Idolatría a las matemáticas

Noemí de Castro García [*]

Departamento de matemáticas. Universidad de León. [**]

5 de julio de 2013

Resumen

El trabajo es un análisis, desde el punto de vista axiomático, de los números realistas y la geometría discreta creados en [1]. Primero se irán viendo las diferentes recomendaciones y errores que se han encontrado en el libro, para finalizar con una propuesta para comenzar una formalización que se considera absolutamente necesaria.

Palabras clave: Cognomática, Números realistas, sociedad informacional, MSC2010: 03A05, 03D78.

1. Introducción

La primera aproximación al tema se centra, indudablemente, en el análisis de la relación existente entre la matemática y la sociedad actual. Castells ([2]) la califica como sociedad informacional. Se instauran, además, el conocimiento y la información como fuentes de valor y de poder.

[*] ncasg@unileon.es

[**] Remitido por Miguel Carriegos Vieira

¿Qué papel tiene la matemática en este escenario? Davis y Hersh ([3]), en un texto de sugerente título, *El sueño de Descartes: El mundo según las Matemáticas*,hablan de una matematización prescriptiva presente desde la antigüedad en situaciones tales como la medida de magnitudes físicas, el establecimiento de calendarios y relojes, los sistemas monetarios, los planos para construir máquinas y edificaciones, etc.

Pero esta incidencia se ha incrementado casi ilimitadamente hasta nuestros tiempos y ha penetrado numerosos sistemas: de calificación personal(cociente intelectual, calificaciones escolares...), de seguros, de comunicaciones, monetarios, de consumo, de armamentos, de votación, de transporte... Son sistemas que regulan y alteran nuestra vida y caracterizan a nuestra civilización. Y todos ellos reflejan una matematización prescriptiva, desconocida para la gran mayoría de personas.

En esta misma línea, Skovsmose ([4]) suscribe también la tesis de que la matemática tiene la capacidad de moldear a la sociedad, por ser el principio básico para el diseño de la tecnología, particularmente de aquella que sustenta los sistemas de información y comunicación.

La matemática es fruto de un proceso de construcción humana como respuesta a la tarea de resolver problemas y, como tal, fruto de un proceso cultural, imposible de ser separada del contexto histórico y social en que se elabora. Y, como construcción humana, también es falible. **Verla de esta forma, como un proceso y no como un producto elaborado y formal que hay que transmitir, es determinante para entender las matemáticas y para trabajarlas.Es ver las matemáticas como oficio y no como lección.**

Los conceptos matemáticos con frecuencia han tenido su origen en el mundo físico, real, para resolver necesidades cotidianas y han tardado años o siglos incluso en establecerse.

Gran parte de la actividad matemática puede ser descrita como procesos de modelización, en los que interpretamos de forma abstracta, simplificada e idealizada, un objeto, un conjunto de relaciones o un proceso evolutivo que surge de la descripción de la realidad. Este proceso de modelización se desarrolla siguiendo cinco fases:

1. La observación de la realidad

2. Describir de forma simplificada la realidad

3. Construir el modelo.

4. Trabajar el modelo matemáticamente (en abstracto)

5. Uso del modelo para predecir resultados de la realidad.

El propósito de construir un modelo es obtener una mejor comprensión de una parte de nuestro universo y, así, poder predecir y si es posible controlar esta parte de la realidad. Todas las fases de modelización son igualmente importantes en la actividad de modelización.

Por este motivo, y para cosntruir una herramienta fuerte, debemos cubrir, con rigor, la parte matemática de todo aquello que queramos modelar.

Existen tres vertientes, desde el punto de vista filosófico, desde las que podemos acercarnos a la ciencia:

1. Método axiomático: utilizado en matemáticas y física teórica.

2. Método científico: utilizado en ciencias como la biología o la física experimental

3. Dialéctica: cuyo objetivo es buscar algo que funcione, contar con diferentes opciones y quedarnos con la mejor.

1.1. El método axiomático

Las ciencias formales (lógica y matemática) utilizan el método axiomático-deductivo. Dicho método consiste en tomar como punto de partida una serie de axiomas (aquello que es considerado como verdadero sin necesidad de prueba o demostración) y, a partir de ellos proceder deductivamente.

Se entiende por deducción el proceso de razonamiento que permite derivar de una o varias proposiciones dadas (llamadas axiomas o premisas) otra que es su consecuencia lógica necesaria y que se denomina conclusión([6]).

Un sistema formal se compone de lo siguiente:

1. Un conjunto finito de símbolos que se utilizan para la construcción de fórmulas. Es el alfabeto o vocabulario.

2. Una gramática formal, es decir, un mecanismo para la construcción de fórmulas bien formadas.

3. Un conjunto de axiomas que deben ser fórmulas bien formadas.

4. Un conjunto de reglas de inferencia (mediante las cuales se obtienen conclusiones en base a la información conocida)

5. Un conjunto de teoremas que se pueden derivar de los axiomas o de otros teoremas mediante reglas de inferencia.

Las propiedades que deben cumplir los sistemas formales son:

1. Consistencia: No ha de ser posible demostrar en él una fórmula y su negación.

2. Completitud: Todas las fórmulas lógicamente válidas (verdaderas bajo cualquier interpretación) han de ser demostrables a partir de los axiomas y las reglas de inferencia.

3. Decidibilidad: Un sistema es decidible cuando existe al menos un método efectivo (un algoritmo) para decidir si una fórmula cualquiera del lenguaje del sistema es lógicamente válida o no.

En los sistemas formales se entiende la Verdad como Coherencia. Esto es, la verdad o falsedad de un enunciado depende de la relación que ese enunciado mantiene con otros enunciados, perteneciendo todos a una teoría. Un enunciado es verdadero si se encuentra en la adecuada relación de implicación con otros enunciados.

La axiomática que sigue se basa en tres principios fundamentales:

-Principio de no contradicción: Afirma que una proposición y su negación no pueden ser ambas verdaderas al mismo tiempo y en el mismo sentido

-Principio de identidad: Afirma que toda entidad es idéntica a sí misma.

-Principio del tercero excluido: Afirma que la disyunción de una proposición y su negación es siempre verdadera.

Un sistema axiomático puede tener expresados sus axiomas de manera formal o de manera informal:

Una axiomatización formal usa un lenguaje formal y en él cada axioma es una cadena finita de signos en el alfabeto del lenguaje formal, siguiendo reglas combinatorias que hacen de la secuencia una fórmula bien formada.

Una axiomatización informal usa una lengua natural y definiciones no ambiguas, los libros de matemática y otras disciplinas formales normalmente redactan los axiomas de esta manera.

Los sistemas de axiomas formales son más sencillos de estudiar y son preferibles para caracterizar las propiedades de los sistemas matemáticos. En particular admiten una caracterización semántica muy clara en la teoría de modelos y sus propiedades deductivas pueden ser tratadas en la teoría de la demostración. Por el contrario, las axiomatizaciones informales sólo son útiles cuando se tiene un modelo concreto en mente y se pretenden buscar propiedades que se cumplen en el modelo.

1.2. La dialéctica como método de conocimiento

Dentro de la dialéctica de la naturaleza ha surgido un componente nuevo que, a su vez, se presenta con dos formas específicas analíticamente diferentes: la primera es la dialéctica de la sociedad, y la segunda es la dialéctica del pensamiento.

La humanidad, según esta vertiente,ha avanzado gracias a la dialéctica permanente entre la la acción con el pensamiento, la práctica con la teoría. Es decir, la praxis.A largo plazo y en última instancia, en la praxis el papel decisivo lo lleva la acción y luego, siempre desde una perspectiva amplia, totalizante y sistémica de la historia, la teoría. Por esto hay que decir que en el principio no fue el verbo, como dicen los cristianos, sino la acción, como dicen los materialistas; y después la teoría ([7]).

Dentro de este proceso de interacción, está el conocimiento y el lenguaje, que en el tema que ahora nos concierne, es la síntesis de ambos instantes de la praxis. Sin el conocimiento la praxis no existiría

Dentro de esta complejidad, no tiene sentido buscar una única causa para cada proceso que lo explique todo, ya que en realidad existe un conjunto de interacciones que funcionan unas veces como causas y otras como efectos, y viceversa.

La dialéctica como método de conocimiento y transformación del mundo parte de esta realidad que va siendo conocida e investigada cada día más.Función decisiva tiene ,en la dialéctica, el concepto y la categoría de contradicción.

Es decir, el método dialéctico exige un uso preciso de la categoría de contradicción para cada problema concreto que estudie, no debiendo utilizarse una única definición para todos los casos, en todo momento y bajo todas las interacciones de los procesos.

Además de esto, el método dialéctico recurre también al empleo de pares de contrarios en necesaria acción recíproca como son el análisis y la síntesis, la inducción y la deducción, lo particular y lo general, lo histórico y lo lógico, lo diacrónico y lo sincrónico, lo concreto y lo abstracto, etc., que también sirven como categorías filosóficas en determinados casos.

Las leyes de la lógica formal corresponden a esta concepción, un método simple que sirve para situaciones simples y estáticas, de fácil e inmediata comprensión.

