puede ver afectado por la gravedad solar, que aumenta su energía, mientras que la trayectoria convencional se puede considerar directa entre la Tierra y la Luna. A pesar de que la transferencia convencional es mucho más corta, la transferencia de baja energía requiere una diferencia de velocidad 170 m/s menor que la convencional. Dependiendo de la misión que se esté estudiando, se debe decidir si la ganancia en coste compensa la pérdida en tiempo de transferencia.

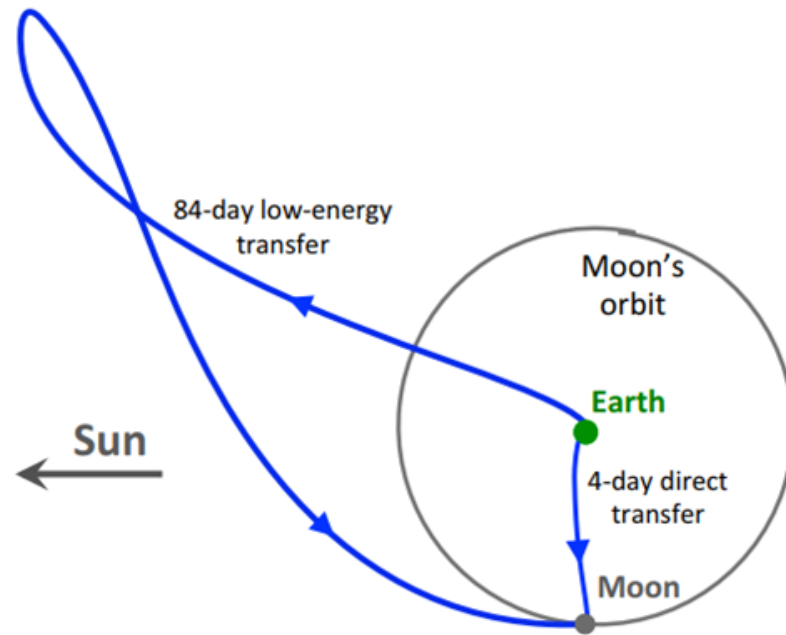


Figura 1.10: Comparación entre una transferencia de baja energía y una transferencia de Hohmann [12]

Este tipo de misiones de baja energía se están usando cada vez más, debido a sus considerables ventajas, sobretodo con respecto a su coste [7]. Por ello, muchos proyectos han estudiado cómo optimizar estas trayectorias, ya que son altamente dependientes de las condiciones iniciales de lanzamiento. En los últimos años se han desarrollado numerosas herramientas matemáticas y métodos informáticos para encontrar las trayectorias óptimas. Métodos como los “invariant manifolds”, los “lunar fly-by” o los motores de bajo empuje se utilizan para desarrollar misiones que minimicen el consumo, permitiendo transferencias entre la Tierra y la Luna mucho más económicas que con métodos convencionales [5].

El estudio de las trayectorias de baja energía puede ayudar a reducir los costes de las misiones espaciales, mejorando la eficiencia de los programas espaciales y aumentando el número de misiones llevadas a cabo [2]. El uso de los puntos de Lagrange (especialmente L4 y L5) para posicionar satélites o estaciones espaciales, junto al uso de transferencias de baja energía, puede abrir la puerta a nuevas misiones que hasta ahora se consideraban demasiado costosas [4].

Capítulo 2

El Problema de los tres cuerpos

Como se ha visto, se puede resolver de forma directa las ecuaciones de movimiento del satélite si únicamente se tiene en cuenta la influencia gravitacional de otro cuerpo. Sin embargo, esta aproximación solo se puede aplicar en las cercanías de dicho cuerpo, cuando el resto de fuerzas gravitatorias debido a otros cuerpos masivos son despreciables. Para los casos en los que la influencia gravitacional de otros cuerpos es considerable, es necesario estudiar el problema en su forma más compleja, tal y como se vio en la sección 1.5.

Durante muchos años se ha estudiado el problema de los tres cuerpos (la forma más sencilla del problema de los n cuerpos) sin haberse obtenido hasta la fecha una solución general cerrada [12]. La solución analítica más cercana requiere una serie de hipótesis a fin de simplificar el problema. Sin embargo, para casos más complejos, es necesario aplicar un método numérico que permita calcular la posición del satélite en cada instante. Al ser numérica, esta forma de resolución solo es posible a través de métodos computacionales. Desde un punto de vista genérico, la resolución es sencilla: Sólo hace falta calcular las fuerzas que actúan sobre el satélite en un momento dado (conocida su posición y velocidad), calcular la aceleración debido a dichas fuerzas, y una vez obtenida la aceleración, calcular la velocidad y la posición del satélite en el siguiente instante de tiempo. Este proceso, repetido para cada instante de tiempo, define la trayectoria del satélite.

Sin embargo, por sencillo que parezca el procedimiento desde un punto de vista teórico, la ejecución es bastante más compleja. Para poder llegar a una solución numérica, es necesario imponer ciertas hipótesis. A continuación se explica el procedimiento de cálculo numérico del problema restringido de los tres cuerpos y de los cuatro cuerpos. Además, se explicarán en detalle los dos sistemas de coordenadas que utilizaremos para mostrar las soluciones obtenidas, y se hablará de ciertas características físicas del problema restringido de los tres cuerpos, como son los puntos de Lagrange, la constante de Jacobi, y las regiones de Hill.

2.1. Problema Restringido Circular de los Tres Cuerpos

El problema de los tres cuerpos es uno de los problemas de astrodinámica más estudiados, ya que a pesar de la aparente sencillez del mismo, las ecuaciones resultantes no son integrables analíticamente. Además, estas expresiones muestran una alta dependencia con las condiciones iniciales y son muy susceptibles a las pequeñas perturbaciones [4].

Sin embargo, existe una forma de simplificar el problema de los 3 cuerpos basada en considerar dos hipótesis: en primer lugar, asumir que una de las tres masas es despreciable frente al resto (que será el caso de un satélite). En segundo lugar, consideraremos que los dos cuerpos restantes (el primario y el secundario, que pueden ser, por ejemplo, la Tierra y la Luna) orbitan circularmente en torno al centro de masas del sistema, que se encuentra en la recta que une el centro de ambos cuerpos [12]. La primera hipótesis es fácilmente defendible, en vista de que la masa de un satélite común es del orden de los 10^3 kg, mientras la masa de la Tierra y la Luna son del orden de 10^{24} kg y 10^{22} kg respectivamente. La segunda hipótesis puede crear más controversia, pero un estudio detallado de la excentricidad de la órbita elíptica que forma la Luna en torno a la Tierra nos muestra que posee un valor de $e = 0.055$, un número tan cercano a cero que puede asumirse como tal. De esta manera se concluye que la órbita lunar puede ser correctamente considerada como circular [16].

Al introducir estas dos hipótesis se genera el “Problema Restringido de los Tres Cuerpos”, abreviado con las siglas “CR3BP” por su nombre en inglés. A continuación, se muestra el desarrollo matemático para obtener las ecuaciones que definen el movimiento del satélite en el Problema Restringido de los Tres Cuerpos. Si el lector está interesado en estudiar la deducción matemática en mayor detalle, puede consultar el trabajo de [12]. Es importante mencionar que, a fin de explicar el proceso matemático, asumiremos que los dos cuerpos en torno a los que se mueve el satélite son la Tierra y la Luna. Sin embargo, el mismo razonamiento se puede utilizar para cualquier par de cuerpos masivos que cumplan las hipótesis explicadas previamente, como podrían ser el Sol y la Tierra.

En primer lugar, analizaremos el valor de la aceleración del satélite con respecto al baricentro del sistema Tierra-Luna, teniendo en cuenta los términos adicionales que surgen debido a la rotación inherente del sistema (ya que la Luna y la Tierra giran en torno a su baricentro) [12].

$$\ddot{\vec{r}}_{Bsat} = \vec{a}_s + \dot{\vec{\omega}}_s \times \vec{r}_s + \vec{\omega}_s \times (\vec{\omega}_s \times \vec{r}_s) + 2\vec{\omega}_s \times \vec{v}_s + \vec{a}_{org}, \quad (2.1)$$

donde los términos r , v , w y a hacen referencia a la posición, velocidad, aceleración y rotación del cuerpo respectivamente, y los sufijos s y org hacen referencia al satélite y el origen respectivamente. En primer lugar, debido a la hipótesis de que las órbitas son circulares, asumimos que la tasa de cambio

de la rotación del sistema es igual a cero. Además, el origen de coordenadas no acelera respecto al origen de inercia, al estar usando el baricentro como punto de referencia, por lo que la aceleración del origen también será nula. Con estas simplificaciones, y realizando el producto vectorial, tenemos [12]:

$$\ddot{\vec{r}}_{Bsat} = \ddot{\vec{r}}_s - \omega_s^2(x\hat{x}_s + y\hat{y}_s) - 2\omega_s(\dot{y}\hat{x}_s - \dot{x}\hat{y}_s), \quad (2.2)$$

donde \hat{x} y \hat{y} son los vectores unitarios en la dirección del movimiento según x e y . Desglosando la ecuación en sus componentes cartesianas, obtenemos lo siguiente [12]:

$$\ddot{x} - 2\omega_s\dot{y} - \omega_s^2x = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2} \right) \quad (2.3)$$

$$\ddot{y} - 2\omega_s\dot{x} - \omega_s^2y = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2} \right) \quad (2.4)$$

$$\ddot{z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2} \right) \quad (2.5)$$

$$\begin{cases} r_1 = \sqrt{(x + r_{B1})^2 + y^2 + z^2} \\ r_2 = \sqrt{(x + r_{B2})^2 + y^2 + z^2} \end{cases} \quad (2.6)$$

Llegados a este punto, es útil adimensionalizar el problema, a fin de generalizar el resultado. Para ello, introducimos en primer lugar la Unidad de Masa, que será igual a la suma de la masa de los dos cuerpos masivos (la Tierra y la Luna) y la denotaremos con las siglas MU (por su nombre en inglés). En segundo lugar, introducimos la constante del problema μ , conocida como Relación Másica o “Constante del Problema de los Tres Cuerpos”, y se definirá como el cociente entre las masas de los dos cuerpos principales (como pueden ser la Luna y la Tierra):

$$\mu = \frac{m_2}{m_1}. \quad (2.7)$$

Esta constante será muy útil a lo largo de todo el problema, ya que, además de relacionar las masas de los dos cuerpos primarios, definirá las distancias entre los dos cuerpos y el centro de masas (o baricentro) en torno al que giran ambos cuerpos. De esta manera, se puede definir que la masa primaria adimensionalizada es de $1 - \mu$, y la masa secundaria adimensionalizada es de μ . Además la distancia adimensionalizada entre la masa primaria y el baricentro es de μ y la distancia adimensionalizada entre la masa secundaria y el baricentro es de $1 - \mu$. También se pueden definir la Unidad de Longitud (DU) como la distancia entre las dos masas primarias, y la Unidad de Tiempo (TU) como el tiempo en el que el sistema da una vuelta completa en torno al baricentro. De esta manera, la velocidad adimensional de giro del sistema es de la unidad [12].

La Figura 2.1 muestra un esquema del problema restringido de los tres cuerpos adimensionalizado. Se puede observar los dos cuerpos masivos (aquí nombrados m_E y m_M , por los nombres de la Tierra y la Luna en inglés), que se hayan a una distancia μ y $1 - \mu$ del centro de coordenadas respectivamente. Este centro de coordenadas será el baricentro del sistema, de modo que los dos cuerpos girarán en torno al baricentro a una velocidad adimensional constante de $\omega = 1$. Además, se representa el satélite, que se halla a una distancia de ρ_E y ρ_M de ambos cuerpos.

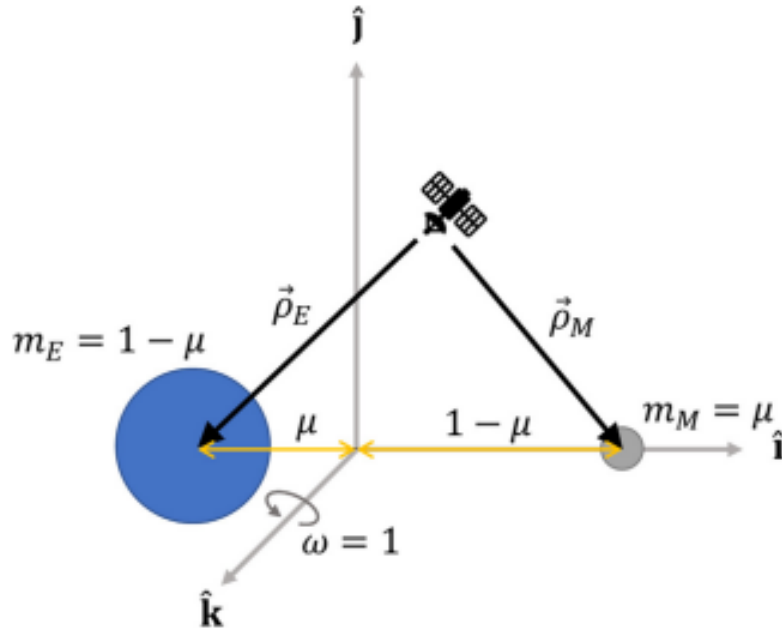


Figura 2.1: Esquema del sistema CR3BP [1]

Usando la constante μ en las ecuaciones anteriores, y realizando la derivada parcial, se puede definir el movimiento del satélite de la siguiente manera [12]:

$$\ddot{x} - 2\dot{y} - x = -\frac{(1-\mu)(x+\mu)}{r_1^3} - \frac{\mu(x-1+\mu)}{r_2^3} \quad (2.8)$$

$$\ddot{y} + 2\dot{x} - y = -\frac{(1-\mu)y}{r_1^3} - \frac{\mu y}{r_2^3} \quad (2.9)$$

$$\ddot{z} = -\frac{(1-\mu)z}{r_1^3} - \frac{\mu z}{r_2^3} \quad (2.10)$$

$$\begin{cases} r_1 = \sqrt{(x+\mu)^2 + y^2 + z^2} \\ r_2 = \sqrt{(x+\mu-1)^2 + y^2 + z^2} \end{cases} \quad (2.11)$$

Estas ecuaciones definen la aceleración del sistema según su posición y su velocidad, para cualquier punto del espacio.

Algunos autores utilizan otra forma de expresar matemáticamente esta solución, que es análoga, y que se muestra a continuación. En ella, se usa un

potencial Ω_3 para definir el estado del satélite. En esta expresión, se asume que la aceleración \ddot{z} es nula:

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2\dot{y} + \partial\Omega_3/\partial x \\ \ddot{y} = -2\dot{x} + \partial\Omega_3/\partial y \end{cases} \quad (2.12)$$

$$\Omega_3(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} + \frac{1}{2}\mu(1-\mu). \quad (2.13)$$

La razón por la que muchos autores asumen que la aceleración en la dirección perpendicular al plano orbital es nula ($\ddot{z} = 0$) es porque, tal y como se puede observar en la ecuación 2.12, una variación en la velocidad \dot{z} no aporta aceleración en la dirección de x ni de y , por lo que toda la energía que se use para modificar la velocidad \dot{z} no servirá para acercar al satélite al punto L4 (ya que dicho punto se encuentra en el plano orbital XY). Debido a ello, toda aceleración en la dirección z será una pérdida inútil de combustible, aumentando el consumo innecesariamente. Es por esto que se asumirá que todo el movimiento se produce en el plano XY .

En la ecuación 2.13 se puede observar que la función Ω_3 solo depende de la posición del satélite respecto a la Tierra y a la Luna. Utilizando estas expresiones se puede calcular el estado del satélite en cada punto, de manera que la trayectoria del satélite queda resuelta numéricamente. Este resultado será válido para cualquier problema de los tres cuerpos en los que se cumplan las hipótesis mencionadas. Sin embargo, al solo considerar dos cuerpos masivos, no tiene en cuenta la influencia del Sol sobre el satélite. Es por ello que resulta necesario utilizar unas ecuaciones más complejas, a través de la resolución del problema bicircular restringido de los cuatro cuerpos, tal y como se verá en la sección 2.4.

2.2. Puntos de Lagrange

Un análisis detallado del problema restringido de los tres cuerpos nos muestra la existencia de ciertos puntos de equilibrio donde la aceleración que experimenta el satélite es nula. Estos puntos fueron descubiertos por los matemáticos Lagrange (1772) y Euler (1776). se trata de lugares de gran relevancia, ya que desde un punto de vista teórico, en estas ubicaciones la aceleración será nula, por lo que si se coloca un objeto (por ejemplo, un satélite) en dicho punto, este objeto no se moverá de él si no se le aplica ninguna fuerza externa [4].

Los puntos de Lagrange son cinco, y se conocen como $L1$, $L2$, $L3$, $L4$ y $L5$. Los tres primeros están alineados con el vector que une los centros de los dos cuerpos principales, mientras que los puntos cuatro y cinco forman un triángulo equilátero con ambos cuerpos [4]. Los primeros tres puntos, a pesar de que la aceleración sea nula, son puntos inestables, de manera que una pequeña perturbación apartaría al satélite de dichos puntos, mientras que por otro lado, los puntos triangulares ($L4$ y $L5$) son puntos linealmente

estables (al menos, siempre y cuando el parámetro μ sea menor a 0.03852, como es el caso del sistema Tierra-Luna) [5].

De esta manera, teóricamente es posible colocar un satélite en los puntos $L4$ o $L5$ y que se mantenga ahí de manera indefinida sin necesidad de usar combustible, lo cual lo convierte en un potencial candidato para colocar satélites de observación o estaciones espaciales [3]. Esta afirmación es solo teórica, ya que en la realidad la aceleración en estos puntos no es estrictamente cero debido a la existencia de fuerzas externas y perturbaciones, como puede ser la gravedad solar, tal y como veremos en 2.4.

La Figura 2.2 muestra un esquema de la posición de los cinco puntos de Lagrange en el sistema Tierra-Luna. Se observa que el primer punto de Lagrange ($L1$) está colocado entre la Tierra y la Luna, y se encuentra en la recta que une el centro de la Tierra y la Luna. El segundo punto de Lagrange en el sistema Tierra-Luna ($L2$) también se haya en dicha recta, pero se encuentra más allá de la Luna. El tercer punto de Lagrange en el sistema Tierra-Luna se encuentra en el punto estrictamente opuesto a la Luna respecto al centro de la Tierra. El cuarto y quinto punto ($L4$ y $L5$) se hayan en los vértices de dos triángulos equiláteros, en los que la base es la distancia Tierra-Luna.

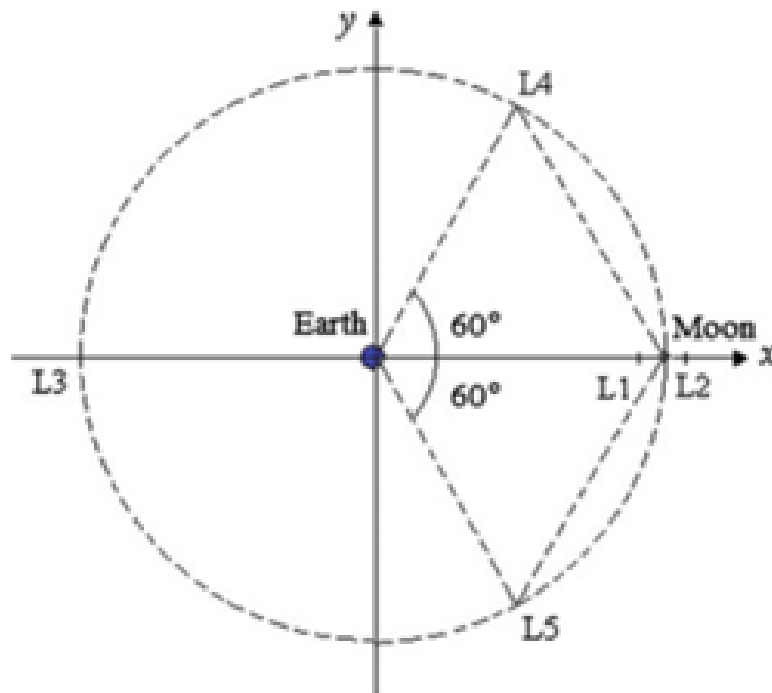


Figura 2.2: Esquema de los puntos de Lagrange en el sistema Tierra-Luna [4]

La posición exacta de estos puntos se puede calcular despejando de las ecuaciones del problema restringido circular de los tres cuerpos, imponiendo que la aceleración y la velocidad deben ser nulas, de la siguiente manera:

$$x - \frac{(1 - \mu)(x + \mu)}{r_1^3} - \frac{\mu(x - 1 + \mu)}{r_2^3} = 0 \quad (2.14)$$

$$y \left(1 - \frac{(1 - \mu)}{r_1^3} - \frac{\mu}{r_2^3} \right) = 0 \quad (2.15)$$

La Tabla 2.1 muestra el valor numérico de los puntos de Lagrange del sistema Tierra-Luna, en la que las distancias se han adimensionalizado utilizando la distancia Tierra-Luna [6]. Los ejes de coordenadas son los mismos que en la Figura 2.2, con el eje x positivo en la dirección que une el centro de la Tierra y el centro de la Luna, y el eje y perpendicular al eje x , contenido en el plano orbital lunar.

Tabla 2.1: Posición de los puntos de Lagrange en el sistema Tierra-Luna (coordenadas adimensionalizadas) [6]

Punto	x	y	z
$L1$	0.863893	0	0
$L2$	1.155699	0	0
$L3$	-1.005064	0	0
$L4$	0.487850	0.8660254	0
$L5$	0.487850	-0.8660254	0

Los puntos $L4$ y $L5$, al ser linealmente estables, son candidatos para situar misiones de observación, telescopios astronómicos, o estaciones espaciales [4]. Como ya se ha comentado en la introducción, el propósito de este documento es calcular posibles trayectorias entre la Tierra y el punto $L4$ de Lagrange. Se ha escogido el punto $L4$ arbitrariamente, porque el proceso podría haberse realizado con respecto al punto $L5$ obteniendo resultados similares, ya que ambos puntos son simétricos.

2.3. Constante de Jacobi y Regiones de Hill

En base a las ecuaciones del problema restringido circular de los tres cuerpos es posible definir un parámetro conocido como Constante de Jacobi, que representa el nivel energético que necesita un satélite para alcanzar ciertos lugares alrededor de la Tierra. Esta constante se puede expresar de la siguiente manera [8]:

$$C(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = 2\Omega_3(x, y) - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2), \quad (2.16)$$

donde C representa la constante de Jacobi. De esta manera, cuanto menor sea la constante de Jacobi de un satélite, mayor distancia respecto a la Tierra puede alcanzar. Si no se aplica ninguna fuerza externa sobre el satélite, la constante de Jacobi se mantendrá constante durante toda la trayectoria,

de manera que la velocidad del satélite tendrá que variar según varíe el potencial característico Ω_3 , que depende de la posición del satélite respecto a la Tierra y a la Luna.

La Figura 2.3 muestra el valor de la constante según la posición del satélite, obviando una velocidad nula en dicha posición, de manera que se puede predecir la velocidad inicial que se necesita para poder alcanzar determinada posición. Se puede observar que en las cercanías de la Tierra, la constante de Jacobi tiene un valor cercano a cuatro, por lo que la velocidad inicial del satélite es menor. Por su parte, en las cercanías del punto L_4 de Lagrange, el valor es cercano a tres, mostrando que la velocidad inicial debe ser mayor (ya que en la ecuación de la constante de Jacobi la velocidad está restando). Esto significa que para llegar al punto L_4 de Lagrange es necesario tener mayor velocidad en el momento posterior al primer impulso que si se quisiera llegar a zonas aún más alejadas de la Tierra, tal y como se puede observar en la imagen. El estudio de esta constante nos permite entender que la energía necesaria para alejarse de la Tierra no solo depende de la distancia a la que quieras viajar, sino también la zona geométrica que quieras alcanzar.

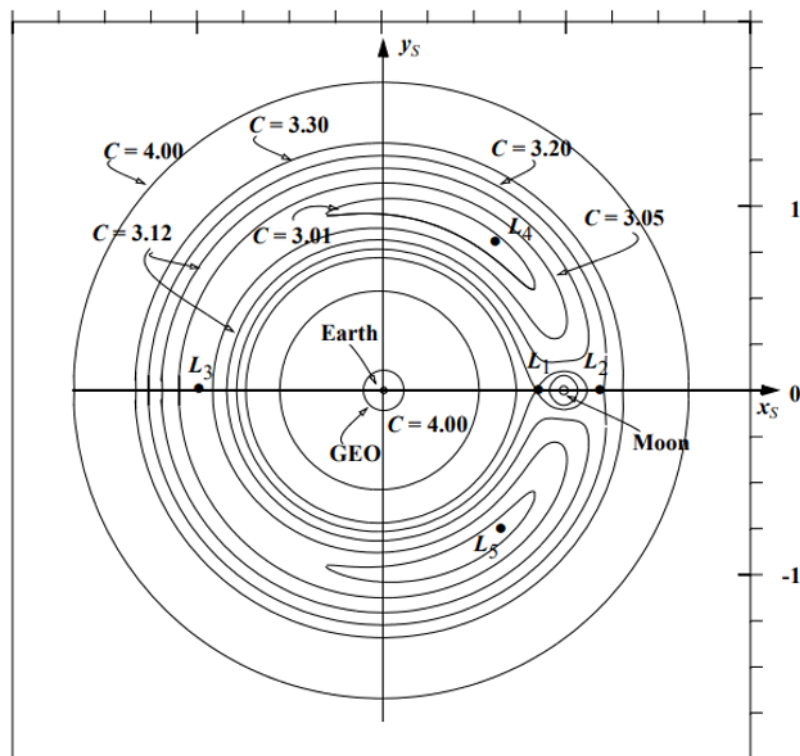


Figura 2.3: Valor de la constante de Jacobi en el sistema Tierra-Luna [12]

Al calcular el valor de la constante de Jacobi necesaria para llegar a cada punto de Lagrange, se observa que dicho valor no es igual en todas ellas, sino que decrece con cada punto (es decir, que la energía necesaria para alcanzar los puntos de Lagrange aumenta con cada punto). Esto es así ex-

cepto con los puntos L_4 y L_5 , que tienen la misma constante de Jacobi, ya que su posición relativa a la Tierra y a la Luna es la misma. Esto se puede expresar matemáticamente de la siguiente manera [7]:

$$C_1 > C_2 > C_3 > C_4 = C_5 = 3$$

Conectadas con la constante de Jacobi existen las Regiones de Hill, que definen las zonas accesibles por un satélite con una velocidad inicial dada (es decir, con un nivel energético establecido). Estas Regiones de Hill imponen volúmenes en el espacio fuera de los cuales es imposible acceder con la energía suministrada, independientemente del tiempo que se espere [16]. La frontera de dichos volúmenes son curvas de velocidad nula, es decir, que si un satélite llegase a la frontera de la Región de Hill tendría una velocidad nula, por lo que no podría seguir avanzando (es decir, no puede escapar de la Región de Hill) [7]. Estas regiones pueden ser útiles para definir transferencias lunares, ya que imponen las regiones por las que el satélite puede trasladarse. Sin embargo, en nuestro estudio, estas regiones prácticamente no proporcionan información relevante, ya que el nivel energético necesario para alcanzar el punto L_4 de Lagrange es muy elevado (es decir, la constante de Jacobi es muy baja), de manera que un satélite con energía suficiente para alcanzar el punto L_4 de Lagrange tiene la energía necesaria para poder alcanzar cualquier otro punto de la zona cercana a la Tierra y la Luna [2]. Es por esto que no se estudiarán las Regiones de Hill en más detalle.

En resumen, la velocidad inicial necesaria para alcanzar el punto L_4 de Lagrange será muy elevada, y estará cercana a la velocidad de escape del satélite. Esta energía es tan elevada que el satélite podrá viajar por toda la zona cercana a la Tierra y la Luna, sin que existan zonas inaccesibles. Se hablará más sobre este fenómeno en la sección 3.5.

2.4. Problema Restringido Bicircular de los Cuatro Cuerpos

El problema restringido de los tres cuerpos nos proporciona las herramientas matemáticas para poder realizar un cálculo numérico del comportamiento de un satélite en las cercanías de la Tierra y la Luna, donde el satélite estará influenciado solamente por estos dos cuerpos. Sin embargo, este modelo no tiene en cuenta la presencia del Sol como cuarto cuerpo involucrado en el movimiento. Es por ello que necesitamos un modelo más sofisticado, que tenga en cuenta la presencia del Sol. Este modelo es el Problema Restringido Bicircular de los Cuatro Cuerpos (conocido como BCR4BP por sus siglas en inglés).

El problema restringido bicircular de los cuatro cuerpos asume hipótesis similares a las del problema de los tres cuerpos. Téngase en cuenta que a lo largo de esta sección se explicará este modelo utilizando los cuerpos de la Tierra, Luna y Sol como ejemplos, pero que este modelo se podría

utilizar con cualquier grupo de tres cuerpos masivos que cumplieren con las mismas hipótesis. Estas hipótesis pueden resumirse de la siguiente manera [5]

- La masa del satélite es despreciable frente a las demás masas
- La Tierra y la Luna giran en una órbita circular en torno a su baricentro
- El baricentro Tierra-Luna gira en órbita circular en torno al Sol
- La Tierra, la Luna y el Sol orbitan en el mismo plano

La primera hipótesis es la que otorga el adjetivo “restringido” al problema, ya que en realidad no se trata de un problema puro de cuatro cuerpos (en los que los cuatro cuerpos se influyen entre ellos), sino que elimina la influencia del satélite sobre los demás cuerpos. La hipótesis de que la Tierra y la Luna orbitan circularmente en torno a su baricentro, y que el baricentro Tierra-Luna orbita circularmente en torno al Sol es la que otorga el adjetivo de “bicircular”.

Este modelo puede no ser necesario en las zonas más cercanas a la Tierra y la Luna, debido a la poca influencia de la gravedad solar, pero se vuelve necesaria en la zona cercana al punto L4, siendo un modelo mucho más realista en las cercanías a esta zona [5]. Desde un punto de vista meramente teórico, sería posible utilizar el modelo de los tres cuerpos para ciertas zonas del espacio, y el modelo de los cuatro cuerpos para aquellas zonas en las que el modelo de los tres cuerpos no sea suficientemente realista. Sin embargo, a fin de optimizar el proceso, es mejor emplear un marco común que englobe toda la dinámica del satélite, independientemente de su posición [7]. Es por ello que, para el cálculo del presente documento, se utilizará el modelo restringido bicircular de los cuatro cuerpos, en lugar del de los tres cuerpos.

La Figura 2.4 muestra el esquema del problema restringido bicircular de los cuatro cuerpos. Se puede apreciar que el centro de coordenadas es el baricentro Tierra-Luna, y que se asume que los tres cuerpos masivos (Tierra, Luna y Sol) giran en torno al baricentro Tierra-Luna. Se muestran la distancias entre el satélite y los tres cuerpos masivos (Tierra, Luna y Sol respectivamente), y la distancia Sol-Baricentro (expresada a través de la letra ρ). Además, se observa el ángulo θ , que se define como el ángulo entre el vector Baricentro-Sol y el vector Baricentro-Luna, y se puede calcular en base al tiempo transcurrido, de la siguiente manera: $\theta = \omega_s \cdot t$, siendo ω_s la velocidad de rotación del Sol respecto al baricentro Tierra-Luna. Nótese que aquí se toma como inicio de tiempos el momento en el que el vector Tierra-Sol y el vector Tierra-Luna están alineados.

Las ecuaciones matemáticas que definen el problema restringido bicircular de los cuatro cuerpos son similares a las del problema de tres cuerpos, y se pueden expresar de la siguiente manera [5]:

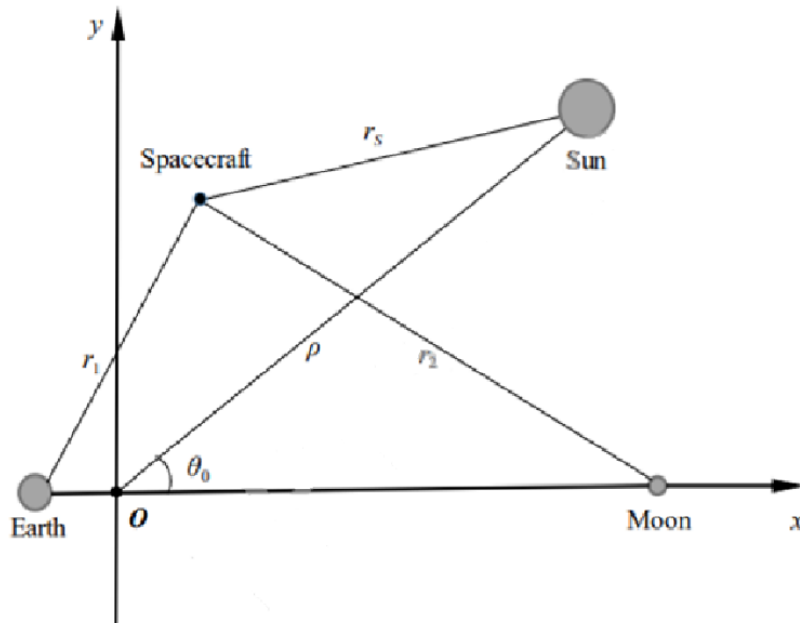


Figura 2.4: Esquema del Problema Restringido Bicircular de los cuatro cuerpos [5]

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2\dot{y} + \partial\Omega_4/\partial x \\ \ddot{y} = -2\dot{x} + \partial\Omega_4/\partial y \end{cases} \quad (2.17)$$

donde la función Ω_4 es la función potencial característica del problema de los cuatro cuerpos, que puede definirse de la siguiente manera [8]:

$$\Omega_4(x, y, t) = \Omega_3(x, y) + \frac{m_s}{r_3(t)} - \frac{m_s}{\rho^2}(x \cos(\omega_s t) + y \sin(\omega_s t)), \quad (2.18)$$

donde m_s , r_3 hacen referencia a la masa del Sol y la distancia Sol-Satélite respectivamente, y Ω_3 es la función potencial característica del problema de los tres cuerpos, tal y como se vio en la ecuación 2.13. Se puede observar que Ω_4 no solamente depende de la posición del satélite (como lo hace Ω_3), sino que además depende del tiempo. Esto se debe a que la posición relativa del Sol con respecto a la Tierra y la Luna es dependiente del tiempo. La distancia r_3 , que también es dependiente del tiempo, se puede expresar de la siguiente manera [7]:

$$r_3(t) = \sqrt{(x - \rho \cos(\omega_s t))^2 + (y - \rho \sin(\omega_s t))^2}. \quad (2.19)$$

Estas expresiones solo muestran la dinámica del satélite en dos dimensiones, dando por hecho que el movimiento del satélite se produce en el mismo plano orbital de la Luna y la Tierra. Sin embargo, esto no tiene porqué ser cierto. Es posible añadir a estas ecuaciones el movimiento en la tercera dimensión, que tomaría la siguiente expresión [1]:

$$\ddot{z} = -\frac{m_s z}{\rho^3} - \frac{(1-\mu)z}{r_1^3} - \frac{\mu z}{r_2^3}, \quad (2.20)$$

siendo r_1 y r_2 la distancia del satélite respecto a la Tierra y la Luna respectivamente.

Es importante mencionar que la adición de la gravedad solar dentro del sistema genera diferencias considerables respecto al modelo de tres cuerpos. En primer lugar, el sistema de ecuaciones se convierte en temporalmente dependiente, de manera que el tiempo transcurrido se vuelve relevante. En segundo lugar, debido a la presencia de una tercera fuerza, los puntos de equilibrio (puntos de Lagrange), la integral de Jacobi y las regiones de Hill desaparecen. Cabría preguntarse entonces como es posible colocar un satélite en el punto L4 de Lagrange del sistema Tierra-Luna si dicho punto no existe en el sistema BCR4BP estrictamente hablando. La realidad es que, a pesar de que en el punto L4 la aceleración no es estrictamente nula, esta aceleración es la mínima posible. Es decir, en cualquier punto distinto a los puntos de Lagrange del sistema Tierra-Luna (en el modelo de los tres cuerpos) la aceleración sufrida por el satélite será mayor que en dichos puntos. Esto significa que, a efectos prácticos, la energía necesaria para mantener al satélite en el punto L4, a pesar de estar en un modelo BCR4BP, es menor que si lo colocásemos en cualquier otra órbita.

Con todas estas ecuaciones es posible definir la aceleración que sufre el satélite debido a las fuerzas gravitatorias de la Tierra, la Luna y el Sol, conociendo su posición y el tiempo transcurrido. Una vez conocida dicha aceleración, se puede realizar una integración numérica, calculando la nueva posición y velocidad a partir de la aceleración calculada. Realizando el cálculo para cada instante de tiempo, se puede calcular la trayectoria del satélite, y conocer el tiempo que ha tardado en realizar la transferencia.

En el capítulo 4 se hablará más detalladamente de cómo se ha implementado estas ecuaciones teóricas en el código elaborado, así como el método de integración numérico que se ha utilizado para poder realizar el cálculo de la trayectoria.

2.5. Sistema de Coordenadas específico

Para poder entender correctamente el movimiento del satélite en su trayectoria al rededor de la Tierra, es necesario definir un sistema de coordenadas que nos permita entender el comportamiento del satélite y comparar los resultados de manera eficiente. La Figura 2.5 muestra un esquema genérico del sistema BCR4BP, en el que se muestran el Sol, la Tierra y la Luna. Se observan dos sistemas de referencia, uno con el centro de coordenadas en el baricentro Tierra-Luna y el eje x en la dirección de la Luna (dibujado en gris), y otro con el centro de coordenadas en el baricentro del sistema Sol-Tierra-Luna, y los ejes no anclados ni a la Tierra ni a la Luna (dibujado en

negro).

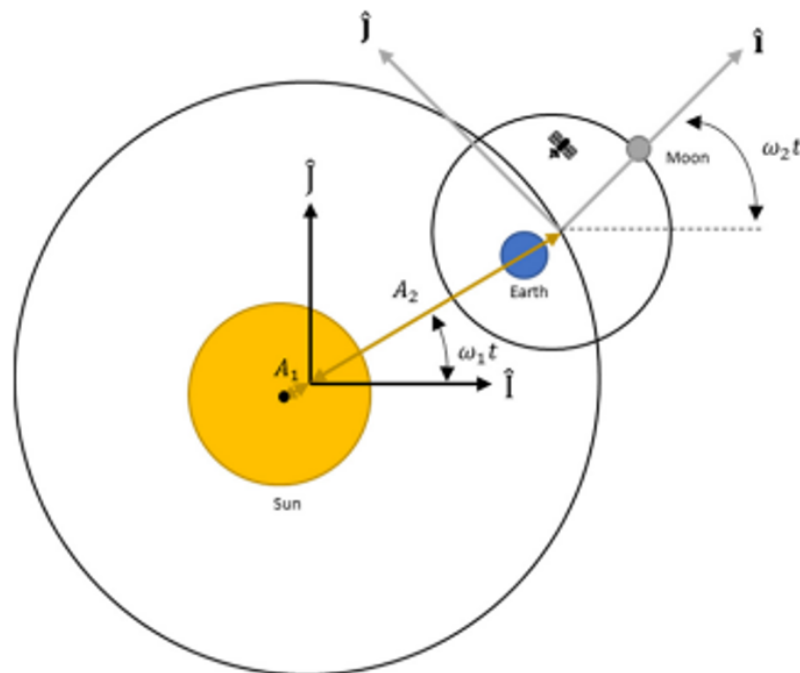


Figura 2.5: Esquema del sistema de coordenadas en el problema BCR4BP [1]

El segundo de estos sistemas (con el origen en el baricentro Sol-Tierra-Luna), aunque pueda parecer más realista, no nos resulta útil a la hora de estudiar los resultados obtenidos, ya que la distancia real entre el Sol y la Tierra es tan grande que el movimiento orbital del satélite resulta absolutamente inapreciable. Por este motivo, un sistema de coordenadas con el origen en el baricentro Sol-Tierra-Luna queda descartado.

La otra opción es utilizar un sistema de referencia más cercano a la Tierra. Tal y como se ha visto anteriormente, el sistema de coordenadas más beneficioso para nuestro estudio debe tener el centro de coordenadas en el baricentro del sistema Tierra-Luna, de manera que el sistema de coordenadas pueda ser considerado inercial, asumiendo la hipótesis de que el Sol orbita en torno a dicho baricentro con una velocidad constante y con una órbita circular. Así, la distancia entre el satélite y el origen de coordenadas es suficientemente pequeño como para poder observar la trayectoria y estudiar el movimiento del satélite.

Una vez impuesto el centro de coordenadas, se deben definir los ejes de dicho sistema. Para ello, se propone utilizar dos sistemas de coordenadas diferentes, ambos con el centro en el baricentro Tierra-Luna, pero con ejes diferentes, a fin de poder comprender mejor el movimiento orbital del satélite. Estos dos sistemas de coordenadas se denominarán “Ejes Rotatorios” y “Ejes Inerciales”, ya que su principal diferencia es que los ejes sean o no solidarios con el movimiento lunar. Estos dos sistemas de referencia se definen de la siguiente manera:

Ejes Rotatorios

El sistema de coordenadas rotatorio es muy utilizado a la hora de resolver el problema de los tres cuerpos, y se define imponiendo que el eje x sea solidario al movimiento lunar [4]. De esta manera, la Tierra y la Luna siempre se encuentran en las mismas coordenadas ($[-\mu, 0]$ y $[1 - \mu, 0]$ respectivamente). El eje z se encuentra perpendicular al plano orbital de la Luna, y el eje y ortogonal a los otros dos ejes. Este sistema es muy útil ya que muestra la posición del satélite relativa a la Luna, que se mantiene estática en este sistema de coordenadas. Este sistema de coordenadas se denominará “Ejes Rotatorios” debido a que los ejes están anclados solidariamente con el movimiento orbital lunar, y se usará ese término a lo largo del documento para todas las gráficas que muestren la trayectoria del satélite en este sistema de coordenadas.

Sin embargo, debido a la ausencia de movimiento por parte de la Luna, el movimiento orbital del satélite es aparentemente no elíptico, y puede aparecer caótico. Para poder tener una visión más realista de la órbita, es necesario un sistema de coordenadas que no gire solidario con la Luna, tal y como se explica a continuación.

Ejes Inerciales

Este sistema de referencia también utilizará el baricentro Tierra-Luna como origen de coordenadas, pero a diferencia del sistema con ejes rotatorios, el eje x no estará anclado al movimiento lunar, de manera que en este sistema la Luna girará en torno al centro de coordenadas, al igual que el punto $L4$. El eje z será perpendicular al plano orbital y el eje y será ortogonal a los otros dos ejes. Este cambio permite una comprensión más realista de la forma de las órbitas que dibuje el satélite en su trayectoria desde la Tierra hasta el punto $L4$. Nótese que en este sistema de referencia la Tierra también gira en torno al baricentro, pero debido a la corta distancia entre la Tierra y el baricentro, este giro es inapreciable. Este sistema de coordenadas sería análogo al segundo sistema de coordenadas de la Figura 2.5, pero con el centro de coordenadas en el baricentro del sistema Tierra-Luna.

En las gráficas que se muestran en el capítulo 5 se muestra la trayectoria del satélite en ambos sistemas de referencia, a fin de poder entender ambos aspectos de la trayectoria: en primer lugar, el movimiento relativo a la Luna, y en segundo lugar, el movimiento inercial independiente del movimiento lunar.

La Figura 2.6 muestra los dos sistemas de coordenadas que se van a utilizar, tanto los ejes rotatorios (izquierda) como los ejes inerciales (derecha), donde ω_m y v_m denotan la velocidad rotatoria y lineal de la Luna respectivamente, en ejes inerciales. De esta manera, en las gráficas que muestren la trayectoria del satélite entre la Tierra y el punto $L4$ se podrá observar el movimiento relativo a la Luna (en ejes rotatorios) y en ejes inerciales (sin rotar).

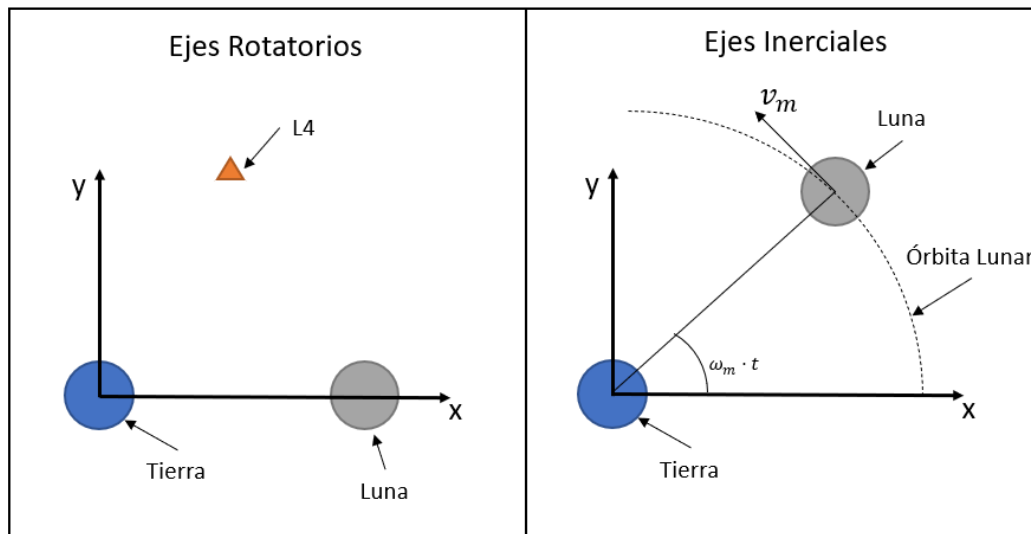


Figura 2.6: Esquema del sistema de coordenadas en el problema BCR4BP [1]

En el capítulo 5 se mostrarán algunas trayectorias encontradas, para lo que se utilizarán ambos sistemas de coordenadas. Los ejes rotatorios son útiles para entender la influencia de la presencia lunar en el movimiento del satélite, ya que es fácilmente distinguible la distancia relativa a la Tierra y la Luna. Por otro lado, mostrar la trayectoria en ejes inerciales nos facilita comprender el movimiento general del satélite, así como apreciar mejor la influencia solar. Por lo tanto, en todas las gráficas del capítulo 5 en la que se representarán trayectorias orbitales se mostrarán en los dos tipos de ejes.

Capítulo 3

Análisis de la misión

En este capítulo se explicará la misión que se pretende estudiar, detallando los objetivos específicos de la misión, las restricciones que deben cumplirse para considerar la misión como satisfactoria, y las condiciones iniciales del problema. Por último, se expondrá el criterio con el que se establecerá si una transferencia se considera externa o interna, y se explicarán las constantes más características de la misión.

Como se ha visto, el objetivo de la misión es trasladar un satélite desde la Tierra al punto L4 de Lagrange (en el sistema Tierra-Luna). En segundo lugar, se busca analizar y estudiar las transferencias encontradas, determinando cuáles son más eficientes. Las órbitas encontradas estarán definidas principalmente por dos factores: el tiempo que se tarda en realizar la transferencia y el consumo necesario para llevarla a cabo. Ambos factores son de especial interés a la hora de definir la idoneidad de la órbita, de manera que, de forma general, cuanto menores sean el tiempo de traslado y el consumo, mejor será la trayectoria encontrada. Esta idoneidad dependerá de los requisitos de la misión.

3.1. Esquema de la misión

A fin de encontrar las órbitas que transfieran un satélite desde la tierra al punto L4, es necesario definir la misión que se pretende simular. Para ello, se deberán establecer las restricciones de la misión, así como las condiciones iniciales y el criterio que establezca si el resultado es válido o no.

En primer lugar, se puede establecer que la misión debe cumplir con los siguientes requisitos:

1. La trayectoria debe comenzar en la Tierra
2. La trayectoria no debe colisionar con la Tierra ni con la Luna
3. La trayectoria debe terminar en el punto L4 de Lagrange

Éstas serán las principales restricciones del problema, que deberán cumplirse para considerarse que el resultado hallado es válido. Estos tres aspectos se explicarán en detalle en las siguientes secciones de este capítulo.

Una vez establecidos las restricciones básicas, se debe definir cuál será el aporte energético del vehículo. Existen varias formas de aportar la energía necesaria para transferir al satélite al punto L4, como por ejemplo, el impulso simple, el doble impulso, o el bajo impulso continuo. En nuestro trabajo, utilizaremos un sistema de doble impulso, debido a su versatilidad y elevada eficiencia. El primer impulso será el impulso inicial que producirá el comienzo de la transferencia. El segundo impulso se realizará una vez el satélite haya llegado al punto L4, a fin de que este satélite se quede en las inmediaciones de dicho punto.

Además de definir las restricciones establecidas, y el método de aporte energético, será necesario establecer el método de parametrización de las condiciones iniciales. Estas condiciones iniciales establecerán el estado del satélite (la posición y la velocidad) en el momento del primer impulso, a fin de que el algoritmo propagador pueda simular el movimiento del satélite a partir de dicho estado inicial y el primer impulso, para comprobar si las restricciones establecidas se cumplen.

La figura 3.1 muestra un esquema de la misión que debe cumplirse para que el resultado hallado en el algoritmo se considere válido. Nótese que la primera restricción (Salida de la Tierra) está incluida a través de las condiciones iniciales. Así mismo, se puede observar que la tercera restricción (Llegada a L4) se cumple a través de dos criterios: en primer lugar, que el satélite llegue a las cercanías de L4, y en segundo lugar, que el vehículo no se aleje indefinidamente de L4 tras el segundo impulso, tal y como se verá en la sección 3.4.

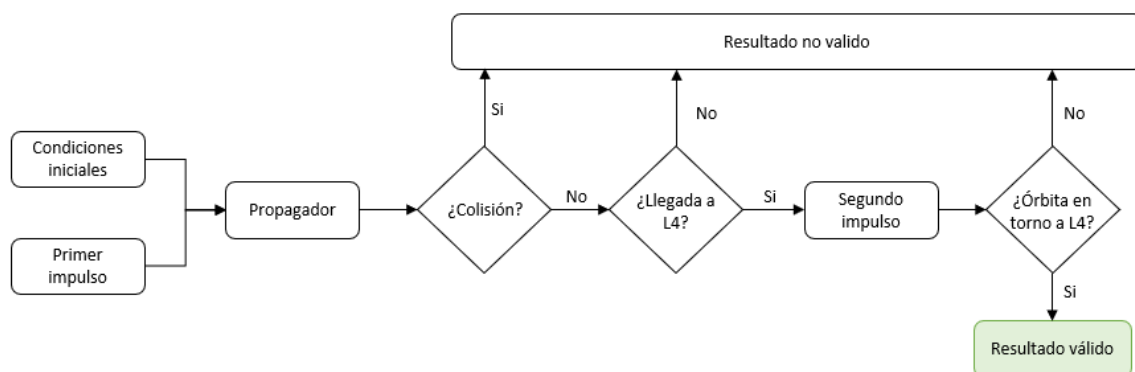


Figura 3.1: Esquema de la misión que debe cumplirse para que el resultado se considere como válido.

3.2. Órbita de aparcamiento terrestre

Como se ha visto, el primer criterio para definir la trayectoria entre la Tierra y el punto L4 es que dicha transferencia comience en la Tierra. Un estudio más detallado podría incluir el proceso de lanzamiento del satélite desde la superficie terrestre. Sin embargo, este análisis es complejo y queda fuera del alcance de este trabajo. Por ello, se introducirá la siguiente simplificación: asumiremos que el satélite comienza su misión desde una órbita de aparcamiento terrestre.

El uso de una órbita de aparcamiento terrestre como condición inicial de la misión es una práctica común, debido a la simplificación de los cálculos que deben realizarse [7]. Además, esta consideración es realista, ya que en la mayoría de los casos los satélites interplanetarios son situados en órbitas de aparcamiento terrestres como etapa inicial de la transferencia. Esto se debe a las limitaciones de los centros de lanzamiento terrestres [12]. En la mayor parte de las misiones interplanetarias se necesita iniciar la trayectoria en una posición muy concreta, mientras que los centros de lanzamiento no presentan polivalencia geográfica, debido a su bajo número. Por ello, es necesario lanzar el satélite desde estos emplazamientos hasta una órbita de aparcamiento terrestre, y una vez ahí, esperar al momento y posición idóneos para iniciar la transferencia interplanetaria.

Por ello, en este estudio asumiremos que el satélite ya se encuentra en la órbita de aparcamiento terrestre al inicio de la misión, y usaremos la posición y la velocidad del satélite en dicha órbita como condiciones iniciales para la trayectoria entre la Tierra y el punto L4 de Lagrange.

Existen multitud de órbitas de aparcamiento terrestre que se pueden utilizar. En nuestro caso, emplearemos una órbita circular, a fin de simplificar el cálculo de la velocidad inicial. Además, usaremos una órbita de aparcamiento cuyo plano orbital coincida con el plano orbital de la Luna, de manera que no sea necesario introducir una velocidad en el eje z (perpendicular al movimiento orbital), reduciendo así el consumo de la transferencia. Por último, se escoge una altitud de 167 km, por ser una órbita de aparcamiento bastante común en las transferencias cislunares [7]. De esta manera, la posición inicial del satélite queda definida.

La velocidad inicial del satélite (antes del primer impulso) se puede calcular fácilmente utilizando las ecuaciones de las órbitas circulares, de la siguiente manera [8]:

$$V_c = \sqrt{\frac{\mu_t}{r_{OAT}}}, \quad (3.1)$$

donde V_c es el módulo de la velocidad del satélite en la órbita de aparcamiento circular, r_{OAT} es la distancia entre la órbita de aparcamiento terrestre y el centro de la Tierra y μ_t es el parámetro gravitacional estandar de la Tierra. El radio de la órbita de aparcamiento terrestre se puede definir de la siguiente manera:

$$r_{OAT} = h_{OAT} + R_T, \quad (3.2)$$

siendo R_T el radio de la Tierra y h_{OAT} la altitud de la órbita de aparcamiento terrestre, que en nuestro caso será de 167 km.

3.3. Colisión con la Tierra o la Luna

Una vez establecido el estado inicial del satélite, se puede proceder a realizar la integración de las ecuaciones de movimiento que rigen el comportamiento del satélite tras el primer impulso. Este cálculo nos permitirá conocer la posición, velocidad y aceleración del satélite en cada instante de tiempo.

A fin de poder validar la trayectoria del satélite, es necesario que ésta cumpla una serie de condiciones. La primera de todas será cumplir el requisito de no colisión, tanto con la Tierra como con la Luna [12]. Para ello, se debe definir la distancia a partir de la cual se considera que el satélite ha colisionado con la Tierra o con la Luna. En el primer caso, esta restricción debe tener en cuenta la atmósfera terrestre, ya que si el satélite se interna en ella, aunque no se produjera una colisión, se produciría una deceleración debido a la resistencia aerodinámica, que modificaría el movimiento del satélite y, por lo tanto, imposibilitaría la trayectoria calculada. Por ello, se impone una distancia de colisión terrestre superior al radio de la Tierra. A fin de ser conservadores, se impone como primera condición que la distancia entre la superficie terrestre y el satélite nunca sea menor que la altitud de la órbita de aparcamiento inicial. Como segunda condición, se establece que la distancia entre el satélite y la superficie lunar nunca debe ser inferior a los 100km.

En el algoritmo desarrollado se impondrán estas condiciones en cada paso de la integración, de manera que solo las trayectorias que las cumplan serán consideradas soluciones viables.

3.4. Criterio de llegada al punto L4 de Lagrange

Como se ha visto, el objetivo de la misión debe ser posicionar el vehículo en el punto L4 de Lagrange. Para ello, es necesario establecer la distancia a la que consideramos que “se ha llegado” a dicho punto y estudiar el comportamiento del vehículo una vez posicionado en dicho punto. Esto se debe a que dicho punto es un punto teórico en el espacio, y por lo tanto, no tiene dimensiones. Por ello, desde un punto de vista numérico, será imposible que la trayectoria del satélite coincida exactamente con el punto L4 de Lagrange. Es por tanto necesario establecer una distancia a L4 a partir de la cual se considera que el satélite ha alcanzado su destino. Además, debido a que la distancia respecto a L4 no será nula, y a la perturbación producida por la atracción gravitatoria solar, será imposible que el satélite quede estático en el punto L4. Es por ello necesario estudiar el comportamiento

del satélite una vez posicionado en las cercanías de L4 para determinar si el movimiento del vehículo, una vez posicionado, es aceptable.

Punto de aplicación del segundo impulso

Lo primero que debemos definir es la distancia a la cual consideramos que el satélite está posicionado en L4, ya que la localización del punto L4 es teórica. Una vez alcanzada dicha distancia, un segundo impulso podrá anular la velocidad del satélite, posicionándolo en las inmediaciones de L4 con velocidad nula. Sin embargo, se necesita establecer cuál es la distancia máxima a la que debe colocarse un satélite con velocidad nula para mantener una posición estable entorno a L4. La selección de este valor es subjetiva y dependerá de la exactitud con la que queramos colocar el satélite en dicho punto y la distancia máxima respecto a L4 a la que queramos que se mantenga el satélite tras el segundo impulso.

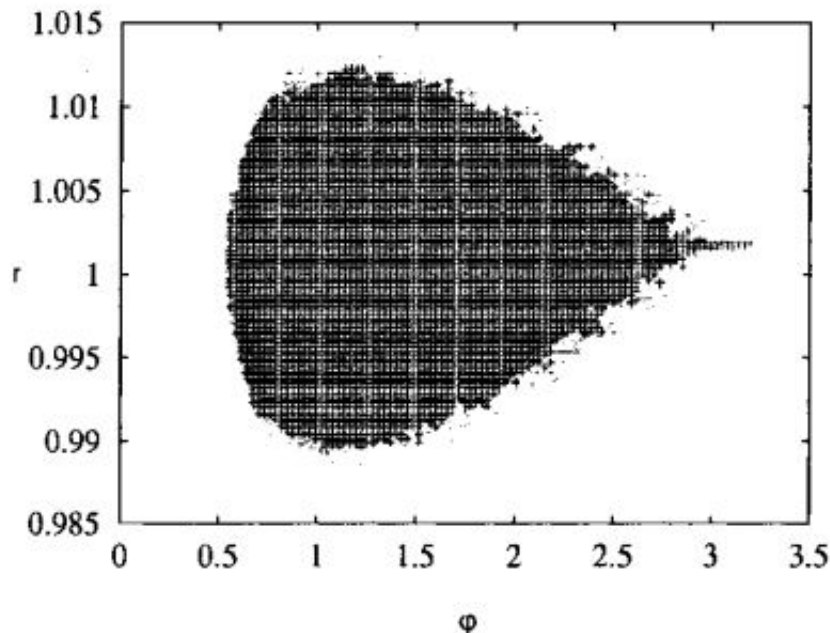


Figura 3.2: Zona de estabilidad en torno a L4 para velocidad inicial nula, en coordenadas polares (r en distancia adimensional y ϕ en radianes), obtenida de [17]

La Figura 3.2 muestra una gráfica con la zona en la que se puede situar un cuerpo con velocidad nula para mantener una órbita estable en torno al punto L4. La gráfica se muestra en ejes polares, donde ϕ representa el ángulo entre el vector Tierra-Luna y el vector Tierra-Satélite. Esta figura se ha calculado a través de las ecuaciones del problema de los tres cuerpos (sin la presencia del Sol), pero es útil para seleccionar una distancia máxima preliminar para que se produzca el segundo impulso. Se puede observar que, para valores de ϕ cercanos a 1.05 radianes (posición angular respecto al vector Tierra-Luna del punto L4 de Lagrange), la máxima distancia para asegurar estabilidad es aproximadamente de 1.01 DU. Esto quiere decir

que cualquier satélite situado a una distancia mayor de 0.01DU del punto de Lagrange no mantendrá una órbita estable entorno a dicho punto. Por lo tanto, se ha fijado en el algoritmo que el valor máximo a la que se puede ejecutar el segundo impulso sea de 0.01DU (3.844km). Dicho de otra forma, en el programa se establece que si la distancia mínima entre la trayectoria del satélite y el punto teórico de L4 es menor que 0.01DU, se considera que el satélite ha llegado a L4. Una vez confirmado que se cumple dicho criterio, se establece que la posición de llegada es el punto de menor distancia a L4.

Órbita en torno a L4 y perturbación solar

Una vez establecido dónde se debe efectuar el segundo impulso, es necesario analizar cómo es el movimiento del vehículo entorno al punto L4. Desde un punto de vista teórico, y teniendo en cuenta solo la presencia de la Tierra y la Luna, sería posible que el satélite describiera una órbita estable en torno al punto L4 sin necesidad de efectuar ninguna corrección o ajuste de trayectoria [18]. Algunos ejemplos de estas órbitas se pueden observar en la Figura 3.3. A fin de obtener esta órbita estable teórica únicamente habría que efectuar un impulso contrario a la dirección del movimiento del satélite en el momento en que éste cruce el semieje mayor de la órbita elíptica que se quiera obtener (que coincide con la perpendicular al vector Tierra-L4).

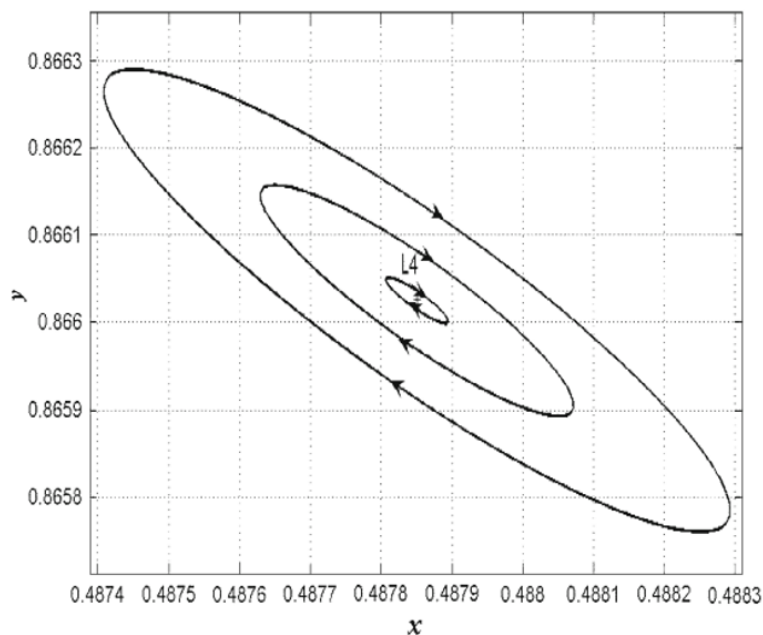


Figura 3.3: Órbitas teóricas entorno al punto L4, en ejes adimensionales con la distancia Tierra-Luna [3]

La Figura 3.4 muestra un esquema de una órbita elíptica teórica en torno al punto L4. Se puede observar que dicha órbita está orientada de forma que el semieje menor coincide con la dirección del vector Tierra-L4. Así, el segundo impulso se efectuaría en el punto en el que la trayectoria del satélite cruzase el semieje mayor de la órbita elíptica que se quiere alcanzar, de mo-

do que el impulso solo tenga componente en la dirección de la trayectoria, minimizando el consumo.

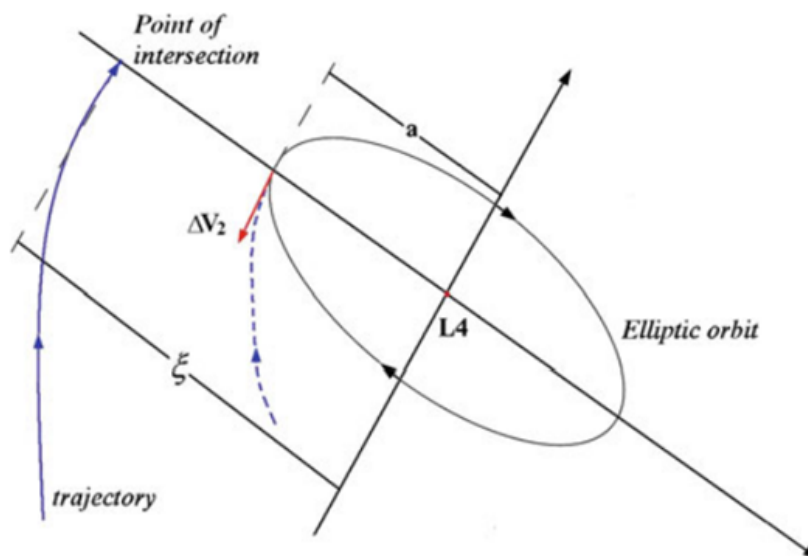


Figura 3.4: Esquema de una órbita elíptica en torno a L4 y punto de aplicación del segundo impulso [4]

Sin embargo, esta órbita es solo teórica, ya que no tiene en cuenta el efecto de la perturbación solar. Debido a la distancia del punto L4 respecto a la Tierra y la Luna, una órbita en torno al punto L4 se ve altamente influenciada por la atracción gravitatoria del Sol. Por ello, es necesario realizar correcciones constantes si se quiere mantener el satélite en una órbita elíptica perfecta [3].

El efecto de la perturbación solar no depende únicamente de la mera presencia del Sol, sino también de su posición relativa al sistema Tierra-Luna, de manera que las correcciones dependerán del momento en el que se alcance el punto L4 [5]. El efecto de la perturbación solar se puede medir comparando la aceleración producida por el sistema Tierra-Luna, y la aceleración producida por el Sol. Estas dos aceleraciones se pueden expresar matemáticamente de la siguiente manera [5]:

$$\vec{a}_{em} = -\frac{1-\mu}{r^3}\vec{r} - \mu \left(\frac{\vec{r} - \vec{r}_{me}}{|\vec{r} - \vec{r}_{me}|^3} + \vec{r}_{me} \right), \quad (3.3)$$

$$\vec{a}_s = -\mu_s \left(\frac{\vec{r} - \vec{r}_{se}}{|\vec{r} - \vec{r}_{se}|^3} + \frac{\vec{r}_{se}}{|\vec{r}_{se}|^3} \right), \quad (3.4)$$

donde \vec{a}_{em} y \vec{a}_s son las aceleraciones debido a la Tierra-Luna y al Sol respectivamente, \vec{r}_{me} y \vec{r}_s son los vectores que unen el centro de la Tierra con la Luna y el Sol respectivamente, y \vec{r} es el vector que une el baricentro Tierra-Luna y el satélite. La influencia de la perturbación solar se puede

medir dividiendo ambas aceleraciones. Es importante destacar que, como se ha comentado, la aceleración debido a la perturbación solar depende de la posición del Sol, por lo que el valor del cociente entre las aceleraciones no será constante, sino que variará con el tiempo. Es posible calcular cuál es el máximo valor de dicho cociente, de la siguiente manera:

$$f_m = \max \left(\frac{|\vec{a}_s|}{|\vec{a}_{em}|} \right) \quad (3.5)$$

En la Figura 3.5 se muestra el valor de f_m (el cociente entre las aceleraciones debido a la perturbación solar y el efecto Tierra-Luna) en la zona cislunar, expresado en porcentaje. Se puede observar que el valor de f_m en las inmediaciones de la Tierra es prácticamente nula, pero que en la zona cercana al punto L4 el valor de f_m se incrementa hasta el 1%. Aunque pueda parecer poco, es suficiente para que la perturbación solar impida la estabilidad en una órbita en torno al punto L4.

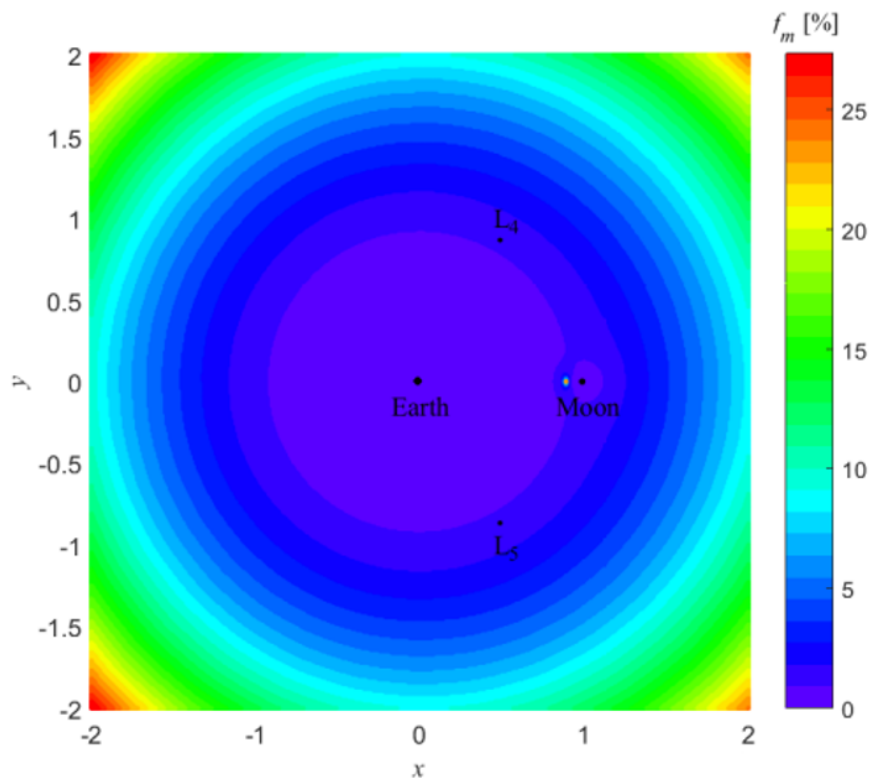


Figura 3.5: Efecto de la perturbación solar en las cercanías a la Tierra [5]

Por ello, será necesario estudiar el efecto de dicha perturbación solar en el satélite tras el segundo impulso, analizando si es suficiente para expulsar al satélite de las inmediaciones del punto L4, tal y como se verá en la siguiente sección.

Máxima distancia orbital en torno a L4

Como se ha visto en la sección 3.4, una vez el satélite ha llegado al punto L4 (es decir, su distancia mínima al punto L4 es menor a 0.01DU), se impone un segundo impulso (ΔV_2) que anula la velocidad del satélite, dejándolo orbitando en torno al punto L4. La magnitud de la órbita en torno a L4 (es decir, la distancia máxima a la que se encuentre el satélite durante la órbita) dependerá de la posición en la que se aplique el segundo impulso. Debido a la dinámica del problema de los 3 cuerpos y de la presencia del Sol, esta magnitud no dependerá únicamente de la distancia con L4, sino también de la posición relativa a la Tierra, la Luna, y el Sol.

Esta distancia será importante para definir qué trayectorias se consideran “orbitando” en torno a L4 y cuáles no, después del segundo impulso. Una vez impuesto el segundo impulso, se calculará el movimiento del satélite, fijando la condición de que si el satélite supera una distancia máxima pre-establecida respecto a L4, se descartará la trayectoria.

Este valor máximo respecto a L4 tras el segundo impulso ($(R_{orb})_{max}$) es también un valor que debe estimarse, ya que no existe un criterio unificado que imponga a partir de qué distancia ya no se considera “orbitando” L4 [5]. Por ello, se estudiará el movimiento de un satélite en torno a L4 para decidir qué distancia máxima establecer. Es importante entender que la presencia del Sol modifica significativamente esta variable, como se verá más adelante.

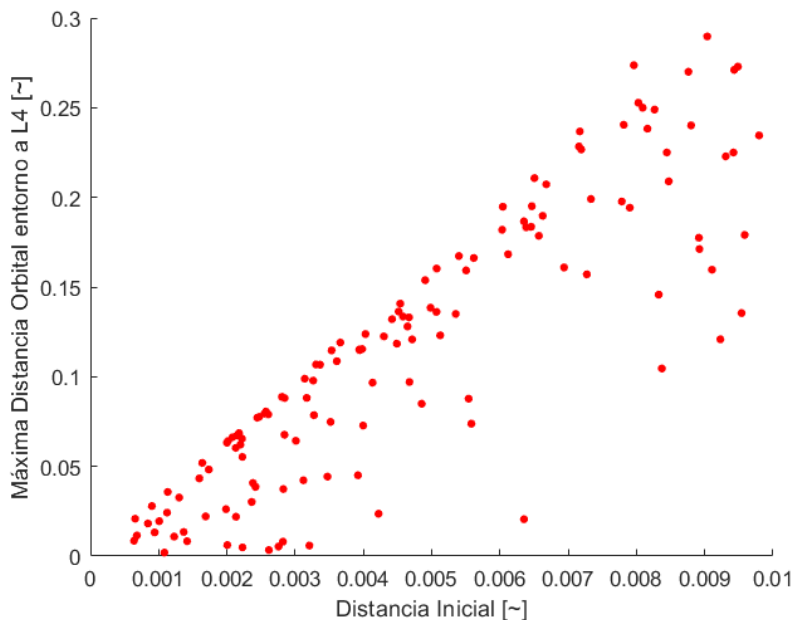


Figura 3.6: Distancia máxima orbital en torno a L4 con respecto a la distancia inicial de la órbita, sin perturbación solar.

Para determinar esta distancia, se estudiará primeramente el movimiento de un satélite en torno a L4 sin la perturbación solar, a fin de encontrar los valores máximos que se obtienen. La Figura 3.6 muestra las distancias

máximas de las órbitas en torno a L4 (sin el efecto del Sol) con respecto a la posición inicial del satélite con respecto al punto L4.

Se puede observar que la distancia máxima orbital crece al aumentar la distancia inicial de la órbita, aunque esta relación no es lineal, y se pueden hallar casos en los que la distancia inicial es muy elevada pero la distancia máxima orbital es relativamente baja. Además, se parecía que imponiendo una distancia inicial menor a 0.01DU, en órbitas sin perturbación solar, la máxima distancia orbital es de 0.2897DU (111.361 km).

La consideración de este parámetro afecta directamente al número de soluciones obtenidas, ya que una distancia máxima baja elimina un alto número de resultados posibles. En la Figura 3.7 se muestra una gráfica en la que se observan las soluciones obtenidas según se varía la distancia máxima respecto a L4 tras el segundo impulso. En esta figura se puede comprobar que esta cantidad aumenta con el incremento de la distancia orbital máxima, aunque a partir de cierto punto este crecimiento se ralentiza.

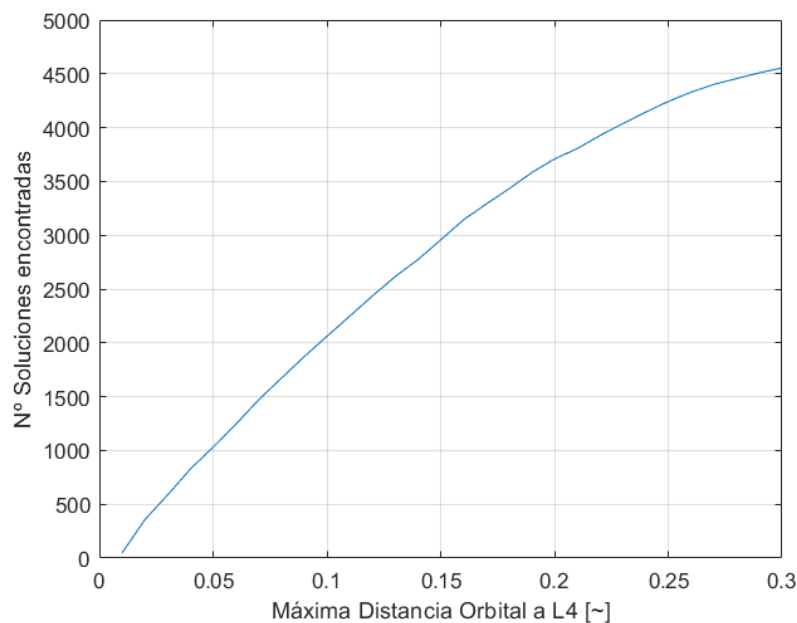


Figura 3.7: Número de soluciones obtenidas con respecto a la distancia máxima orbital establecida, con perturbación solar

En vista de los resultados obtenidos, se prioriza el poder encontrar el máximo número de resultados posibles por encima de la exactitud orbital. Se impone, así mismo, que la distancia máxima con perturbación solar no sobrepase la distancia máxima sin perturbación solar, que se ha establecido en 0.2897DU. Por lo tanto, se aproxima el resultado obtenido y se impone que la máxima distancia respecto al punto teórico de L4 tras el segundo impulso ($Max (R_{orb})_{max}$) sea de:

$$Max (R_{orb})_{max} = 0.3DU$$

3.5. Parametrización de las condiciones iniciales

Para poder establecer cuál es la misión que el algoritmo debe resolver, además de definir las restricciones (punto de partida, criterio de colisión, y criterio de llegada a L4), es importante establecer como se van a parametrizar las condiciones iniciales del satélite. Estas condiciones iniciales deberán establecer el estado inicial de la simulación y, además de ser necesarias para simular la misión, nos permitirán realizar un estudio comparativo entre todas las trayectorias posibles. A fin de poder estudiar estas condiciones de manera eficiente, se busca reducir el número de parámetros al mínimo posible.

Tal y como se ha visto al estudiar las ecuaciones del problema restringido de los cuatro cuerpos, el comportamiento del satélite a lo largo de toda la trayectoria dependerá de su posición con respecto al centro de coordenadas, de su distancia a la Tierra, su distancia a la Luna, su distancia al Sol, así como de su velocidad, en cada eje. En un primer análisis se puede observar que el movimiento del satélite depende de 9 variables (tres para la posición, tres para la velocidad, y tres para las distancias a los tres cuerpos involucrados). Sin embargo, es fácilmente demostrable que estas variables están relacionadas entre si.