No podemos extendernos ahora en las diferencias y relaciones entre las leyes y las reglas de la lógica formal, que en un momento concreto del proceso de pensamiento se convierten unas en otras, según los casos.

Las leyes de la lógica formal son varias, pero las más básicas son las tres sistematizadas por Aristóteles y la cuarta añadida muy posteriormente por Leibniz, aunque estrictamente no es una ley específica de la lógica formal sino que vale para toda forma de pensamiento científico.

En estas acciones simples y superficiales usamos un concepto de verdad superficial y simple, que es el expresado por la lógica formal que se mueve con conceptos más abstractos que los de la dialéctica. La lógica formal tiene una validez innegable.

Comprobamos así que el método de pensamiento formal en la vida cotidiana encuentra su límite cuando aparecen las contradicciones. Es en estos niveles simples en donde la lógica formal muestra toda su potencia innegable, y también en los momentos del análisis de las subsistemas que componen el todo.

1.3. El método científico

Es el proceso en el cual se usan experimentos para contestar preguntas.Posee un modo ordenado de proceder para el conocimiento de la verdad, en el ámbito de determinada disciplina científica([5]).

Podemos concebir el método científico como una estructura, un armazón formado por reglas y principios coherentemente conectados, los cuales aseguran que la ciencia avance al verdarero conocimiento de las cosas

Pasos del método científico.

1. Observación
2. Preguntas
3. Hipótesis
4. Experimentación

5. Conclusiones

Mediante la observación nosotros identificamos realidades o acontecimientos específicos del cosmos a través de nuestros sentidos. Una vez que se ejecuta la observación, surgen una o más preguntas generadas por la curiosidad del observador. La pregunta debe ser congruente con la realidad o el fenómeno observado, y debe adherirse a la lógica.

Luego, el observador trata de dar una o más respuestas lógicas a las preguntas. Cada respuesta es una introducción tentativa que puede servir como una guía para el resto de la investigación. Estas soluciones preliminares a un problema son las hipótesis.

Las predicciones son sometidas a pruebas sistemáticas para comprobar su ocurrencia en el futuro. Estas comprobaciones en conjunto reciben el nombre de experimentación.

Luego de la experimentación la hipótesis original es evaluada y se determina si es verdadera o falsa.

De acuerdo a eso se puede concluir si hemos llegado una teoría o ley. □

Las tres son válidas,pero disjuntas: es decir, si nos queremos acercar al conocimiento debemos hacerlo en base a uno de los modelos, y restringirnos a él. De la misma manera, no debemos esperar la aprobación de los expertos que trabajan con modelos diferentes.

Para dar una teoría de la cognomática, primero debemos saber qué buscamos. Se busca trabajar en un ámbito de ingeniería, en el que las matemáticas que tenemos, no son útiles. Por lo tanto, tendremos que idear unas nuevas matemáticas, que son la herramienta fundamental en el área. Si queremos trabajar con unas matemáticas nuevas, como muchos autores han hecho antes, nuestro primer paso debe ser la formalización y la creación de una axiomática respetada por la comunidad experta.

Aunque en el libro se haga una crítica al modelo axiomático, se tiende más hacia el punto de vista dialéctico que al método científico. Pero, incluso en esta vertiente, se debe tener claro que no hay que buscar una teoría que nos valga para todo.

Proponemos la búsqueda de un sistema general: donde intervenga la axiomática matemática que le proveerá de validez en el ámbito científico y generalidad a la idea, un subsistema que englobe la puesta en práctica a otras ciencias como la física, la automática, la informática... Y , por último,un subsistema de relaciones.

Nuestro análisis, y debido a la creencia en que el modelo matemático es el más eficiente, ha sido desde el punto de vista axiomático.

2. Definiciones de definición e inconsistencia

Para justificar de una manera más eficiente, las mejoras propuestas, lo primero que debemos hacer es saber qué significa dar una definición.

Definición (en su acepción número dos de la RAE): *Proposición que expone con* ***claridad y exactitud*** *los caracteres genéricos y diferenciales de algo material o inmaterial*

Además, el propio autor hace su versión en [1] de definición consistente y de los aspectos a tener en cuenta a la hora de utilizar deficiones científicamente:

Las definiciones sirven para conectar las palabras con los conceptos. Y la forma de conseguirlo es describiendo los conceptos. Las definiciones relatan un conjunto de características del concepto correspondiente. Normalmente una definición no incluye todas las características que tiene el concepto definido. Suele incluirse un número que se considera suficiente para identificarlo correctamente. Limitación que produce, a menudo, cierta confusión en la interpretación de algunas definiciones.

Para crear una definición es imprescindible tener, previamente un concepto en la cabeza...Una vez que un ser humando tiene creado un concepto en su cabeza puede pasar a representarlo mediante el uso del lenguaje. Necesita construir una definición y asociarle una palabra que identifique al concepto en cuestión. A partir de la definción puede ayudar a otro ser humano a reproducir el concepto en su cabeza. A eso lo denominamos transmisión del conocimiento.

Las definiciones se construyen enlanzado palabras mediante reglas sintácticas del lenguaje. Pero es fundamental constatar que una correcta construcción sintáctica no implica una definición correcta. ***Para que una definición sea correcta debe relatar con rigor las características del concepto correspondiente****.*

Una definición ***inconsistente*** *es aquella que no sabemos lo que significa...Para que una palabra tenga asignado un significado es imprescindible que la definición correspondiente sea consistente y además correcta.*

... ***El conocimiento en general y la ciencia en particular deben extremar las precauciones de un uso poco riguroso del lenguaje. En caso contario, las consecuencias pueden ser lamentables****.*

Evidentemente, uno de los aspectos a valorar es que las propias definiciones propuestas en el libro,cumplan con los requisitos que el autor supone necesarios para tener una definición correcta, y no llegar a contradicciones que supongan inconsistencia.

A continuación se van desarrollando el contenido de [1], en negrita se encuentran los resultados plasmados en el libro. Las mejoras propuestas parten de que, además de errores matemáticos, no cumplen con las definiciones dadas en el libro [1].

3. Construcción y definición

Los números realistas se formulan como alternativa a los números reales. Son números discretos, con propiedades discretas y pensados para representar sistemas discretos.

Los números realistas permiten representar la dispersión de características de un elemento o sistema, la borrosidad, la probabilidad y la fiabilidad, es decir, relaciones escalonadas entre variables. No precisan, además, realizar aproximaciones cuando se hacen los cálculos.

Los números enteros, para la Cognomática, constituyen un conjunto acotado (particularidad)y los números realistas se construyen a partir de dichos números. Son números que pueden tener muchas aplicaciones.([1])

La primera observación que haremos, desde el punto de vista axiomático, es la siguiente: En ningún área se debe considerar que el conjunto de los números enteros es un conjunto acotado. Si no quiere tomarse el conjunto de infinitos números enteros, por el motivo que sea, se puede coger un subconjunto acotado de $U \subset \mathbf{Z}$.

Ahora bien, si queremos trabajar en este conjunto U, entonces debemos especificar:

1. La cota α superior y la cota β inferior. Más adelante, se deben entonces fijar de igual manera ciertas hipótesis para las operaciones que no contradigan el hecho de estar trabajando en este conjunto.

   Evidentemente, trabajar con un conjunto acotado nos supondrá varios problemas en las operaciones que suponen que éstas no tengan sentido.

2. Por el contrario, si la cota es variable, eso implica que se puede extender, de tal manera que siempre podremos encontrar una cota mayor (resp. menor) que la anterior, por tanto, $U = \mathbf{Z}$ y los números realistas no estarían dentro de un conjunto acotado.

Si se desea especificar, por ejemplo, cuántas naranjas entran en un kilogramo, podrá expresarse mediante un número realista.

Ejemplo 3.1. $(3, 4, 5, 6)$ *naranjas/Kg.*

En general, y de forma simbólica, un número realista puede representarse como sigue:

Definicion 3.2. ***Un número realista es de la forma:***

$(n, n+1, n+2, ..., n+q) = (n; n+q)$ *siendo* $n = m - a$ *y* $n + q = m + b$

Cuando damos una definición simbólica, se debe poner qué tipo de número representa cada letra. Además, dada la opinión del autor del libro con respecto a lo que es una definición *consistente* creo que falta rigor, y además, una interpretación.

Se da una propuesta de mejora en la sección de formalización.

Definicion 3.3. ***Se define el rango de un número realista como la cantidad de valores que contiene. En la formulación anterior, el rango se expresa como sigue:***

$Rango = q + 1 = a + b + 1$

El rango (cuando no estamos hablando de matrices), se suele ver como el recorrido, es decir, la diferencia que hay entre el valor máximo y mínimo de un intervalo, o una lista de datos.

Por ejemplo: el rango intercuartílico, es la diferencia entre el tercer y el primer cuartil.

De la misma forma, el rango de un número realista precisamente se define matemáticamente como la diferencia entre el valor del último número principal y el primero que conforman el realista. Sin embargo, se define como el número de valores que lo forman. Es decir, la definición es contradictoria.

Por ejemplo: si elegimos el número realista $(5, 6, 7, 8)$. En este caso $n = 5, n + q + 1 = 8, q = 2$.