En primer lugar, una vez conocida la posición de la Tierra y de la Luna en los ejes de referencia (la Tierra en $[-\mu, 0, 0]$ y la Luna en $[1 - \mu, 0, 0]$), la distancia del satélite respecto a la Tierra y la Luna se puede calcular fácilmente conociendo la posición del vehículo. La distancia con respecto al Sol es más compleja, ya que precisa conocer la posición del Sol respecto al sistema de coordenadas. Sin embargo, como la distancia entre el centro de coordenadas y el Sol se asume constante, se puede definir la posición del Sol con un único ángulo. Además, en las hipótesis del problema se ha establecido que el movimiento se produce en el plano de rotación de la Luna, por lo que la tercera componente de la posición y de la velocidad se puede eliminar. De esta manera, reducimos las variables a cinco: la posición inicial (dos variables), la velocidad inicial (dos variables) y la posición del Sol (una variable).

El número de variables se puede reducir más aún si se tiene en cuenta la condición inicial impuesta, en la que se supone que el satélite comienza la maniobra desde una órbita de aparcamiento terrestre. Esta órbita es circular, de un radio conocido, y por lo tanto únicamente es necesario definir un ángulo para determinar la posición del satélite. De forma similar, al encontrarse en una órbita circular y en base a la condición establecida de que el primer impulso debe ser tangencial a la órbita de aparcamiento, se puede establecer la velocidad inicial del satélite con una única variable que represente una proporción entre el módulo de la velocidad inicial y el módulo de la velocidad orbital en la órbita circular, quedando la dirección de dicha velocidad impuesta por la posición del satélite.

De esta manera, el estado inicial del satélite se puede establecer con solo tres variables:

- Posición en la órbita aparcamiento (α)
- Módulo de la velocidad tras el primer impulso (β)
- Posición del Sol (θ)

Posición en la órbita aparcamiento (α)

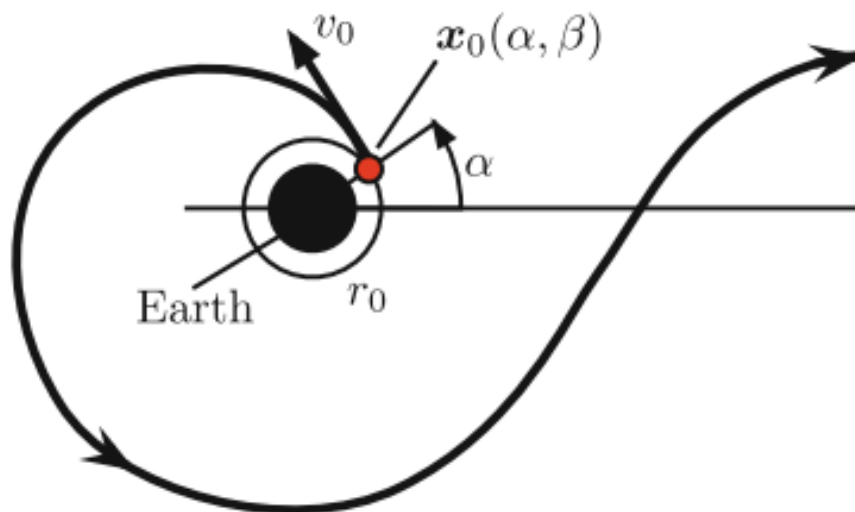


Figura 3.8: Esquema de la posición inicial del satélite, mostrando el ángulo α

La posición en la órbita de aparcamiento se puede caracterizar utilizando una única variable, α , que se definirá como el ángulo que forma el vector Tierra-Luna y el vector Tierra-Satélite [7]. En la Figura 3.8 se muestra un esquema de la posición inicial del satélite y el ángulo α . Debido a la geometría circular de la órbita aparcamiento, la posición del satélite en coordenadas rotatorias se podrá calcular de la siguiente manera:

$$x_0 = r_{OAT} \cos(\alpha), \quad (3.6)$$

$$y_0 = r_{OAT} \sin(\alpha), \quad (3.7)$$

donde x_0 y y_0 representan respectivamente las coordenadas (x, y) iniciales, y r_{OAT} representa la distancia de la órbita circular de aparcamiento respecto al centro de la Tierra, calculada como:

$$r_{OAT} = \frac{R_T + h_{OAT}}{DU}, \quad (3.8)$$

siendo R_T el radio de la Tierra, h_{OAT} la altitud de la órbita de aparcamiento circular, y DU la unidad de distancia (es decir, la distancia media entre la Tierra y la Luna, tal y como se ha visto en la sección 3.7)

Módulo de la velocidad tras el primer impulso (β)

El segundo parámetro necesario para definir la condición inicial del satélite en el momento del primer impulso es la β , y lo definiremos como el cociente entre el módulo de la velocidad del satélite tras el primer impulso y la velocidad orbital del satélite en la órbita circular de aparcamiento, antes del primer impulso [7]:

$$\beta = \frac{V_0}{V_c}, \quad (3.9)$$

donde V_0 es el módulo de la velocidad tras el segundo impulso y V_c es la velocidad orbital en la órbita de aparcamiento, que puede calcularse de la siguiente manera [7]:

$$V_c = \sqrt{\frac{(1 - \mu)}{r_{OAT}}}. \quad (3.10)$$

Una vez conocido el módulo de la velocidad tras el segundo impulso, se puede calcular las componentes de la velocidad inicial de la siguiente manera [7]:

$$\dot{x}_0 = -(V_0 - r_{OAT})\text{sen}(\alpha), \quad (3.11)$$

$$\dot{y}_0 = (V_0 - r_{OAT})\text{cos}(\alpha). \quad (3.12)$$

A diferencia del caso de α , los límites del valor de β no son tan directos. En un primer análisis se podrían imponer dos límites obvios: el límite inferior de 1 (ya que no podemos llegar al punto L4 con menos velocidad de la que tenemos en la órbita aparcamiento), y el límite superior en $\sqrt{2}$, ya que esa es la velocidad de escape del satélite (por encima de dicha velocidad, el satélite no orbitaría entorno a la Tierra en su trayectoria hasta L4).

Sin embargo, el límite inferior puede ser más ajustado, ya que si la velocidad inicial es demasiado pequeña no se tendrá la energía suficiente para llegar al punto L4. Por lo tanto, se puede realizar un estudio energético para definir el límite inferior de β . Esto es posible gracias a los fundamentos teóricos presentados en la sección 2.3, en los que se ha visto que la energía que posee un cuerpo orbitando en torno a la Tierra y la Luna define una serie de zonas prohibidas (regiones de Hill) en las que el satélite no puede entrar sin aumentar su energía. De esta manera, conociendo la energía necesaria para

llegar al punto L4, se puede encontrar la velocidad inicial mínima teórica (es decir, el mínimo de β).

Para ello, debemos calcular la constante de Jacobi de un hipotético satélite localizado en el punto L4 y sin movimiento relativo a dicho punto. Este cálculo es sencillo ya que conocemos la posición exacta del punto L4, y la velocidad de este hipotético satélite es nula respecto a la Tierra. Con esta información y las ecuaciones de la sección 2.3, podemos calcular:

$$C_4 = 2.988$$

Con esta información, se puede encontrar cuál es la velocidad inicial en la órbita de aparcamiento que cumple con dicha constante de Jacobi, obteniendo el siguiente resultado:

$$\beta_{min} = 1.3983$$

Por lo tanto, los límites de β serán de:

$$\beta \in [1.3983, 1.4142].$$

Por debajo de ese valor no se tendrá energía suficiente para llegar al punto L4, y por encima el satélite habrá escapado de la órbita terrestre. Se puede observar que el rango de opciones no es muy elevado. Esto es coherente con lo que conocemos de las regiones de Hill de la sección 2.3, que establece que la energía necesaria para llegar al punto L4 es muy elevada. Definiendo una órbita terrestre de 167km de altitud y recordando el valor de la Unidad de Velocidad de la sección 3.7, se puede ver que la velocidad inicial necesaria para llegar al punto L4 de Lagrange debe encontrarse en el rango:

$$v_0 \in [10.912, 11.036]m/s$$

Por lo que las velocidades posibles solo cubren un rango de 124 m/s.

Posición del Sol (θ)

Por último, tenemos que establecer el parámetro que defina la posición del Sol en el momento del primer impulso. Debido a la hipótesis de que la distancia entre el centro del sistema de referencia y el Sol es constante, y asumiendo que el Sol gira con respecto al centro de coordenadas con una velocidad constante, se puede definir la posición del Sol utilizando un único ángulo. Este ángulo se conocerá como θ y se define como el ángulo que forma el vector Tierra-Sol y el vector Tierra-Luna en el momento del primer impulso. Nótese que θ es igual a cero cuando el vector Tierra-Sol y el vector Tierra-Luna están alineados.

Esta posición del Sol respecto a la Tierra es en realidad un factor temporal, ya que la velocidad de rotación es constante. Considerando el origen de tiempos el momento en el que el vector Tierra-Sol y el vector Tierra-Luna coinciden (es decir, el momento en el que Tierra-Luna-Sol están alineados, en dicho orden), se puede calcular la posición del Sol sabiendo cuando tiempo ha pasado, de la siguiente manera:

$$\theta(t) = \omega_s \cdot t, \quad (3.13)$$

donde ω_s es la velocidad de rotación solar. Una vez conocido este ángulo, y asumiendo que la velocidad de rotación es constante, podemos calcular el tiempo inicial, estableciendo el cero en el momento en el que el ángulo entre el vector Tierra-Sol y el vector Tierra-Luna es nulo.

3.6. Transferencias Externas e Internas

Otra restricción que debe establecerse a fin de definir la misión es el tipo de órbita que buscamos. A la hora de analizar las transferencias de baja energía, comúnmente se pueden clasificar como transferencias externas o transferencias internas, según el comportamiento del satélite y la distancia respecto a la Tierra. Las órbitas externas se caracterizan principalmente por ser más sensibles al efecto de la presencia solar, ya que tal y como se ha visto en la Figura 3.5, a distancias superiores a 3 veces la distancia Tierra-Luna, la contribución de la presencia solar supera el 25%.

En la mayor parte de la bibliografía sobre órbitas de baja energía se suelen considerar como órbitas externas todas aquellas cuyo apogeo (máxima distancia con respecto a la Tierra) sea al menos 4 veces mayor que la distancia entre la Tierra y la Luna [7]. Debido a esta elevada distancia, el efecto de la perturbación solar es elevado. Esta influencia se puede aprovechar positivamente en la trayectoria del satélite, permitiéndole alcanzar mayores niveles de energía con menores impulsos iniciales [9]. Por otro lado, las trayectorias internas suelen desarrollarse principalmente en la zona cislunar, y por lo tanto, el efecto solar es considerablemente reducido en este tipo de órbitas.

En la sección 5.4 se estudiarán las transferencias externas que se hayan encontrado en el análisis de posibles trayectorias, y se compararán sus características con las trayectorias internas calculadas.

3.7. Constantes del problema

Una vez establecida y definida la misión, es útil definir una serie de parámetros a fin de simplificar el estudio de las trayectorias encontradas, de forma que nos permita estudiar los resultados de manera más eficiente. La mayoría de estas constantes se utilizan para poder adimensionalizar las va-

riables del problema, a fin de obtener resultados coherentes y comparables, y facilitar el estudio del problema. Se definen las siguientes constantes:

Longitud Característica (DU)

La longitud característica es la distancia que se utiliza para adimensionalizar todas las demás distancias, a fin de escalar los resultados obtenidos y simplificar su estudio. Esta longitud se define como la distancia media entre el centro de la Tierra y el centro de la Luna [7], y se denomina “DU” por sus siglas en inglés “Distance Unit”. El valor de esta longitud característica es:

$$DU = 3,84405 \cdot 10^8 \text{ km}$$

Tiempo Característico (TU)

El tiempo característico es el tiempo que se utiliza para adimensionalizar todos los tiempos del problema, y se define como el tiempo que tarda el sistema Tierra-Luna en dar una vuelta completa en torno a su baricentro [7], y se denomina “TU” por sus siglas en inglés “Time Unit”. El valor de este tiempo característico es de:

$$TU = 4.34811305 \text{ days}$$

Masa Característica (MU)

La masa característica es la masa con la que se adimensionalizarán el resto de las masas. Se define como la suma de las masas de la Tierra y de la Luna, y se conoce como “MU” por las siglas en inglés de “Mass Unit”. Su valor es de:

$$MU = 6,0459 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

Masa solar adimensionalizada (m_s)

Es la masa solar, adimensionalizada con la masa característica. Este parámetro se utilizará para poder calcular el efecto de la perturbación solar sobre el satélite, en comparación al efecto del sistema Tierra-Luna. El valor de esta constante es de:

$$m_s = 3.28900541 \cdot 10^5$$

Distancia Sol-(Tierra-Luna) adimensionalizada (ρ)

Es la distancia entre el centro del Sol y el baricentro Tierra-Luna, adimensionalizado con la longitud característica. Esta distancia se utilizará para

calcular el efecto de la perturbación solar en cada instante, y se considerará constante, ya que la órbita elíptica que experimenta el baricentro Tierra-Luna respecto al Sol es prácticamente circular. El valor de esta constante es:

$$\rho = 3.88811143 \cdot 10^2$$

Velocidad angular solar adimensionalizada (ω_s)

Es la velocidad angular del Sol respecto al baricentro Tierra-Luna, adimensionalizada con el tiempo característico. Este parámetro se utilizará para calcular el efecto de la perturbación solar en cada instante, y se considerará constante. El valor de esta constante es:

$$\omega_s = -9.25195985 \cdot 10^{-1}$$

Parámetro másico Tierra-Luna (μ)

Este parámetro representa la relación másica entre la Tierra y la Luna. Debido a la geometría del problema, también representa la relación de distancia entre la Tierra, la Luna, y el baricentro de sus masas. De esta manera, se puede definir que el cociente entre la distancia Baricentro-Luna y la distancia Baricentro Tierra es de $(1 - \mu)/\mu$. El valor de esta constante se puede calcular sabiendo la masa de la Tierra y de la Luna, de la siguiente manera:

$$\mu = \frac{\text{masa Tierra}}{\text{masa Luna}} = \frac{5,972 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{7,349 \cdot 10^{22} \text{ kg}} = 1.21506683 \cdot 10^{-2}$$

Es importante destacar que el parámetro gravitacional estándar de la Tierra también suele denominarse con la letra μ . A fin de evitar confusiones entre estos dos parámetros, al parámetro gravitacional estándar de la Tierra se le denominará μ_t , mientras que la letra μ se utilizará exclusivamente para hacer referencia al parámetro másico Tierra-Luna.

Otras constantes

Otras constantes de interés que se usaran a lo largo del análisis son el radio de la Tierra (radio medio al nivel del mar), el radio de la Luna (radio medio), y la altitud de la órbita aparcamiento. El valor de estas constantes es, respectivamente:

$$R_T = 6378 \text{ km}$$

$$R_m = 1738 \text{ km}$$

$$h_{OAT} = 167 \text{ km}$$

Capítulo 4

Implementación numérica

En este capítulo se explicará el proceso de implementación numérica del problema de los tres cuerpos, a través del software MATLAB. Se mostrará el procedimiento de implementación de las ecuaciones del problema restringido bicircular de los cuatro cuerpos (BCR4BP) en el propagador, el método de integración de la trayectoria, y el proceso de verificación del código obtenido. El código completo puede ser consultado en el apéndice B.

Es importante mencionar que todos los cálculos que se harán en el algoritmo se harán utilizando parámetros adimensionalizados, haciendo uso de las constantes expuestas en la sección 3.7. Los valores resultantes no se redimensionalizarán hasta que no se vayan a mostrar, tanto en gráficas como en tablas. Esto se hace a fin de simplificar los cálculos y aumentar la eficiencia del código.

4.1. Planteamiento del problema

Tal y como se vio en la sección 3.1, el objetivo del trabajo es calcular todas las trayectorias posibles entre una órbita de aparcamiento terrestre y el punto L4 de Lagrange (en el sistema Tierra-Luna). Para ello, se han establecido una serie de restricciones y condiciones, que definen el criterio para validar los resultados que se encuentren. Como se ha explicado en la sección 3, la misión se puede dividir en una serie de etapas [7]:

1. El satélite se encuentra originalmente en una órbita circular de aparcamiento de 167km de altitud.
2. En el instante “tiempo inicial” (t_i) se efectúa un primer impulso (ΔV_1) en la dirección tangencial a la órbita circular.
3. El satélite viaja libremente por el espacio gobernado por las ecuaciones del problema restringido bicircular de los cuatro cuerpos (BCR4BP).
4. Al llegar a las cercanías del punto de Lagrange L4 (en el sistema Tierra-Luna), en un tiempo final (t_f) se efectúa un segundo impulso (ΔV_2) que anula la velocidad del satélite.

5. El satélite queda orbitando en torno al punto L4 por al menos 430 días.

Se puede obtener el consumo de la misión sumando la magnitud de los dos impulsos (expresado como la variación de velocidad obtenida), y el tiempo total restando el tiempo de llegada y el tiempo de salida:

$$\Delta V_T = \Delta V_1 + \Delta V_2, \quad (4.1)$$

$$\Delta_t = t_f - t_i, \quad (4.2)$$

donde ΔV_T es el impulso total necesario, ΔV_1 es el impulso aplicado en el momento inicial (aún en la órbita de aparcamiento terrestre), ΔV_2 es el segundo impulso (aplicado en el punto más cercano de la trayectoria al punto L4 de Lagrange), Δ_t es el tiempo total transcurrido entre los dos impulsos, t_f es el tiempo en el que el satélite aplica el segundo impulso y t_i es el tiempo en el que el satélite aplica el primer impulso [7].

A fin de simplificar el cálculo de la trayectoria, se asumirán algunas hipótesis que, a pesar de no ser estrictamente ciertas, se aproximan lo suficiente a la realidad como para poder sacar conclusiones del análisis [8]. De esta forma, los resultados obtenidos permitirán diseñar el proceso de la misión, estudiar la influencia de los diferentes parámetros involucrados y entender las diferentes opciones de trayectorias existentes. Además, las soluciones calculadas servirán como punto de partida para poder realizar estudios más detallados en el futuro. Las hipótesis consideradas son las siguientes:

- El movimiento se efectúa en 2 dimensiones, según el plano de rotación de la Luna en torno a la Tierra.
- El plano de rotación de la Luna y del Sol se suponen coincidentes.
- No existen perturbaciones más allá de las gravitacionales producidas por la Tierra, la Luna y el Sol.
- La masa del satélite se desprecia frente a la masa del resto de cuerpos (Tierra, Luna y Sol).
- Se asume que el radio de la Tierra y el radio de la Luna son constantes, formando una esfera perfecta.
- Se asume que la distancia entre la Tierra y la Luna es constante, simplificando la órbita lunar como órbita circular.
- Se asume que la distancia entre la Tierra y el Sol es constante, simplificando la órbita terrestre como órbita circular.

Estas simplificaciones son comúnmente utilizadas por los investigadores para obtener resultados preliminares de trayectorias orbitales, ya que mantienen la dinámica básica del problema de los tres cuerpos [19]. Estas consideraciones son posibles debido a la excentricidad de las órbitas de la Tierra

y de la Luna, que son 0.0167 y 0.0549 respectivamente (prácticamente circulares), y la inclinación orbital de la Luna, de 5 grados [7].

4.2. Implementación de las condiciones iniciales

Tal y como se ha visto en la sección 3.5, se van a usar tres parámetros para definir el estado inicial del satélite: La posición inicial (α), la velocidad inicial (β) y el tiempo inicial (θ). Por lo tanto, el primer paso del algoritmo desarrollado será definir correctamente el estado inicial del satélite a partir de estos tres parámetros.

Para poder encontrar el máximo número de soluciones posibles, habrá que simular el movimiento del satélite para el mayor número posible de estados iniciales. Cuantos más puntos se analicen, más fiables y completos serían los resultados. Sin embargo, el incremento del número de estados iniciales estudiados aumenta significativamente el tiempo de computación hasta niveles prohibitivos. Es, por tanto, necesario establecer un número finito de estados iniciales que se vayan a simular. Es importante mencionar que los valores de estos tres parámetros están limitados según la física del problema.

El parámetro α tiene un rango que abarca desde los cero grados hasta los trescientos sesenta. A fin de mantener los tiempos de computación dentro de unos márgenes aceptables, y basándonos en trabajos similares [8], se establecen 360 puntos de estudio (np_α), a fin de analizar la posición inicial del satélite con una precisión de un grado.

$$\alpha \in [1, 360] \text{ deg}$$

$$np_\alpha = 360$$

El parámetro β , tal y como se vio en 3.5, abarca un rango de posiciones entre 1,3983 y 1,4142, siendo una diferencia de 0.016 unidades. A fin de analizar el efecto de β con detalle suficiente, se impone un intervalo de 0.0005 unidades, lo cual significa un número total de puntos de estudio (np_β) de 32.

$$\beta \in [1.3983, 1.4142].$$

$$np_\beta = 32$$

El parámetro θ hace referencia a la posición del Sol, por lo que su rango se establece entre cero y trescientos sesenta grados. Sin embargo, el sistema

es mucho menos sensible a la posición del Sol que a la posición inicial del satélite (α) por lo que se ha decidido priorizar el tiempo de computación, reduciendo el número de posiciones de θ con respecto a los de α . Por lo tanto, se ha establecido un número de 36 puntos para θ .

$$\theta \in [0, 2\pi]rad.$$

$$np_{\theta} = 36$$

Una vez establecidos los rangos que abarcan los parámetros iniciales, y definidos cuántos puntos se van a analizar de cada uno, se puede calcular el estado inicial del satélite en cada uno de esos puntos. El estado inicial se puede expresar matemáticamente con un vector de una fila y cuatro columnas, con la siguiente estructura:

$$\vec{X} = [x, y, \dot{x}, \dot{y}], \quad (4.3)$$

donde \vec{X} es el vector de estado, x e y son las coordenadas de la posición del satélite en ejes rotatorios (solidarios a la Luna, con el eje x en la dirección del vector Tierra-Luna) y \dot{x} e \dot{y} son la velocidad del satélite descompuesta en ejes rotatorios. Nótese que el vector de estado se representa en dos dimensiones, ya que asumimos que z y \dot{z} son nulas en todo momento. El valor de cada componente de este vector se puede calcular de la siguiente manera [8]:

$$Estado\ Inicial = \begin{cases} \vec{X}(1) = r_0 \cdot \cos(\alpha) - \mu \\ \vec{X}(2) = r_0 \cdot \sin(\alpha) \\ \vec{X}(3) = -(V_0 - r_0) \cdot \sin(\alpha) \\ \vec{X}(4) = (V_0 - r_0) \cdot \cos(\alpha) \end{cases} \quad (4.4)$$

donde r_0 es el radio de la órbita de aparcamiento, μ es el parámetro másico Tierra-Luna, y V_0 es el módulo de la velocidad inicial, que se puede calcular de la siguiente manera, tal y como se vio en la sección 3.5:

$$V_0 = \beta \sqrt{\frac{1 - \mu}{r_0}}. \quad (4.5)$$

El parámetro θ , por otro lado, nos impondrá el tiempo de inicio de la integración que realizará el propagador. Este tiempo de inicio se puede calcular de la siguiente manera:

$$t_i = \frac{\theta(rad)}{\omega_s}, \quad (4.6)$$

donde ω_s es la velocidad angular solar adimensionalizada y el ángulo θ debe ser introducido en radianes.

De esta manera se obtiene el estado inicial del satélite, y el tiempo inicial de integración, para cada punto de estudio. El número total de simulaciones que se realizarán con el algoritmo puede ser calculado multiplicando el número de puntos de análisis de cada uno de los tres parámetros iniciales, de la siguiente manera:

$$N_{Sim} = np_{\alpha} \cdot np_{\beta} \cdot np_{\theta} = 360 \cdot 32 \cdot 36 = 414.720 \quad (4.7)$$

4.3. Programación del propagador

Para poder calcular el movimiento del satélite a partir del vector de estado inicial es necesario aplicar un propagador, es decir, un algoritmo que integre el vector de estado en cada instante, aplicando las ecuaciones del problema bicircular restringido de los cuatro cuerpos que se vio en la sección 2.4.

A partir del vector de estado, se puede definir un nuevo vector con la derivada del vector de estado, de la siguiente manera:

$$\dot{\vec{X}} = [\vec{X}(3), \vec{X}(4), a_x, a_y], \quad (4.8)$$

donde a_x y a_y son las aceleraciones del satélite, tal y como se explican en la sección 2.4. De esta manera, las primeras dos valores del vector derivada son la velocidad del satélite (en cada uno de los ejes) y los siguientes dos valores son las aceleraciones. Las dos aceleraciones se deben calcular a partir de la teoría del problema bicircular restringido de los cuatro cuerpos, que se pueden implementar de la siguiente manera:

$$a_x = 2 \cdot \vec{X}(4) + \vec{X}(1) - \frac{(1-\mu) \cdot \vec{X}(1) + \mu}{\vec{r}(1)^3} - \mu \cdot \frac{\vec{X}(1) - 1 + \mu}{\vec{r}(2)^3} - m_s \cdot \frac{\vec{X}(1) - \rho \cdot \cos(\theta_s)}{\vec{r}(3)^3} - m_s \frac{\cos(\theta_s)}{\rho^2} \quad (4.9)$$

$$a_y = -2 \cdot \vec{X}(3) + \vec{X}(2) - \frac{(1-\mu) \cdot \vec{X}(2)}{\vec{r}(1)^3} + \mu \cdot \frac{\vec{X}(2)}{\vec{r}(2)^3} - m_s \cdot \frac{\vec{X}(2) - \rho \cdot \sin(\theta_s)}{\vec{r}(3)^3} - m_s \frac{\sin(\theta_s)}{\rho^2} \quad (4.10)$$

donde a_x es la aceleración en el eje x, \vec{X} es el vector de estado del satélite en el instante estudiado, m_s es la masa solar adimensionalizada, ρ es la distancia Sol-(Tierra-Luna) adimensionalizada (véase la sección 3.7), θ_s es el ángulo entre el vector Sol-Tierra y el vector Tierra-Luna en el instante estudiado, y el vector \vec{r} es la distancia del satélite al centro de la Tierra y al centro de la Luna, que se calcula de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \vec{r}(1) = \sqrt{(\vec{X}(1) + \mu)^2 + \vec{X}(2)^2} \\ \vec{r}(2) = \sqrt{(\vec{X}(1) - 1 + \mu)^2 + \vec{X}(2)^2} \\ \vec{r}(3) = \sqrt{(\vec{X}(1) - \rho \cdot \cos(\theta_s))^2 + (\vec{X}(2) - \rho \cdot \sin(\theta_s))^2} \end{cases} \quad (4.11)$$

Una vez calculada la derivada del vector estado se puede utilizar un integrador para calcular la posición y la velocidad en el siguiente instante de tiempo. De esta manera, se puede calcular la posición del satélite en todo el rango de tiempo estudiado, desde el estado inicial, hasta el final de la misión.

Sería posible escribir un código que realizase la integración del problema. Sin embargo, el programa MATLAB cuenta con varios integradores que pueden ser usados, y resultan mucho más fiables. A continuación se estudian los principales integradores de MATLAB.

4.4. Método de integración

Una vez calculado el vector de estado del sistema y su derivada, se debe realizar una integración del problema para hallar la trayectoria del satélite. La elección del método de integración es una parte fundamental a la hora de implementar el problema, ya que dependiendo del esquema elegido se obtendrán soluciones mejores o peores. A fin de poder obtener resultados fiables, se busca un método de integración cuyo resultado tenga una exactitud elevada. Para ello, se analizan 4 métodos posibles, estudiando las diferencias en los resultados. Las técnicas analizadas son:

- Método de Euler
- Método de Taylor
- Método de Adams-Bashforth
- Método de Runge-Kutta 45

La comparación entre estos métodos se ha obtenido de la literatura [20]. En el presente documento no se hablará en detalle de cada uno de estos métodos ni se especificará el proceso de programación de los mismos, ya que no es el objetivo del documento. Por tanto, nos limitaremos a presentar las diferencias entre ellos, obtenidas de [20], y seleccionar el que mejor se adapte. La comparación de estos métodos realizada por [20] se basa en el análisis de un problema sencillo, como es el problema del péndulo. En la Figura 4.1 se muestra el resultado de la integración del movimiento del péndulo según los diferentes métodos de integración:

Se puede observar que el único método de integración que se ajusta correctamente al movimiento teórico es el método Runge-Kutta 45 [20]. Esto es coherente con lo observado en la mayoría de las investigaciones sobre el problema de los tres cuerpos, que utilizan el método de Runge-Kutta 45

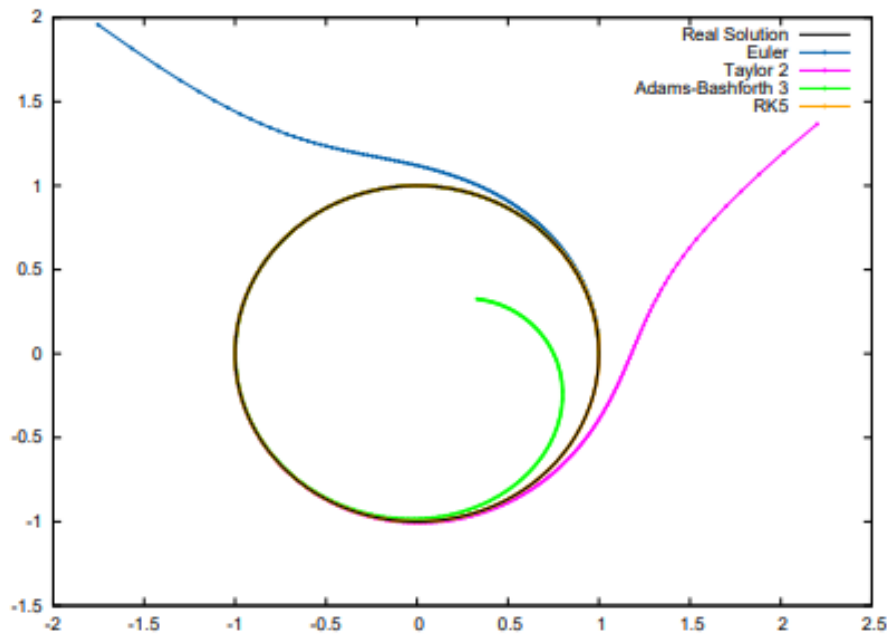


Figura 4.1: Comparación entre los diferentes métodos de integración. Imagen obtenida de [20]

para realizar la integración numérica [8]. En el caso de la implementación en matlab, la integración a través del método de Runge Kutta se realiza con la función `ode45`.

Por lo tanto, en el código se utilizará el método de integración Runge-Kutta a través de la función `ode45`. Para ello, se utiliza el comando:

$$[tiempo, estado] = ode45(\dot{X}, [ti, ti + dt], x0, Opt), \quad (4.12)$$

donde \dot{X} es la derivada del vector estado, tal y como se calculó en el apartado anterior; ti es el tiempo inicial, tal y como se calculó en la ecuación 4.6; dt es el tiempo de integración (el intervalo de tiempo que se quiere simular); $x0$ es el vector estado inicial, tal y como se estableció en la sección 4.2; Opt es una estructura de MATLAB en donde se seleccionan ciertos criterios de integración, como el error admisible, o el criterio de parada (por ejemplo, en caso de colisión); y $[tiempo, estado]$ es la estructura de salida, compuesta por el vector *tiempo* con todos los tiempos en los que se ha calculado el estado del satélite, y la matriz *estado* con el vector estado del satélite en cada instante estudiado.

A través de esta función, una vez integrado el problema, se puede obtener la posición del satélite para todo el periodo simulado, es decir, su trayectoria.

4.5. Tiempo de integración

El tiempo de integración hace referencia a la cantidad máxima de tiempo durante la cual el programa realizará la integración a fin de encontrar una posición en la que la distancia con respecto a L4 sea suficientemente pequeña para considerar que ha llegado a dicho punto. Este tiempo de integración es importante, ya que establece una frontera temporal, a partir de la cuál se considera que el satélite no puede llegar a L4. Por lo tanto, este parámetro de integración supone de facto una condición impuesta a la misión, basada en un tiempo máximo de trayecto entre el momento del primer impulso y el momento del segundo impulso.

La decisión sobre qué tiempo máximo imponer es delicada, ya que no existe un valor universal reglamentado a partir del cual una misión se considere “inviabile”. La mayoría de las misiones tienen sus propios requisitos en los que se impone un tiempo máximo de trayectoria en base a las necesidades específicas de los sistemas a bordo. Sin embargo, a pesar de que cada caso es diferente y tiene sus propios requisitos temporales, a fin de establecer una regla general, se puede asumir que cualquier trayectoria que supere los 100 días de duración es de poco interés real [7].

Por lo tanto, en el algoritmo desarrollado, se establece que el tiempo máximo de integración (es decir, el tiempo de integración), será 23TU (aproximadamente 100 días).

4.6. Comprobación de restricciones

Una vez obtenida la posición del satélite para todo el periodo simulado se debe comprobar si la trayectoria obtenida cumple con todos los requisitos impuestos. La primera restricción (salida de la Tierra) no es necesaria comprobarla, ya que las condiciones iniciales se han impuesto de manera que siempre se cumpla esta restricción. Sin embargo, las otras dos (colisión y llegada a L4) si habrá que comprobarlas.

La colisión con la Tierra o con la Luna se puede introducir como condición de parada en la función `ode45` de MATLAB, imponiendo que si se cumple una de las siguientes condiciones, la integración se detenga:

$$Criterio = \begin{cases} \sqrt{(\vec{X}(1) - 1 + \mu)^2 + \vec{X}(2)^2} < 0.0048 \\ \sqrt{(\vec{X}(1) + \mu)^2 + \vec{X}(2)^2} < 0.017 \end{cases} \quad (4.13)$$

donde los valores 0,0048 y 0,017 hacen referencia respectivamente a la distancia de colisión de la Luna y de la Tierra adimensionalizadas, tal y como se vio en la sección 3.3. De esta manera, si alguno de esos dos criterios se cumplen en cualquier momento de la integración, la función `ode45` se detiene.

La siguiente restricción que hay que comprobar es la llegada al punto L4. Para ello, una vez obtenida la trayectoria completa, se calcula la distancia respecto a L4 que ha tenido el satélite en cada punto de su trayectoria, de la siguiente forma:

$$r_{L4} = \sqrt{(\vec{X}(1) - 0.5 - \mu)^2 + \left(\vec{X}(2) - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \quad (4.14)$$

donde r_{L4} es la distancia del satélite al punto L4 teórico. Este vector nos permite saber en todo momento la separación entre el satélite y el punto L4, de manera que para saber si el satélite ha alcanzado en algún momento la posición de L4, solo hace falta comprobar si algún valor de r_{L4} es menor a 0.01, tal y como se vio en el apartado 3.4.

Sin embargo, como se comentó en la sección 3.4, que el satélite haya alcanzado la posición de L4 no significa que después del segundo impulso el satélite se mantenga en las inmediaciones de dicho punto. Para comprobar esto, es necesario volver a aplicar el propagador durante un segundo periodo de simulación, y comprobar que la distancia respecto a L4 se mantiene por debajo de 0.3DU durante todo este segundo tramo, tal y como se explicó en la sección 3.4. Para ello, se vuelve a ejecutar la función `ode45`, pero esta vez, modificando la condición inicial, de manera que la posición inicial del satélite en este segundo periodo de simulación sea la posición del segundo impulso (definido como el punto más cercano al punto L4, es decir, la posición del satélite en el valor mínimo de r_{L4}), y la velocidad inicial se nula.

De esta manera, el vector de estado que se utilizaría como condición inicial en el segundo periodo de simulación se puede expresar de la siguiente manera:

$$\text{Estado Segunda Simulacin} = \begin{cases} \vec{X}(1) = \vec{X}(1) \text{ en } \min(r_{L4}) \\ \vec{X}(2) = \vec{X}(2) \text{ en } \min(r_{L4}) \\ \vec{X}(3) = 0 \\ \vec{X}(4) = 0 \end{cases} \quad (4.15)$$

De esta manera, se obtiene una segunda matriz de estado, en la que figura el movimiento del satélite después del segundo impulso. Al igual que con el primer tramo de simulación, se puede calcular la distancia del satélite al punto L4 durante este periodo. Si dicha distancia supera el valor de 0.3DU en algún momento, se considera que el satélite no está orbitando satisfactoriamente el punto L4, y se considera que la trayectoria encontrada no representa un resultado válido. Si por el contrario, la distancia nunca supera 0.3DU, se considera que el satélite está orbitando en torno a L4, y por lo tanto, se define que la trayectoria encontrada es un resultado válido.

En resumen, para que una trayectoria se considere un resultado válido, debe cumplir con los siguientes requisitos:

1. No haber colisionado con la Tierra antes de llegar a L4
2. No haber colisionado con la Luna antes de llegar a L4
3. Que el mínimo valor de r_{L4} en la primera parte de la simulación sea menor de 0.01DU
4. Que el máximo valor de r_{L4} en la segunda parte de la simulación (después del segundo impulso) sea menor de 0.3DU

Una vez cumplida estas condiciones, se da por valido el resultado, y se almacenan todos sus datos.

4.7. Almacenamiento de datos del resultado

Una vez se ha confirmado que una trayectoria cumple con todos los requisitos para ser considerada un resultado valido, se guardan los datos para poder analizarlos posteriormente. Los datos que se guardan son los siguientes:

- Posición inicial (α)
- Velocidad inicial (β)
- Tiempo inicial (θ)
- Posición del satélite en cada instante de tiempo (trayectoria)
- Velocidad del satélite en cada instante de tiempo
- Aceleración del satélite en cada instante de tiempo
- Distancia respecto a L4 en cada instante de tiempo
- Vector de tiempos
- Mínima distancia a L4 durante la trayectoria
- Posición del satélite en el momento de mínima distancia respecto a L4
- Velocidad del satélite en el momento de mínima distancia respecto a L4
- Tiempo en el que se ha producido el primer impulso
- Tiempo que ha tardado el satélite en llegar a L4
- Distancia respecto a L4 posterior al segundo impulso
- Trayectoria del satélite posterior al segundo impulso

Una vez almacenados todos los datos, se pueden dibujar las gráficas necesarias y obtener las tablas que nos permitan analizar el comportamiento del satélite en cada trayectoria encontrada, así como comparar los resultados de cada trayectoria encontrada. El algoritmo utilizado para dibujar las gráficas y sacar las tablas no se explicará en este documento, ya que no tiene

relación directa con el propósito de este trabajo, pero se puede consultar en el anexo B. Las gráficas y las tablas obtenidas se pueden consultar en el apartado de resultados.