Si cogemos la definición de rango, matemáticamente hablando, $Rango = 3$, es decir, la diferencia entre 8 y 5.

Pero si obtenemos el rango según la definición informal: $Rango = 4$, ya que el número realista en cuestión tiene 4 valores principales.

3.1. Ponderación y probabilidad

Definicion 3.4. ***Se llama ponderación o probabilidad del número realista a un valor que sirve para indicar el peso o la probabilidad de cada uno de los valores***

del número realista.

Este valor, se denota como subíndice de cada número o bien correlativamente entre corchetes al final del número.

Ejemplo 3.5. $(5_1, 6_6, 7_8, 8_2) = (5; 8[1, 6, 8, 2])$

Aunque la elección de los nombres es decisión del autor, siempre debe tenerse en cuenta que estamos trabajando con nombres que no son nuevos en el área, y por tanto, debemos respetar en la medida de lo posible el significado que tienen esos nombres.

Argumentando de la misma manera que anteriormente, no se deben utilizar nombres que ya están más que asentados en ciertas áreas, queriendo interpretarlos de una manera diferente. De la misma manera, si queremos nombrar un concepto, cuya representación también es conocida, lo más aconsejable es darle el mismo nombre que se utiliza de forma habitual.

En este caso, con la definición de ponderación o probabilidad, se encuentran varios errores:

1. No es lo mismo ponderación que probabilidad. El concepto de los números secundarios o subíndices de un número entero, tiene más que ver con la ponderación. La probabilidad es una función que asigna a cada suceso, un valor entre 0 y 1. Por tanto, no es posible encontrar una probabilidad de 7. De hecho es contradictorio.

   Todo lo relativo al concepto de ponderación o probabilidad parte de que se elige una muestra, hecho que debería mencionarse antes de introducir el concepto de probabilidad o ponderación. La ponderación w de cada valor principal es el peso, o más bien lo que conocemos habitualmente como *frecuencia absoluta* del valor principal en una muestra de tamaño n.

   La probabilidad, en cambio, es lo que conocemos como *frecuencia relativa*:es decir, $\frac{w}{n}$.

   Las definiciones de frecuencia absoluta (pesos o ponderaciones) y frecuencias relativas (probabilidad en tanto por uno) son definiciones, que el autor consideraría consistentes, por lo que sería recomendable usarlas debido a que ya están consolidadas no sólo en el área de matemáticas, sino en el resto de ámbitos tanto de las ciencias técnicas como sociales.

2. Uno de los problemas que surgen de la definición de ponderación es que no sabemos a qué conjunto numérico pertenecen estos subíndices. Si pertenecen a los números naturales, evidentemente, se supone que también pertenecerán a un subconjunto acotado de los naturales (de otra forma, sería contradictorio con la suposición de que los enteros están acotados). Por lo tanto, necesitaremos fijar una cota, y decidir, hasta qué punto podemos coger muestras de tamaños grandes.

Volviendo al ejemplo de las naranjas, es posible indicar cuál es la probabilidad de que el número de naranjas que entran en un kilo sea uno u otro. Los datos del ejemplo que se muestran a continuación indican que de cada 20 veces que se pese un kilo de naranjas, en una ocasión entrarán 3 naranjas, en ocho entrarán 4, en otras 8 entrarán 5 y en 3 ocasiones entrarán 6 naranjas.

$(3, 4, 5, 6[1, 8, 8, 3])$ **naranjas/Kg.**

En este ejemplo, dado por el autor, se puede ver claramente, que utiliza el término probabilidad con su uso habitual, es decir, como la frecuencia relativa de cada valor principal del número realista, con respecto al tamaño total de la muestra elegida.

Por tanto, se reivindia el hecho de que NO debe llamarse a los subíndices ponderación o probabilidad, como si ambos nombres significaran lo mismo. También se recomienda usar los nombres habituales (frecuencia absoluta y relativa).

Se esta desarrollando una sintaxis específica para facilitar la expresión simplificada de los valores de ponderación en aquellos casos que sea posible.

En general, y de forma simbólica, un número realista con la ponderación, puede representarse como sigue:

$(n, n+1, n+2, ..., n+q[a_1, a_2, ..., a_{q+1}] = (n; n+q[a_1, a_2, ..., a_{q+1}]) = ...$

Volvemos a recalcar, que cuando damos una definición y más, con suposiciones de conjuntos actoados interviniendo, se debe definir claramente a qué conjuntos numéricos pertenece cada valor, y cuáles son las cotas fijadas.

Definicion 3.6. ***Se define la dimensión de un número realista como la suma de todos los valores de ponderación.***

$Dimensión = a_1 + a_2 + ... + a_n$

La dimensión de un número realista, no es más que el tamaño muestral que se elige, que habitualmente se denota por n o N.

Realmente, se considera que la palabra *dimensión* no es la mejor escogida para el significado que se busca. Más bien, se puede denotar como tamaño muestral o valor de la muestra ,M, como el propio autor define de forma posterior, dando dos notaciones y nombres diferentes al mismo concepto.

Se propone la dimensión, como el número de valor principales que forman cada número realista. De esta manera, podríamos clasificar los números realistas según la dimensión y nos puede ser útil a la hora de descomponer un número realista.

3.2. Fiabilidad

Los números realistas también aceptan la posibilidad de indicar la fiabilidad de una muestra. La fiabilidad se deduce comparando el tamaño de la muestra y el tamaño del colectivo, en el que se ha tomado la muestra. El tamaño de la muestra queda indicado por la dimensión del número. El tamaño del colectivo, si se desea puede expresarse como sigue:

$(3, 4, 5, 6[1, 9, 8, 2] \mid 100) = (3; 6[1, 9, 8, 2] \mid 100) = ...$ **naranjas/Kg**

El número anterior indicar que la información de probabilidad que se ofrece se ha obtenido comprobando, de cada 100 Kg de naranjas, veinte.

Ambos datos, permiten deducir la fiabilidad de la información ofrecida.

La fiabilidad de una muestra se puede ver desde dos puntos de vista:

1. Si lo queremos ver como la representación de la fiabilidad de los componentes de la muestra, ya existe para ello, una definición: la fiabilidad de una componente es igual a la probabilidad de que la componente no falle; es decir, que realice la función encomendada durante el intervalo de tiempo $[0, 1]$. Para poder calcularla, se deben suponer componentes idéntidos sometidos a pruebas idénticas para comprobar el tiempo que tardan en fallar. Por lo tanto, no tendría nada que ver con la definición de fiabilidad dada por el autor.

2. La otra manera de ver la fiabilidad, más acorde con la interpretación dada en el libro, es la determinación de si la muestra que hemos obtenido es representativa. Es decir, si los datos están tomados de una manera confiable y con sentido.

   Ahora bien, si la interpretación de la fiabilidad es ésta última, se deben imponer varias condiciones con respecto a esta definición:

a)para que los resultados que aporta el número realista sean fiables, se debe imponer,lo primero, que la muestra sea representativa.

b)Además, para que la muestra sea representativa del colectivo, sus elementos deben estar idénticamente distribuidos y haber sido seleccionados bajo las mismas condiciones.

c)Si queremos que la razón entre el tamaño muestral y el tamaño del colectivo o tamaño poblacional sea un indicador de la fiabilidad del número realista, lo primero que debemos determinar es qué límites o valores hacen que consideremos fiable un número realista.

Es decir, no podemos decir que un elemento es largo si no tenemos una referencia de la unidad o magnitud que determina que un objeto es largo.

Para ilustrar lo anterior pondremos un contraejemplo que deja clara que la falta de hipótesis supone la incosistencia de la definición, no sabemos lo que significa ser fiable.

En el ejemplo de las naranjas, vamos a valorar 80 kilos (muestra) siendo 100 kilos el tamaño del colectivo. Como no tengo ninguna hipótesis sobre cómo elegir la muestra, voy a coger los 80 kilos que tienen las naranjas más grandes. Según la definición, mi muestra es fiable al (80/100 = 0,8) 80 %. Este porcentaje podríamos considerarlo como una alta fiabilidad, aunque tampoco se deja clara en la definición los límites entre los que deberíamos considerar una muesra fiable, y en cambio, no es en absoluto representativa del objetivo que queremos entrar a valorar con nuestro número realista, ya que si cogemos los kilos con las naranjas más grandes, tendremos menos naranjas en cada kilo.

El tamaño del colectivo muestreado puede indicarse como sigue:

Notation. ***'T' representa el tamaño total del colectivo existente o estimado y al que pertenece la muestra usada.***

Llamamos 'M' al valor de la muestra tomada. En el ejemplo: $M = 17$

Una observación con menor importancia que podemos hacer aquí, es que en el momento que hemos definido la notación de T y M, no es necesario incluir las comillas cada vez que las nombramos.