4.8. Resumen de la implementación

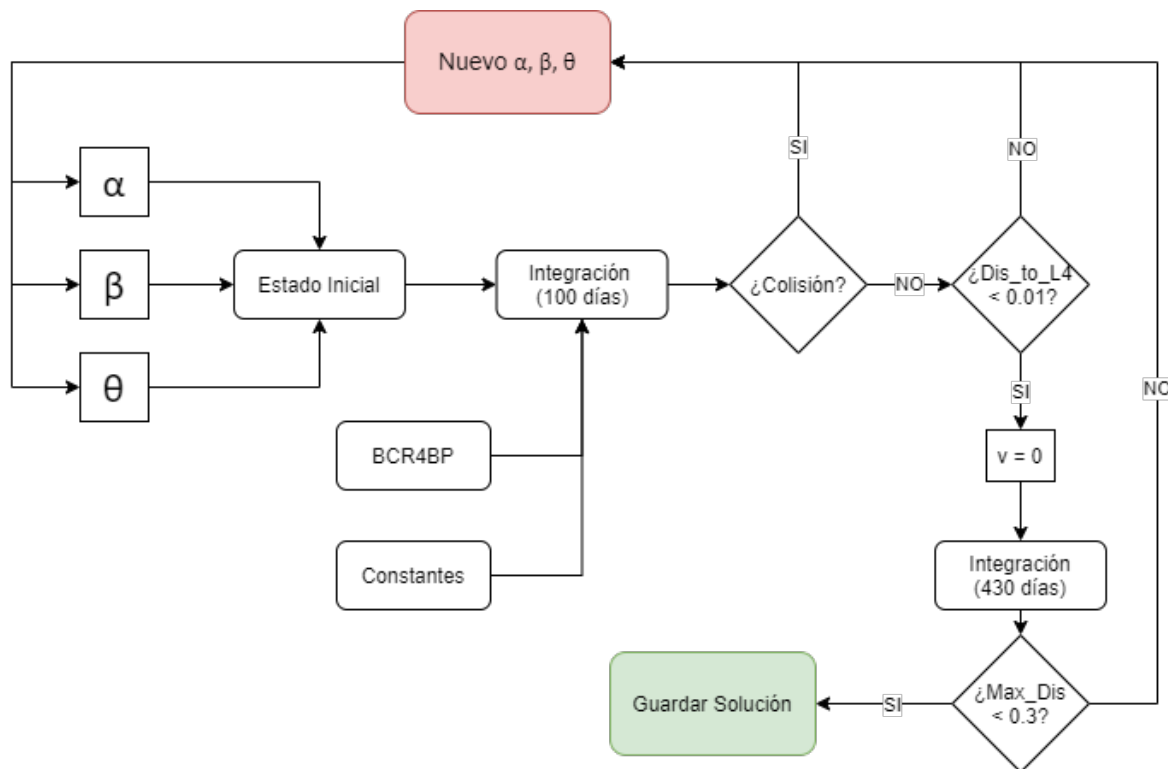


Figura 4.2: Esquema lógico del código implementado

La Figura 4.2 muestra un esquema del proceso lógico del algoritmo implementado. Las tres variables que se modificarán con cada iteración serán α , β y θ (tal y como se explicó en el apartado 3.5). Una vez definidas esas tres variables, se calcula el estado inicial del satélite, definiendo su posición y velocidad inicial (tras el primer impulso). Con el estado inicial definido, se procede a calcular la trayectoria del satélite integrando las ecuaciones del *BCR4BP*, y aplicando las constantes del problema. Durante la integración se comprueba en cada instante de tiempo si se ha producido una colisión con la Tierra o con la Luna, en cuyo caso se detiene la integración. Si la colisión no se produce en los 100 días calculados, se mide la distancia con respecto a L4 de cada instante, comprobando si el valor mínimo de dicha distancia es menor que $0.01DU$. En caso afirmativo, se impone que en dicho punto de mínima distancia la velocidad sea cero (segundo impulso), manteniendo esa posición, y se vuelve a realizar la integración de las ecuaciones del *BCR4BP* durante 430 días más, comprobando si la distancia máxima respecto a L4 en esos días no supera los $0.3DU$. En caso afirmativo, se da por válida la solución, y se guarda en la base de datos. En caso negativo, se

elimina la trayectoria calculada, y se procede a comenzar de nuevo con un nuevo estado inicial.

4.9. Validación del algoritmo

Una vez escrito el algoritmo, es importante validarlo, para confirmar que el código está correctamente implementado. Para ello, se calcula una órbita sencilla y se comparan los resultados obtenidos en el cálculo teórico, en un software externo validado, y en nuestro código. El software externo validado será el programa GMAT, de la NASA, de código abierto.

Software externo de validación (GMAT)

En la imagen 4.3 se puede ver el programa GMAT. Son varios los motivos por los que ha decidido utilizar este programa para realizar la validación. En primer lugar, es un programa versátil que permite ajustar los parámetros de la simulación a casi cualquier misión que se quiera, pudiendo incluir los efectos gravitatorios de la Luna y el Sol. En segundo lugar, es un programa muy sencillo de utilizar, usado normalmente con propósitos académicos, permite una aproximación intuitiva a la dinámica orbital, el diseño de la misión, y el análisis de datos. En tercer lugar, se trata de un código abierto, disponible sin necesidad de comprar licencia. Todos estos atributos, sumado a su reconocida validez y fiabilidad, hacen de este programa un candidato idóneo para la tarea de validación.

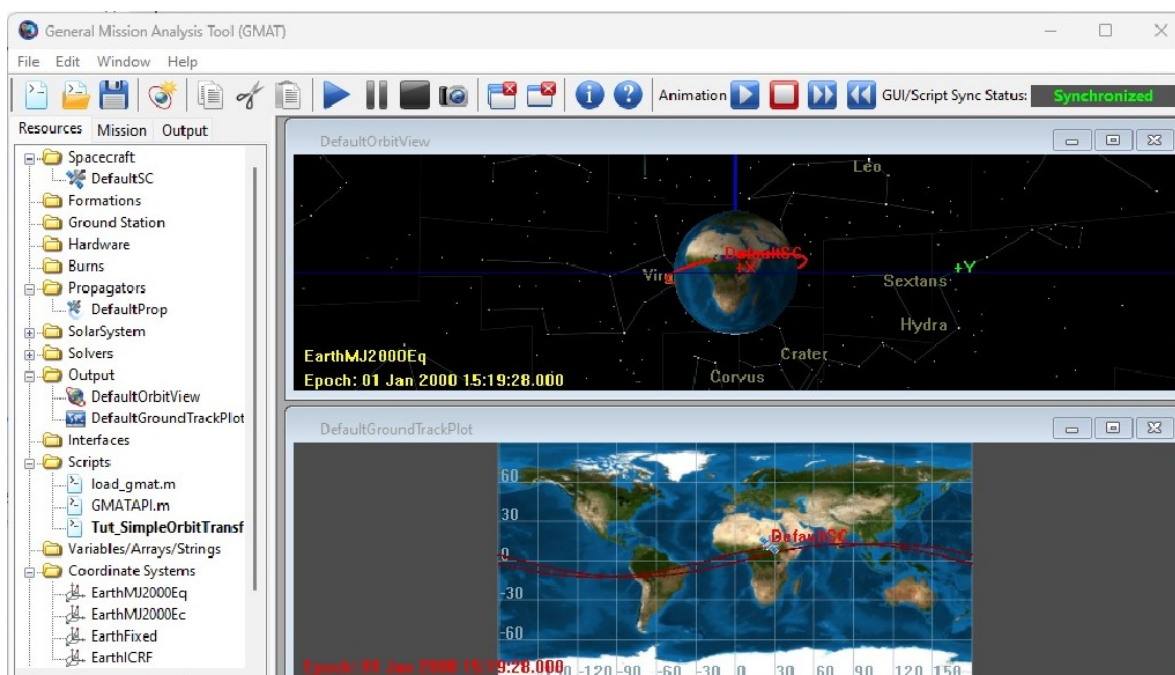


Figura 4.3: Programa GMAT, de la NASA, usado para validar el algoritmo

Los pasos seguidos para programar la misión de validación son los siguientes. En primer lugar, se define el estado y las propiedades del satélite que se quiere simular. Esto se realiza en la pestaña “Resources”, en el apartado “Spacecraft”. Ahí se puede crear el satélite a simular, definiendo propiedades como su estado inicial, su actitud, su masa, su sistema propulsivo, o sus actuadores. En el caso de la validación, la información sobre la actitud del satélite o su masa no es de interés, por lo que se omitirán dichas propiedades. El software GMAT permite introducir el estado inicial del satélite de varias maneras, como por ejemplo, a través de los elementos keplerianos. Sin embargo, el sistema más conveniente para la misión de validación es el modelo cartesiano, en el que se deben introducir los valores de la posición y velocidad inicial en ejes xyz. La imagen 4.4 muestra un ejemplo de cómo introducir esta información en el programa.

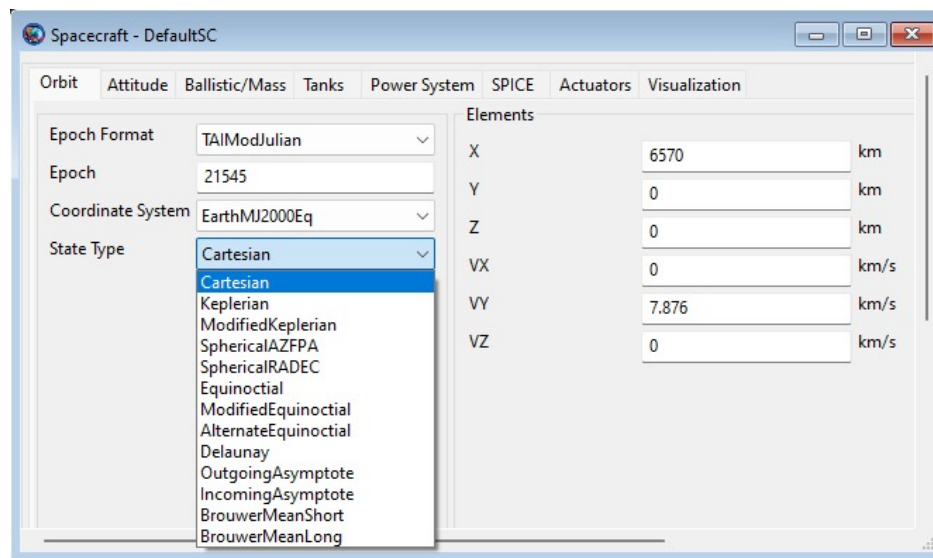


Figura 4.4: Programación del estado inicial de la misión de simulación en GMAT

Una vez definido el satélite que se va a simular, se pueden definir los parámetros del propagador de GMAT, entre los que se encuentra la definición del cuerpo central, el modelo gravitatorio usado, la existencia de perturbaciones (como presión solar, o resistencia aerodinámica), la presencia de otros cuerpos masivos, y el método de integración. Para la misión de validación, a fin de tener las condiciones más cercanas a las de el algoritmo, se seleccionarán las siguientes propiedades:

- Cuerpo central: la Tierra
- Modelo gravitatorio: JGM-2
- Resistencia Aerodinámica: None
- Otros cuerpos masivos: Luna y Sol
- Corrección relativista: No
- Presión Solar: No

- Modelo de integración: RungeKutta89

Es importante mencionar que a pesar de haber intentado que las propiedades del simulador fueran exactamente iguales que las del algoritmo desarrollado, hay ciertas cosas que no pueden ser iguales, como el modelo gravitatorio (que en GMAT tiene en cuenta la perturbación por el achatamiento terrestre), el modelo de integración, o el número de decimales utilizado en las constantes. Estos cambios serán menores, y apenas modificarán el resultado obtenido, pero serán suficientemente importantes como para que el resultado de la simulación de GMAT y de el algoritmo no vayan a ser iguales.

Además de definir las propiedades del satélite y del propagador, GMAT permite hacer cambios en la visualización, en la forma de entregar los datos de salida, en el sistema de coordenadas, o en el sistema propulsivo. Una vez definidas todas las variables del problema, se puede ejecutar la simulación hasta que se cumpla un criterio preestablecido. En nuestro caso, impondremos que la simulación ocupe solamente una órbita completa (es decir, hasta que el tiempo de simulación sea igual al valor del periodo orbital).

Una vez programado el software que vamos a utilizar para validar nuestro algoritmo, debemos diseñar la misión que queremos simular. Esta misión podría ser compleja, sin embargo, se decide utilizar una misión sencilla por dos motivos: primero, el tiempo de computación que requiere GMAT para simular una misión crece con la complejidad de la misma. En segundo lugar, buscamos una misión que también podamos calcular manualmente, basándonos en los conocimientos teóricos de la literatura conocida, a fin de poder comparar los resultados teóricos, los resultados de GMAT y los resultados de nuestro algoritmo. Por ello, la órbita que se simulará para realizar la validación es una órbita de Hoffman de baja altitud.

Definición de la misión de validación

La órbita que se va a simular para validar el algoritmo es una órbita elíptica de transferencia (órbita de Hoffman) entre dos órbitas de aparcamiento, la primera a 200km de altitud y la segunda a 500km de altitud. Para comparar los resultados se utilizará la posición y la velocidad en el perigeo y en el apogeo de la órbita de transferencia.

El calculo teórico se puede realizar manualmente conociendo la posición en el perigeo y el apogeo de la órbita, de la siguiente manera:

$$r_p = 6370km + 200km = 6570km, \quad (4.16)$$

$$r_a = 6370km + 500km = 6870km, \quad (4.17)$$

$$a = \frac{r_a + r_p}{2} = 6720km, \quad (4.18)$$

$$V_p = \sqrt{\frac{2\mu_t}{r_p} - \frac{\mu_t}{a}} = \sqrt{\frac{2\mu_t}{6570km} - \frac{\mu_t}{6720km}} = 7.876km/s, \quad (4.19)$$

$$V_a = \sqrt{\frac{2\mu_t}{r_a} - \frac{\mu_t}{a}} = \sqrt{\frac{2\mu_t}{6870km} - \frac{\mu_t}{6720km}} = 7.532km/s. \quad (4.20)$$

Estos resultados teóricos nos servirán como punto de referencia para la comparación entre el resultado de nuestro programa y el de GMAT. Es importante entender que estos resultados teóricos no tienen una elevada precisión, ya que no tienen en cuenta ningún tipo de perturbación, y por lo tanto, el resultado de GMAT no será exactamente igual al teórico, pero se acercará lo suficiente como para validar el resultado de GMAT.

Resultados de la validación

Una vez realizado el cálculo teórico, podemos simular la misión a través de la herramienta GMAT, imponiendo la posición y la velocidad del satélite en el perigeo, y dejando que GMAT simule la trayectoria hasta el apogeo. El mismo procedimiento se sigue en el código desarrollado para este trabajo, a fin de comparar los resultados.

La Figura 4.5 muestra la comparación entre el resultado obtenido con la herramienta GMAT y el resultado obtenido con el código desarrollado para este trabajo. El círculo azul representa la Tierra, y las dos órbitas simuladas se representan con líneas rojas y azules, siendo la roja la de el algoritmo desarrollado para el presente trabajo, y la azul la simulación de GMAT. Se puede observar que la diferencia entre las dos trayectorias es mínima.

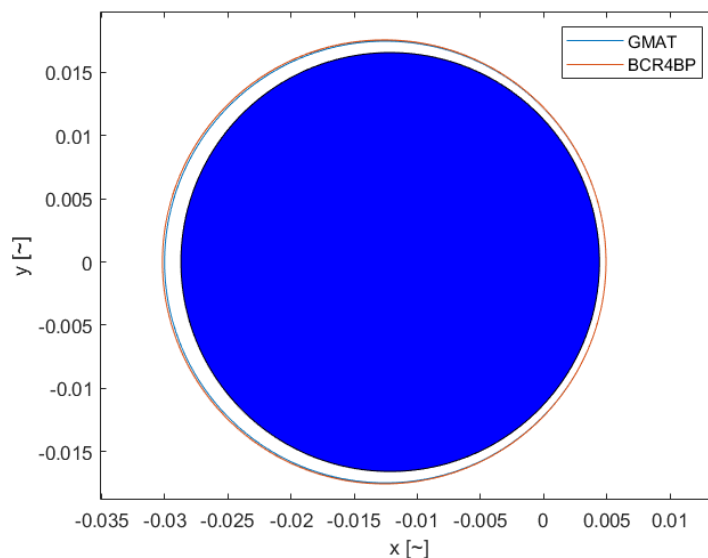


Figura 4.5: Comparación del resultado de una órbita en torno a la Tierra con el programa GMAT y con el código elaborado para este trabajo. El círculo azul representa la Tierra.

A fin de poder apreciar la diferencia entre los resultados, la figura 4.6 muestra el detalle del apogeo de la órbita simulada, desde un punto de vista

mucho más cercano. Se observa que el radio del apogeo de la órbita simulada a través del algoritmo es mayor que la de la simulación de GMAT. Esta diferencia se puede deber a las condiciones del propagador de GMAT, que tal y como se ha visto anteriormente, no son exactamente iguales que las de nuestro algoritmo. Se observa que en el apogeo, la diferencia entre ambas simulaciones es de 70km. Esta distancia puede parecer enorme, sin embargo, comparada con los tamaños de las órbitas completas (de más de 13.500km), una diferencia de 70km es muy pequeña.

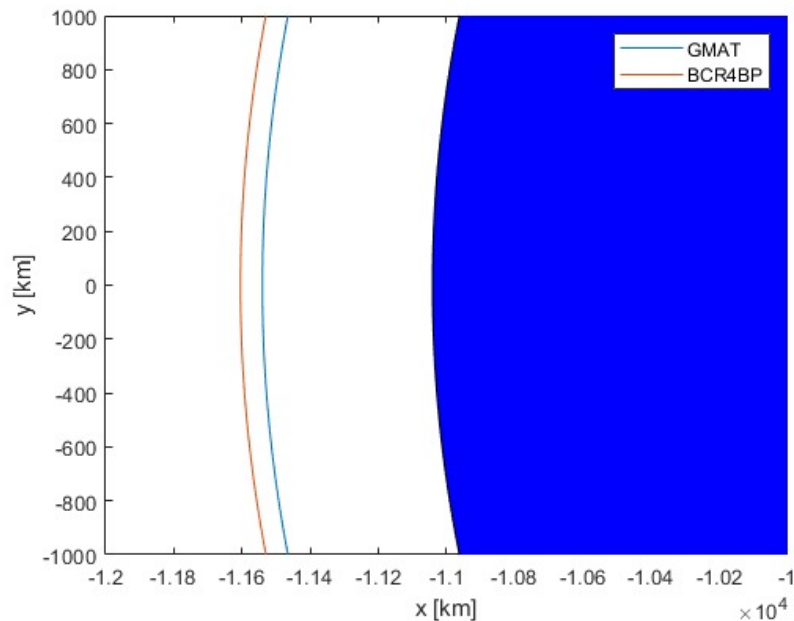


Figura 4.6: Detalle de la comparación del resultado de una órbita en torno a la Tierra con el programa GMAT y con el código elaborado para este trabajo. El círculo azul representa la Tierra.

A continuación se muestra una tabla con los resultados obtenidos por los tres métodos. En la primera columna se muestra el resultado teórico, en la segunda el resultado de la simulación de GMAT y en tercer lugar, el resultado de la simulación del algoritmo. Por último, en la última columna, se muestra la diferencia porcentual entre el resultado de GMAT y el del algoritmo, siendo de aproximadamente un 1 %.

Tabla 4.1: Comparación de resultados del proceso de Validación

Parámetro	Teórico	GMAT	BCR4BP	Diferencia
r_p (km)	6570	6570	6570	0%
r_a (km)	6870	6868	6938	1.01%
V_p (m/s)	7.876	7.876	7.876	0%
V_a (m/s)	7.532	7.530	7.460	0.93%

La diferencia entre los resultados obtenidos a través de la herramienta de GMAT y del algoritmo son suficientemente parecidos como para validar el

código desarrollado. Las diferencias entre ambos resultados no se deben a una mala programación del algoritmo (lo cual causaría una diferencia de resultados mucho más notable), sino a las pequeñas diferencias entre el software GMAT y el algoritmo, como pueden ser el método de integración, la perturbación por achatamiento terrestre o el número de decimales usado en las constantes.

Cabe destacar que, además de las diferencias cuantitativas de los resultados obtenidos, existen diferencias cualitativas entre el uso de GMAT y el algoritmo desarrollado. En primer lugar, el programa GMAT ha tardado 0.368 segundos en realizar el cálculo de la órbita, mientras que nuestro programa ha tardado 0.013 segundos; esta diferencia puede parecer pequeña, pero es muy importante si tenemos en cuenta que buscamos realizar un proceso iterativo con 414.720 iteraciones. Además, el ejemplo utilizado ha sido muy sencillo, por lo que los tiempos de computación de GMAT han sido muy bajos con respecto a las órbitas que queremos encontrar en el presente estudio, que además de ser más complejas, puedan llegar a durar hasta 100 días. Por ejemplo, esta misma órbita sencilla, si se extiende 100 días, el programa GMAT precisa 9.995 segundos en simularla.

Además del tiempo de computación prohibitivo que requeriría encontrar las trayectorias directamente desde GMAT, el algoritmo desarrollado nos permite mayor flexibilidad a la hora de tratar con grandes cantidades de datos. GMAT está diseñado para simular y analizar una única órbita, no para encontrar multitud de órbitas diferentes. Estas diferencias hacen que la herramienta GMAT, a pesar de su elevado nivel de exactitud, sea muy poco eficiente si el propósito de la investigación es simular el máximo número de órbitas posibles.

Es importante recordar que los resultados que se obtengan del algoritmo son preliminares, y suponen una fuente de información sobre el comportamiento genérico de las órbitas y el efecto de las variables de entrada. Una vez encontrados los resultados preliminares con el algoritmo, y en un paso posterior del diseño, se puede simular una órbita concreta con el programa GMAT a fin de encontrar resultados más precisos. Esta estrategia de utilizar un código con menor exactitud para obtener resultados preliminares del diseño de una misión es común, debido a los tiempos prohibitivos de un cálculo detallado [8]. Estos análisis preliminares aportan información muy importante sobre el comportamiento genérico del satélite, y sirven para obtener puntos de partida sobre los que empezar un análisis detallado posterior.

En resumen, los resultados obtenidos a partir del algoritmo solo difieren de los resultados de GMAT en un 1%, quedando, por tanto, validado el algoritmo escrito para este trabajo.

Capítulo 5

Resultados

Una vez diseñado el algoritmo (véase el anexo B) y verificado el mismo, se realiza una simulación de los puntos de estudio, en base a los puntos iniciales establecidos en la sección 3.5. Estos puntos iniciales suman un total de 414.720 simulaciones, en las que se comprueban, uno a uno, los criterios establecidos para considerar que se está orbitando en torno a L4, tal y como se ha explicado en el capítulo 4.

Con dichos criterios, se ha obtenido un total de 4.865 resultados (entendiéndose como “resultado” todas aquellas trayectorias que culminan en una órbita estable en torno a L4 después de efectuar los dos impulsos). El tiempo necesario para simular todas las condiciones iniciales y obtener los resultados ha sido de 3 horas y 45 minutos.

$$Simulación = \begin{cases} Casos = 414.720 \\ Resultados = 4.865 \\ Tiempo = 225 \text{ min} \end{cases}$$

A continuación se muestran los resultados obtenidos. Por razones obvias, no es posible examinar individualmente cada resultado. Por ello, se analizarán los resultados de manera global, estudiando el efecto de las condiciones iniciales en los mismos, y centrándonos en tres factores específicos:

- Consumo total (suma de los dos impulsos realizados)
- Tiempo necesario para llegar a L4
- Comportamiento del satélite una vez en órbita

Una vez analizado de manera global los resultados, se seleccionarán una serie de trayectorias concretas que se consideren de mayor interés, y se analizarán dichas trayectorias en detalle. Por último, se mostrara un breve catálogo de diferentes tipos de órbitas encontradas.

A fin de entender mejor los resultados que se van a mostrar, es prudente recordar los siguientes aspectos:

1. ΔV_T hace referencia al consumo total de la misión, expresado como la suma de las diferencias de velocidad provocada por los impulsos realizados.
2. La duración del trayecto hace referencia solamente al tiempo entre los dos impulsos, descartando el tiempo de órbita posterior en torno a L4 y el tiempo en la órbita aparcamiento antes del primer impulso.
3. Las magnitudes de distancia, velocidad y tiempo se dan en unidades características, que tal y como se vio en la sección 3.7 son las siguientes:

Tabla 5.1: Tabla de cantidades características

Unidad Característica	Símbolo	Medida
Distancia	DU	384.400 km
Tiempo	TU	4.3425 días
Velocidad	SU	1024.5 m/s

4. Los parámetros iniciales son α , β , y θ , haciendo referencia a la posición inicial, la velocidad inicial y el tiempo inicial respectivamente, tal y como se explicó en la sección 3.5.
5. A la hora de mostrar el detalle de una misión concreta (entendiéndose por misión la suma de la trayectoria hasta L4 y de la órbita en torno a L4), se muestran cuatro gráficas, que son:
 - a) Trayectoria en ejes rotatorios, es decir, en ejes solidarios con el movimiento de la Luna, en los que el eje x siempre coincide con el vector Tierra-Luna
 - b) Trayectoria en ejes inerciales, es decir, en ejes no solidarios a la Luna, en los que la Luna gira en torno a la Tierra
 - c) Órbita en torno a L4 en ejes rotatorios
 - d) Órbita en torno a L4 en ejes inerciales
6. En las gráficas se muestra la Tierra, la Luna, y el punto L4 utilizando para ello los símbolos de un círculo azul, un círculo rojo, y un triángulo respectivamente. En algunas ocasiones estos símbolos no son fácilmente visibles, debido a la escala.
7. En las gráficas se muestran todas las distancias adimensionalizadas según las cantidades características explicadas en la sección 3.7
8. A la hora de exponer los resultados de una misión concreta en formato tabla, se expondrán los siguientes valores:

Tabla 5.2: Descripción de los parámetros característicos de una misión

Parámetro	Descripción
α	Posición inicial del satélite, expresado como el ángulo entre el vector Tierra-Satélite y el vector Tierra-Luna
β	Velocidad inicial del satélite, expresado como el cociente entre la velocidad del satélite tras el primer impulso y la velocidad anterior al primer impulso
θ	Tiempo inicial del satélite, expresado como el ángulo entre el vector Tierra-Sol y el vector Tierra-Luna en el momento del primer impulso
ΔV_L	Variación de velocidad debido al segundo impulso
ΔV_T	Consumo total, expresado como la suma de las variaciones de velocidades debido al primer y el segundo impulso
t_{L4}	Tiempo necesario para llegar a L4, es decir, entre el primer impulso y el segundo impulso
R_{L4}	Distancia respecto a L4 en la que se produce el segundo impulso
$(R_{orb})_{max}$	Distancia máxima a la que se sitúa el satélite respecto a L4 durante la órbita (es decir, después del segundo impulso)

5.1. Resultados generales

En primer lugar, se muestran todos los resultados obtenidos en una gráfica que representa el consumo total frente al tiempo necesario ($\Delta V_t - t_{L4}$). Cada punto de dicha gráfica representa una trayectoria diferente. El consumo total se expresa como el ΔV_t necesario, sumando los dos impulsos de cada misión, mientras que el tiempo necesario es la diferencia entre el tiempo del segundo impulso y el tiempo del primer impulso.

Nótese que en dicha gráfica no se aprecian los 4.865 resultados encontrados. Esto se debe a que muchos se superponen entre ellos, y por lo tanto, una gran parte de los puntos representados en realidad representan muchas trayectorias diferentes con los mismos resultados de consumo y tiempo. Esto es especialmente importante en aquellas trayectorias muy poco influenciadas por el Sol, ya que existirán 36 trayectorias prácticamente iguales en cada punto mostrado. Este efecto se analizará en detalle en las secciones 5.2 y 5.4.

En la Figura 5.1 se observan los resultados obtenidos. Se puede apreciar que existe una gran nube de puntos esparcidos por todo el dominio de la gráfica, mostrando que para cada tiempo de transferencia buscado existe

al menos una trayectoria que coloca al satélite en el punto L4. Además, se ve como el consumo requerido para todas las trayectorias inferiores a 100 días tiene como límite inferior aproximadamente 3.7 km/s y como límite superior aproximadamente 4.9km/s.

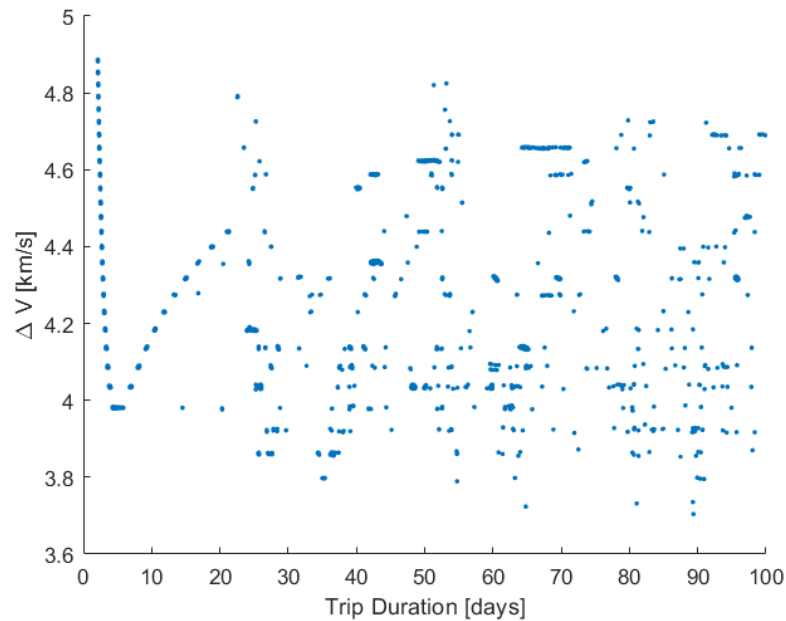


Figura 5.1: Compilación de todas las trayectorias a L4 halladas. Se muestra la duración del trayecto y la ΔV necesaria para cada trayectoria.

Se puede observar, así mismo, que existen tres zonas muy claramente diferenciadas. La Figura 5.2 muestra esta división. A continuación se estudia cada zona:

1. En primer lugar se puede reconocer una zona de trayectorias de baja duración (denominada “Baja Duración”). En esta región las trayectorias duran menos de 20 días y tienen consumos moderadamente elevados (entre 4km/s y 4.9km/s aproximadamente). Se puede observar que las órbitas de Baja Duración presentan una alta continuidad entre resultados, mostrándose como una línea continua, con un mínimo. En esta zona existen muy pocas trayectorias que no estén dentro de dicha línea continua. Esta parte se estudiará en más detenimiento en la sección 5.4.
2. En segundo lugar, se puede reconocer una región de bajo consumo (denominada “Bajo Consumo”). En esta zona las trayectorias encontradas presentan consumos inferiores a 4km/s, y se extienden por tiempos entre los 20 días y los 100 días. Estas trayectorias presentan un comportamiento no lineal, con puntos esparcidos por todo el dominio sin un criterio obvio. Éstas se estudiarán con más detenimiento en la sección 5.4

3. En tercer lugar, se pueden englobar todas las trayectorias que no se encuentran en las dos zonas mencionadas anteriormente. Estas órbitas no reciben un nombre concreto ni se estudiarán con detenimiento, ya que son órbitas que o bien tardan más que las órbitas de baja duración consumiendo lo mismo, o bien tardan lo mismo que las trayectorias de bajo consumo pero consumiendo mucho más. Por ello, se considera que este tercer grupo de trayectorias no suponen una ventaja con respecto a ninguno de los dos grupos anteriores.

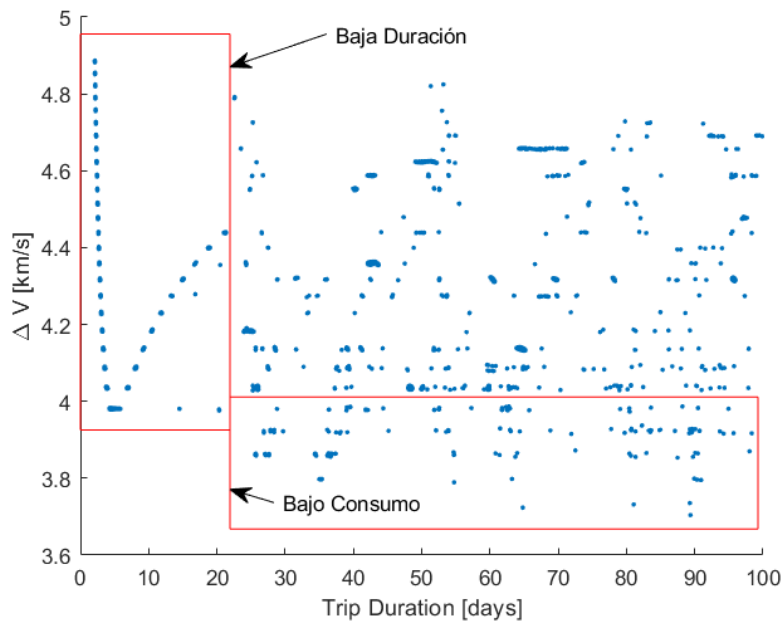


Figura 5.2: División de las trayectorias halladas entre Trayectorias de Baja Duración y Trayectorias de Bajo Consumo.

5.2. Efecto de los parámetros iniciales en los resultados

Efecto de la presencia solar

Antes de analizar el efecto de las condiciones iniciales en los resultados obtenidos, es necesario estudiar el efecto de la mera presencia del Sol como cuarto cuerpo. La mayoría de la literatura que trata sobre el análisis preliminar de las trayectorias cislunares (en la zona interior a la órbita lunar) solo estudian el problema desde la perspectiva de los tres cuerpos [4]. Sin embargo, tal y como se vio en la sección 3.4, la presencia del Sol empieza a ser importante en la zona cercana al punto L4, así como en la zona exterior a la órbita lunar. Por ello, es posible analizar cuánta diferencia existirá en los resultados si se tiene en cuenta el efecto de la atracción gravitatoria solar.

Este análisis se puede llevar a cabo realizando el cálculo de las posibles

trayectorias utilizando un modelo de 3 cuerpos, o manteniendo el modelo de los cuatro cuerpos pero imponiendo que la masa del Sol es nula. De cualquiera de las dos maneras obtendremos un resultado que mostrará las trayectorias que se encontrarían sin tener en cuenta la presencia del Sol. Nótese que, en el caso de no tener en cuenta la presencia del Sol, la variable inicial θ pasa a ser innecesaria.

La Figura 5.3 muestra el resultado de la comparación entre los resultados obtenidos teniendo en cuenta la presencia del Sol (mostrados en puntos negros) y los resultados sin tener en cuenta la presencia del Sol (mostrados como puntos rojos).

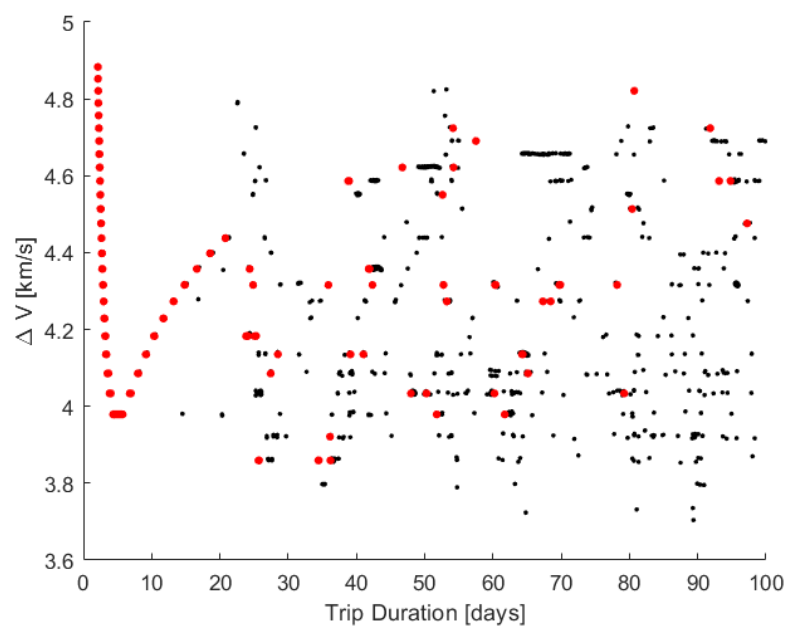


Figura 5.3: Comparación entre las soluciones halladas al tomar en cuenta el efecto del Sol (negro) y sin tomar en cuenta el efecto del Sol (rojo).

Se puede observar que el número de soluciones encontradas es mucho menor (solo se han encontrado 134 resultados, frente a los 4.865 encontrados con la presencia solar), evidenciando que la presencia del Sol afecta positivamente a la hora de encontrar nuevas trayectorias. Se puede ver cómo en la zona denominada de “Baja Duración” (tiempos inferiores a 20 días), la solución en 3 cuerpos coincide a la perfección con la solución calculada con la presencia solar. Esto indica que las órbitas mostradas en esta sección son órbitas poco influenciadas por la presencia solar. Se tratará este tema en detalle en la sección 5.4.

Por otro lado, se puede observar que en la zona que se había categorizado como zona de “Bajo Consumo” hay muy pocos puntos encontrados con el modelo de 3 cuerpos (es decir, sin contar con la presencia del Sol). Se observa, además, que los puntos de mínimo consumo (aquellos con consumo inferior a 3.8 km/s) no aparecen si no tenemos en cuenta la presencia de

esta contribución. Esto indica que, en el caso de las órbitas de bajo consumo, la presencia solar es un factor muy importante y que debe ser estudiado con detalle.

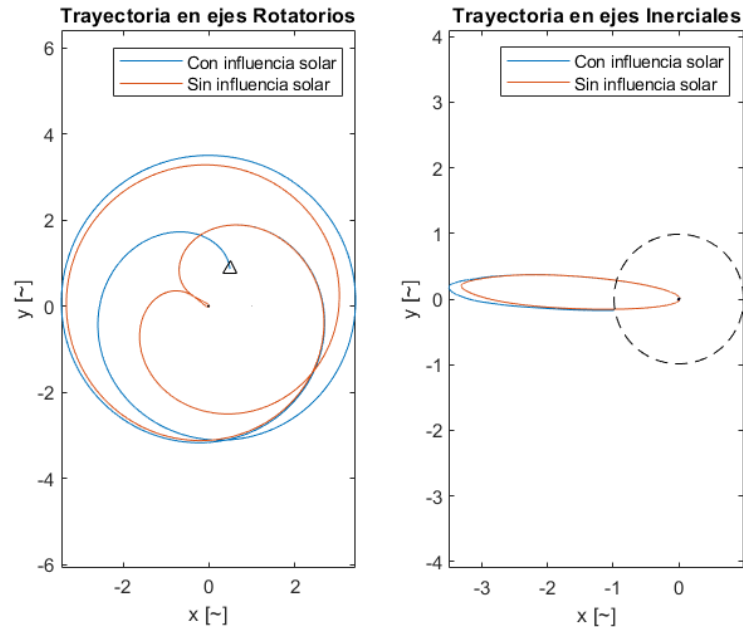


Figura 5.4: Comparación de dos trayectorias con la misma condición inicial, calculada con y sin el efecto del Sol. Se muestra en ejes rotatorios (izquierda) y en ejes inerciales (derecha).