Ahora bien, no es riguroso, dar dos nombres y notaciones diferentes para representar el mismo concepto, es el caso de dimensión y valor de la muestra M

La representación de 'T' admite varias situaciones:

1. **Que se conozca el valor de 'T', en cuyo caso puede expresarse:**

   a)**mediante un número**

   b)**mediante el signo =, significando que** $M = T$

   c)**mediante un número precedido por el signo x, significando que'T' es igual a 'M' multiplicado por el número expresado.**

2. **Que no se conozca el valor de 'T', en cuyo caso puede expresarse mediante:**

   a)**mediante un número precedido por el signo >, significando que 'T' es mayor que el número expresado.**

   b)**mediante el signo >. En este caso se considera que** $T > M$

Encontramos dos errores importantes en la representación de T cuando el valor no es conocido:

1. Si no conocemos el valor de T, no podemos determinar que es mayor que ningún número, excepto el caso expuesto en el siguiente item. Es decir, no estamos hablando de una condición, estamos refiriéndonos a la representación de T. No podemos decidir si es mayor que otro valor, cuando desconocemos el de T.

2. Cuando desconocemos el valor de T, lo que sí sabemos, es que *como poco* será igual tal tamaño muestral, de tal manera que la opción b) sería incorrecta y se recomienda utilizar: $T \geq M$

La relación entre 'M' y 'T' determina el grado de *fiabilidad* de la muestra usada. En el caso particular de que 'M' sea igual a 'T', la *fiabilidad* es la máxima posible.

Supongamos que se desea representar, por ejemplo, la tolerancia en la longitdu de un determinado tipo de tornillos. Para ello puede expresarse la longitud con el siguien número realista:

Longitud del tornillo=$38;42[4,20,600,24,3]$ |**x**1000)**mm**

La expresión anterior indica que de cada 651 tornillos hay 4 que miden 38mm, 20 que miden 39mm, 600 que miden 40mm, 24 que miden 41mm y 3 que miden 42mm. Se indica además que la muestra se ha obtenido comprobando un tornillo de cada mil que se han fabricado, dato que indica la fiabilidad de la muestra.

3.3. Parámetros de un número realista

Cada número realista lleva asociados cuatro parámetros que son:

1. **El valor: que por defecto se considera el menor valor de losnúmeros principales.**
2. **El rango: es igual a la cantidad de elementos que forman el número.**
3. **La dimensión: es igual a la suma de las ponderaciones.**
4. **La fiabilidad: viene definida por el contenido del símbolo T.**

Los números realistas, por disponer de cuatro parámetros, posee una gran caàcodad expresiva. Permiten representar sitaciones reales muy complejas y operar con ellas.

4. Las operaciones

Con respecto a las operaciones definidas se han encontrado algunas inconsistencias que hacen surgir diferentes dudas.

1. Hemos supuesto que trabajamos en un conjunto acotado. Tanto para los valores principales como para los subíndices.Pero, ¿qué ocurre si al hacer operaciones de suma y producto, el resultado se sale de nuestro conjunto acotado? Aquí llegamos a un problema; por un lado, si las cotas se pueden extender para no tener este problema, entonces no estaríamos trabajando en un conjunto acotado. Pero, si ponemos cotas, evidentemente las operaciones no cumplirán la propiedad asociativa y las operaciones dejarían de ser leyes de operación interna, habría que estudiar qué supone este hecho en la interpretación de los resultados.

2. Un problema, parecido al anterior, lo tenemos con los tamaños poblacionales. En el libro se definen las operaciones sin que el tamaño del colectivo se vea afectado. Pero eso no es posible, ya que si sumamos dos números realistas pertenecientes a diferentes muestras de distintos colectivos, los tamaños poblaciones y muestrales también varían.

   Por otra, parte,¿Qué ocurre al operar si M y T se salen de las cotas?

La única condición que implicaría que los tamaños poblacionales no varían, es el caso en el que sólo se pueden operar muestras disjuntas del mismo colectivo. Pero hay que tener en cuenta la problemática de la interpretación que se ha dado de los números realistas con respecto a la probabilidad.

3. Cuando definimos una operación, debemos definir una ley, de forma genérica para luego poder aplicarla a casos particulares. En el libro se habla de una generalización que nunca llega a aparecer. Además, se deben especificar, y demostrar las propiedades de cada operación.

4. De la misma manera, es necesario demostrar el concepto de que una operación es inversa de otra.

5. Tanto la sustracción como la división no se pueden definir hasta que no estén formalizadas la adición y el producto. Además, con respecto a la sustracción debemos tener cuidado, ya que para la suma secundaria sólo tiene sentido en el caso de que el minuendo sea mayor que el sustraendo.

6. Por otra parte, existen operaciones sólo definidas cuando los subíndices son unos. Se aconseja buscar una formalización más general.

7. La división se define con un algortimo.Un algoritmo es un procedimiento con principio y fin y con una sucesión finita de pasos que ejecutados ordenadamente del primero al último nos permiten resolver un determinado tipo de operaciones. Los algoritmos operacionales surgen una vez se ha definido una operación y se han utilizado las propiedades de ésta. Entonces la forma de hacer la operación es cada vez más rápida y se va buscando un procedimiento. Pero el algoritmo sin concepto ni propiedades no tiene sentido.

Por los motivos anteriormente expuestos, se hace una introducción a la formalización de algunas de las operaciones propuestas en el libro, así como la definición de número realista.

Las propiedades de las operaciones así como la demostración de la existencia de operaciones inversas no se desarrollarán ya que, hacerlo, formaría parte de un trabajo de investigación mucho más global. Ahora bien, con la propuesta hecha, esperamos que sea más sencillo lograr una axiomatización de los conceptos.

Los ejemplos, están tomados del libro [?], para asi poder comprobar que nuestra formalización funciona en el sentido que el autor quiere.

5. Formalización: Construcción y definición del número realista

Definicion 5.1. *Un número realista $r \in \mathcal{R}$ es una $n+q+1$-upla*

$$r = (n_{a_1}, n+1_{a_2}, \dots, n+q_{a_{n+q+1}} | T)$$

siendo $n, q \in \mathbb{Z}$,$a_1, \dots, a_{n+q+1} \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{i=1}^{n+q+1} a_i = M$ con $M \leq T$, y $T, M \in \mathbb{N}$.

El conjunto de todos los número realistas los denotamos por $\mathcal{R}$.

Nota 5.2.
1. *Los valores $(n, n+1, \dots, n+q)$ se denominan* valores principales *y son valores consecutivos.*
2. *Los valores $(a_1, a_2, \dots, a_{n+q+1})$ se denominan* valores secundarios *y representan la frecuencia absoluta del valor principal asociado en una muestra de tamaño M.*
3. *El valor T es el tamaño de la población o del colectivo del que se ha extraído la muestra anterior.*
4. *Mediante las frecuencias absolutas y el tamaño muestral, podemos obtener las frecuencias relativas o probabilidades de cada valor principal del número realista.*

Definicion 5.3. *Llamaremos rango del número realista $r \in \mathcal{R}$ a la diferencia entre el valor principal más alto y el más bajo.*

$rg(r) = (n+q+1) - (n) = q+1$

Definicion 5.4. *Llamaremos dimensión del número realista $Dim(r)$, al número de valores principales que tiene.*

5.1. Expresión en potencias de base diez de un número realista

Todo número realista se puede expresar de forma decimal. Dado $f = (n_{a_1}, n+1_{a_2}, \dots, n+q_{a_{q+1}} | T)$ decimos que la forma decimal de f es

$$f = (a_1 10^n + a_2 10^{n+1} + \dots + a_{q+1} 10^{n+q} | T)$$

6. Formalización: Las operaciones

En nuestro caso, no tendremos en cuenta las T en el sentido de que nuestro conjunto no estará acotado, ya que en ese caso,si al sumar nos pasamos pueden ocurrir varias cosas:

- Que al pasarse le demos el valor o la cota máxima, entonces no tendríamos la propiedad asociativa.

-Que al pasarse la operación no tenga sentido, entonces no existiría la definición.

Además, también deberíamos saber si podemos operar números realistas de diferentes muestras, o por el contrario, sólo debemos operar números realistas que pertenezcan a muestras disjuntas de la misma población. Elegir uno u otro camino, determina completamente la definición e interpretación de número realista y sus operaciones.

Por tanto, a partir de ahora trabajaremos con el conjunto de los enteros y de los naturales sin acotarlos.