La Figura 5.4 muestra un ejemplo del efecto de la perturbación solar en una órbita que se aleje mucho de la zona interior de la órbita lunar. En la imagen de la izquierda se muestra la órbita en ejes rotatorios (solidarios a la Luna) y la imagen de la derecha muestra el movimiento en ejes inerciales, con la línea discontinua representando la órbita lunar. La imagen muestra en naranja la órbita sin tener en cuenta la presencia solar, y en azul teniéndola en cuenta. Se observa que la presencia solar provoca que la distancia máxima respecto a la Tierra aumente, y por lo tanto, incrementa la energía de la órbita. Además, en la imagen de la izquierda se aprecia que a lo largo de la trayectoria el satélite con influencia solar se aleja más de la Tierra que la que no tiene efecto solar, hasta el punto de que el satélite sin perturbación regresa a la Tierra, mientras que el satélite con efecto de la gravedad solar llega al punto L4. Se observa, por tanto, que la trayectoria del satélite (aunque sean parecidas) desembocan en resultados absolutamente diferentes. Por ello, se demuestra que la presencia solar no solo provoca una “pequeña perturbación” en la trayectoria, sino que afecta drásticamente a los valores obtenidos.

Además del efecto del Sol en el tiempo y en el consumo de la trayectoria, se puede analizar el impacto que tiene en la órbita en torno al punto L4, ya que tal y como se ha visto, en esta zona la influencia solar es importante. El hecho de que exista una perturbación debido a la presencia solar hará que

la órbita en torno al punto L4 se modifique con respecto a la que tendría sin perturbación solar.

La Figura 5.5 muestra una nube de puntos en la que se representa la distancia inicial de la órbita (es decir, la distancia respecto a L4 a la que se produce el primer impulso) y la máxima distancia orbital en torno a L4. Se puede observar que la gráfica está limitada por las cantidades pre-establecidas de 0.1DU en distancia inicial y 0.3DU en máxima distancia orbital, tal y como se expuso en las secciones 3.4 y 3.4. En la figura, los puntos negros representan los resultados obtenidos teniendo en cuenta la presencia del Sol, mientras que los resultados sin tenerlo en cuenta se representan en rojo.

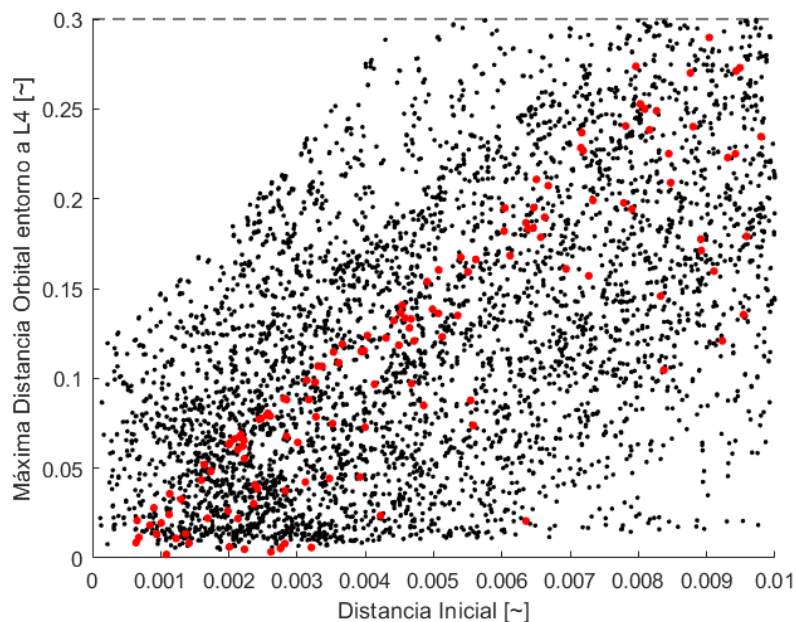


Figura 5.5: Máxima distancia orbital con respecto al punto L4, mostrando resultados teniendo en cuenta el efecto del Sol (negro) y sin tomar en cuenta el efecto del Sol (rojo).

En la Figura 5.5 se puede observar que la amplitud de resultados crece mucho al tener en cuenta la presencia del Sol, es decir, que para una misma distancia inicial, las posibilidades de distancia máxima orbital aumentan drásticamente. Es más, en el caso del análisis sin el efecto del Sol se observa un comportamiento bastante lineal, en el que la mayoría de los puntos se encuentran en una recta, con unas pocas excepciones en la parte inferior del gráfico. Esto muestra que sin la presencia del Sol, la distancia orbital máxima tiende a quedarse por debajo de 30 veces la distancia inicial. Sin embargo, al incluir la presencia solar, esta relación se rompe, y se pueden encontrar órbitas que presentan una distancia hasta 75 veces mayores que la distancia inicial. Así mismo, se observa el efecto contrario: trayectorias con distancias iniciales muy elevadas que son “amortiguadas” por el Sol. El caso de estas órbitas particulares (con alta distancia inicial pero baja

distancia orbital máxima) se estudiará con más detenimiento en la sección 5.3

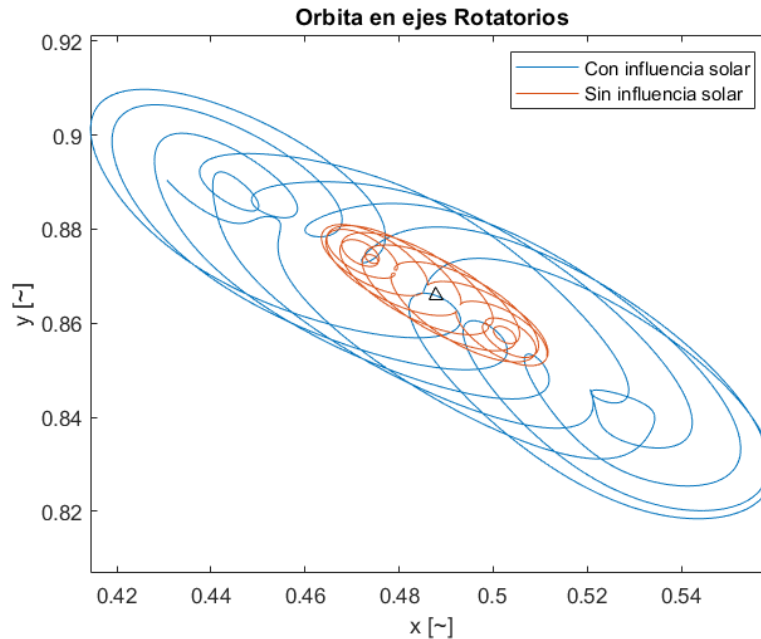


Figura 5.6: Comparación de dos órbitas con la misma condición inicial (punto cercano a L4), calculada con y sin el efecto del Sol

La Figura 5.6 muestra un ejemplo del efecto del Sol en una órbita concreta. Ambas transferencias tienen una misma situación inicial, con velocidad nula y posición $X_{inicial} = [0.4851, 0.8666]DU$. En la imagen se puede observar, en rojo, la órbita en torno al punto L4 calculada sin tener en cuenta la presencia del Sol, mientras que en azul se muestra la órbita con las mismas condiciones iniciales (en posición y velocidad) pero con la presencia de la estrella.

Se observa que la máxima distancia respecto a L4 crece mucho debido a la presencia del Sol, con un valor de 0,0824DU (34.674 km) en el caso de presencia solar y de 0,0275DU (10.571 km) en el caso de no tener en cuenta la presencia solar, lo cual representa una diferencia del 30%. Nótese que esta comparación es solamente del ejemplo mostrado, ya que tal y como se ha visto en la Figura 5.5, hay ocasiones en las que el Sol, en lugar de ampliar la órbita, la amortigua.

Queda por tanto demostrado que la presencia del Sol es un factor muy importante a la hora de calcular tanto las trayectorias al punto L4 como las órbitas en torno a dicho punto. Por lo tanto, es necesario utilizar modelos de cuatro cuerpos para poder realizar un estudio de estas trayectorias de forma más precisa.

Efecto del tiempo inicial

Como se acaba de ver, la presencia del Sol es un factor muy importante a la hora de calcular trayectorias eficientes hasta el punto L4. Esta influencia no depende solamente del hecho de que la atracción gravitatoria del Sol sea tomada en cuenta, sino que también depende de su posición relativa al satélite. Tal y como se observa en las ecuaciones del modelo bicircular restringido de los cuatro cuerpos (BCR4BP), la distancia entre el satélite y el Sol influye considerablemente en las aceleraciones del satélite. Dicha distancia no es constante, sino que depende de la posición del satélite respecto a la Tierra, y de la posición del Sol respecto a la Tierra. El segundo factor (la posición del Sol respecto a la Tierra) no es un valor constante, ya que en ejes fijos a la Tierra, el Sol se considera girando en torno a ella. Aunque la distancia entre el Sol y la Tierra sí se considere constante, la posición del Sol dependerá del tiempo, debido a su giro.

Por lo tanto, cuando hablamos del efecto del tiempo inicial, hablamos en realidad del ángulo θ , es decir, el ángulo que forman el vector Tierra-Sol y el vector Tierra-Luna en el momento del primer impulso.

La Figura 5.7 muestra el mapa con todos los resultados hallados de consumo frente a tiempo, pero coloreados según el valor de θ , siendo los colores fríos los ángulos más bajos y los cálidos los ángulos más elevados.

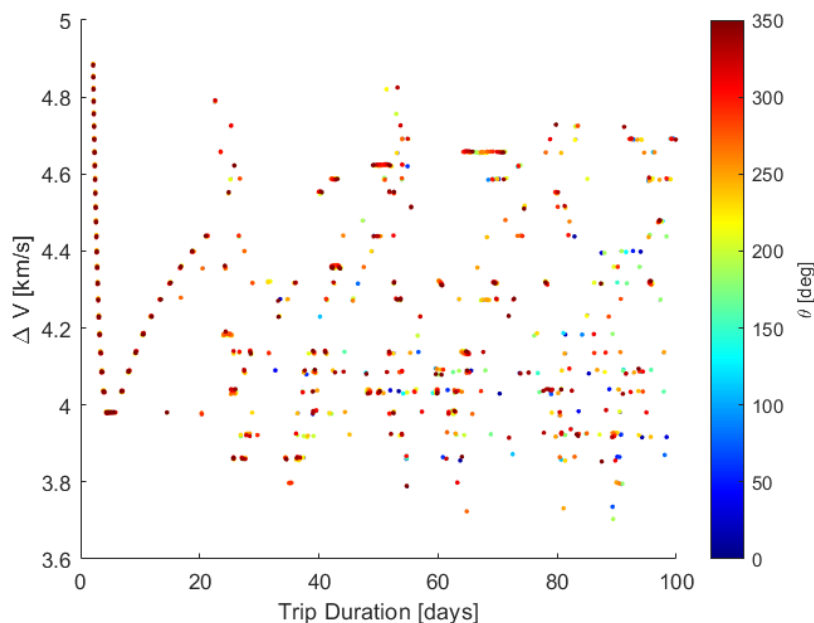


Figura 5.7: Efecto de la posición del Sol (en el momento del primer impulso) en ΔV y Δt

Se puede observar que el efecto de la posición del Sol varía según la zona de la gráfica en la que nos encontremos. Por un lado, en el caso de las trayectorias de baja duración, el efecto de la posición solar es muy pequeño, provocando que todas las trayectorias encontradas se concentren en un

único punto (que por motivos gráficos se muestra en rojo, ya que este color predomina sobre el resto). Debe notarse que en esta zona, aunque a simple vista solo se observen puntos rojos, en realidad están superpuestos puntos de todos los colores (es decir, de todas las θ estudiadas). Este efecto se estudiará con más detenimiento en la sección 5.4.

Por otro lado, se aprecia que para tiempos superiores a 20 días la distribución de color es mucho más caótica. Aunque sigue habiendo muchos puntos que muestran varias trayectorias superpuestas (y que por lo tanto, se perciben en rojo), existen muchos otros en los que se ve claramente que cierta trayectoria solo es posible con una posición concreta del Sol en el momento del impulso inicial. Cuanto mayor es la duración de la trayectoria, más peso tiene el efecto del tiempo inicial.

Sin embargo, se puede encontrar que a pesar de que existan un alto número de trayectorias que solo son posibles si se coordina el primer impulso con una posición solar concreta, el número de soluciones encontradas no depende de la posición del Sol. Es decir, la probabilidad de encontrar una trayectoria a L4 no es función de la posición del Sol en el momento del primer impulso. Esto se puede observar fácilmente en la Figura 5.8 en la que se muestra el porcentaje de resultados encontrados para cada valor de θ . Se observa que la línea es muy plana, lo cual evidencia que no existe una posición solar predominante que facilite el hallazgo de trayectorias entre la Tierra y el punto L4.

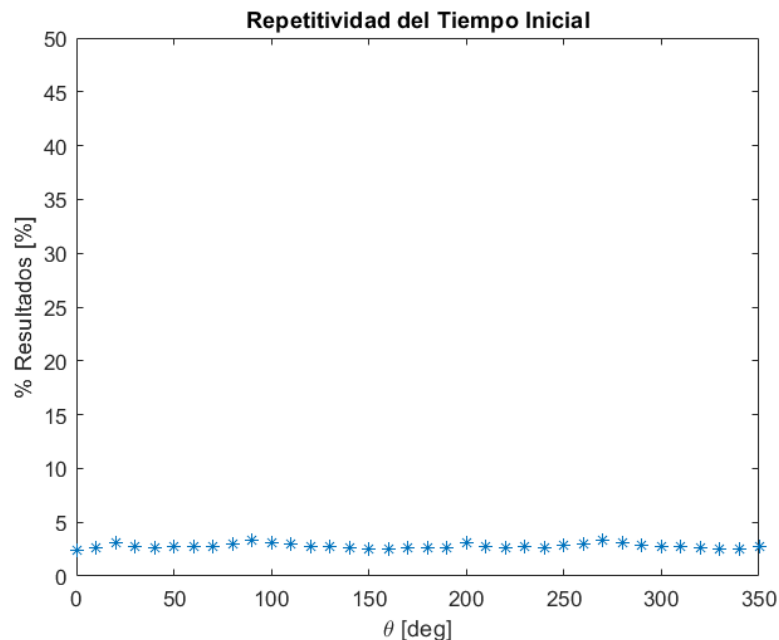


Figura 5.8: Repetitividad de la posición del Sol (en el momento del primer impulso) en los resultados encontrados

En la Figura 5.9 se refuerza este hallazgo. Dicha gráfica muestra el efecto directo que tiene la posición solar en el momento del primer impulso (θ) sobre el consumo (arriba) y el tiempo (abajo). Se observa que para cualquier

θ que se quiera analizar, existen trayectorias que cubren todos los consumos posibles y todos los tiempos posibles. Esto no significa que el momento inicial sea irrelevante, en absoluto, sino que la probabilidad de hallar trayectorias a L4 es independiente de la posición solar. Sin embargo, se observa que existen trayectorias concretas que solo son posibles con un θ concreto, demostrando que la posición solar inicial si juega un papel muy importante a la hora de hallar trayectorias concretas, sobre todo aquellas trayectorias con bajas velocidades y altos tiempos (que son las más afectadas por la presencia solar).

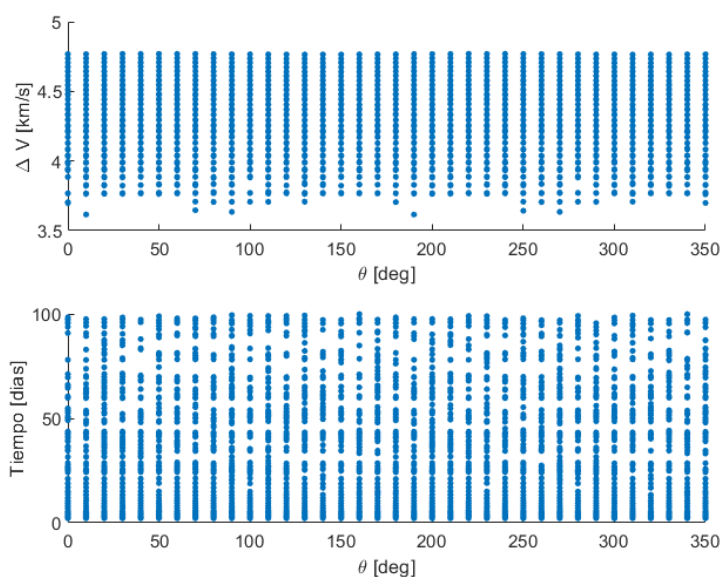


Figura 5.9: Efecto de la posición del Sol (en el momento del primer impulso) en el consumo y en el tiempo. La gráfica superior muestra el efecto directo en ΔV y la gráfica inferior en Δt

Efecto de la velocidad inicial

En esta sección se analiza el efecto de la variable β en los resultados obtenidos. Tal y como se ha explicado en la sección 3.5, la variable β representa el valor de la velocidad inicial (es decir, tras el primer impulso), representada a través de un cociente entre la velocidad tras el primer impulso y la velocidad antes del primer impulso.

La Figura 5.10 muestra una gráfica con todas las trayectorias encontradas, en las que el color de cada punto representa un valor de β . Se puede observar que existe una dependencia directa entre el consumo de la trayectoria encontrada y el valor de β de dicha trayectoria, de manera que a mayor β , mayor consumo total. Esta observación es muy coherente, ya que el valor de ΔV depende directamente de β , de la siguiente manera:

$$\Delta V = \beta \sqrt{\frac{\mu}{r_0}} + \Delta V_2, \quad (5.1)$$

donde r_0 es el radio de la órbita aparcamiento y ΔV_2 es la diferencia de velocidad debido al segundo impulso. Dado que el valor de μ y de r_0 son constantes, el valor de ΔV solo dependerá de β y de ΔV_2 . El hecho de que la Figura 5.10 muestre una dependencia tan clara con β evidencia que el valor de ΔV_2 es mucho menor que el valor del primer impulso. Este efecto se estudiará en más detalle en la sección 5.3.

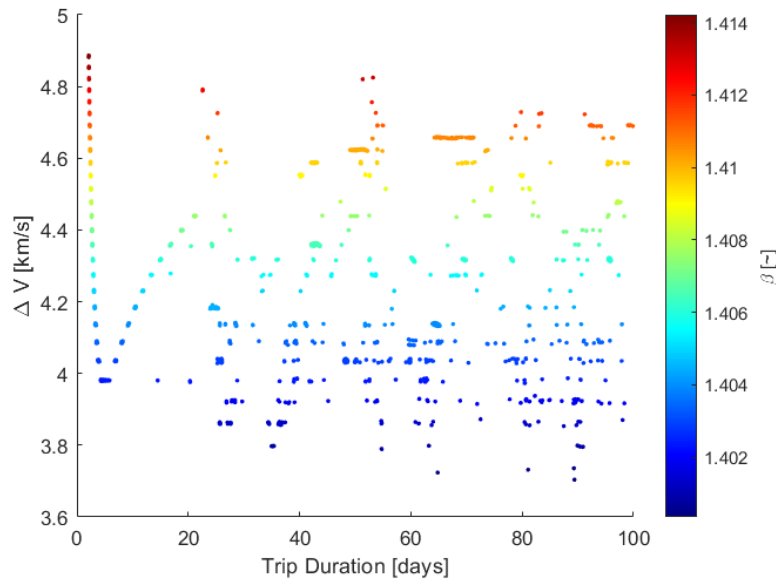


Figura 5.10: Efecto de la ΔV del primer impulso en el consumo y en el tiempo

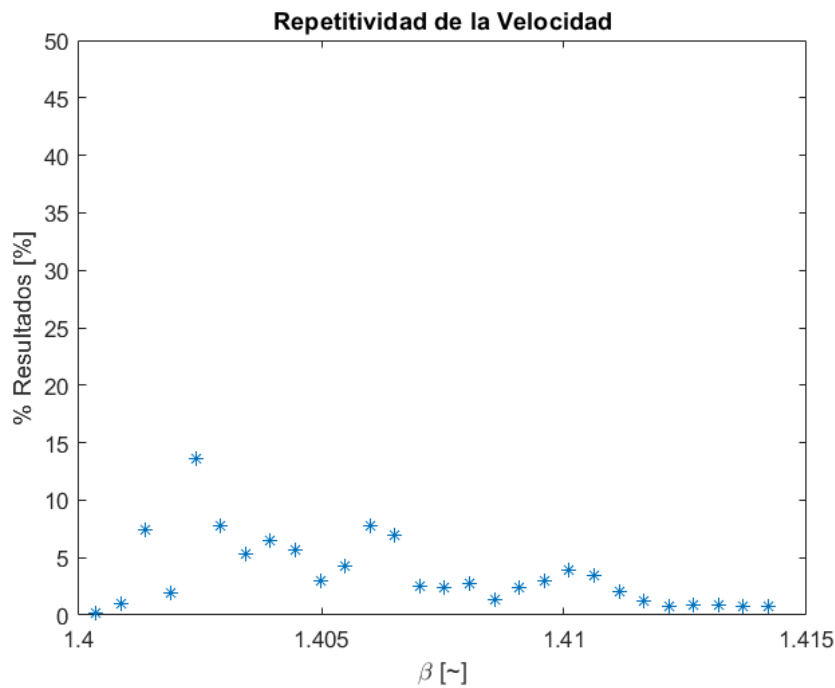


Figura 5.11: Repetitividad de la ΔV del primer impulso en los resultados encontrados

Con los resultados obtenidos, se puede estudiar también si existen valores de β en los que sea más probable encontrar trayectorias a L4. En la Figura 5.11 se muestra una gráfica en la que se observa el porcentaje de resultados encontrados para cada valor de la velocidad inicial. Se observa que existen valores de β en los que aumentan considerablemente las probabilidades de encontrar resultados, específicamente en valores de β entre 1.401 y 1.407, con un segundo pico en torno a 1.410. Téngase en cuenta que los valores de β cubren un rango muy reducido debido a lo explicado en la sección 3.5.

En la Figura 5.12 se puede observar el efecto de β en el consumo y en el tiempo. Por un lado, en la imagen inferior se aprecia que β no tiene un efecto directo o claro sobre el tiempo de transferencia, ya que se pueden obtener resultados de prácticamente todos los tiempos para cada valor de β .

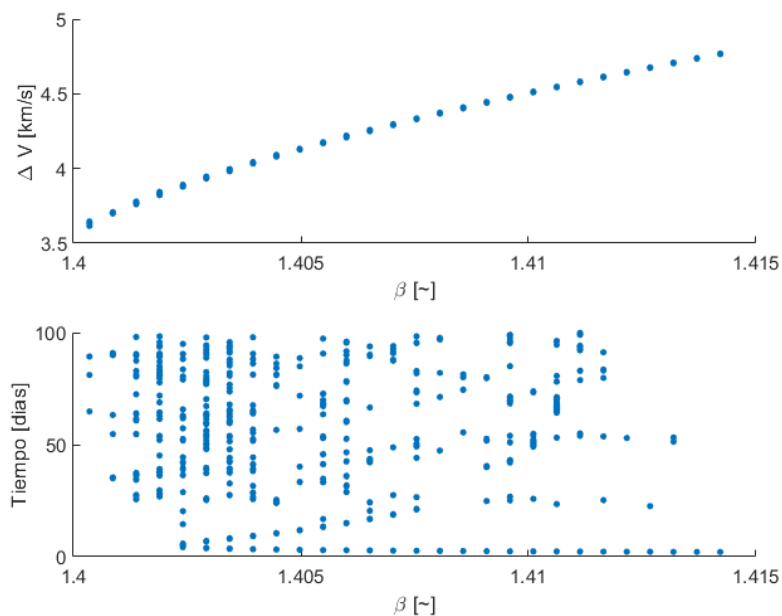


Figura 5.12: Efecto de la ΔV del primer impulso en el consumo y en el tiempo. La gráfica superior muestra el efecto directo en ΔV y la gráfica inferior en Δt

Sin embargo, en la imagen superior de la Figura 5.12 se observa claramente que existe una dependencia lineal y directa entre el valor β y el valor del consumo total. Esta relación es creciente, tal y como se ha visto con la Figura 5.10, de manera que se observa que el consumo crece linealmente con el aumento de la velocidad inicial.

Por lo tanto, se puede concluir que para hallar trayectorias de bajo consumo será imperativo utilizar valores de β muy bajos, y que cuanto menor sea β , menor será el consumo de la trayectoria encontrada, al menos en el intervalo estudiado.

Efecto de la posición del primer impulso

Al igual que hemos hecho con la velocidad inicial y el tiempo inicial, podemos analizar el efecto de la posición inicial en los resultados obtenidos. Esta posición se expresa a través del ángulo α , que representa el ángulo entre el vector Tierra-Satélite y el vector Tierra-Luna en el momento del primer impulso. Esta variable define la posición del satélite de manera inequívoca debido a la hipótesis de que éste se halla, inicialmente, en una órbita circular de aparcamiento, y por lo tanto, el radio es constante.

La Figura 5.13 muestra todos los resultados encontrados, con un código de colores representando el valor de la posición del satélite en el momento del primer impulso, referido por medio del ángulo α .

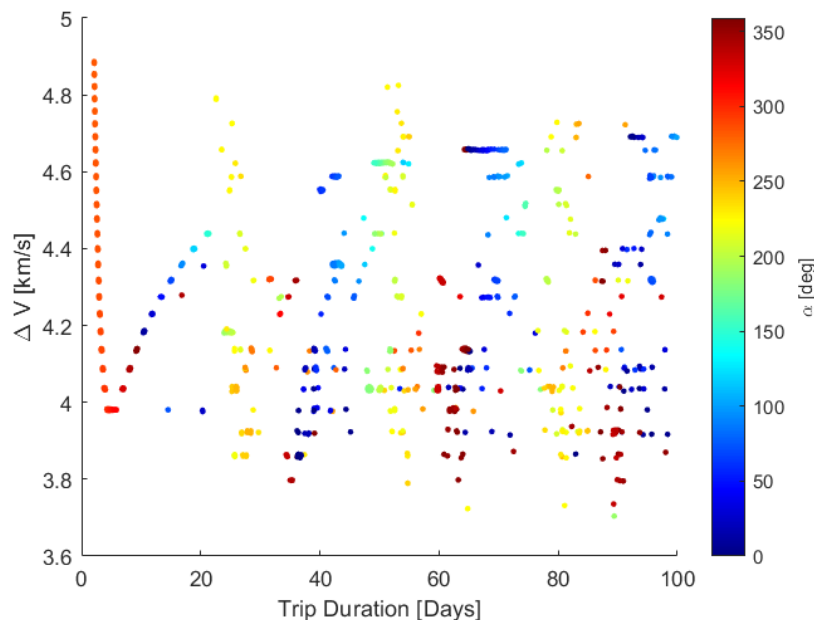


Figura 5.13: Efecto de la posición orbital (en el momento del primer impulso) en el consumo y en el tiempo

Se puede observar que para la zona de baja duración sí existe una dependencia con la posición, pero que para el resto del mapa de puntos no hay una relación directa entre la posición inicial y el tiempo de transferencia o el consumo. La relación de las trayectorias más corta con la posición inicial surge del tipo de trayectoria que representan, ya que son de transferencia directa. Por lo tanto, para que el satélite llegue a L4 con una transferencia directa, deben salir de un punto de la órbita de aparcamiento concreta. Por otro lado, las trayectorias que son de larga duración (mayor de 20 días), no presentan una relación directa entre la posición inicial y el consumo o el tiempo de trayectoria.

Es interesante analizar cuáles son las posiciones iniciales que más resultados otorgan. Al igual que lo mostrado en las gráficas de velocidad y tiempo de las secciones anteriores, la Figura 5.14 representa la probabilidad de

encontrar resultados según la posición de α , solo que en esta gráfica se muestra en coordenadas polares para facilitar la comprensión, definiendo el valor de la probabilidad según el tamaño del círculo. De esta manera, se observa que existen algunos ángulos concretos en los que no se ha encontrado ninguna trayectoria, mientras que hay otros ángulos en los que se hallan muchas.

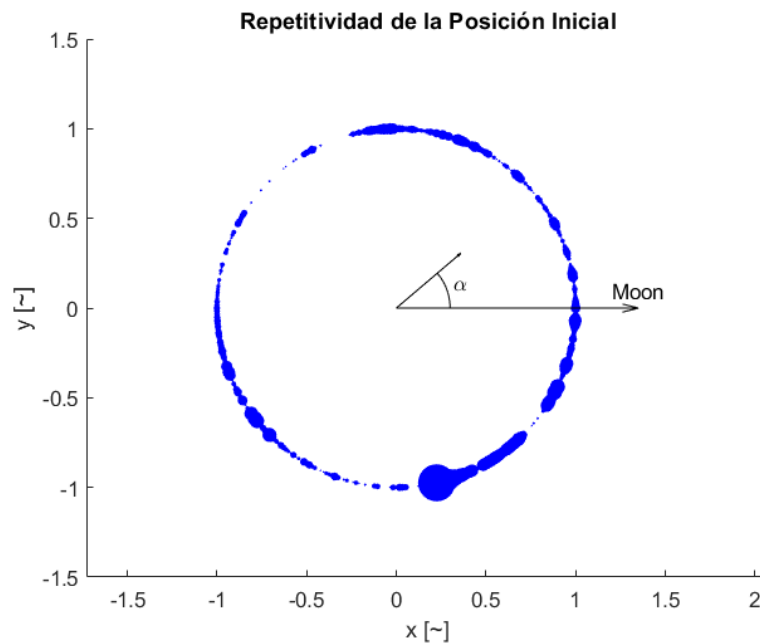


Figura 5.14: Repetitividad de la posición orbital (en el momento del primer impulso) en los resultados encontrados

Merecen especial mención los ángulos cercanos a los 283 grados, que tienen una probabilidad muy elevada de hallar trayectorias a L4. Este incremento local se debe al tipo de transferencias que se encuentran, de carácter directo. Estas trayectorias envían el satélite directamente a L4 sin que éste llegue a orbitar en torno a la Tierra, describiendo órbitas muy cercanas a la Transferencia de Hoffman. En la sección 5.4 se explicarán estas trayectorias en detalle, mostrando algunos ejemplos.

Al igual que con la velocidad y el tiempo, se muestra de manera individualizada el efecto de α sobre el consumo y el tiempo en la Figura 5.15

Se observa que no hay una dependencia directa entre la posición y el tiempo, así como un gran número de soluciones en torno a ángulos cercanos a 283 grados para tiempos bajos. Además, se aprecia un patrón lineal de dependencia entre la posición inicial y el tiempo, como se ve en la imagen inferior, en la que se pueden observar grupos de trayectorias en las que un aumento de α se corresponde a un aumento del tiempo necesario. Sin embargo, esta dependencia no es tan clara como la que se encontró al analizar la velocidad inicial en la Figura 5.12.

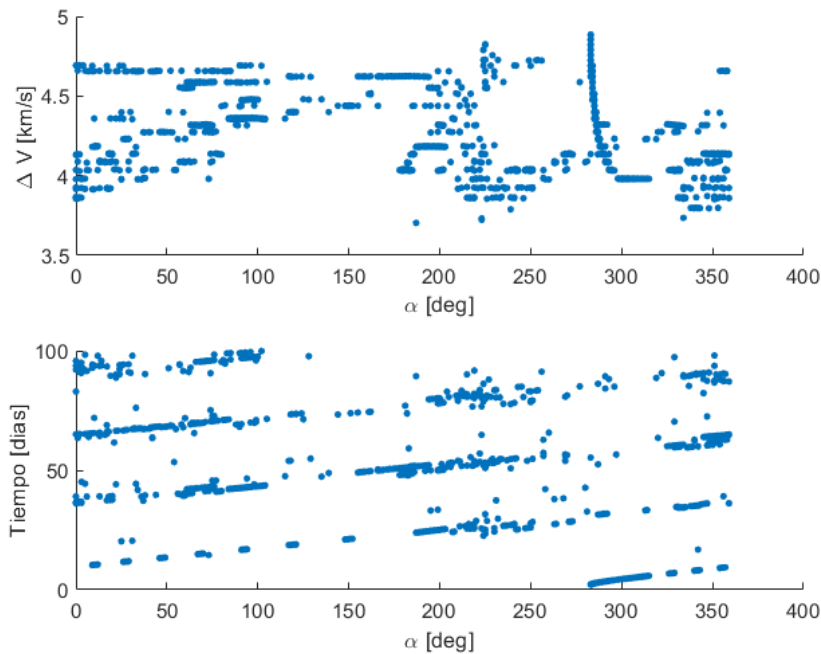


Figura 5.15: Efecto de la posición orbital (en el momento del primer impulso) en el consumo y en el tiempo. La gráfica superior muestra el efecto directo en ΔV y la gráfica inferior en Δt

5.3. Parámetros de llegada al punto L4

Velocidad de llegada a L4

En esta sección se analizará la velocidad del satélite en el momento en el que se aplica el segundo impulso. Tal y como se vio en la sección 3.4, el segundo impulso se efectúa en el momento en el que el satélite se encuentre más cerca al punto teórico de L4, siempre y cuando esta distancia sea menor a 0.01DU. La velocidad que presenta el satélite en este momento la denominamos “velocidad de llegada a L4”, y será un valor importante, ya que el segundo impulso tendrá que contrarrestar esta velocidad para asegurar que inmediatamente después la velocidad del satélite es nula (respecto a la Tierra). Por ello, el consumo del segundo impulso (ΔV_2) será igual a la velocidad de llegada a L4.

Como se ha visto anteriormente, el consumo total de la misión dependerá mayoritariamente del valor de β , pero también del valor de ΔV_2 . En la Figura 5.16 se muestra cómo varía el valor de ΔV_2 con las condiciones iniciales. Se observa que la velocidad de llegada a L4 no depende directamente de la posición inicial o del tiempo inicial, pero sí depende en gran manera de la velocidad inicial (β). Se comprueba por tanto que, a mayor β , mayor será la velocidad de llegada a L4.

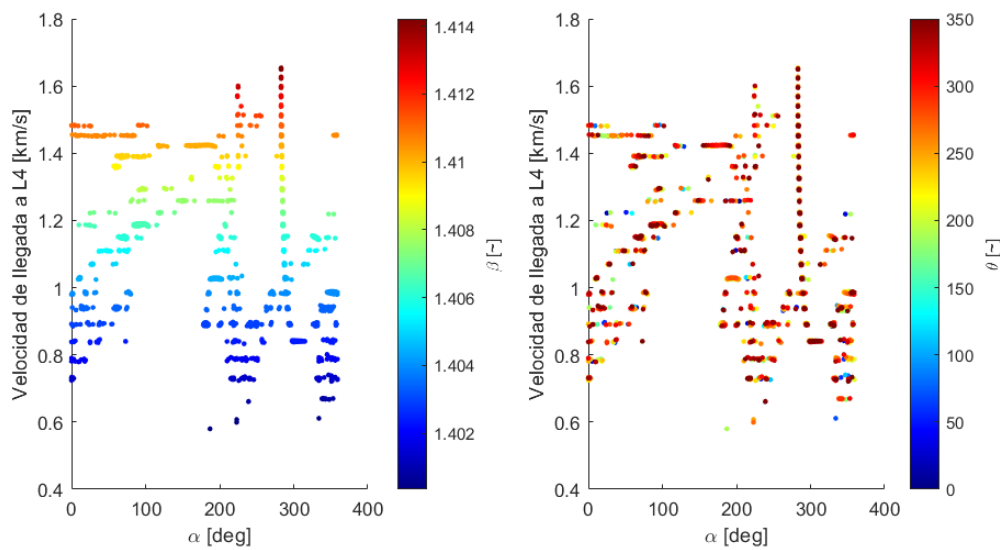


Figura 5.16: Velocidad de llegada al punto L4 según las condiciones iniciales. La gráfica de la izquierda muestra el efecto de α y β , mientras que la gráfica de la derecha muestra el efecto de α y θ .

Es posible analizar qué porcentaje de la velocidad total de la misión corresponde al primer impulso y cuánto al segundo. Para ello, se estudia el valor $\Delta V_2/\Delta V_T$, y se analiza su progresión con β . En la Figura 5.17 se muestra el valor de esta evolución.

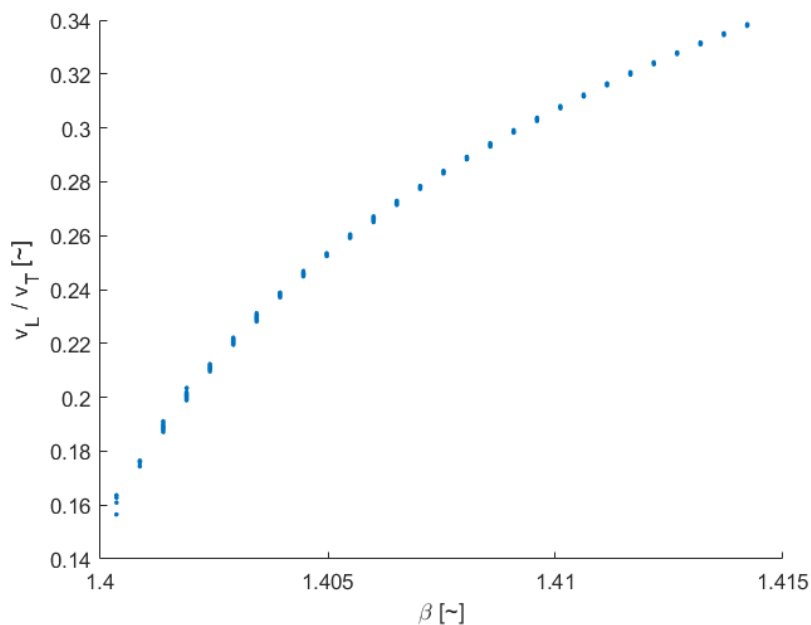


Figura 5.17: Proporción de la ΔV_T que corresponde a la velocidad de llegada a L4, según varía β

Se observa que a mayores velocidades iniciales, mayor porcentaje de consumo se debe al segundo impulso, pasando de representar un 16% para β

bajas a un 34 % para β altas. Este dato refuerza la relación tan directa que existe entre el consumo total y la velocidad inicial, debido a tres factores: primero, el consumo del primer impulso es directamente proporcional a β ; segundo, el porcentaje de consumo debido a este primer impulso es muy elevado (entre un 66 % y un 84 %); y en tercer lugar, el segundo impulso también es proporcional a β . De esta manera se justifica la fuerte dependencia del consumo total con el valor de β .