Sólo definiremos las sumas y los productos, ya que como he dicho anteriormente, consideramos que hasta que estas operaciones no estén debidamente formalizadas, no debería entrarse a definir sustracción y división. 7uyhgv

Definicion 6.1. *Definimos la suma secundaria de dos números realistas como*

$$(\alpha|T) + (\beta|Q) = (\alpha + \beta|T + Q)$$

siedo $\alpha + \beta$ *la suma natural de las partes principales en su forma decimal*

Ejemplo 6.2. *Consideremos los números realistas* $f_1 = (5_1, 6_6, 7_8, 8_2)$ *y* $f_2 = (6_3, 7_2, 8_4, 9_2)$. *Las representaciones decimales de las partes principales son* $10^5 + 6*10^6 + 8*10^7 + 2*10^8$ *y* $3*10^6 + 2*10^7 + 4*10^8 + 2*10^9$. *Si sumamos queda*

$$10^5 + 6*10^6 + 8*10^7 + 2*10^8$$

$$3*10^6 + 2*10^7 + 4*10^8 + 2*10^9$$

$$-------------------$$

$$10^5 + 9*10^6 + 10*10^7 + 6*10^8 + 2*10^9$$

cuya representación realista es $(5_1, 6_9, 7_{10}, 8_6, 9_2)$. *De manera que* $f_1 + f_2 = (5_1, 6_9, 7_{10}, 8_6, 9_2|35)$

Proposicion 6.3. *El conjunto de los números realistas junto con la suma secundaria,* $(\mathcal{R}, +)$, *es un monoide abeliano, es decir,* $+$ *es una operación interna asociativa, con elemento neutro y conmutativa.*

Demostración. Se deduce de la representación decimal de los números realistas y por ser la suma de números naturales una operación interna asociativa y conmutativa con elemento neutro. El elemento neutro para los números realistas es $(0|0)$. □

Definicion 6.4. *Definimos la suma principal de dos números realistas como*

$$(\alpha) \oplus (\beta) = (\alpha * \beta)$$

siedo $\alpha * \beta$ el producto natural de las partes principales en su forma decimal

Ejemplo 6.5. *Consideremos los números realistas $f_1 = (6_1, 7_1, 8_1|3)$ y $f_2 = (3_1, 4_1|2)$. Las representaciones decimales de las partes principales son $10^6 + 10^7 + 10^8$ y $10^3 + 10^4$. SI operamos queda.*

$$\begin{aligned}(10^6 + 10^7 + 10^8) * (10^3 + 10^4) =& (10^6 + 10^7 + 10^8) * 10^3 + \\ & (10^6 + 10^7 + 10^8) * 10^4 = (10^9 + 10^{10} + 10^{11}) + \\ & (10^{10} + 10^{11} + 10^{12}) = 10^9 + 2 * 10^{10} + 2 * 10^{11} + 10^{12}\end{aligned}$$

y su representación realista es $(9_1, 10_2, 11_2, 12_1|6)$

Nota 6.6. *Podemos observar que la suma principal, de la manera definida, es válida tanto para operaciones de números realistas con uno o varios valores principales.*

Ejemplo 6.7. $(5) \oplus (7) = 10^5 * 10^7 = 10^{12}$

$(6_3, 7_2, 8_4, 9_2) \oplus (8) = (3 * 10^6 + 2 * 10^7 + 4 * 10^8 + 2 * 109) * (10^8) = 3 * 10^{14} + 2 * 10^{15} + 4 * 10^{16} + 2 * 10^{17} = (14_3, 15_2, 16_4, 17_2)$

Proposicion 6.8. *El conjunto de los números realistas junto con la suma principal, $(\mathcal{R}, \oplus)$, es un monoide abeliano, es decir, $\oplus$ es una operación interna asociativa, con elemento neutro y conmutativa.*

Demostración. Para la demostración de la propiedad asociativa, suponemos que no partimos de conjuntos acotados.

Se deduce de la representación decimal de los números realistas y por ser la suma de números enteros una operación interna asociativa con elemento neutro. El elemento neutro para los números realistas es $(m_0, m + 1_0, ..., m + q + 1_0)$. □

Definicion 6.9. *Definimos la suma parcial entre dos números realistas de la siguiente manera:*

$(n_{a_1}, n+1_{a_2}, \ldots, n+q_{a_{n+q+1}}) <+> (m_{b_1}, m+1_{b_2}, \ldots, m+q_{b_{m+q+1}}) = [(n_{a_1}) \oplus (m_{b_1})] + [(n+1_{a_2}) \oplus (m+1_{b_2})] + ... + [(n+q_{a_{n+q+1}}) \oplus (m+q_{b_{m+q+1}})]$ *siendo los números realistas de la misma dimensión*

Ejemplo 6.10. $(2,3) <+> (1,2) = [(2) \oplus (1)] + [(3) \oplus (2)] = 10^2 * 10^1 + 10^3 * 10^2 = 10^3 + 10^5 = (3, 4_0, 5)$

Nota 6.11. *En el caso de no tener números realistas de la misma dimensión, podemos descomponerlos como suma secundaria de valores principales consecutivos para asi hacer los grupos necesarios para tener la misma dimensión.*

Esta descomposición no es única.

Ejemplo 6.12. $(6,7,8) <+> (3,4) = [(6,7)+(8)] <+> (3,4) = [(6,7) \oplus (3)] + [(8) \oplus (4)] = [(10^6 + 10^7) * 10^3] + [10^3 * 10^4] = 10^9 + 10^{10} + 10^{12} = (9, 10, 11_0, 12)$

Si ahora elegimos otra descomposición:

$(6,7,8) <+> (3,4) = [(6)+(7,8)] <+> (3,4) = [(6) \oplus (3)] + [(7,8) \oplus (4)] = [(10^6) * 10^3] + [(10^7 + 10^8) * 10^4] = 10^9 + 10^{11} + 10^{12} = (9, 10_0, 11, 12)$

Las propiedades de esta operación deben estudiarse en profundidad debido a que la descomposición de un número realista no es única.

Definicion 6.13. *Definimos la multiplicación principal entre dos números realistas sobre otro número realista k:*

$(\alpha) \otimes_{(k)} (\beta) = (k) \oplus (\alpha * \beta)$ *siendo:*

(α) *y* (β)= *números realistas con un único valor principal, y por tanto, su valor secundario asociado es uno,* α *es el multiplicando y* β *el multiplicador.*

$*$ *el producto habitual y* (k) *un número realista que debe cumplir la condición de que el módulo de cualquiera de sus valores prioncipales debe ser menor que el valor principal del multiplicando.*

Ejemplo 6.14. $(3) \otimes_{(k)} (5) = (0,1,2) \oplus (3*5) = (0,1,2) \oplus (15) = (10^0 + 10^1 + 10^2) * (10^{15}) = 10^{15} + 10^{16} + 10^{17} = (15, 16, 17)$ *siendo* $(k) = (0,1,2)$

$(3) \otimes_{(k)} (5) = (2) \oplus (3*5) = (2) \oplus (15) = (10^2) * (10^{15}) = 10^{17} = (17)$ *siendo* $(k) = (2)$

Nota 6.15. *La multiplicación está definida sólo cuando el multiplicando y el multiplicador son números realistas con un único valor principal, por tanto, sólo sta definida en el caso que las frecuencias absolutas sean uno.*

En ese caso, habría que estudiar las propiedades en profundida debido a que, en el libro, el auto, no fija ningún (k)*, ni siquiera cuando operamos números realstas con más de un valor principal, como vemos a continuación.*

Nota 6.16. *Si queremos multiplicar de forma principal dos números realistas con más de un valor principal, aplicaremos la propiedad distributiva para dejarlo como multiplicaciones principales uno a uno.*

Ejemplo 6.17. $(2)\otimes_{(k)}(3,4) = [(2)\otimes_{(k)}(3)]+[(2)\otimes_{(k)}(4)] = [(k)\oplus(2*3)]+[(k)\oplus(2*4)] = [(0,1)\oplus(6)]+[(0,1)\oplus(8)] = [(10^0+10^1)*(10^6)]+[(10^0+10_1)*(10^8)] = 10^6+10^7+10^8+10^9 = (6,7,8,9)$ *siendo* $k=(0,1)$

Ejemplo 6.18. $(2,3)\otimes_{(k)}(3,4) = [(2)\otimes_{(k_1)}(3)]+[(2)\otimes_{(k_1)}(4)]+[(3)\otimes_{(k_2)}(3)]+[(3)\otimes_{(k_2)}(4)] = [(k_1)\oplus(2*3)]+[(k_1)\oplus(2*4)]+[(k_2)\oplus(3*3)]+[(k_2)\oplus(3*4)] = [(k_1)\oplus(6)]+[(k_1)\oplus(8)]+[(k_2)\oplus(9)]+[(k_2)\oplus(12)] = [(0,1)\oplus(6)]+[(0,1)\oplus(8)]+[(0,1,2)\oplus(9)]+[(0,1,2)\oplus(12)] = [(10^0+10^1)*(10^6)]+[(10^0+10^1)*(10^8)]+[(10^0+10^1+10^2)*(10^9)]+[(10^0+10^1+10^2)*(10^{12})] = 10^6+10^7+10^8+10^9+10^9+10^{10}+10^{11}+10^{12}+10^{13}+10^{14} = 10^6+10^7+10^8+2*10^9+10^{10}+10^{11}+10^{12}+10^{13}+10^{14} = (6,7,8,9_2,10,11,12,13,14)$

Definicion 6.19. *Se define la multiplicación parcial entre dos números realistas como:*

$(n_{a_1}, n+1_{a_2}, \ldots, n+q_{a_{n+q+1}}) < x > (m_{b_1}, m+1_{b_2}, \ldots, m+q_{b_{m+q+1}}) = [(n_{a_1})\otimes_{k_1}(m_{b_1})] + [(n+1_{a_2})\otimes_{k_2}(m+1_{b_2})] + \ldots + [(n+q_{a_{n+q+1}})\otimes_{k_{n+q+1}}(m+q_{b_{m+q+1}})]$ *siendo los números realistas de la misma dimensión*

Nota 6.20. *Nótese que al intervenir en la operación la multiplicación principal, sólo podremos operar números realistas cuyos subíndices sean unos.*

Este tipo de restricciones, la descomposición y la dependencia de los números realistas k_i *que pueden ser diferentes dentro de la misma operación, hacen que sea bastante díficil formalizar las propiedades. Además, las condiciones mencionadas nos van a ocasionar problemas a la hora de demostrar que las operaciones se pueden* invertir*, obteniendo así las sustracciones y las divisiones.*

Ejemplo 6.21. $(3,4) < x > (7,8) = [(3) \otimes_{k_1} (7)] + [(4) \otimes_{k_2} (8)] = [(k_1 \oplus (21)] + [(k_2 \oplus (32)] = [(0,1,2) \oplus (21)] + [(0,1,2,3) \oplus (32)] = [(10^0 + 10^1 + 10^2) * 10^{21}] + [(10^0 + 10^1 + 10^2 + 10^3) * 10^{32}] = [10^{21} + 10^{22} + 10^{23}] + [10^{32} + 10^{33} + 10^{34} + 10^{35}] = (21,22,23) + (32,33,34,35)$

7. Geometría discreta

Veamos ahora el capítulo cuatro del libro. En este caso, no ha sido posible hacer una formalización debido a que no teníamos suficientes datos en el libro([1]) como para saber hasta qué punto los conceptos ya se consideran productos acabados. De ser asi, creemos que no podemos hacer una axiomatización.

Utilizamos los números realistas para representar las figuras geométricas y comenzaremos por aquellas figuras que pueden representarse en un plano aceptando, como punto de partida, que un plano, cualquier plano, está constituido por un conjunto de elementos discretos (píxeles, moléculas, átomos,...) Fruto de analizar el plano con una capacidad de resolución espacial inferior a las dimensiones de sus elementos constitutivos, obtenemos la percepción de continuidad, ilusión óptica que no se corresponde con la estrcutura real del plano. Reflexión capital para comprender que la Geometría Discreta, nótese, se corresponde con la sucesión de una serie de elementos discretos que se representan mediante números realistas. Y puesto que la herramienta básica para la representación de figuras geométricas es actualmente la pantalla electróncia, se considerará a ésta como el plano de referencia en la representación de las figuras. Pantalla que está dividida en píxeles, que son los elementos discretos con los que construimos las diferentes figuras geométricas.

Geometría se define generalmente como el estudio de las figuras en el espacio. La palabra geometría deriva del griego y significa *medida de la tierra*.

La construcción del espacio debe comenzar, como paso previo para poder abordar posteriormente una construcción seria de la geometría.

Consecuencia inmediata de esa construcción, es la introducción de una geometría que deja de estar centrada en los aspectos métricos, para diversificarse en otros aspectos (topológicos, proyectivos y por supuesto métricos) que darán lugar a considerar los diversos tipos de geometrías inducidas por Klein.

F. Klein en 1872 define la geometría como el estudio de las nociones y de las propiedades del espacio que resultan *invariantes* para un grupo de *transformaciones* es decir para hablar de una geometría tenemos que considerar:

- Un conjunto (objetos)
- Y un grupo de transformaciones actuando sobre los elementos del conjunto

Pero es posible definir numerosos grupos de transformaciones distintas actuando sobre el mismo conjunto lo que dará lugar a definir diferentes geometrías sobre un mismo conjunto.

Para caracterizar las diversas geometrías se buscará cuáles son los elementos que permanecen invariantes mediante las transformaciones que les son asociadas(cambios permitidos).

Como se ha comentado antes, la definición de geometría se basa esencialmente en dos construcciones:

- el espacio donde se va a hacer geometría
- un grupo de transformaciones

7.1. El plano de representación

El plano de representación (pantalla electrónica) está subdividido en píxeles sobre los cuales se establecen ejes de coordenadas, que a su vez, están constituidos por una fila y una columna de píxeles elegidas de forma arbitraria. Cada píxel está referenciado mediante un número entero.

Partimos de que cada pixel NO está referenciado por un número entero. La referencia son dos números, que representan sus coordenadas.

Las marcas de división de los ejes son números enteros.

Es una referencia relativa a la posición que ocupa el píxel en la fila o la columna correspondiente y el píxel común a ambos ejes, se representa con el número 0. A partir de este píxel, los que están hacia arriba y hacia la derecha se referencian con los números positivos, correlativamente, y los que está hacia abajo y hacia la izquierda, con los números negativos.

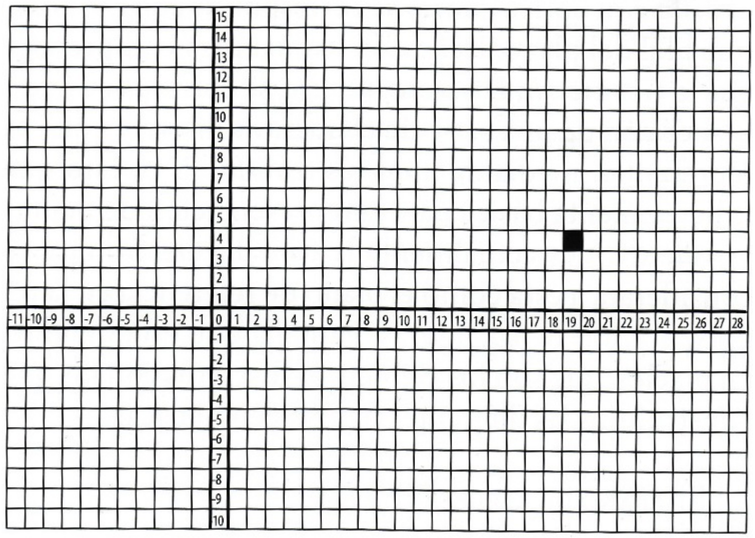


Figura 1: Plano de representación en píxeles

Lo que se está dando es una descripción del eje de coordenadas, no de la referencia de cada pixel.

Apréciese que, mientras en la geometría convencional los números representan puntos sin dimensión, en esta geometría los números representan a los elementos discretos que tienen la dimensión mínima posible del plano donde se está haciendo la representación. Se deduce, entonces que cada uno de estos elementos tiene superficie y volumen, no obstante, al trabajar en un plano (dos dimensiones), la tercera dimensión es constante y no es necesario considerarla.

A partir de la referencia de los píxeles de cada eje, , ya podemos referenciar el resto de los píxles del plano. Cada pixel queda referenciado por un par de números enteros correspondientes al valor en cada eje, con la intersección de la fila y columna que pasan por el píxel en cuestión. La referencia '19,4' se corresponde con el píxel marcada en negro en la figura uno.

Lo que implica, que en párrafos anteriores no se ha sido riguroso con el lenguaje utilizado.

Además, la definición de plano deberá darse independientemente de la representación. *Pantalla pixelada de un ordenador* no es una definición si no una representación.

Puesto que la noción de plano corresponde con la noción de dimensión dos (algo que tiene largo y ancho) es natural definir plano (independientemente del conjunto de números

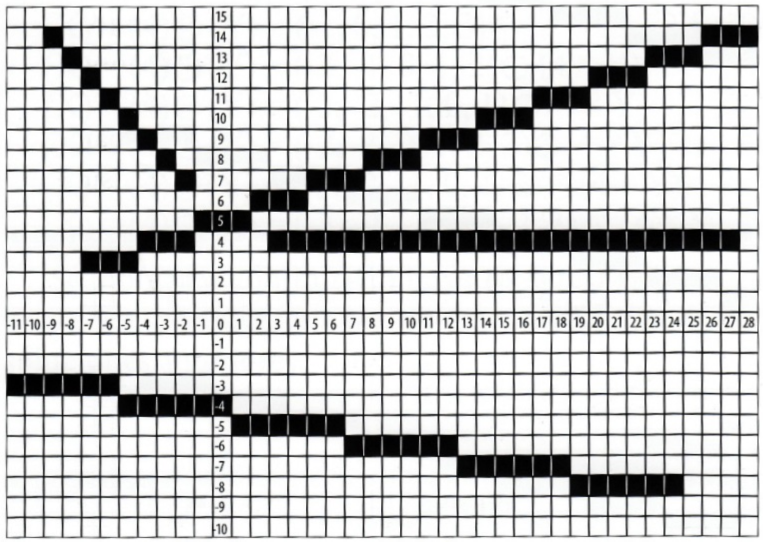


Figura 2: Líneas rectas

que estemos usando) como *parejas de números*, uno de ellos indicando la cantidad de *largo* y otro de ellos indicando la cantidad de *ancho*. Con un lenguaje más formal, si el conjunto de números que estamos usando lo denotamos por $\mathcal{B}$, entonces el plano se define como el conjunto $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$. Los elementos de este conjunto son parejas (b, b') siendo $b, b' \in \mathcal{B}$.