Se puede analizar cuál es la misión con menor velocidad de llegada a L4. Ésta será la que empiece con menor β , tal y como se ha visto, y por lo tanto, la transferencia con menor velocidad de llegada a L4 será precisamente la misión con menor consumo total, ya que ambos factores dependen directamente de β . Los detalles sobre la trayectoria de menor consumo se explicarán en la sección 5.4.

Distancia máxima durante la órbita

Una vez analizada la influencia de las condiciones iniciales sobre la trayectoria hasta el punto L4 y sobre la velocidad de llegada a L4, se puede analizar el comportamiento del satélite tras el segundo impulso. Este comportamiento no dependerá directamente de las condiciones iniciales, ya que el segundo impulso anula por completo la velocidad del satélite, y, por lo tanto, modifica drásticamente su energía. Así, el comportamiento del satélite después del segundo impulso dependerá únicamente de la posición en la que se produce el segundo impulso y, tal y como se vio en la sección 5.2, de la posición del Sol en ese instante.

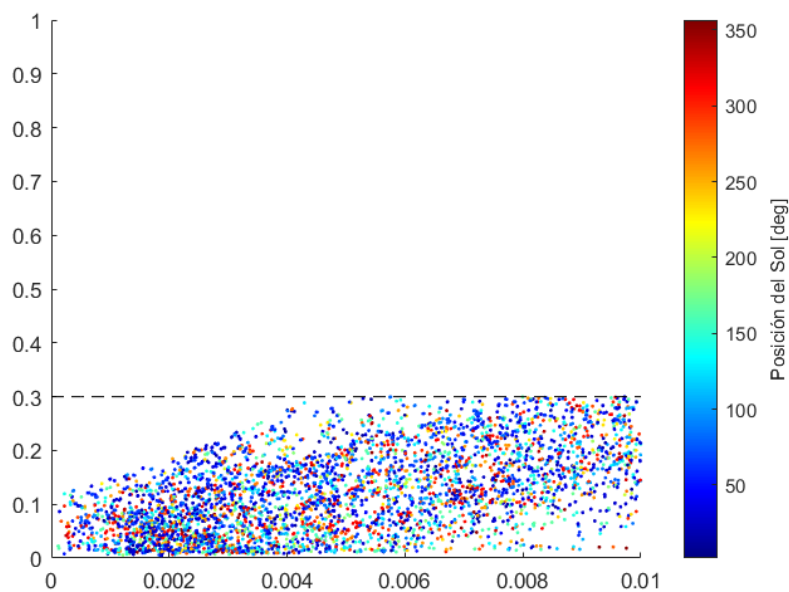


Figura 5.18: Distancia máxima al punto L4 durante la órbita en torno al punto L4, según la distancia al punto L4 en el momento del segundo impulso. El color de los puntos muestra el efecto de la posición del Sol.

A la hora de caracterizar la órbita en torno al punto L4, el factor que más nos interesa es la distancia máxima respecto al punto L4 durante la órbita, ya que esta distancia será la que no defina si el satélite sigue en órbita o no. En la Figura 5.18 se representa la distancia máxima durante la órbita con respecto a la distancia a la que se produjo el primer impulso. El color de cada punto define la posición del Sol en el momento del segundo impulso, medida como el ángulo entre el vector Tierra-Sol y el vector Tierra-Luna en dicho momento. La línea discontinua representa la limitación establecida de 0.3DU.

Se puede observar que, como regla general, la distancia máxima aumenta con la distancia inicial. Esto se evidencia porque la densidad de puntos en torno a las esquinas (es decir, en torno a la zona de alta distancia máxima con baja distancia inicial, o la zona de baja distancia máxima con alta distancia inicial) es mucho menor que en la zona central. La zona más poblada de puntos es la que representa una relación lineal entre ambas distancias. Sin embargo, a pesar de que esta región lineal sea la más poblada, se observa claramente que la nube de puntos engloba prácticamente la totalidad de la zona permitida (distancias máximas menores a 0.3DU). Esto es así a excepción de una pequeña zona “prohibida”, en la que la distancia máxima no puede superar determinado valor, que depende de la distancia inicial. Esta zona prohibida está definida matemáticamente por la siguiente expresión:

$$(R_{orb})_{max} < 0.12 + 39 \cdot R_{L4}, \tag{5.2}$$

donde $(R_{orb})_{max}$ es la distancia orbital máxima tras el segundo impulso, y R_{L4} es la distancia a la que se produce el segundo impulso respecto al punto L4.

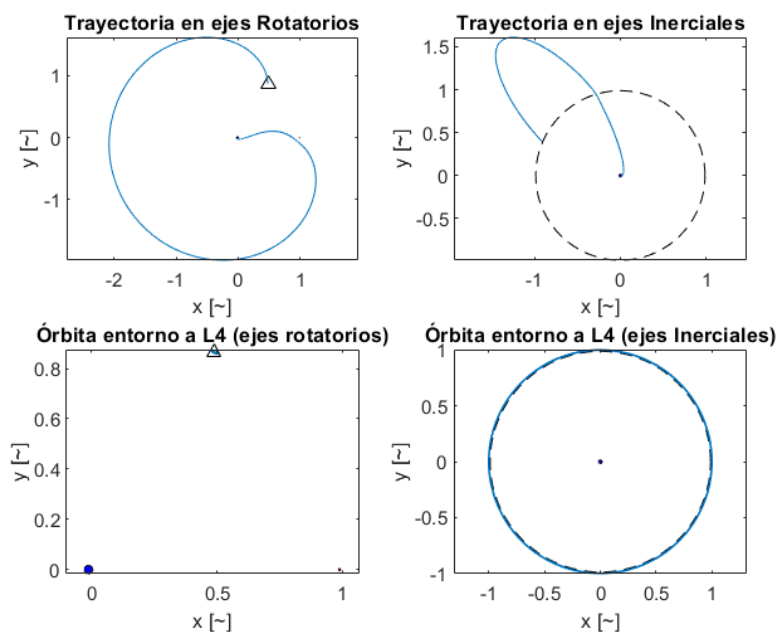


Figura 5.19: Órbita “MinDis1”, con la menor relación $(R_{orb})_{max} / R_{L4}$

Se puede observar que, debido a la presencia del Sol, existen órbitas que comienzan con una distancia inicial muy elevada, cercana a 0.01DU, pero mantienen la máxima distancia orbital por debajo de 0.02DU. Este es el caso de la trayectoria que se muestra en la Figura 5.19, que presenta la menor relación $(R_{orb})_{max} / R_{L4}$, con un valor de 1.87 (frente a los 30 de la media). Esta órbita, a pesar de comenzar la órbita en torno a L4 con una distancia de 3.767km (0.0098DU), mantiene su órbita por debajo de los 7.035km (0.02DU) en todo momento. Esta misión se ha nombrado “MinDis1”, y los datos sobre su posición inicial, consumo, tiempo, y distancias respecto a L4 aparecen en la Tabla 5.3

Con los datos obtenidos, es posible también analizar el caso de la misión que supone una menor distancia orbital en torno al punto L4. Este tipo de misiones serían muy útiles para aquellos casos en los que la posición en torno a L4 sea un requisito importante que deba mantenerse lo más bajo posible. Para estos casos, se buscarán trayectorias que posicionen el satélite lo más cerca posible de L4, a fin de reducir la distancia inicial de la órbita. Además, habrá que comprobar que durante el periodo en que se encuentra orbitando en torno a L4, la presencia solar no aumenta demasiado la distancia orbital. Se ha categorizado con el nombre “MinDis2” a la trayectoria que permite la menor distancia orbital en torno al punto L4, consiguiendo que el satélite no se aleje del punto L4 más de 1.803km en todo el intervalo estudiado.

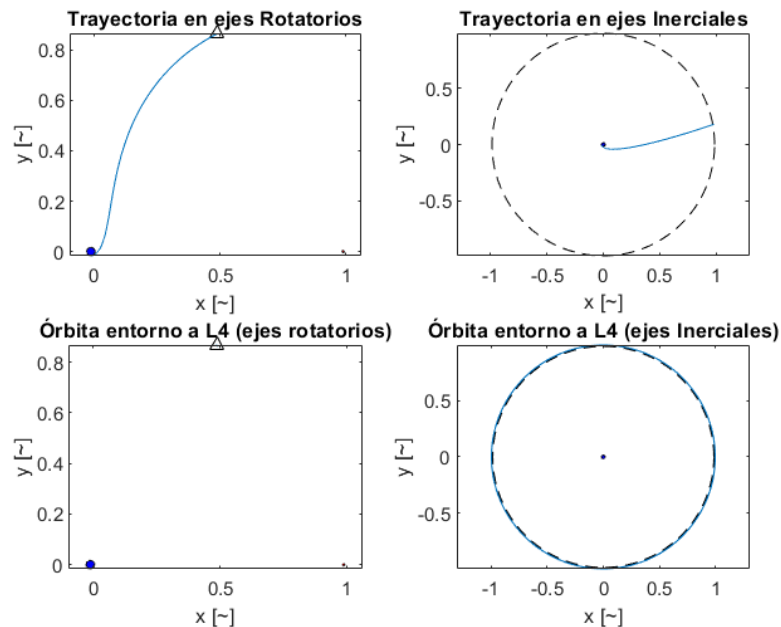


Figura 5.20: Órbita con menor distancia al punto L4 durante la órbita en torno al punto L4 (MinDis2)

La Figura 5.20 muestra esta trayectoria, así como la órbita en torno a L4. Esta transferencia puede ser de especial interés, ya que es el resultado que menos varía su posición relativa a la Tierra una vez colocada en órbita en

torno a L4. Esto puede ser de gran utilidad en misiones de observación, por ejemplo, donde se desea la mayor estabilidad posible en la posición respecto a la Tierra.

Es interesante que, a pesar de ser la trayectoria que menor distancia orbital presenta, no es la que conlleva menor distancia respecto a L4 en el momento del segundo impulso (R_{L4}), ya que presenta una distancia de 730km, mientras que la trayectoria con menor R_{L4} presenta una distancia inicial de 45km (que posee una $(R_{orb})_{max}$ de 8.558km). Esta última trayectoria (la de menor distancia inicial) la hemos denominado “MinDis3”, y se muestra también en la Tabla 5.3 a fin de comparar los resultados obtenidos por las otras dos trayectorias estudiadas.

La Tabla 5.3 muestra los parámetros de las tres órbitas estudiadas en esta sección: en primer lugar, la órbita “MinDis1” con la menor relación $(R_{orb})_{max}/R_{L4}$, en segundo lugar la órbita “MinDis2” con la menor $(R_{orb})_{max}$, y en tercer lugar la órbita “MinDis3”, con la menor R_{L4} .

Tabla 5.3: Parámetros de tres trayectorias de Baja Distancia Orbital en torno a L4. “MinDis1” es la órbita con menor relación $(R_{orb})_{max}/R_{L4}$, “MinDis2” es la órbita con menor $(R_{orb})_{max}$ y “MinDis3” es la órbita con menor R_{L4}

Parámetro	MinDis1	MinDis2	MinDis3	Units
α	220	283	48	deg
β	1,4060	1,4122	1,4055	~
θ	70	260	320	deg
ΔV_L	1,1492	1,5421	1.1092	km/s
ΔV_T	4,3173	4,7584	4,2735	km/s
t_{L4}	28,83	2,23	13.41	días
R_{L4}	3.767	730	45	km
$(R_{orb})_{max}$	7.035	1.803	8.558	km

5.4. Análisis de Trayectorias específicas

Trayectorias externas

En muchos estudios de la literatura sobre trayectorias de baja energía, se hace una distinción entre las trayectorias externas e internas, ya que presentan propiedades diferentes [9]. Por tanto, parece lógico analizar esta diferenciación en nuestros resultados. Tal y como se vio en la sección 3.6, la disyuntiva entre una trayectoria externa o una trayectoria interna se establece a través de la distancia máxima que alcanza el satélite respecto a la Tierra en algún momento de su trayectoria. Esta distancia máxima se suele establecer en aproximadamente 4DU [7].

Por lo tanto, es posible analizar qué trayectorias superan esa distancia en los resultados obtenidos. La Figura 5.21 muestra en rojo las trayectorias ex-

ternas (con distancias mayores a 4DU) y en negro las trayectorias internas (con distancias menores a 4DU).

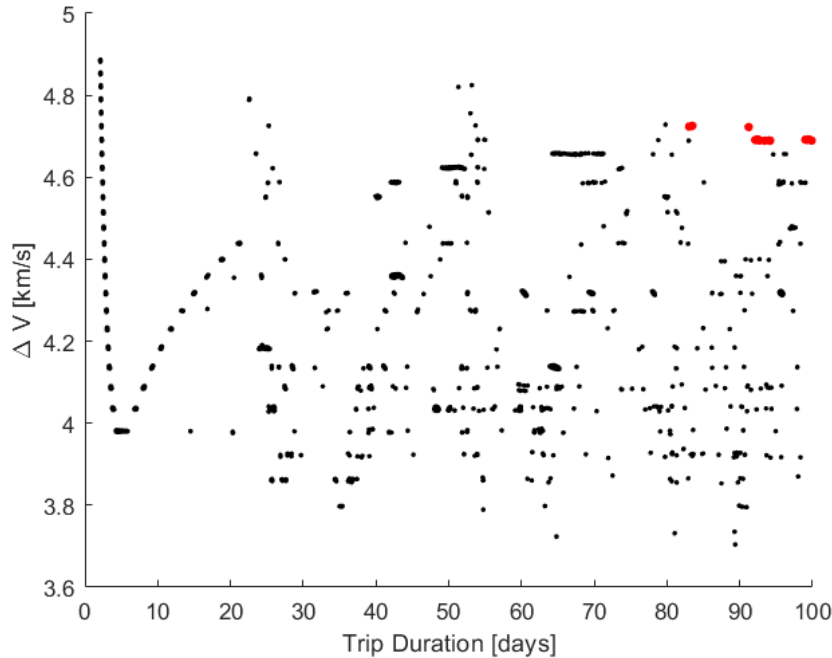


Figura 5.21: Conjunto de trayectorias con una distancia a la Tierra mayor a 4DU (en rojo), comparadas con el resto de trayectorias encontradas (en negro).

Se puede observar que el número de trayectorias externas encontradas es muy inferior al número de trayectorias internas. De las 4.865 órbitas calculadas en este trabajo, solamente 36 de ellas presentan una distancia mayor a 4DU de la Tierra, lo cual representa un 0.75% de las transferencias encontradas.

Además, se puede observar que todas las trayectorias externas encontradas se localizan en una zona muy concreta del mapa: la zona de muy larga duración (mayores a 80 días) y de muy alto consumo (mayor a 4.6 km/s). El primer factor (larga duración) es un resultado esperado, ya que el mero hecho de alcanzar la distancia estudiada y volver a la posición de L4 requiere recorrer como mínimo 7DU (casi tres millones de kilómetros), que obviamente, requerirá mucho tiempo. Por otro lado, alcanzar estas distancias también supondrá un impulso inicial muy elevado, y por lo tanto, un consumo muy alto.

La Figura 5.22 muestra la trayectoria con mayor separación respecto a la Tierra durante su trayectoria. Se puede observar la gran distancia que alcanza esta órbita, y el hecho de que no llega a realizar una elipse completa en torno a la Tierra. Se observa que este tipo de transferencias solo pueden alejarse de la Tierra, alcanzar dicha separación, y volver directamente, coincidiendo con el punto L4 a la vuelta, ya que una trayectoria con mayor recorrido que este conllevaría más de 100 días.

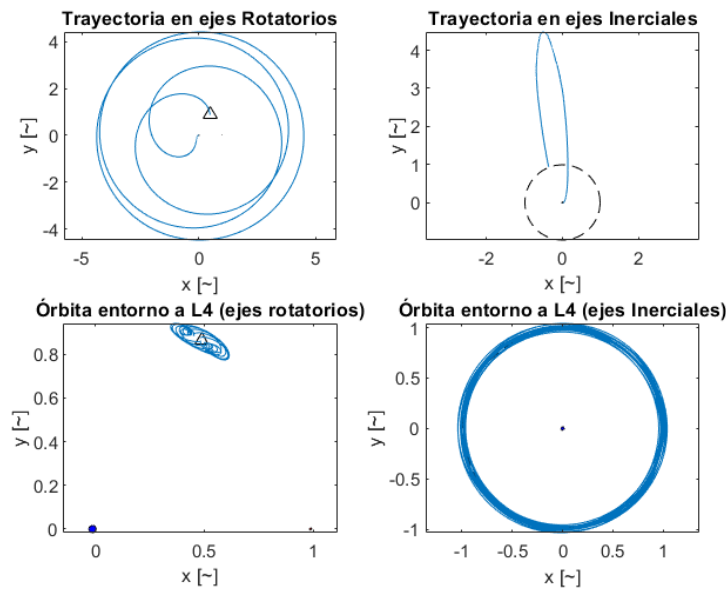


Figura 5.22: Trayectoria con la mayor distancia a la Tierra

La Tabla 5.4 muestra los parámetros característicos de la órbita con mayor distancia respecto a la Tierra, que es de 4.508DU (aproximadamente 1.733.000 km).

Tabla 5.4: Parámetros de la trayectoria con mayor distancia respecto a la Tierra

Parámetro	Valor
α	102 deg
β	1,4111
θ	160 deg
ΔV_L	1,481 km/s
ΔV_T	4,690 km/s
t_{L4}	99,88 días
R_{L4}	3.794 km
$(R_{orb})_{max}$	59.680 km

Trayectorias de baja duración

En esta sección se analizarán el grupo de trayectorias definidas como “Trayectorias de baja duración”. Estas transferencias son de especial interés, ya que representan las operaciones que menor tiempo requieren para trasladar el satélite desde la órbita aparcamiento hasta las proximidades del punto L4.

Para definir las órbitas de baja duración nos basamos en la Figura 5.2, que establece claramente las 3 zonas diferenciadas de las que se habló en la sección 5.1, definiendo el límite temporal de estas trayectorias en 20 días. La Figura 5.23 muestra el detalle de estas trayectorias, representando ΔV

con respecto al tiempo de trayectoria, estableciendo el límite temporal en 20 días. En la gráfica se muestra en la barra de colores el efecto de la posición solar en el momento del primer impulso (θ).

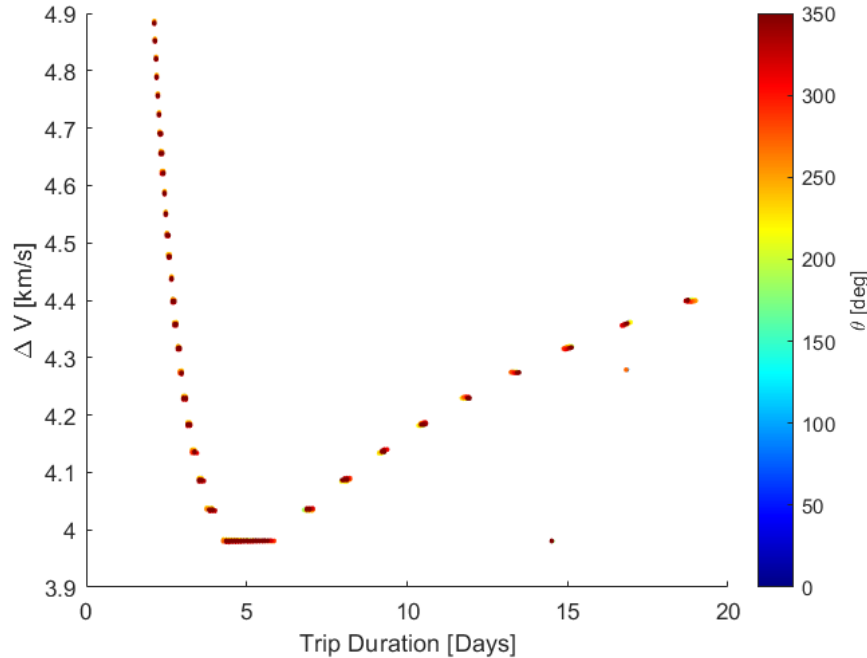


Figura 5.23: Efecto de la posición del Sol (θ) en las órbitas de baja duración

Se puede observar que las trayectorias encontradas engloban velocidades que presentan como límite inferior un ΔV levemente inferior a 4 km/s, y el límite superior levemente inferior a 4.9 km/s. Las trayectorias de menor duración (en torno a los 2 días) son las que más consumen, con un ΔV cercano a los 4.9 km/s. Se observa que al aumentar el tiempo de trayectoria, baja drásticamente el consumo. Esta reducción de consumo al aumentar el tiempo de trayectoria presenta una progresión de aproximadamente -0.5 km/s por cada incremento de un día en la trayectoria, lo cual significa una gran reducción de consumo a cambio de una penalización muy pequeña de tiempo (con respecto al espectro estudiado de 100 días).

Esta progresión de reducción de consumo tiene un límite, a partir del cual, aumentar el tiempo de trayectoria aumenta el consumo en lugar de reducirlo. Por este motivo, se puede observar que existe un grupo de trayectorias de mínimo consumo para trayectorias de baja duración.

Es importante destacar que en la Figura 5.23 se muestra un alto número de trayectorias por cada punto representado, debido a la resolución de la imagen. Cada punto de la gráfica muestra un grupo de trayectorias (normalmente más de 20 trayectorias por punto). Estas trayectorias son muy parecidas, con unas diferencias de consumo y tiempo que suelen ser de aproximadamente 0.01 km/s y 0.2 días, de manera que en la gráfica global son indistinguibles. La Figura 5.24 muestra este detalle.

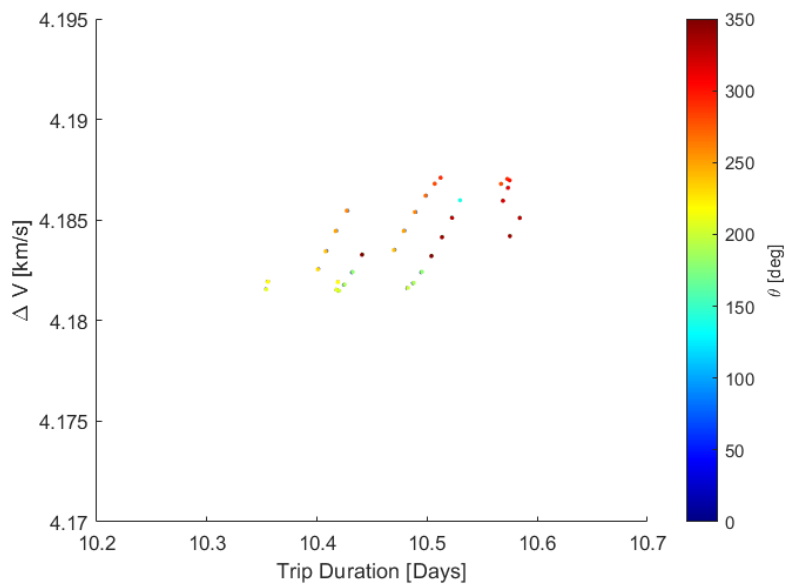


Figura 5.24: Detalle del efecto de la posición del Sol (θ) en las órbitas de baja duración

La Figura 5.24 muestra un único “punto” de la gráfica 5.23, en el que se observan 26 trayectorias diferentes, con una ΔV y un Δt muy similar, pero con unas condiciones iniciales muy diferentes. La gráfica muestra una escala de colores según la posición del Sol en el momento del primer impulso. Se observa, por tanto, que dentro de cada “punto” se puede hallar la trayectoria de menor consumo para cada punto analizado.

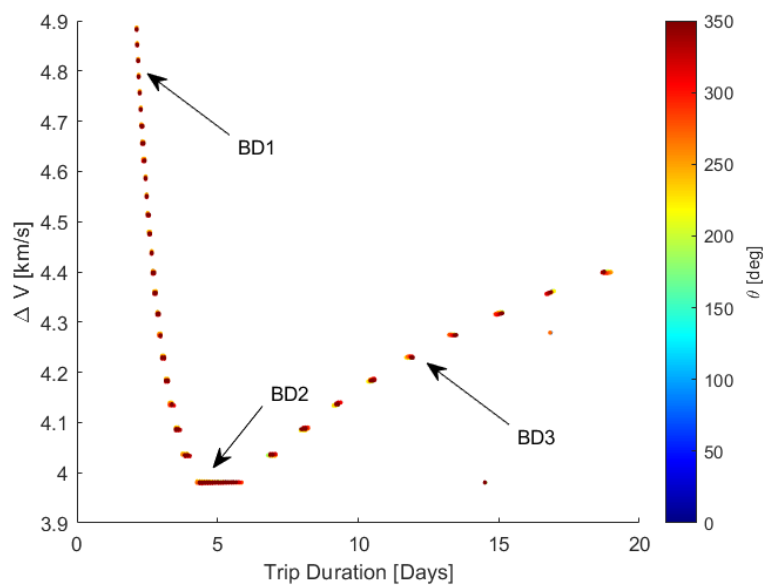


Figura 5.25: Trayectorias de baja duración para $\theta = 0deg$ y tiempos menores a los 22 días. Se especifican tres puntos de estudio (BD1, BD2 y BD3)

La Figura 5.25 muestra 3 puntos de baja duración característicos, a fin de analizar la diferencias entre los tres tipos de trayectorias de baja duración. En primer lugar, se muestra el punto BD1 que representa una trayectoria de muy baja duración pero alto consumo. En segundo lugar, el punto BD2, muestra trayectorias de mínimo consumo. En tercer lugar el punto BD3 muestra trayectorias con un tiempo mayor al de BD2, pero un consumo menor al BD1.

La Figura 5.26 muestra las trayectorias estudiadas (BD1, BD2 y BD3) en azul, rojo y amarillo respectivamente. Se muestran dos gráficas, la de la izquierda en ejes rotatorios (solidarios con el movimiento de la Luna) y a la derecha se representan las trayectorias en ejes inerciales (centrados en la Tierra). La Tierra se representa como un círculo azul (en la coordenada [0,0]), el punto L4 se representa como un triángulo, y el movimiento de la Luna (y por lo tanto, del punto L4) en ejes inerciales se muestra con la línea discontinua de la gráfica de la derecha.

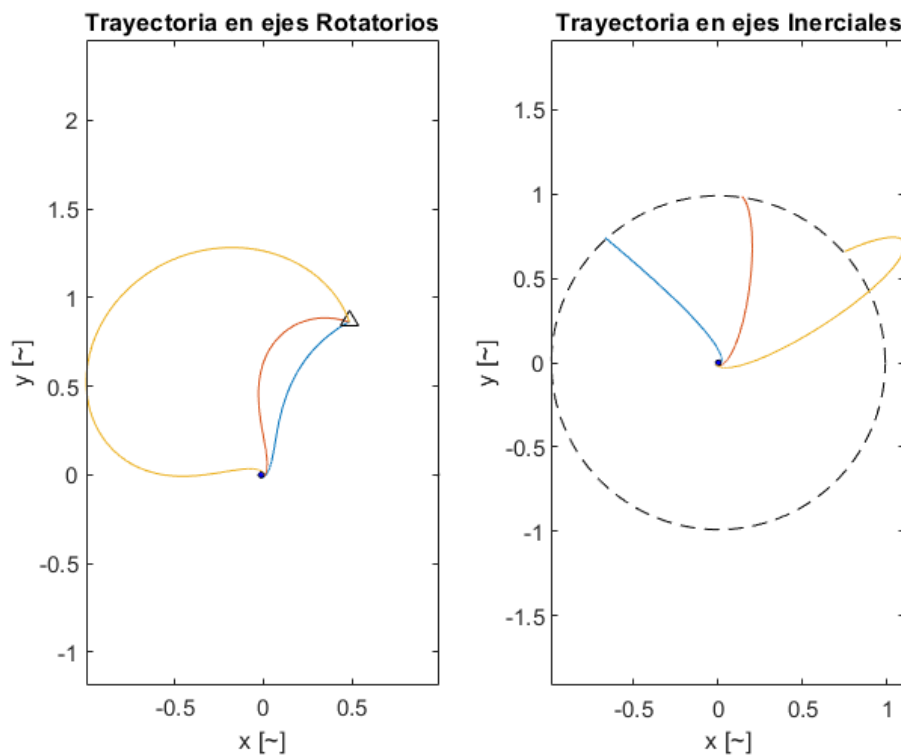


Figura 5.26: Ejemplos de trayectorias de baja duración (BD1 en azul, BD2 en rojo y BD3 en amarillo)

Se puede observar que el tipo de trayectoria es muy similar en los tres casos: se tratan de órbitas elípticas que cruzan el punto L4. La trayectoria BD1, al tener más energía (mayor ΔV), muestra una órbita más elíptica que cruza el punto L4 lejos del apogeo de la órbita. La trayectoria BD2 es una órbita elíptica que cruza el punto L4 en un punto muy cercano al apogeo de la órbita, y la trayectoria BD3 es una órbita elíptica que cruza el punto L4 en

un punto posterior al apogeo de la órbita (cuando el satélite se encuentra en dirección a la Tierra).

El análisis de estas 3 trayectorias nos da información sobre el motivo del consumo de cada tipo de órbita. Las transferencias de menor tiempo presentan órbitas elípticas con mucha energía en el que la trayectoria cruza el punto L4 antes de llegar al apogeo de la órbita. Por ello, la energía de la órbita es mayor de la necesaria. Por otro lado, las órbitas similares a la BD3 estudiada, también presentan órbitas elípticas de mayor tamaño del necesario, solo que a diferencia de las órbitas de menor duración el cruce con el punto L4 se produce después de haber alcanzado el apogeo de la órbita. Sin embargo, las trayectorias de menor consumo presentan órbitas elípticas de un tamaño del eje mayor muy cercano a 1DU (Distancia entre la Tierra y el punto L4), de manera que se cruzan con el punto L4 en una zona muy cercana al apogeo de la órbita elíptica, de manera que el tamaño de la órbita (y por tanto, su energía) es la menor posible, para una trayectoria directa.

Es importante mencionar que estas trayectorias son directas y no se percibe ningún tipo de efecto debido a la presencia lunar o solar. Estas transferencias de baja duración son, en realidad, órbitas elípticas que cruzan el punto L4, y por lo tanto, desde un punto de vista estricto, no deberían considerarse “trayectorias de baja energía”, ya que no se está haciendo uso del fenómeno físico de la asistencia gravitacional lunar, ni solar (tal y como se vio en el apartado 1.9). Sin embargo, es interesante estudiar este tipo de trayectorias a fin de poder compararlas con los resultados que hemos obtenido en el apartado de Trayectorias de Bajo Consumo (que se estudiarán en la sección 5.4).

En este grupo de trayectorias de baja duración se pueden identificar dos soluciones características que presentan puntos óptimos de estudio: es el caso de la trayectoria de menor duración y la trayectoria de menor consumo de menos de 20 días de duración.

La primera (Trayectoria de Menor Duración) es interesante ya que muestra la manera más rápida de llegar al punto L4. Esta trayectoria es la más energética de todas las estudiadas, y en realidad no responde a una órbita elíptica muy energética (como era el caso de BD1), sino que presenta una órbita parabólica. Esto se puede comprobar al estudiar la velocidad inicial de la órbita, que es $\beta = \sqrt{2}$, lo cual representa una órbita de escape terrestre. Por lo tanto, la manera más rápida de llegar al punto L4 es colocando al satélite en una órbita parabólica de escape terrestre que cruce el punto L4. Esta trayectoria tendrá un consumo muy elevado, no solamente por el alto incremento de velocidad necesario en el primer impulso a fin de entrar en una órbita parabólica, sino además, por el alto ΔV_L que habrá que proporcionar en el segundo impulso a fin de anular la energía de la órbita parabólica. La Figura 5.27 muestra la trayectoria de menor duración posible.

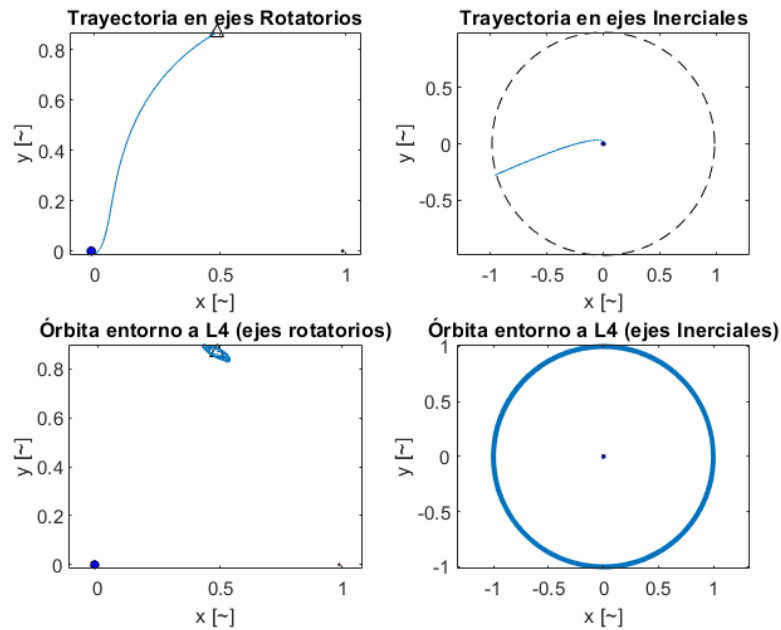


Figura 5.27: Trayectoria de mínima duración (MinDur1)

La Tabla 5.5 muestra los datos de la trayectoria de menor duración, a la que se ha denominado “MinDur1”. Se puede observar que el valor de β es de 1,4142 (veocidad de escape terrestre). El consumo total (medido como el incremento de velocidad debido a ambos impulsos) es de 4,883 km/s, presentando el valor más elevado de todos los estudiados. El tiempo necesario, por otro lado, es de únicamente 2,12 días, siendo el menor tiempo encontrado en nuestra simulación.

Tabla 5.5: Parámetros más característicos de la trayectoria de menor duración (MinDur1)

Parámetro	Valor
α	283 deg
β	1,4142
θ	100 deg
ΔV_L	1,151 km/s
ΔV_T	4,883 km/s
t_{L4}	2,12 días
R_{L4}	1.076 km
$(R_{orb})_{max}$	25.644 km

En segundo lugar, se puede estudiar la trayectoria de menor consumo con tiempos inferiores a 20 días, que hemos denominado “MinDur2”. En la Figura 5.28 se muestra esta trayectoria. Se observa que la trayectoria responde a una órbita elíptica en el que el satélite cruza el punto L4 en una zona muy cercana al apogeo de la órbita.

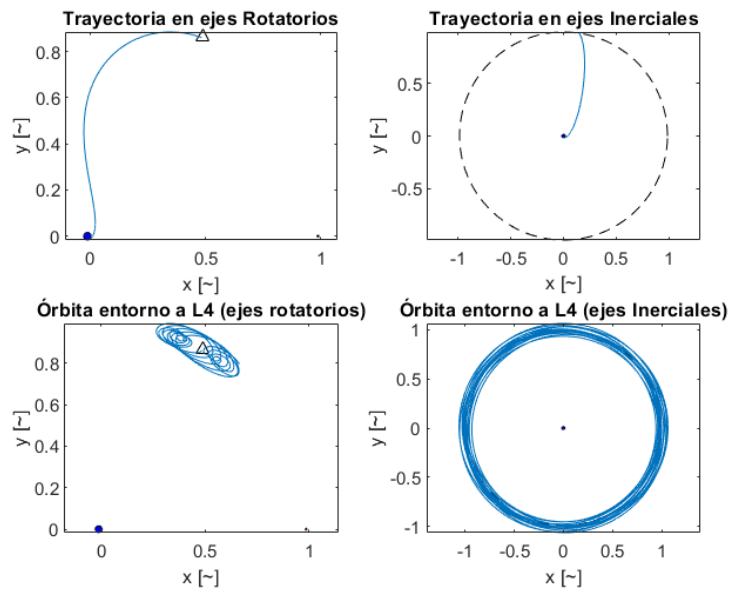


Figura 5.28: Trayectoria de mínimo consumo para tiempos menores a 20 días (MinDur2)

La Tabla 5.6 muestra los valores de esta trayectoria “MinDur2”. Se observa que el consumo total de la operación es de 3,979 km/s (casi 1 km/s menos que la trayectoria de menor duración), mientras que el tiempo requerido solo ha aumentado hasta los 4,36 días. Por lo tanto, se puede establecer que la ganancia debido al consumo justifica el pequeño aumento de tiempo, colocando esta órbita como la principal candidata para Trayectorias de Baja Duración, a no ser que el tiempo de trayectoria sea un requisito prioritario.

Tabla 5.6: Parámetros más característicos de la órbita de menor consumo con tiempos menores a 20 días (MinDur2)

Parámetro	Valor
α	299 deg
β	1,4024
θ	300 deg
ΔV_L	0,839 km/s
ΔV_T	3,979 km/s
t_{L4}	4,36 días
R_{L4}	2.499 km
$(R_{orb})_{max}$	92.525 km

Por lo tanto, se puede afirmar que si se busca una trayectoria de baja duración (menor a 20 días) para transportar un satélite desde una órbita aparcamiento terrestre de 166 km de altitud hasta el punto L4 de Lagrange, la mejor opción es la trayectoria presentada en la Tabla 5.6, ya que alcanza el punto L4 en tan solo 4,36 días con un consumo total de 3,979 km/s. La Tabla 5.6 muestra el resto de datos característicos de esta órbita, como las

condiciones iniciales del satélite y la distancia orbital en torno al punto L4 una vez en órbita.

Trayectorias de bajo consumo

A continuación se estudian en detalle las Trayectorias de Bajo Consumo. Estas trayectorias, tal y como se definió en la sección 5.1, son aquellas que requieren un consumo inferior a $\Delta V_T = 3,9 km/s$. La Figura 5.29 muestra todas las trayectorias de bajo consumo encontradas. Tal y como se observa en dicha figura, este bajo consumo se obtiene a cambio de duraciones elevadas, superiores a los 20 días (límite superior de las Trayectorias de Baja Duración).

Tal y como se muestra en la Figura 5.29, existe una correlación entre la disminución de consumo y el aumento de la duración del viaje, de manera que las trayectorias de menor consumo se producen con las mayores duraciones. Debido a los requisitos de una misión, es posible que la operación requiera un límite temporal preestablecido, de manera que aquellas trayectorias de menor consumo (y mayor duración) se vuelvan prohibitivas. Por ello, se estudiarán 4 trayectorias diferentes, según la duración del viaje. Cada una de estas trayectorias estudiadas presentarán el menor consumo posible para determinado límite temporal. Denominaremos a estas cuatro trayectorias BC1, BC2, BC3 y BC4. Estas trayectorias están señaladas en la gráfica 5.29.