Siendo consecuentes con esta idea natural de plano, la definición más coherente de plano realista sería:

Definicion 7.1. *El plano realista es el conjunto* $\mathcal{R} \times \mathcal{R}$

Nota 7.2. *Observar que si no ponemos cotas en* $\mathcal{R}$ *el resultado es un plano discreto, pero no finito. En caso de restringir* $\mathcal{R}$ *a una cota, la definición debe seguir siendo la misma, obteniendo así un "plano finito".*

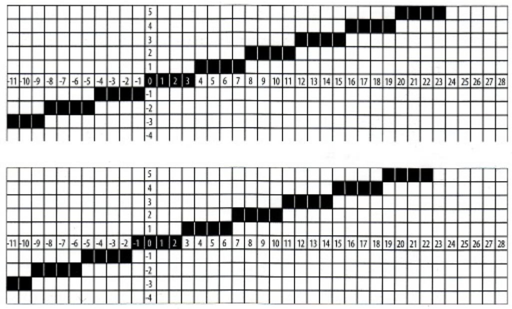
7.2. Las líneas rectas

Una línea es una secuencia de píxeles contiguos. Una línea recta es una secuencia de píxeles contiguos con estructura de cambio regularmente constante.

En la figura 2 se muestran varios ejemplos de líneas rectas.

Por motivos análogos a los anteriormente dados, la definición más coherente de recta realista sería

Definicion 7.3. *La recta realista es el conjunto* $\mathcal{R}$



Dicho esto, es clara una relación entre la geometría de la pantalla pixelada de un ordenador y los números realistas. Recordar que fijado un espacio, uno de los objetivos de la geometría es describir los objetos que se encuentran immersos en dicho espacio. En nuestro caso, el *plano* determiando por la pantalla del ordenador, contiene objetos de dimensión 0 (puntos) y dimensión 1 (curvas) y teniendo en cuenta lo dicho, un número realista determina un punto o una línea:

los números realistas describen objetos lineales en la pantalla de ordenador

La representación matemática de una figura geométrica en el plano se hace buscando una función que permita relacionar todos los pares de coordenadas de los píxeles que forman la figura correspondiente y comenzamos por las líneas rectas que pasan por el origen.

Consideremos una línea recta que, pasando por el origen de coordenadas, incrementa su valor en una unidad en la coordenada 'Y' por cada cuatro píxeles de la coordenada 'X'.

Al dibujar una línea con las características descritas, observamos que hay más de una solución. Analizamos a continuación las cuatro soluciones que se reflejan en la figura 3. Las cuatro líneas representadas en la figura citada cumplen las condiciones de ser rectas, pasar por el origen y tener la misma estructura de evolución.

Uno de los problemas más graves que podemos encontrar en el capítulo sobre Geometría, es que en ningún momento, se determina cómo representar una cadena de píxeles (supuesto número realista) que no esté a la altura del cero. Es decir, sabemos cómo representar un único pixel mediante dos coordendas, '19,4', pero esta representación no tiene absolutamente nada que ver con los números realistas.

De tal manera, que se crea una geometría discreta en la que se trabajan con números

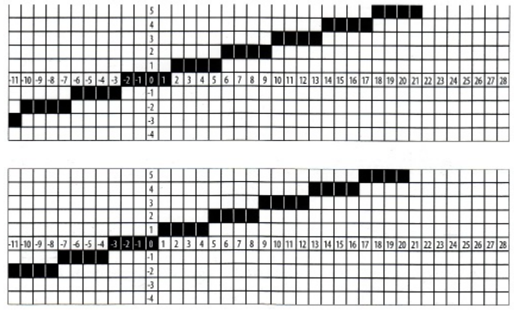


Figura 3: Rectas que pasan por el origen, con la misma pendiente

realistas, pero éstos, sólo nos valen para estudiar conjuntos de píxeles continuos, y a altura uno, ya que en ningún momento se determina cómo representar, mediante notación,otra altura diferente. Por lo tanto, aunque tengamos un espacio, no tenemos ni un conjunto de objetos definido sobre los que hacer las transformaciones.

Además, las cuatro pueden expresarse matemáticamente mediante la siguiente función dentro del ámbito de los números realistas:

$(X) = (4) \otimes (Y)$

Como ya se indicó, anteriormente, una multiplicación de dos números realistas genera varias soluciones, dependiendo de cuál sea el sumando inicial que se elija. Cada una de las líneas que se han dibujado en las figuras anteriores se corresponde, correlativamente, con una de las siguientes soluciones de la función anterior.

$(X) = (4) \otimes (Y) = (0, 1, 2, 3) \oplus (4 \text{ x } Y)$

$(X) = (4) \otimes (Y) = (-1, 0, 1, 2) \oplus (4 \text{ x } Y)$

$(X) = (4) \otimes (Y) = (-2, -1, 0, 1) \oplus (4 \text{ x } Y)$

$(X) = (4) \otimes (Y) = (-3, -2, -1, 0) \oplus (4 \text{ x } Y)$

Hay que decir, sin embargo, que la citada función, además de las cuatro soluciones que acaban de especificarse, tiene las siguientes:

$(X) = (4) \otimes (Y) = (-1, 0, 1, 2, 3) \oplus (4 \text{ x } Y)$

$(X) = (4) \otimes (Y) = (-2, -1, 0, 1, 2) \oplus (4 \text{ x } Y)$

$(X) = (4) \otimes (Y) = (-3, -2, -1, 0, 1) \oplus (4 \text{ x } Y)$

$(X) = (4) \otimes (Y) = (-2, -1, 0, 1, 2, 3) \oplus (4 \text{ x } Y)$

$(X) = (4) \otimes (Y) = (-3, -2, -1, 0, 1, 2) \oplus (4 \text{ x } Y)$

$(X) = (4) \otimes (Y) = (-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3) \oplus (4 \text{ x } Y)$

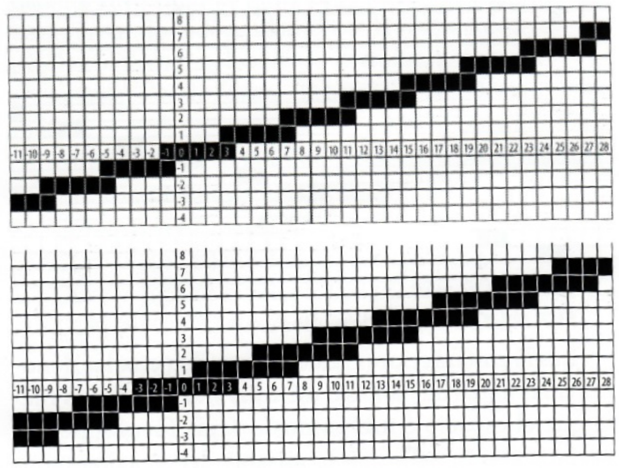


Figura 4: Líneas rectas reforzadas

Se dibujan a continuación, ver gráfico 4, las líneas correspondientes a la primera y a la última de las soluciones anteriores.

En un plano de dos dimensiones, una línea recta queda completamente determinada conocido un punto por el que pasa y la pendiente. No es posible, que haya múltiples líneas rectas con la misma pendiente y el mismo punto por el que pasa, siendo indiferente estar en un plano dentro de la pantalla del ordenador, que estar en un plano real.

Las dos líneas anteriores pueden considerarse líneas reforzadas en las que hay valores de la variable 'X' a los que les corresponden dos valores de la variable 'Y' (siguen siendo líneas que cumplen las condiciones establecidas anteriormente). Todas las soluciones analizadas hasta ahora, cumplen la condición de que a todos los valores de la variable 'X' les corresponda, al menos, un valor de la variable 'Y'. Sin embargo, la función usada para representar las rectas anteriores ofrece, además soluciones en las que a no a todos los valores de la variable 'X' les corresponde un valor de la variable 'Y'.

Volviendo a argumentar con el rigor del lenguaje y de las definiciones, no podemos decir que una *función* asigna varios valores de (Y)(o ninguno) a (X), ya que precisamente en la definición (formalizada y consistente) de función se específica que es un ley que asigna a cada valor de (X) un y sólo un valor de (Y).

Esta característica la ofrecen, entre otras, las siguientes soluciones (ver figura 5).

$(X) = (4) \otimes (Y) = (0) \oplus (4 \text{ x } Y)$

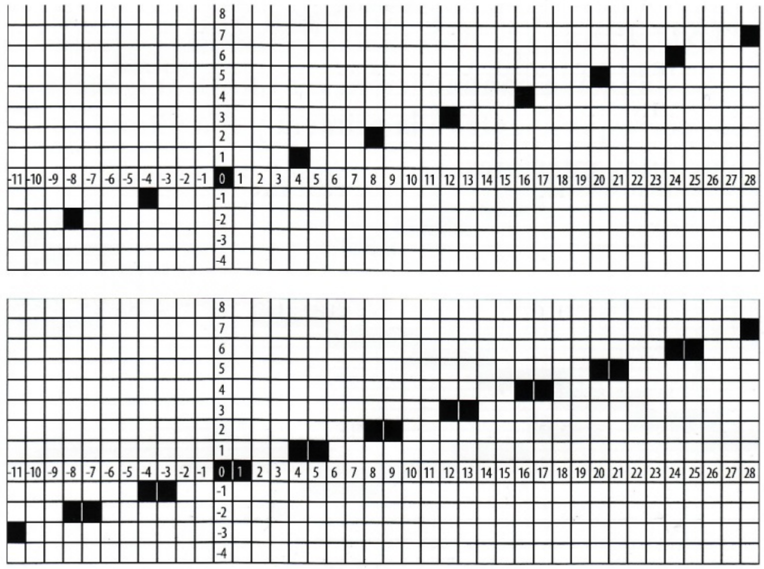


Figura 5: Líneas de puntos y rayas

$(X) = (4) \otimes (Y) = (0, 1) \oplus (4 \text{ x } Y)$

Las líneas anteriores se corresponden con las denominadas lílenas de puntos o rayas y, si el objetivo fuera que el espacio entre puntos o rayas fuera superior, bastaría con transformar la variable del eje correspondiente mediante al multiplicación por una constante.