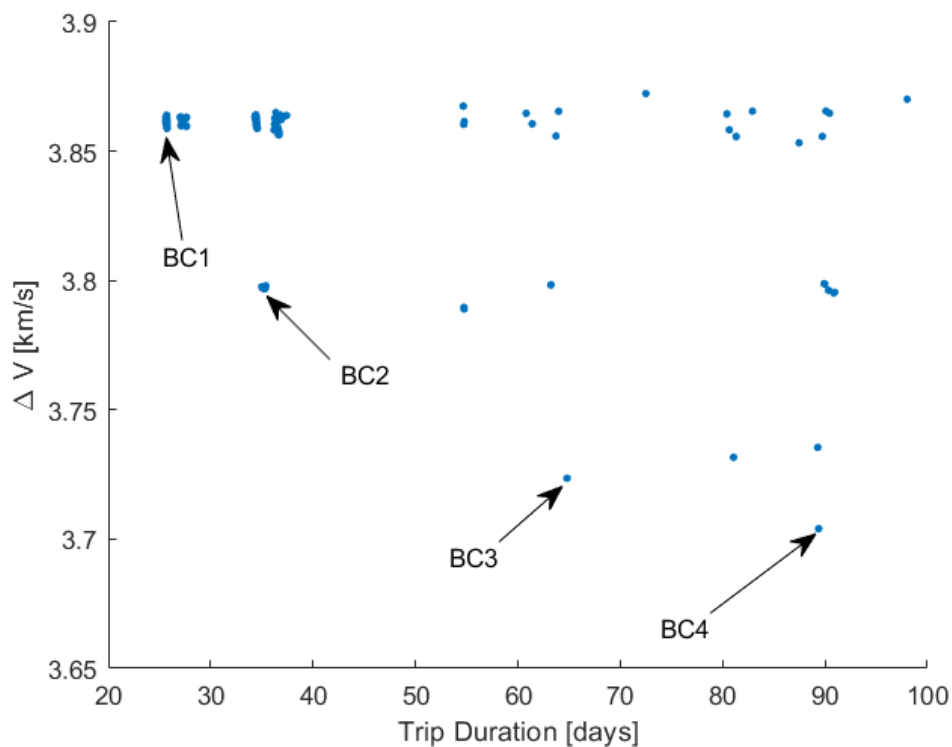


Figura 5.29: Conjunto de trayectorias de bajo consumo. Se etiquetan 4 trayectorias concretas con BC1, BC2, BC3, y BC4

Trayectoria de Bajo Consumo BC1

En primer lugar se muestra la trayectoria denominada BC1. En la Figura 5.30 se muestra esta trayectoria en detalle. En las dos imágenes superiores de la figura se observa que el satélite ha experimentado una asistencia gravitacional por parte de la Luna. El satélite realiza una órbita elíptica en torno a la Tierra, acercándose mucho a la Luna, la cual produce un aumento de energía en el satélite. De esta forma, en la siguiente órbita elíptica en torno a la Tierra, el satélite alcanza el punto L4, habiendo requerido menos energía que las órbitas directas que se han visto en la sección de Trayectorias de Baja Duración. Debido a la necesidad de la asistencia gravitacional lunar, el satélite requiere realizar dos órbitas completas en torno a la Tierra, lo cual aumenta mucho la duración del trayecto.

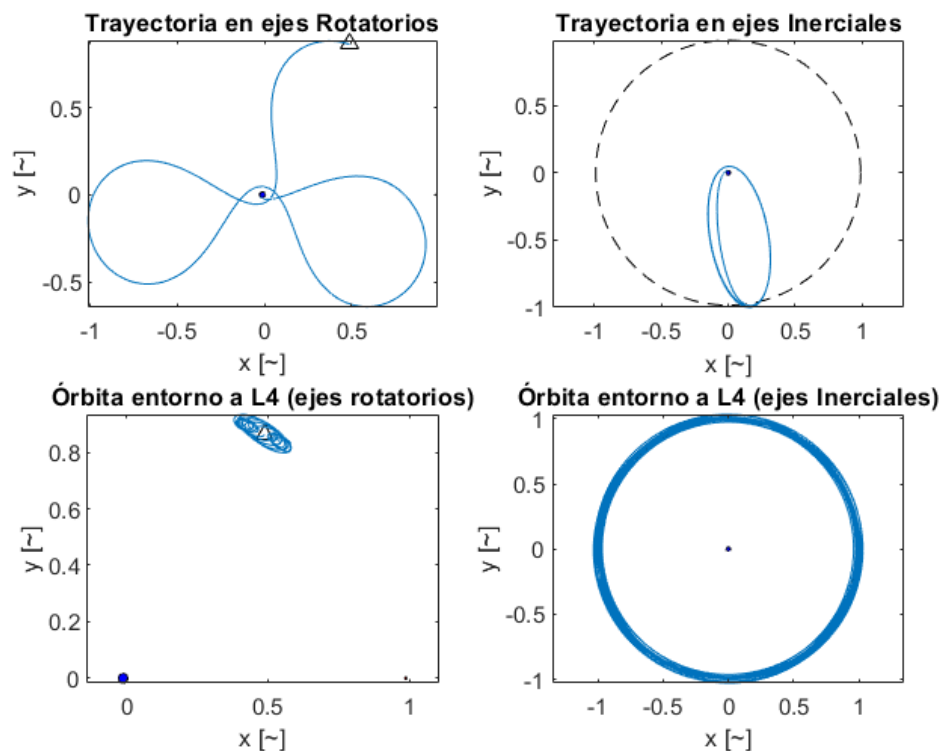


Figura 5.30: Trayectoria del punto etiquetado como BC1

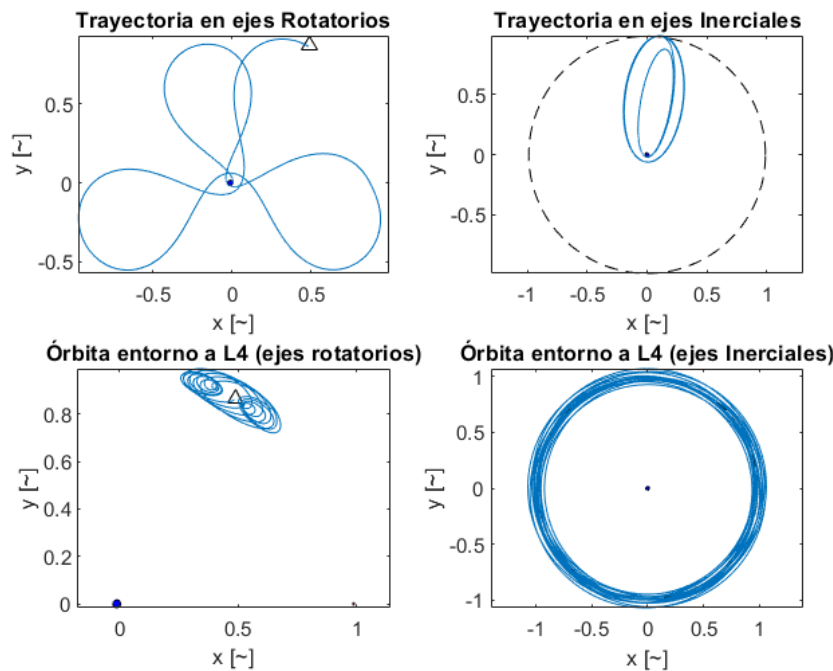
Esta trayectoria requiere un consumo menor que aquella de menor consumo en las trayectorias de baja duración (3,859 km/s en contraste con los 3,979 km/s de la trayectoria de menor consumo con baja duración). Esta reducción de consumo se obtiene a cambio de un aumento considerable de duración del viaje, subiendo hasta aproximadamente los 25 días. Esta trayectoria se puede establecer como la trayectoria de menor consumo para duraciones inferiores a un mes. En la Tabla 5.7 se muestran los datos más característicos de la trayectoria BC1.

Tabla 5.7: Parámetros más característicos de la trayectoria BC1 (menor consumo para tiempos inferiores a los 30 días)

Parámetro	Valor
α	219 deg
β	1,4014
θ	220 deg
ΔV_L	0,727 km/s
ΔV_T	3,859 km/s
t_{L4}	25,74 días
R_{L4}	1.166 km
$(R_{orb})_{max}$	46.035 km

Trayectoria de Bajo Consumo BC2

La trayectoria de bajo consumo BC2 es muy similar a la anterior. En la Figura 5.31 se muestra esta trayectoria en detalle. En las imágenes superiores se puede observar que, al igual que con la trayectoria anterior, el satélite recorre una serie de órbitas elípticas en torno a la Tierra, experimentando una asistencia gravitacional lunar. Sin embargo, en este caso, además de experimentar una asistencia gravitacional lunar, también se ve afectada por una asistencia gravitacional terrestre que aumenta aún más su energía, de manera que el consumo requerido para alcanzar el punto L4 es menor que en el caso de la trayectoria BC1. A cambio, esta trayectoria requiere 3 órbitas completas en torno a la Tierra, de manera que el tiempo requerido es considerablemente mayor, subiendo hasta los 35 días.

**Figura 5.31:** Trayectoria del punto etiquetado como BC2

La Tabla 5.8 muestra los datos más característicos de la trayectoria BC2. Se observa que el consumo de esta trayectoria es de 3,797 km/s. Esta trayectoria se puede establecer como la trayectoria de menor consumo para duraciones inferiores a 50 días.

Tabla 5.8: Parámetros más característicos de la trayectoria BC2 (menor consumo para tiempos inferiores a los 50 días)

Parámetro	Valor
α	339 deg
β	1,4009
θ	260 deg
ΔV_L	0,6689 km/s
ΔV_T	3,797 km/s
t_{L4}	35,05 días
R_{L4}	2.421 km
$(R_{orb})_{max}$	94.698 km

Trayectoria de Bajo Consumo BC3

La Figura 5.32 muestra la trayectoria BC3 en detalle. Se puede observar que el movimiento de este satélite es mucho más complejo que en los casos anteriores.

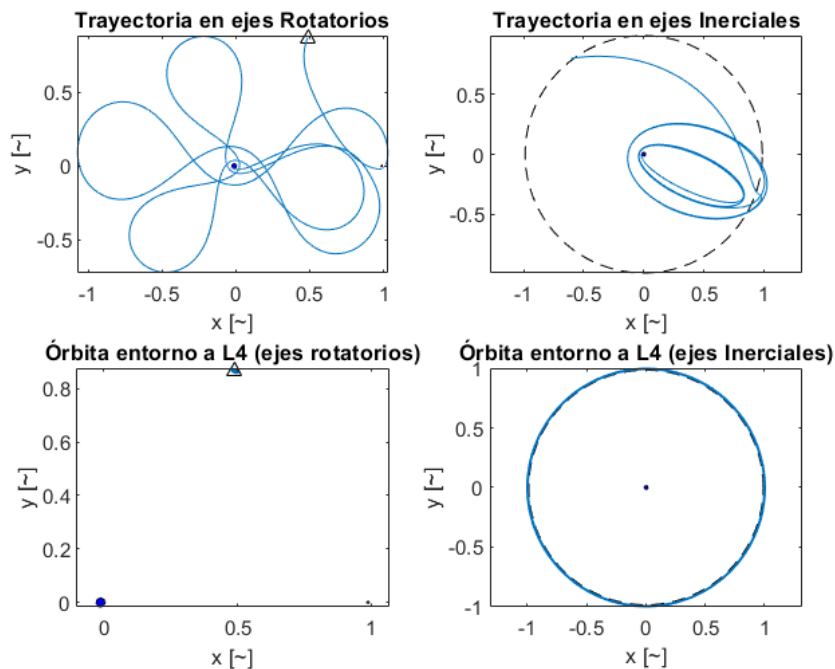


Figura 5.32: Trayectoria del punto etiquetado como BC3

Se puede observar que el satélite experimenta hasta tres asistencias gravitacionales lunares, que aumentan el tamaño de la órbita elíptica del satélite de manera muy considerable. También se aprecia que en la última órbita,

el satélite pasa tan cerca de la Luna que la asistencia gravitacional no aumenta la energía del satélite únicamente, sino que altera completamente la órbita del satélite. Tras esta última asistencia gravitacional lunar, el satélite viaja directamente hacia el punto L4 sin estar sujeto a una órbita elíptica en torno a la Tierra.

Por otro lado, se observa en las dos imágenes inferiores de la Figura 5.32 que la órbita en torno a L4 después del segundo impulso es muy pequeña (es decir, la distancia con respecto al punto teórico L4 durante la órbita posterior al segundo impulso es considerablemente pequeña en comparación con los casos anteriores).

La Tabla 5.9 muestra en detalle los parámetros más característicos de esta trayectoria. Se puede ver que el consumo total es de 3,724 km/s, mientras que la duración total es de 64,81 días. La máxima distancia orbital en torno a L4 de esta trayectoria es de 6.732 km, que es mucho menor a los 94.698 km de la trayectoria BC2.

Tabla 5.9: Parámetros más característicos de la trayectoria BC3 (menor consumo para tiempos inferiores a los 75 días)

Parámetro	Valor
α	223 deg
β	1,4004
θ	270 deg
ΔV_L	0,599 km/s
ΔV_T	3,724 km/s
t_{L4}	64,81 días
R_{L4}	928 km
$(R_{orb})_{max}$	6.732 km

Trayectoria de Bajo Consumo BC4

A continuación, se muestra la trayectoria de menor consumo de todas las trayectorias encontradas, etiquetada como BC4. En la Figura 5.33 se muestra la imagen en detalle de esta transferencia. Se observa que el procedimiento es muy similar al de la trayectoria BC3, experimentando varias asistencias gravitacionales lunares y terrestres, y una última asistencia lunar que modifica muy notablemente la forma de la órbita del satélite. La diferencia entre el movimiento experimentado por la trayectoria BC3 y BC4 es el número de órbitas que recorre el satélite, y por lo tanto, el número de asistencias gravitacionales que experimenta.

La Tabla 5.10 muestra detalladamente los parámetros más característicos de esta trayectoria. Se observa que el consumo total requerido es muy bajo, siendo levemente superior a los 3,7 km/s, mientras que el tiempo requerido para realizar esta operación asciende hasta casi alcanzar los 90 días.

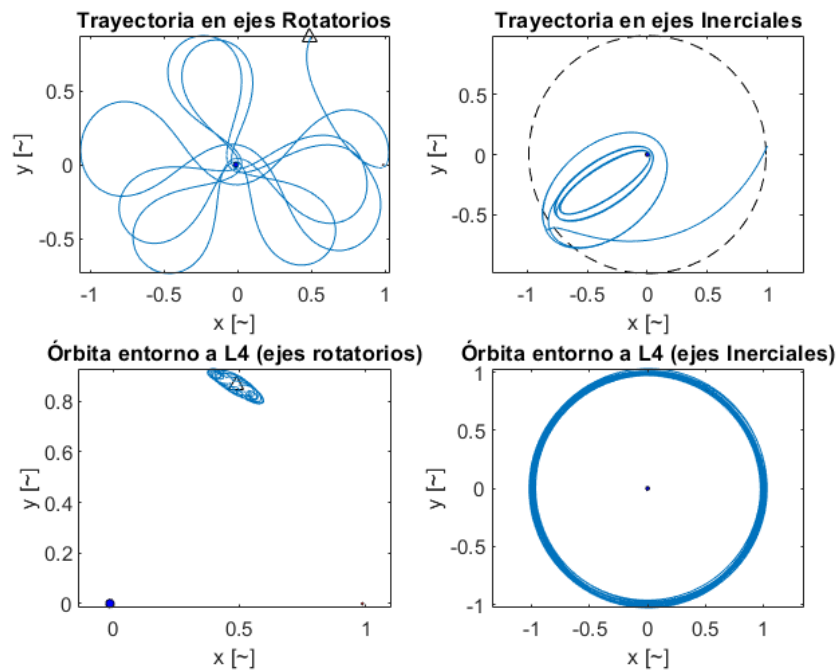


Figura 5.33: Trayectoria del punto etiquetado como BC4

Tabla 5.10: Parámetros más característicos de la trayectoria BC4 (menor consumo para tiempos inferiores a los 90 días)

Parámetro	Valor
α	187 deg
β	1.4004
θ	190 deg
ΔV_L	0,5798 km/s
ΔV_T	3,704 km/s
t_{L4}	89,38 días
R_{L4}	3.7835 km
$(R_{orb})_{max}$	49.130 km

Es interesante destacar que el valor del impulso inicial de esta trayectoria es exactamente igual al de la trayectoria BC3 ($\beta = 1.4004$), de manera que la única diferencia entre estas dos trayectorias es la posición inicial (α) y el tiempo inicial (θ). Curiosamente, la posición inicial es considerablemente similar en ambos casos (223 grados en el BC3 y 187 grados en el BC4), sin embargo, el tiempo inicial (posición del Sol en el momento del primer impulso) presenta una diferencia de 80° . La diferencia en el consumo total de estas dos trayectorias residirá en la velocidad de llegada a L4 (ΔV_L), que en el caso de BD4 es menor que en BD3.

Esta trayectoria se puede establecer como la trayectoria de menor consumo para duraciones inferiores a 100 días. Por tanto, se trata de la trayectoria de menor consumo de todas las halladas con el código creado.

Categorización de trayectorias

Una vez halladas todas las trayectorias posibles con las condiciones iniciales impuestas, surge la posibilidad de intentar encontrar grupos de trayectorias similares, a fin de categorizar las posibles trayectorias hasta el punto L4 de Lagrange y establecer patrones similares entre ellas. Para ello, es necesario estudiar cada trayectoria encontrada y organizarlas según ciertos criterios, como puede ser el número de órbitas en torno a la Tierra, el número de Asistencias Gravitacionales lunares, o la distancia máxima respecto a la Tierra.

Debido al alto número de trayectorias encontradas, analizaremos en primer lugar todas las trayectorias para un único ángulo θ , asumiendo que la posición solar intervendrá muy poco en el tipo de trayectoria obtenido. Se podría esperar que muchas de las trayectorias encontradas sean conceptualmente similares, variando levemente el trazo del movimiento del satélite. Sin embargo, se encuentra que la mayoría de las trayectorias encontradas presentan movimientos únicos y muy diferenciables, haciendo casi imposible la tarea de categorizar las trayectorias.

En las Figuras 5.34 y 5.35 se muestran 16 ejemplos de trayectorias diferentes, siendo la Figura 5.34 la representación en ejes rotatorios y la Figura 5.35 en ejes inerciales. Todas estas trayectorias han sido halladas con un $\theta = 0\text{rad}$. A fin de diferenciar cada trayectoria, se les ha asignado un número (mostrado en la parte superior de la imagen de la trayectoria). Dicho número se ha asignado por orden de hallazgo, siendo el número 1 la primera trayectoria que se encontró. Nótese que estas 16 trayectorias mostradas no representan todos los grupos encontrados, sino que son solamente algunas de las soluciones que se han encontrado.

En las Figuras 5.34 y 5.35 se puede observar el alto número de trayectorias diferentes encontradas, cada una con un movimiento muy diferente, creando dibujos únicos. Se aprecia también la alta variedad en el número de órbitas en torno a la Tierra que se producen, la distancia total recorrida, y la influencia de la Luna en la trayectoria.

Es posible, por tanto, establecer que el número de grupos de trayectorias hallados es muy elevado, lo cuál complica la categorización de las trayectorias al punto L4, volviéndola casi inservible, debido a su alto número.

Sin embargo, es interesante mostrar algunos de los grupos de movimientos encontrados, a fin de que el lector pueda observar las diferentes opciones de trayectorias que puede tener un satélite desde una órbita circular terrestre hasta el punto L4 de Lagrange. De esta manera se puede entender la gran variedad de opciones que existen a la hora de planificar una operación, y la versatilidad de movimiento que produce la asistencia gravitacional lunar, en contraste con la simplicidad de las trayectorias directas usando transferecias de Hohmann.

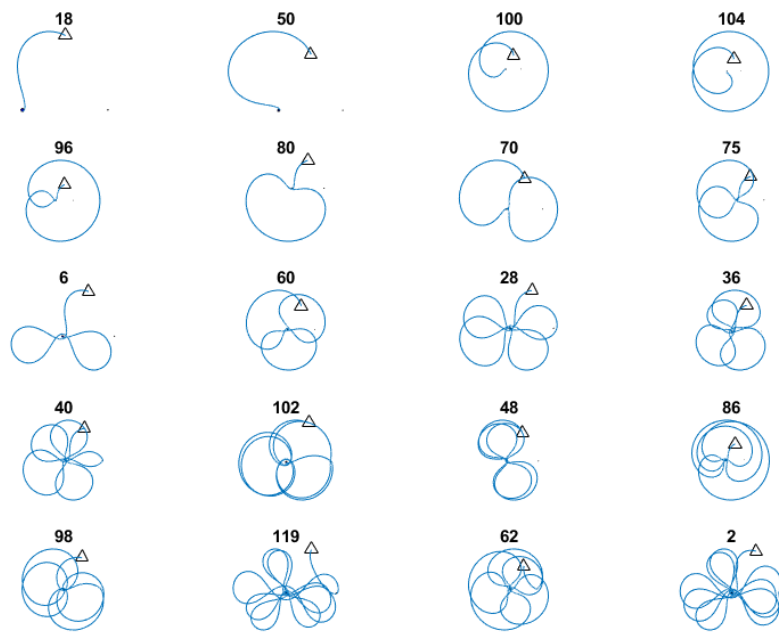


Figura 5.34: Ejemplos de trayectorias numeradas según orden de hallazgo, en ejes rotatorios, con $\theta = 0 \text{ rad}$.

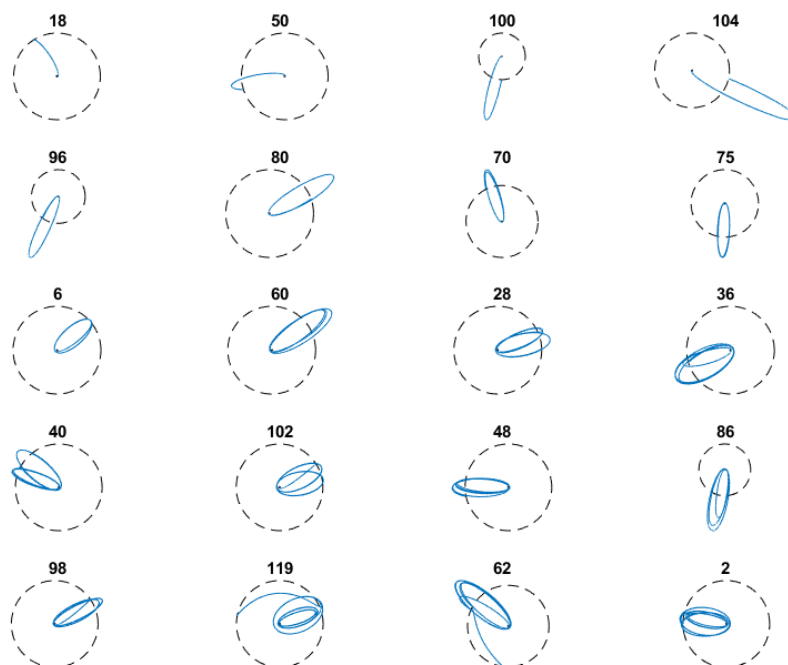


Figura 5.35: Ejemplos de trayectorias numeradas según orden de hallazgo, en ejes inerciales, con $\theta = 0 \text{ rad}$.

Conclusiones

Conclusiones

En este trabajo se han hallado toda la familia de posibles transferencias entre la Tierra y el punto L4 de Lagrange (en el sistema Tierra-Luna). Esto se ha conseguido a través de la elaboración de un algoritmo escrito a través del software MATLAB, con un propagador orbital basado en el problema restringido bicircular de los cuatro cuerpos. Dicho algoritmo se ha validado a través del software GMAT y con la literatura existente, obteniendo un error inferior al 1 %.

A fin de imponer las restricciones necesarias al algoritmo escrito, se ha establecido una misión concreta con las siguientes características: en primer lugar, el origen de la trayectoria es una órbita terrestre de aparcamiento de 160km de altitud; esto permite parametrizar las condiciones iniciales con solo tres variables (α, β, θ) . En segundo lugar, el destino es una órbita estable en torno al punto L4 de Lagrange en el sistema Tierra-Luna; el criterio para establecer que se ha alcanzado dicha órbita estable se basa en la distancia máxima respecto a L4 que obtiene el satélite. En tercer lugar, el aporte energético se lleva a cabo a través de dos impulsos, siendo el primero en la órbita de aparcamiento terrestre y el segundo a la llegada a las cercanías del punto L4 de Lagrange (de manera que el satélite quede orbitando en torno a dicho punto). Estas restricciones definen la misión que se ha establecido a fin de hallar las trayectorias entre la Tierra y el punto L4, así como sus condiciones iniciales.

El algoritmo se ha diseñado para tener en cuenta la atracción gravitatoria de El Sol, la Tierra, y la Luna. Además, se ha implementado un mecanismo para evitar colisiones con la Tierra y la Luna. A fin de limitar la carga de computación, se ha impuesto un límite temporal de 100 días a las transferencias. Por último, el método de integración utilizado en el propagador ha sido un Runge-Kutta 45. La tabla 6.1 muestra algunas de las restricciones numéricas que se han implementado en el algoritmo

La validación del algoritmo elaborado se ha efectuado a través de la simulación de una transferencia de Hohmann en las inmediaciones de la Tierra, y se ha comparado el resultado obtenido por el algoritmo desarrollado con el resultado teórico en base a la literatura existente, y con el resultado obtenido a través del software GMAT, de la NASA. La diferencia entre el resultado

del algoritmo y los resultados de la literatura y de GMAT es inferior al 1 %, validándose así el uso del algoritmo para hallar las trayectorias buscadas.

Tabla 6.1: Restricciones numéricas impuestas en el algoritmo

Restricción	Valor
Máximo tiempo permitido	100 días
Altitud de la órbita de aparcamiento	167km
Distancia de llegada a L4	3.844 km
Máxima separación orbital tras llegada	115.320km
Rango de posiciones iniciales estudiadas	360
Rango de velocidades iniciales estudiadas	32
Rango de tiempos iniciales estudiados	36
Máxima velocidad inicial	11.036 m/s
Mínima velocidad inicial	10.912 m/s
Error de Validación	0,990 %

Como se ha visto en la sección de resultados, el algoritmo elaborado ha resultado exitoso, encontrándose 4.865 soluciones posibles entre la Tierra y el punto L4 de Lagrange en el sistema Tierra-Luna. Para ello, has sido necesario un tiempo de computación de 225 minutos, ya que se han simulado 414.720 condiciones iniciales. El tiempo necesario para realizar la simulación es altamente dependiente con el sistema operativo que se utilice para correr la simulación, pudiendo variar en gran medida entre diferentes ordenadores, pero muestra, de manera genérica, el reducido tiempo que precisa realizar el estudio de posibles transferencias preliminares, en comparación a otros métodos más precisos (como el propio GMAT).

En la sección de resultados se ha mostrado una gráfica con todas las transferencias halladas, mostrando el consumo y el tiempo de transferencia de cada una de ellas. Esta gráfica permite clasificar los resultados obtenidos en dos categorías de especial interés: órbitas de baja duración y órbitas de bajo consumo. Las primeras aportan soluciones a aquellas misiones que quieran priorizar el tiempo, siendo la órbita hallada de menor duración de tan solo 2,12 días. Las segundas aportan soluciones a aquellas misiones que prefieran optimizar el consumo, siendo la órbita de menor consumo de tan solo 3,704 km/s. La presencia de estos dos tipos de trayectorias nos permite encontrar la trayectoria idónea para nuestra misión, ya sea que queramos priorizar menores tiempos de transferencia o menores costes. De esta manera, en base a los resultados obtenidos, es posible definir un tiempo de transferencia máximo permitido para nuestra misión, y acudiendo a los datos obtenidos, hallar las condiciones iniciales que nos aseguren el menor consumo posible.

Entre todas esos resultados, la mayoría de las soluciones obtenidas han sido transferencias internas, siendo el número de transferencias externas de tan solo 36 casos. Esto se debe a que las transferencias externas precisan unos tiempos de transferencia mucho mayores, que en la mayoría de los

casos sobrepasan los 100 días establecidos como limitación.

La tabla 6.2 muestra algunos parámetros que caracterizan las soluciones halladas, como el número total de trayectorias encontradas, el número de órbitas externas e internas, distancia máxima a la Tierra, mínimo tiempo de transferencia o mínimo consumo, entre otros.

Tabla 6.2: Principales parámetros de las soluciones

Parámetro	Valor
Simulaciones totales estudiadas	414.720
Tiempo necesario de computación	225 min
Nº soluciones sin presencia solar	134
Nº soluciones con presencia solar	4.865
Nº de soluciones externas	36
Nº de soluciones internas	4.829
Mínima distancia obtenida respecto a L4	45 km
Máxima distancia respecto a la Tierra	1.733.000 km
Mínimo tiempo obtenido	2,12 días
Mínimo consumo con Hohmann	3,859 km/s
Mínimo consumo con Asistencia Gravitacional	3,704 km/s

Además de haber hallado toda una colección de posibles trayectorias, se ha analizado el efecto de las condiciones iniciales en el tiempo de transferencia y en el consumo. Se ha hallado que la presencia solar afecta mucho a los resultados que se obtienen, reforzando la necesidad de usar modelos de cuatro cuerpos en lugar de los modelos de tres cuerpos más comunes, a fin de obtener resultados más realistas. Se ha observado que para transferencias de Hohmann es necesario efectuar el primer impulso en zonas concretas de la órbita de aparcamiento, mientras que las transferencias de baja energía son mucho menos dependientes a la posición inicial del satélite. También se ha hallado la elevada dependencia entre el valor del primer impulso y el coste total de la misión, debido al alto porcentaje de consumo que representa el primer impulso frente al segundo.

Se ha encontrado que el tamaño de la órbita en torno al punto L4 no depende directamente de las condiciones iniciales, pudiéndose hallar órbitas muy pequeñas (que se alejan poco de L4) en cualquiera de las condiciones iniciales. También se ha hallado que las transferencias más externas (las que más se alejan de la Tierra) no presentan ventajas con respecto a las transferencias internas. Ambos hallazgos son contrarios a lo que se esperaba hallar.

Por último, se han podido definir las trayectorias más significativas: la trayectoria de menor duración, la trayectoria de menor consumo, y una serie de trayectorias de mínimo consumo para diferentes márgenes de tiempo. Se han analizado individualmente las trayectorias que proporcionaban algún tipo de ventaja sobre las demás, como puede ser el mínimo consumo. La

Tabla 6.3 muestra las trayectorias más relevantes encontradas, así como una posible aplicación de cada una de ellas.

Tabla 6.3: Trayectorias encontradas más características

Nombre	α (deg)	β (-)	θ (deg)	ΔV_T (km/s)	t_{L4} (días)	Aplicación
MinDur1	283	1,4142	100	4,883	2,12	Misiones de llegada inmediata
MinDis2	283	1,4122	260	4,759	2,23	Misiones de observación lunar o terrestre
MinDur2	299	1,4024	300	3,979	4,36	Misión de bajo consumo con llegada en menos de 1 semana
BC1	219	1,4014	220	3,859	25,74	Misión de bajo consumo con llegada en menos de 1 mes
BC2	339	1,4009	260	3,797	35,05	Misión de bajo consumo con llegada en menos de 50 días
BC3	223	1,4004	270	3,724	64,81	Misión de bajo consumo con llegada en menos de 75 días
BC4	187	1,4004	190	3,704	89,38	Misión de mínimo consumo

En cuanto a la categorización de las órbitas encontradas, se ha hallado que la cantidad masiva de diferentes tipos de maniobras, asistencias, y condiciones iniciales vuelven prácticamente imposible la categorización efectiva de los tipos de transferencias entre la Tierra y el punto L4.

Es importante recordar que los resultados obtenidos han sido de carácter preliminar, a fin de poder hallar toda la familia de órbitas posibles. Las soluciones preliminares encontradas son el primer paso en un proceso complejo de optimización de misiones espaciales, en la que se busca ampliar el conocimiento de las posibles trayectorias. Una vez hallados los resultados preliminares, éstos podrán ser usados para un estudio más concreto y preciso de las transferencias, que se realiza en etapas posteriores del diseño de una misión espacial.

En vista de los resultados obtenidos, se puede concluir que el estudio realizado ha sido un éxito, habiéndose conseguido cumplir los objetivos impuestos al comienzo del estudio, y habiéndose hallado resultados interesantes que incrementan el conocimiento sobre las transferencias de baja energía entre la Tierra y el punto L4 de Lagrange, tal y como se pretendía con este trabajo.

Trabajo futuro

A lo largo de la elaboración de este trabajo, se han identificado ciertos aspectos en los que el estudio podría continuarse, a fin de incrementar el conocimiento sobre el tema. A continuación, se presentan los trabajos futuros más relevantes que podrían realizarse:

Optimización de trayectoria mediante métodos directos

Durante el presente estudio se ha elaborado un algoritmo en el que se han encontrado todas las trayectorias posibles, sin haberse impuesto ningún tipo de proceso de optimización de trayectorias, y con las únicas restricciones de evitar la colisión y mantenerse dentro de un margen temporal admisible.

Una vez obtenidas las trayectorias preliminares, se podría continuar con un estudio más detallado a través de la optimización de trayectoria por el método directo. Este método es utilizado por muchos autores que realizar análisis de trayectorias de baja energía, y permite encontrar directamente los resultados óptimos, reduciendo el tiempo de computación. Autores como [7] o [8] utilizan este método. Sin embargo, a la hora de encontrar trayectorias óptimas, hay tantas posibilidades que aplicar este tipo de técnicas, sin conocer ningún parámetro preliminar, puede resultar ineficiente aplicar este método sin haber obtenido previamente resultados preliminares, debido a la dificultad de encontrar mínimos globales, encontrar posibles divergencias o la ausencia de restricciones necesarias. Por ello, resulta muy útil realizar un estudio preliminar, como el realizado en el presente trabajo, que aporte regiones donde buscar con más precisión a través de métodos directos.

Propulsión de bajo impulso

El presente estudio impone la condición de efectuar dos impulsos para permitir la transferencia, uno al inicio (al salir de la órbita de aparcamiento terrestre) y otra en las cercanías del punto L4 (al llegar al destino). Este método de los dos impulsos es muy utilizado en misiones espaciales y se basa en el método convencional de la transferencia de Hohmann, que usa dos impulsos para realizar la transferencia.

Sin embargo, algunos autores defienden que usar dos impulsos no es la manera más eficiente de realizar la transferencia, como [7] y [21], que usan propulsión de bajo impulso (“Low-Thrust Propulsion”). La misión SMART-1 utilizó este tipo de propulsión en 2006, demostrando que el coste de las transferencias de baja energía se podía reducir aún más con este tipo de tecnología [7]. El motivo de la mejora en coste de esta tecnología es el aumento del impulso específico que tienen estos motores, como pueden ser por ejemplo los motores de iones [21].

Sin embargo, introducir el impulso de este tipo de motores en las ecuaciones de movimiento de un satélite no es trivial. En los impulsos convencionales

(doble impulso) se asume que la diferencia de velocidad debido al impulso efectuado es instantánea, de manera que este impulso se modeliza matemáticamente forzando un cambio de velocidad en las ecuaciones de estado del vehículo. Sin embargo, si se introduce motores Low-Thrust, el cambio de velocidad no se produce instantáneamente, por lo que la aceleración producida por los motores debe considerarse como parte de las ecuaciones del Problema Restringido Bicircular de los Cuatro Cuerpos. Además, se deberá tener en cuenta la variación de la masa del satélite con el tiempo. Para terminar de complicar la implementación numérica, este tipo de misiones no imponen el ratio de activación de los motores, ni el momento en el que se activan, siendo éstas incógnitas del problema [21]. Por último, este tipo de propulsión no permite realizar misiones cortas, por lo que no permitirían el estudio de las transferencias de menor duración.

En un trabajo futuro se podría introducir las ecuaciones que rigen un impulso con motores Low-Thrust, y estudiar el impacto que éstos tienen en las soluciones encontradas, analizando la presunta mejora en consumo que proporcionan estos sistemas.

Captura orbital en L4

En el presente estudio se ha impuesto que a fin de situar al satélite en L4, la velocidad de éste debe anularse por completo, reduciendo su energía al mínimo posible. Esta aproximación puede modificarse en un estudio posterior, a fin de aumentar la precisión, utilizando el método de la captura orbital. Este método impone el cálculo de una órbita objetivo en torno a L4, y en lugar de anular por completo la velocidad del satélite en torno a L4, se modifica solo parcialmente la velocidad para que esta cumpla con la velocidad objetivo de la órbita que se pretende obtener. Este tipo de captura orbital es especialmente interesante si la órbita objetivo es de gran tamaño, de manera que el impulso se produzca en el apogeo de la órbita, donde la velocidad es menor. De esta manera, la reducción de velocidad es menor, y el consumo se reduce [12].

El problema de este tipo de capturas en torno a L4 es calcular la órbita que garantice estabilidad a pesar de la influencia solar, que perturba el movimiento del satélite. El cálculo de órbitas estables en torno a L4 escapa del propósito de este estudio, por lo que se ha decidido no incluirlo por el momento. Sin embargo, en futuros trabajos es posible estudiar las órbitas estables en torno a L4 a fin de minimizar el valor del segundo impulso del satélite, proporcionando una captura orbital, y de esta manera, reducir el coste de la misión.

Tiempo máximo de transferencia

En el presente estudio se ha establecido un tiempo máximo de transferencia por motivos de eficiencia informática, pero sin un criterio físico. Sería posible, teóricamente, aumentar dicho tiempo de transferencia y hallar tra-

yectorias con menores consumos, a pesar de presentar mayores tiempos de transferencias. Aumentar estos tiempos implicaría un tiempo total de cálculo mucho mayor al obtenido con el presente límite, pero en trabajos futuros, sería recomendable aumentar dicho tiempo, a fin de encontrar posibles trayectorias con menores consumos.

Es importante mencionar que a pesar de haber encontrado casi cinco mil soluciones, no se ha encontrado ninguna que cumpla con el límite teórico inferior de $\beta = 1.3983$ (siendo la menor encontrada $\beta = 1.4004$, tal y como se calculó en el apartado 3.5, por lo que teóricamente aún se pueden encontrar trayectorias con menores consumos a los encontrados hasta ahora, con tan solo aumentar el tiempo de transferencia.

Bibliografía

- [1] Nathan R. Boone y Robert A. Bettinger. «Spacecraft survivability in the natural debris environment near the stable Earth-Moon Lagrange points». En: *Advances in Space Research* (2021).
- [2] Juan Zhang, Wei Liu y Xiaofei Cao. «Exploration of Low-Energy Earth-Moon Transfer Orbit Based on Crossing Orbit of Double Three-Body System». En: *Journal of Physics: Conference Series* (ene. de 2021).
- [3] F.J.T. Salazar, Elbert Macau y O. Winter. «Alternative transfer to the Earth–Moon Lagrangian points L4 and L5 using lunar gravity assist». En: *Advances in Space Research* (2014).
- [4] F.J.T. Salazar y col. «Optimal low-cost transfer to L4 and L5 lagrangian points based on G-family of periodic orbits». En: *Proceedings of the International Astronautical Congress, IAC* (ene. de 2012).
- [5] Minghu Tan, Ke Zhang y Jingyu Wang. «Single impulsive transfer to the Earth–Moon triangular point L4 in a bicircular model». En: *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* (2020).
- [6] R. Broucke. «Traveling Between the Lagrange Points and the Moon». En: *Journal of Guidance and Control* (1979).
- [7] Francesco Topputo. «On optimal two-impulse Earth–Moon transfers in a four-body model». En: *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* (nov. de 2013).
- [8] Kenta Oshima, Francesco Topputo y Tomohiro Yanao. «Low-energy transfers to the Moon with long transfer time». En: *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* (ene. de 2019).
- [9] Francesco Topputo y Massimiliano Vasile. «Earth-to-Moon Low Energy Transfers Targeting L1 Hyperbolic Transit Orbits». En: *Annals of the New York Academy of Sciences* (ene. de 2006).
- [10] Alberto Abad. *Astrodinámica*. Bubok Publishing, 2012.
- [11] Nathaniel Grossman. *The Sheer Joy of Celestial Mechanics*. Birkhauser Boston, 1996.
- [12] David A. Vallado. *Fundamentals of Astrodynamics and Applications*. Space Technology Library, 2013.
- [13] Iliana Isabel Cortés Pérez. «Leyes de Kepler». En: *Universidad Nacional Autónoma de México* (2015).
- [14] Marta María Jiménez Martín. «Estudio de las perturbaciones de las órbitas de los satélites artificiales». En: *Universidad de Valladolid* (2015).
- [15] José A. Morano Fernández. «Transferencia de Hohmann». En: *Universidad Politécnica de Valencia* ().

-
- [16] W.S. Koon y col. «Traveling Between the Lagrange Points and the Moon». En: *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* (2001).
 - [17] Zsolt Sándor, Bálint Érdi y Christos Efthymiopoulos. «The Phase Space Structure Around L4 in the Restricted Three-Body Problem». En: *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* (2000).
 - [18] V Szebehely. «Theory of Orbits: The Restricted Problem of Three Bodies». En: *Academic Press, NewYork* (1967).
 - [19] R Castelli. «Nonlinear Dynamics of complex system: application in physical, Biological and Financial Systems». En: *Springer* (2011).
 - [20] Helena Guberna Arraiza. «A Mission to L4». En: *Universitat Politècnica de Catalunya* (2016).
 - [21] G. Mingotti, F. Topputo y F. Bernelli-Zazzera. «Low-energy, low-thrust transfers to the Moonle». En: *Cestial Mechanics and Dynamical Astronomy* (2009).

Anexo A

Diagrama de Grant

La imagen A.1 muestra un diagrama de Grant en la que se exponen las principales etapas del proceso de creación del TFM, en las que se incluye:

- Búsqueda bibliográfica de toda la información teórica necesaria para elaboración del proyecto.
- Elaboración del algoritmo que permita hallar las transferencias a L4.
- Validación del algoritmo (proceso casi paralelo a la elaboración del algoritmo).
- Obtención de Resultados, una vez validado el código, incluyendo las gráficas y las tablas.
- Redacción del documento
- Revisión del documento por el Tutor Académico y Corrección del documento por parte del alumno hasta versión final.

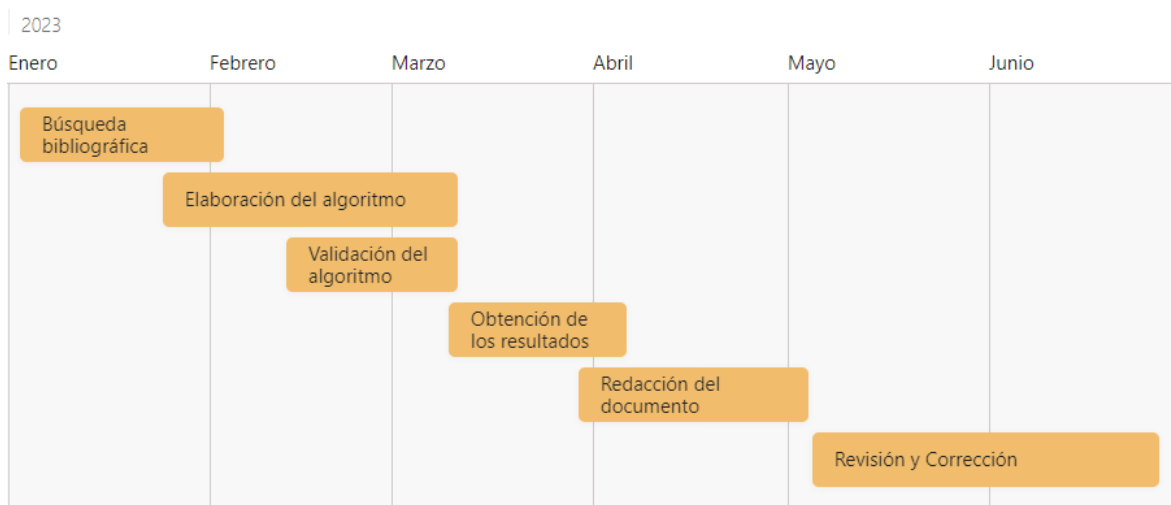


Figura A.1: Diagrama de Grant del proceso de elaboración del TFM

Anexo B

Código utilizado

```
1 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
2 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% CODIGOS UTILIZADOS en el TFM %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
3 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% JOSE A. REINA %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
4 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% MATLAB %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
5 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% 2023 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
6 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
7
8 %% Parametros generales
9 mu = 1.21506683e-2; %Parametro masico Tierra-Luna
10 oms = 9.25195985e-1; %Velocidad angular del sol (escalada)
11 r0 = (6378+167)/384400;%Distancia de la orbita de aparcamiento
12 dis2L4 = 0.01; %Distancia a la que se considera cercano a L4
13 Opt=odeset('Events', @Colision,'RelTol', 1.0e-10, 'AbsTol', 1.0e-10);
14
15 %% Calculo de Todas Trayectorias
16 npalfa = 360; %Numeros de puntos en los que se divide la posicion
17 npbeta = 32; %Numeros de puntos en los que se divide la velocidad
18 nptheta = 36; %Numeros de puntos en los que se divide el tiempo
19 beta_min = 1.3983; %Beta minimo
20 beta_max = sqrt(2); %Beta maximo
21 tf = 23; % Tiempo maximo permitido (100dias)
22
23 [Sol] = Mission(npalfa,npbeta,nptheta,beta_min,beta_max,tf,dis2L4,Opt);
24
25
26 %% Trayectorias de baja duracion - (Efecto del sol)
27 npalfa = 179;
28 npbeta = 60;
29 nptheta = 4;
30 beta_min = 1.4013;
31 beta_max = sqrt(2);
32 tf = 5;
33
34 [Sol2] = Mission(npalfa,npbeta,nptheta,beta_min,beta_max,tf,dis2L4,Opt);
35
36
37 %% Trayectorias de baja duracion - (Minimo Impulso)
38 npalfa = 179;
39 npbeta = 20;
40 nptheta = 11;
```

```

41 beta_min = 1.4020;
42 beta_max = 1.4024;
43 tf = 5;
44
45 [Sol3] = Mission(npalfa,npbeta,nptheta,beta_min,beta_max,tf,dis2L4,Opt);
46
47
48 %% Trayectorias de bajo consumo
49 npalfa = 180;
50 npbeta = 30;
51 nptheta = 12;
52 beta_min = 1.3983;
53 beta_max = 1.4020;
54 tf = 23;
55
56 [Sol4] = Mission(npalfa,npbeta,nptheta,beta_min,beta_max,tf,dis2L4,Opt);
57
58 %% Grafica Completa con todos los puntos calculados
59 figure()
60 scatter([Sol.t_L4].*4.3425,[Sol.VT_L4].*1.0245,5,'filled')
61 annotation('rectangle',[.13 .3 .25 .6],'Color','red')
62 annotation('textarrow',[.5 .39],[.9 .85],'String','Baja Duracion')
63 annotation('rectangle',[.3 .15 .6 .2],'Color','red')
64 annotation('textarrow',[.35 .3],[.19 .21],'String','Bajo Consumo')
65 xlabel('Trip Duration [days]')
66 ylabel('\Delta V [km/s]')
67
68 %% Comprobacion del efecto de la posicion del sol
69 Postheta = unique([Sol.theta]);
70 for i=1:length(Postheta)
71     nPT(i) = length( find([Sol.theta]==Postheta(i)));
72 end
73
74 %Todos los puntos
75 figure()
76 scatter([Sol.t_L4].*4.3425,[Sol.VT_L4].*1.0245,5,[Sol.theta],'filled')
77 xlabel('Trip Duration [days]')
78 ylabel('\Delta V [km/s]')
79 cb=colorbar;
80 ylabel(cb,'\theta [deg]');
81
82 %Distribucion geometrica de thetas
83 figure();
84 scatter(cos(deg2rad(Postheta)),sin(deg2rad(Postheta)),nPT,'b','filled')
85 hold on
86 quiver(0,0,1.5,0,'k');text(1.2,0.1,'Moon')
87 quiver(0,0,0.4,0.34,'k');text(0.32,0.15,'\Theta')
88 plot(0.3*cos(0:0.1:pi/4),0.3*sin(0:0.1:pi/4),'k')
89 title('Repetitividad del tiempo Inicial');
90 xlabel('x [~]')
91 ylabel('y [~]');
92 xlim([-1.5 1.5])
93 ylim([-1.5 1.5])
94 axis equal
95
96 %Porcentaje de aparicion de cada theta
97 figure();

```

```

98     plot(Posttheta,100*nPT/length(Sol),'*')
99     title('Repetitividad del Tiempo Inicial');
100    xlabel('\theta [deg]')
101    ylabel('% Resultados [%]')
102    ylim([0,50])
103
104    %%Efecto directo de theta sobre el tiempo y el consumo
105    figure();
106    subplot(2,1,1)
107        scatter([Sol.theta],[Sol.VT_L4],10,'filled')
108            xlabel('\theta [deg]')
109            ylabel('\Delta V [km/s]')
110    subplot(2,1,2)
111        scatter([Sol.theta],[Sol.t_L4]*4.3425,10,'filled')
112            xlabel('\theta [deg]')
113            ylabel('Tiempo [dias]')
114
115    %% Comprobacion del efecto de la velocidad
116    Posbeta = unique([Sol.beta]);
117    for i=1:length(Posbeta)
118        nPB(i) = length( find([Sol.beta]==Posbeta(i)));
119    end
120
121    %%Todos los puntos
122    figure()
123        scatter([Sol.t_L4].*4.3425,[Sol.VT_L4].*1.0245,5,[Sol.beta],'filled')
124            xlabel('Trip Duration [days]')
125            ylabel('\Delta V [km/s]')
126            cb=colorbar
127            ylabel(cb,'\beta [~]');
128
129    %%Porcentaje de aparicion de cada theta
130    figure();
131        plot(Posbeta,100*nPB/length(Sol),'*')
132        title('Repetitividad de la Velocidad');
133        xlabel('\beta [~]')
134        ylabel('% Resultados [%]')
135        ylim([0,50])
136
137    %%Efecto directo de theta sobre el tiempo y el consumo
138    figure();
139        subplot(2,1,1)
140            scatter([Sol.beta],[Sol.VT_L4],10,'filled')
141                xlabel('\beta [~]')
142                ylabel('\Delta V [km/s]')
143        subplot(2,1,2)
144            scatter([Sol.beta],[Sol.t_L4]*4.3425,10,'filled')
145                xlabel('\beta [~]')
146                ylabel('Tiempo [dias]')
147
148    %% Comprobacion del efecto de la posicion en la tierra
149    Posalfa = unique([Sol.alpha]);
150    for i=1:length(Posalfa)
151        nPA(i) = length( find([Sol.alpha]==Posalfa(i)));
152    end
153
154

```

```

155 %Todos los puntos
156 figure()
157 scatter([Sol(:).t_L4].*4.3425,...
158         [Sol(:).VT_L4].*1.0245,8,[Sol.alpha]*180/pi,'filled');
159 xlabel('Trip Duration [Days]')
160 ylabel('\Delta V [km/s]')
161 cb=colorbar;
162 ylabel(cb,'\alpha [deg]');
163
164 %Distribucion geometrica de thetas
165 figure();
166 scatter(cos(Posalfa),sin(Posalfa),nPA,'b','filled');hold on
167 quiver(0,0,1.5,0,'k');text(1.2,0.1,'Moon')
168 quiver(0,0,0.4,0.34,'k');text(0.32,0.15,'\alpha')
169 plot(0.3*cos(0:0.1:pi/4),0.3*sin(0:0.1:pi/4),'k')
170 title('Repetitividad de la Posicion Inicial')
171 xlabel('x [~]')
172 ylabel('y [~]');
173 xlim([-1.5 1.5])
174 ylim([-1.5 1.5])
175 axis equal
176
177 %Efecto directo de theta sobre el tiempo y el consumo
178 figure()
179 subplot(2,1,1)
180 scatter(rad2deg([Sol.alpha]),[Sol.VT_L4]*1.0245,10,'filled')
181 xlabel('\alpha [deg]')
182 ylabel('\Delta V [km/s]')
183 subplot(2,1,2)
184 scatter(rad2deg([Sol.alpha]),[Sol.t_L4]*4.3425,10,'filled')
185 xlabel('\alpha [deg]')
186 ylabel('Tiempo [dias]')
187
188 %Velocidad segun las condiciones iniciales
189 figure()
190 subplot(1,2,1)
191 scatter([Sol.alpha]*180/pi,...
192         [Sol.vL_L4]*1.0245,8,[Sol.beta],'filled')
193 xlabel('\alpha [deg]')
194 ylabel('Velocidad de llegada a L4 [km/s]')
195 cb=colorbar;
196 ylabel(cb,'\beta [~]');
197 subplot(1,2,2)
198 scatter([Sol.alpha]*180/pi,...
199         [Sol.vL_L4]*1.0245,8,[Sol.theta],'filled')
200 xlabel('\alpha [deg]')
201 ylabel('Velocidad de llegada a L4 [km/s]')
202 cb2=colorbar;
203 ylabel(cb2,'\theta [~]');
204
205 %Velocidad de llegada segun beta
206 figure()
207 scatter([Sol.beta],[Sol.vL_L4]./[Sol.VT_L4],5,'filled')
208 xlabel('\beta [~]')
209 ylabel('v_L / v_T [~]')
210
211

```



```

212 %% Comprobacion de la distancia maxima durante orbita
213 for i=1:length(Sol)
214     MD(i) = Sol(i).orb.MD;
215 end
216
217 %Distancia maxima segun distancia de llegada
218 figure()
219 scatter([Sol.min_rL4],MD,5,[Sol.theta],'filled')
220 xlabel('Distancia Inicial [~]')
221 ylabel('Maxima Distancia Orbital entorno a L4 [~]')
222 hold on
223 plot(linspace(0,0.01,100),linspace(0.3,0.3,100),'--k')
224 cb=colorbar;
225 ylabel(cb,'\theta [deg]')
226 ylim([0,1])
227
228 % Orbita cercana con posicion inicial lejana
229 figure()
230 PlotFullMission(Sol,3200)
231
232 %Orbita con menor Distancia orbital
233 figure()
234 PlotFullMission(Sol,3253)
235
236 %Efecto del sol en trayectorias de baja duracion
237 figure()
238 scatter([Sol2.t_L4]*4.3425,[Sol2.VT_L4]*1.0245,5,[Sol2.theta],'filled
239 ')
240 cb=colorbar;
241 ylabel(cb,'\theta [deg]')
242 xlabel('Trip Duration [Days]')
243 ylabel('\Delta V [km/s]')
244 hold on
245 annotation('textarrow',[.15 .4],[.6 .5],'FontSize',6,'Linewidth',1)
246 text(9, 4.4, '\theta', 'FontSize',15)
247
248 %Puntos de estudio de baja duracion
249 k=0;
250 for i=1:length(Sol2)
251     if Sol2(i).theta == 0
252         k=k+1;
253         BDt(k) = Sol2(i).t_L4;
254         BDvt(k) = Sol2(i).VT_L4;
255     end
256 end
257
258 figure()
259 scatter(BDt*4.3425,BDvt*1.0245,5,'filled')
260 annotation('textarrow',[.3 .2],[.74 .84],'String','BD1')
261 annotation('textarrow',[.34 .28],[.3 .2],'String','BD2')
262 annotation('textarrow',[.64 .54],[.27 .37],'String','BD3')
263 xlabel('Trip Duration [Days]')
264 ylabel('\Delta V [km/s]')
265
266 % Orbitas caracteristicas para baja duracion
267 figure()
268 plottarget(Sol2,2.22732/4.3425,4.77997/1.0245); hold on

```

```

268     plottarget(Sol2,4.78667/4.3425,3.98538/1.0245); hold on
269     plottarget(Sol2,11.7168/4.3425,4.22329/1.0245); hold on
270
271 %Grafica de minimo impulso con baja duracion
272 figure()
273     scatter([Sol3.t_L4]*4.3425,...
274            [Sol3.VT_L4]*1.0245,5,[Sol3.theta],'filled');
275     cb=colorbar;
276     ylabel(cb,'\theta [deg]')
277     xlabel('Trip Duration [Days]')
278     ylabel('\Delta V [km/s]')
279     xlim([0 20])
280     annotation('textarrow',[.65 .58],[.17 .13],'String','BD4')
281
282 %Orbita de minimo impulso y baja duracion
283 [~,b] = min([Sol3.VT_L4]);
284 figure()
285     PlotFullMission(Sol3,b)
286
287
288 % Orbitas de bajo consumo
289 figure()
290     scatter([Sol4.t_L4].*4.3425,...
291            [Sol4.VT_L4].*1.0245,5,[Sol4.theta],'filled')
292     xlabel('Trip Duration [days]')
293     ylabel('\Delta V [km/s]')
294     cb=colorbar;
295     ylabel(cb,'\theta [deg]');
296     annotation('textarrow',[.63 .7],[.17 .13],'String','BC4')
297     annotation('textarrow',[.53 .59],[.27 .34],'String','BC3')
298     annotation('textarrow',[.36 .32],[.33 .41],'String','BC2')
299     annotation('textarrow',[.19 .17],[.4 .5],'String','BC1')
300
301 %Orbitas de estudio
302 figure()
303     PlotFullMission(Sol4,38); %BC4
304 figure()
305     PlotFullMission(Sol4,212); %BC3
306 figure()
307     PlotFullMission(Sol4,111); %SBC2
308 figure()
309     PlotFullMission(Sol4,1); %BC1
310
311 %% Orbitas caracteristicas
312 mu = 1.21506683e-2;
313 k=0;
314 figure()
315     for j = [36,87,61,50,77,35,102,188,107,1,172,...
316            64,98,135,40,11,121,131,155,233]
317         t_tra = Sol(j).tra.t; x_tra = Sol(j).tra.x; k=k+1;
318
319         subplot(5,4,k)
320             circle(-mu,0,6371/384400,'b');hold on
321             circle(1-mu,0,1737.4/384400,'r');hold on
322             plot(0.5-mu,sqrt(3)/2,'k^')
323             plot(x_tra(:,1),x_tra(:,2))
324             axis equal

```

```

325         xlabel('x [~]')
326         ylabel('y [~]')
327         title(num2str(j))
328     end
329
330     k=0;
331     figure()
332     for j = [36,87,61,50,77,35,102,188,107,1,172,...
333            64,98,135,40,11,121,131,155,233]
334
335         t_tra = Sol(j).tra.t; x_tra = Sol(j).tra.x; k=k+1;
336
337         subplot(5,4,k)
338         xer_tra = Syn2ECI(t_tra, x_tra, mu);
339         circle(0,0,6371/384400,'b');hold on
340         plot((1-mu)*cos(0:0.01:2*pi),(1-mu)*sin(0:0.01:2*pi),'--k')
341         hold on
342         plot(xer_tra(:,1),xer_tra(:,2))
343         axis equal
344         xlabel('x [~]')
345         ylabel('y [~]')
346         title(num2str(j))
347     end
348
349 %Calculo de la maxima distancia en orbitas externas
350 for i=1:length(Sol)
351     rT = sqrt( (Sol(i).tra.x(:,1) + mu).^2 + Sol(i).tra.x(:,2).^2 );
352     MR(i) = max(rT);
353 end
354 [~,TE] = find(MR>4);
355
356 k=0;
357 figure()
358 for j = TE
359
360     t_tra = Sol(j).tra.t; x_tra = Sol(j).tra.x; k=k+1;
361
362     subplot(3,3,k)
363     circle(-mu,0,6371/384400,'b');hold on
364     circle(1-mu,0,1737.4/384400,'r');hold on
365     plot(0.5-mu,sqrt(3)/2,'k^')
366     plot(x_tra(:,1),x_tra(:,2))
367     axis equal
368     xlabel('x [~]')
369     ylabel('y [~]')
370     title(num2str(j))
371 end
372
373 k=0;
374 figure()
375 for j = TE
376     t_tra = Sol(j).tra.t; x_tra = Sol(j).tra.x; k=k+1;
377     xer_tra = Syn2ECI(t_tra, x_tra, mu);
378
379     subplot(3,3,k)
380     circle(0,0,6371/384400,'b');hold on
381     plot((1-mu)*cos(0:0.01:2*pi),(1-mu)*sin(0:0.01:2*pi),'--k')

```

```

382         hold on
383         plot(xer_tra(:,1),xer_tra(:,2))
384         axis equal
385         xlabel('x [~]')
386         ylabel('y [~]')
387         title(num2str(j))
388     end
389
390 %Localizacion de las orbitas externas en el mapa general
391 figure()
392 scatter([Sol.t_L4].*4.3425,[Sol.VT_L4].*1.0245,5,'k','filled');hold on
393 scatter([Sol(TE).t_L4]*4.3425,[Sol(TE).VT_L4]*1.0245,15,'r','filled');
394     xlabel('Trip Duration [days]')
395     ylabel('\Delta V [km/s]')
396
397 %Orbita de maxima distancia a la tierra
398 [a,MaxTE] = max(MR);
399 figure()
400     PlotFullMission(Sol,MaxTE)
401
402
403
404
405
406
407
408 %% Mission
409 function [Sol] = Mission(npalfa,npbeta,nptheta,beta_min,beta_max,...
410     dt,mindis2L4,Opt)
411 %%%%%%%%% Calculo de todas las trayectorias posibles a L4 %%%%%%%%%%%%%%%
412 %
413 %     Datos de entrada:
414 %     - npalfa      = numero de puntos de alfa a analizar
415 %     - npbeta     = numero de puntos de beta a analizar
416 %     - nptheta    = numero de puntos de theta a analizar
417 %     - beta_min   = Beta minima a analizar
418 %     - beta_max   = beta maxima a analizar
419 %     - tf         = Tiempo maximo de integracion
420 %     - mindis2L4 = Distancia para considerar que se llega a L4
421 %     - Opt        = condiciones de la integracion ode45
422 %
423 %     Datos de salida:
424 %     - Sol = Estructura con todos los datos de las trayectorias
425 %           encontradas, segun "GuardarSolucion"
426 %
427 %     Funciones necesarias:
428 %     - createwaitbars
429 %     - Initial
430 %     - BCR4BP
431 %     - GuardarSolucion
432 %
433 %%%%%%%%%%%%%%%
434
435     mu = 1.21506683e-2;    %Parametro masico Tierra-Luna [~]
436     oms = 9.25195985e-1;  %Velocidad angular del sol [~]
437     [wtb1,wtb2,wtb3] = createwaitbars(); %Barras de esperq
438

```

```

439 % Calculo de todas las trayectorias posibles
440 for n=1:nptheta
441     waitbar(n/nptheta,wtb1);
442     theta = (n-1)*360/nptheta; ti = deg2rad(theta) / oms;
443     for j=1:npbeta
444         waitbar(j/npbeta,wtb2);
445         beta = beta_min+(j-1)*(beta_max-beta_min)/(npbeta-1);
446         for i=1:npalfa
447             waitbar(i/npalfa,wtb3);
448             alfa = deg2rad(360*(i-1)/npalfa);
449             x0 = Initial(alfa,beta);
450             [t,x] = ode45(@BCR4BP,[ti ti+dt],x0, Opt);
451             rL4 = sqrt( (x(:,1)-(0.5-mu)).^2 + (x(:,2) -...
452                                     sqrt(3)/2).^2 );
453             if min(rL4)<mindis2L4
454                 [~,pos]=min(rL4);
455                 [t_orb,x_orb] = ode45(@BCR4BP,...
456                     [t(pos),t(pos)+100],...
457                     [x(pos,1),x(pos,2),0,0],...
458                     Opt);
459                 orb_rL4 = sqrt( (x_orb(:,1)-(0.5-mu)).^2 +...
460                     (x_orb(:,2) - sqrt(3)/2).^2 );
461                 if max(orb_rL4)<0.3
462                     try [Sol] = GuardarSolucion (Sol,...
463                         rL4,t,x,alfa,beta,theta,t_orb,x_orb);
464                     catch [Sol] = GuardarSolucion (struct([]),...
465                         rL4,t,x,alfa,beta,theta,t_orb,x_orb);
466                     end
467                 end
468             end
469         end
470     end
471 end
472 close(wtb1,wtb2,wtb3)
473 end
474
475
476
477
478 %% Initial
479 function [x0] = Initial(a,b)
480 %%%%%%%%%%% Calculo de los parametros iniciales %%%%%%%%%%%
481 %
482 %     Datos de entrada:
483 %     - a = parametro alpha
484 %     - b = parametro beta
485 %
486 %     Datos de salida:
487 %     - x0 = [x,y,vx,vy] inicial
488 %
489 %     Funciones necesarias: None
490 %
491 %%%%%%%%%%%
492 mu = 1.21506683e-2; %Parametro masico Tierra-Luna [~]
493 rE = 6378 ; %Radio de la tierra [km]
494 hA = 167; %Altitud Orbita aparcamiento [km]
495 r0 = (rE+hA)/384400; %Radio de la orbita de aparcamiento [~]

```

```

496
497 v0 = b*sqrt((1-mu)/r0); %Velocidad en orbita de aparcamiento [~]
498
499 x0 = [ r0*cos(a)-mu      , ...   %x inicial [~]
500        r0*sin(a)        , ...   %y inicial [~]
501        -(v0-r0)*sin(a)  , ...   %vx inicial [~]
502        (v0-r0)*cos(a)   ];      %vy inicial [~]
503 end
504
505
506
507
508
509
510
511 %% BCR4BP
512 function [dx] = BCR4BP(t,x)
513 %%% Ecuaciones del problema bicircular restringido de 4 cuerpos %%%
514 %
515 %   Datos de entrada:
516 %   - t = Vector de tiempos
517 %   - x = [x,y,vx,vy] - posicion y velocidad en un instante
518 %
519 %   Datos de salida:
520 %   - dx= [vx,vy,ax,ay] - Velocidad y aceleracion en ese instante
521 %
522 %   Funciones necesarias: none
523 %
524 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
525
526 mu = 1.21506683e-2; %Parametro masico Tierra-Luna [~]
527 rho = 3.88811143e2; %Distancia Sol-(Tierra-Luna) [~]
528 oms = 9.25195985e-1; %Velocidad angular del sol [~]
529 ms = 3.28900541e5; %Masa del sol [~]
530 th = oms*t; %Angulo entre el vector S-T y el vector T-L
531
532 % Distancias con la tierra, luna y el sol (respectivamente)
533 r = [ sqrt(( x(1) + mu)^2 + x(2)^2) , ...
534       sqrt(( x(1)-1+mu)^2 + x(2)^2) , ...
535       sqrt(( x(1) - rho*cos(th))^2 + (x(2) - rho*sin(th))^2)];
536
537 % Aceleracione y velocidades
538 dx = [ x(3), x(4), ...
539        2*x(4) + x(1) - ...
540        ((1-mu)*(x(1)+mu))/r(1)^3 - ...
541        mu*(x(1)-1+mu)/r(2)^3 - ...
542        ms*(x(1)-rho*cos(th))/r(3)^3 - ...
543        ms*cos(th)/rho^2 ...
544        , ...
545        -2*x(3) + x(2) - ...
546        ((1-mu)*x(2))/r(1)^3 - ...
547        mu*x(2)/r(2)^3 - ...
548        ms*(x(2)-rho*sin(th))/r(3)^3 - ...
549        ms*sin(th)/rho^2 ]';
550 end
551
552

```

```

553
554 %% Colision
555 function [value, isterminal, direction] = Colision(~, x)
556 %% Calculo de la condicion de colision con la luna o la tierra %%%%%%%%%%
557 %
558 %     Datos de entrada:
559 %     - x = [x,y,vx,vy] - posicion y velocidad en un instante
560 %
561 %     Datos de salida: Condicion de parada para la funcion ode45
562 %
563 %     Funciones necesarias: None
564 %
565 %%%%%%%%%%
566
567 mu = 1.21506683e-2;
568 value = ( or( ((sqrt(( x(1)-1+mu)^2 + x(2)^2)) < 0.0048 ), ...
569             ((sqrt(( x(1) + mu)^2 + x(2)^2)) < 0.017) ));
570 isterminal = 1; % Condicion para detener la integracion del ode45
571 direction = 0;
572 end
573
574
575
576
577
578
579
580 %% GuardarSolucion
581 function [Sol] = GuardarSolucion(Sol,rL4,t,x,alfa,beta,theta,t_orb,x_orb)
582 %%%%%%%%% Guardado de la solucion encontrada %%%%%%%%%%
583 %
584 %     Datos de entrada:
585 %     - Sol     = Estructura a la cual se adira el punto encontrado
586 %     - rL4    = Distancia a L4 en trayecto
587 %     - t      = Tiempo en llegar a L4
588 %     - x      = Posicion al llegar a L4
589 %     - alfa   = Angulo Alpha inicial
590 %     - beta   = Parametro Beta Inicial
591 %     - theta  = Angulo theta inicial
592 %     - t_orb  = tiempo de orbita entorno a L4
593 %     - x_orb  = posicion de orbita en torno a L4
594 %
595 %     Datos de salida:
596 %     - Sol = Estructura con todos los datos guardados
597 %     - *Esta funcion escribe en pantalla cada resultado encontrado
598 %
599 %     Funciones necesarias: None
600 %
601 %%%%%%%%%%
602
603 mu = 1.21506683e-2; %Parametro masico Tierra-Luna [~]
604 r0 = (6378+167)/384400; %Distancia entre orbita ...
605 %de aparamiento y la tierra
606
607 k = length(Sol)+1; %Contador
608 Sol(k).tra.rL4 = rL4; %Distancia a L4 en trayecto
609 [Sol(k).min_rL4,pos]=min(rL4); %Minima distancia a L4

```

```

610 Sol(k).pos = pos; %Posicion de la integracion
611 Sol(k).t_L4 = t(pos)-t(1); %Tiempo en llegar a L4
612 Sol(k).x_L4 = [x(pos,1),x(pos,2)]; %Posicion al llegar a L4
613 Sol(k).vL_L4 = sqrt(x(pos,3)^2+x(pos,4)^2); %Velocidad al llegar a L4
614 Sol(k).VT_L4 = ... %Velocidad Completa
615 (beta-1)*sqrt((1-mu)/r0)+Sol(k).vL_L4;
616 Sol(k).alpha = alfa; %Angulo Alpha inicial
617 Sol(k).beta = beta; %Parametro Beta Inicial
618 Sol(k).theta = theta; %Angulo theta inicial
619 Sol(k).tra.C = Jacobi(x(1:pos,:)); %Constante de Jacobi
620 Sol(k).tra.t = t(1:pos); %Trayectoria (t)
621 Sol(k).tra.x = x(1:pos,:); %Trayectoria(x=[x,t,vx,vy])
622 Sol(k).orb.t = t_orb; %Orbita (t)
623 Sol(k).orb.x = x_orb; %Orbita(x=[x,t,vx,vy])
624 Sol(k).orb.rL4 = ... %Distancia a L4 durante...
625 sqrt((Sol(k).orb.x(:,1)-(0.5-mu)).^2 +... %la orbita
626 (Sol(k).orb.x(:,2) - sqrt(3)/2).^2);
627 Sol(k).orb.MD = max(Sol(k).orb.rL4); %Maxima distancia a L4...
628 %en la orbita
629 disp(['Encontrado (k=',num2str(k),...
630 ')! ...Th=', num2str(theta),...
631 ';B=', num2str(beta),...
632 ';a=', num2str(alfa)]);
633 end
634
635
636
637
638
639
640
641
642 %% createwaitbars
643 function [wtb1,wtb2,wtb3] = createwaitbars()
644 %%% Barras de espera para conocer el estado del calculo %%%%%%%%%%%
645 %
646 % Datos de entrada: none
647 %
648 % Datos de salida: wait bars
649 %
650 % Funciones necesarias: none
651 %
652 %%%%%%%%%%%
653
654 wtb1 = waitbar(0,'Rango de Tiempos');
655 wtb2 = waitbar(0,'Rango de Velocidades');
656 wtb3 = waitbar(0,'Rango de Posiciones');
657
658 pos_w1=get(wtb1,'position');
659 pos_w2=[pos_w1(1) pos_w1(2)-1.5*pos_w1(4) pos_w1(3) pos_w1(4)];
660 set(wtb2,'position',pos_w2,'doublebuffer','on')
661 pos_w2=get(wtb2,'position');
662 pos_w3=[pos_w2(1) pos_w2(2)-1.5*pos_w2(4) pos_w2(3) pos_w2(4)];
663 set(wtb3,'position',pos_w3,'doublebuffer','on')
664 end
665
666

```



```

667
668 %% PlotFullMission
669 function PlotFullMission(Sol,M2Plot)
670 %% Crea una grafica con la trayectoria y orbita %%%%%%%%%%%
671 %
672 %   Datos de entrada:
673 %   - Sol      = Estructura en donde se halla la solucion a graficar
674 %   - M2Plot   = Orbita a graficar (posicion dentro de Sol)
675 %
676 %   Datos de salida:
677 %   - Figura con 4 graficas:
678 %       1: Trayectoria en ejes rotatorios
679 %       2: Trayectoria en ejes inerciales
680 %       3: Orbita en ejes rotatorios
681 %       4: Orbita en ejes inerciales
682 %
683 %   Funciones necesarias:
684 %   - circle
685 %   - SynECI
686 %
687 %%%%%%%%%%%
688
689 t_tra = Sol(M2Plot).tra.t;
690 x_tra = Sol(M2Plot).tra.x;
691 t_orb = Sol(M2Plot).orb.t;
692 x_orb = Sol(M2Plot).orb.x;
693
694 mu = 1.21506683e-2;
695
696 subplot(2,2,1)
697 circle(-mu,0,6371/384400,'b');hold on
698 circle(1-mu,0,1737.4/384400,'r');hold on
699 plot(0.5-mu,sqrt(3)/2,'k^')
700 plot(x_tra(:,1),x_tra(:,2))
701 axis equal
702 xlabel('x [~]')
703 ylabel('y [~]')
704 title('Trayectoria en ejes Rotatorios')
705 subplot(2,2,2)
706 xer_tra = Syn2ECI(t_tra, x_tra, mu);
707 circle(0,0,6371/384400,'b');hold on
708 plot((1-mu)*cos(0:0.01:2*pi),(1-mu)*sin(0:0.01:2*pi),'--k')
709 hold on
710 plot(xer_tra(:,1),xer_tra(:,2))
711 axis equal
712 xlabel('x [~]')
713 ylabel('y [~]')
714 title('Trayectoria en ejes Inerciales')
715 subplot(2,2,3)
716 circle(-mu,0,6371/384400,'b');hold on
717 circle(1-mu,0,1737.4/384400,'r');hold on
718 plot(0.5-mu,sqrt(3)/2,'k^')
719 plot(x_orb(:,1),x_orb(:,2))
720 axis equal
721 xlabel('x [~]')
722 ylabel('y [~]')
723 title('orbita entorno a L4 (ejes rotatorios)')

```

```

724 subplot(2,2,4)
725 xer_orb = Syn2ECI(t_orb, x_orb, mu);
726 circle(0,0,6371/384400,'b');hold on
727 plot((1-mu)*cos(0:0.01:2*pi),(1-mu)*sin(0:0.01:2*pi),'--k')
728 hold on
729 plot(xer_orb(:,1),xer_orb(:,2))
730 axis equal
731 xlabel('x [~]')
732 ylabel('y [~]')
733 title('orbita entorno a L4 (ejes Inerciales)')
734 end
735
736
737
738
739
740
741
742 %% plottarget
743 function plottarget(Sol,t,VT)
744 %%%%% Dibuja una trayectoria conociendo su VT y su T %%%%%%%%%%%
745 %
746 % Datos de entrada:
747 % - Sol = Estructura en donde se halla la solucion a graficar
748 % - t = duracion del trayecto hasta L4
749 % - VT = Velocidad para llegar hasta L4
750 %
751 % Datos de salida:
752 % Datos de salida:
753 % - Figura con 4 graficas:
754 % 1: Trayectoria en ejes rotatorios
755 % 2: Trayectoria en ejes inerciales
756 % 3: Orbita en ejes rotatorios
757 % 4: Orbita en ejes inerciales
758 %
759 % Funciones necesarias:
760 % - PlotFullMission
761 %
762 %%%%%%%%%%%
763
764 [~,b] = find(abs([Sol.t_L4]-t)<0.00001);
765 [~,b2] = find(abs([Sol([b]).VT_L4]-VT)<0.00001);
766 if length(b2)==1
767 PlotFullMission(Sol,b(b2))
768 else
769 disp('Multiples puntos encontrados')
770 end
771 end
772
773
774
775
776
777
778
779
780

```

```
781
782 %% Syn2ECI
783 function [xI] = Syn2ECI(t, xR, mu)
784 %%%% Transforma de ejes rotatorios a inerciales %%%%%%%%%%%
785 %
786 %   Datos de entrada:
787 %   - t = vector de tiempos
788 %   - xR = vector de posicion en ejes rotatorios
789 %   - mu = parametro mu Tierra-Luna
790 %
791 %   Datos de salida:
792 %   - xI = Posicion en ejes inerciales
793 %
794 %   Funciones necesarias: None
795 %
796 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
797
798 [r,c] = size(xR);
799 xI = zeros(r,c);
800
801 xI(:,1) = (xR(:,1) + mu).*cos(t(:)) - xR(:,2).*sin(t(:));
802 xI(:,2) = (xR(:,1) + mu).*sin(t(:)) + xR(:,2).*cos(t(:));
803 xI(:,3) = (xR(:,3) - xR(:,2)).*cos(t(:)) -...
804           (xR(:,4) + xR(:,1) + mu).*sin(t(:));
805 xI(:,4) = (xR(:,3) - xR(:,2)).*sin(t(:)) +...
806           (xR(:,4) + xR(:,1) + mu).*cos(t(:));
807
808 end
809
810 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
811 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Created by Jose A. Reina on Mar/2023 %%%%%%%%%
812 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```