Según el propio autor, **una línea es una secuencia de píxeles contiguos**, por lo que es evidente que NO podemos decir que ésta sea una definición consistente, ya que no sabemos lo que significa. La interpretación inicial implica que para que tengamos una línea en la geometría discreta, los píxeles que la forman deben de *tocarse* de alguna manera. Sin embargo, contradictoriamente a lo dicho con anterioridad, tenemos en la figura 5, píxeles sin ningún tipo de punto ni lado en común, pero que también se consideran líneas.

Como se ha visto, la ecuación $(X) = (4) \otimes (Y)$ proporciona varias soluciones y cada una de ellas tiene alguna característica que la diferencia del resto. Elegir una u otra es decisión que dependerá de los objetivos del usuario.

Pero pueden combinarse también, varias soluciones para obtener otras nuevas que agrupen las características de las soluciones individuales. A continuación analizamos cómo pueden arguparse varias socluiones para corregir el aliasing de una línea recta.

El aliasing es el efecto que se produce cuando la capacidad de resolución

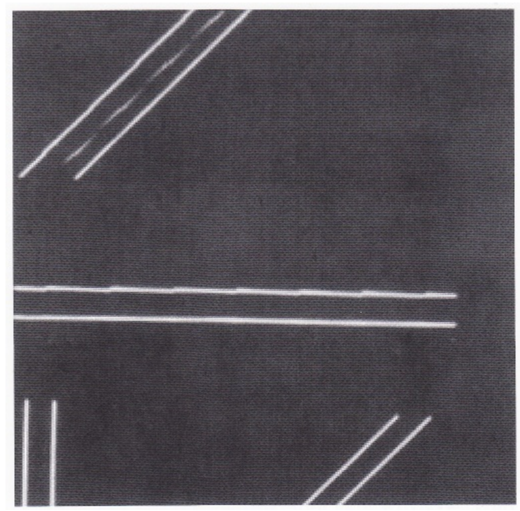


Figura 6: Efecto aliasing

del ojo humano es superior a la resolución espacial de los píxeles con los que se dibuja la línea.

...Volviendo a la recta que se está analizando, agrupemos las cuatro soluciones siguientes:

$(X) = (4) \otimes (Y) = (0, 1, 2, 3) \oplus (4 \text{ x } Y)$

$(X) = (4) \otimes (Y) = (-1, 0, 1, 2) \oplus (4 \text{ x } Y)$

$(X) = (4) \otimes (Y) = (-2, -1, 0, 1) \oplus (4 \text{ x } Y)$

$(X) = (4) \otimes (Y) = (-3, -2, -1, 0) \oplus (4 \text{ x } Y)$

Se está aplicando una propiedad distributiva que en ningún momento se ha demostrado en el capítulo de las operaciones.

$(X) = (4) \otimes (Y) = ((0, 1, 2, 3) + \downarrow (-1, 0, 1, 2) + \downarrow (-2, -1, 0, 1) + \downarrow (-3, -2, -1, 0)) \oplus (4 \text{ x } Y) = (-3, -2_2, -1_3, 0_4, 1_3, 2_2, 3) \oplus (4 \text{ x } Y)$

Como puede observarse, la agrupación de varias soluciones proporciona uan solución cuyo sumando incicial es un número realista con valores de ponderación. Valores claves para ponderar la intensidad luminosa de los píxeles correspondientes. Se corrige, parcialmente, el aliasing, se reducen las exigencias de resolución y se consigue mejorar el efecto de continuidad a partir de la línea. En la figura 6, puede apreciarse ele efecto producido sobre el aliasing utilizando este procedimiento.

Analizamos ahora las línas que tienen algún tipo de curvatura, Comen-

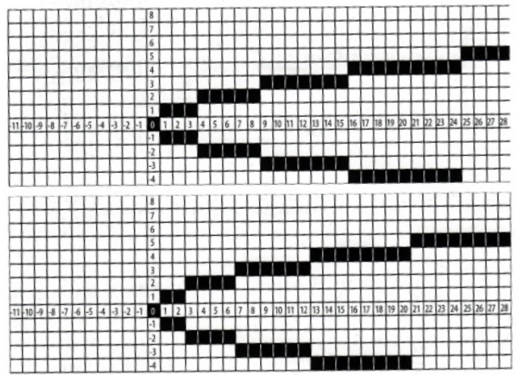


Figura 7: Soluciones de la parábola

zamores por las líneas cuya representación matemática incluye una variable con exponente '2'. En concreto, analizamores la siguiente función:

$(X) = (Y)^2$

Teniendo en cuenta el análisis realizado para las operaciones con potencias, la función anterior ofrece varias soluciones. Una de esas soluciones se corresponde con la sigueinte secuencia de operaciones:

$(0)^2 = (0) \oplus (0 \text{ x } 0) = (0)$

$(1)^2 = (0, 1, 2) \oplus (1 \text{ x } 1) = (1, 2, 3)$

$(2)^2 = (0, 1, 2, 3, 4) \oplus (2 \text{ x } 2) = (4, 5, 6, 7, 8)$

$(3)^2 = (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6) \oplus (3 \text{ x } 3) = (9, 10, 11, 12, 13, 14, 15)$

En la figura 7, se aprecia la representación gráfica (dos soluciones) de la función expuesta.

7.3. La circunferencia

Un tipo de línea curva muy usada es la circunferencia. Se caracteriza por tener una curvatura constante. La función matemática que representa una circunferencia es la siguiente:

$(R - 1)^2 = (X)^2 + (Y)^2$

Conviene tener presente que, en el plano discreto, el centro de la circunferencia es un píxel que tiene dimensiones y es preciso restarle una unidad al radio en la ecuación de la circunferencia. Esa unidad es la que se corresponde con el píxel central. Para dibujar una circunferencia se van dando valores a

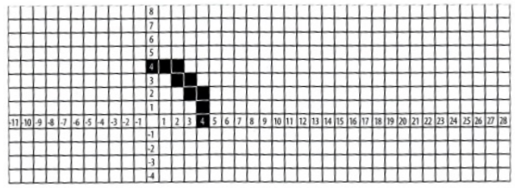


Figura 8: Representación cuadrante con R=5

una de las variables y mediante la función anterior se calcular el valor de otra variable.

$(Y) = \sqrt{(R-1)^2 - (X)^2}$

Consideremos el caso en el que $R = 5$. Los valores de la variable Y para cada valor de la variable X en el primer cuadrante son los siguientes:

$(X) = 0 \longrightarrow (Y) = \sqrt{(16) - (0)} = \sqrt{(16)} = (4)$

$(X) = 1 \longrightarrow (Y) = \sqrt{(16) - (1;2)} = \sqrt{(15;14)} = (4)$

$(X) = 2 \longrightarrow (Y) = \sqrt{(16) - (3;6)} = \sqrt{(13;10)} = (4,3)$

$(X) = 3 \longrightarrow (Y) = \sqrt{(16) - (7;12)} = \sqrt{(9;4)} = (3,2)$

$(X) = 4 \longrightarrow (Y) = \sqrt{(16) - (13;20)} = \sqrt{(3;-4)} = (2,1,0)$

No es necesario calcular los valores de los otros tres cuadrantes. Es mucho más sencillo obtenerlos por simetría. Podemos ver este caso en la figura 8.

Consideremos el caso en el que $R = 9$. Los valores, en este caso, de la variable 'Y' para cada valor de la variable 'X', en el primer cuadrante, son los siguientes:

$(X) = 0 \longrightarrow (Y) = \sqrt{(64) - (0)} = \sqrt{(64)} = (8)$

$(X) = 1 \longrightarrow (Y) = \sqrt{(64) - (1;2)} = \sqrt{(63;62)} = (8)$

$(X) = 2 \longrightarrow (Y) = \sqrt{(64) - (3;6)} = \sqrt{(61;58)} = (8)$

$(X) = 3 \longrightarrow (Y) = \sqrt{(64) - (7;12)} = \sqrt{(57;52)} = (8,7)$

$(X) = 4 \longrightarrow (Y) = \sqrt{(64) - (13;20)} = \sqrt{(51;44)} = (7)$

$(X) = 5 \longrightarrow (Y) = \sqrt{(64) - (21;30)} = \sqrt{(43;34)} = (7,6)$

$(X) = 6 \longrightarrow (Y) = \sqrt{(64) - (31;42)} = \sqrt{(33;22)} = (6,5)$

$(X) = 7 \longrightarrow (Y) = \sqrt{(64) - (43;56)} = \sqrt{(21;8)} = (5,4,3)$

$(X) = 8 \longrightarrow (Y) = \sqrt{(64) - (57;72)} = \sqrt{(7;-8)} = (3,2,1,0)$

Podemos ver al representación en la figura 9.

Ya se ha dicho, insistentemente, que en el dominio de los números realistas

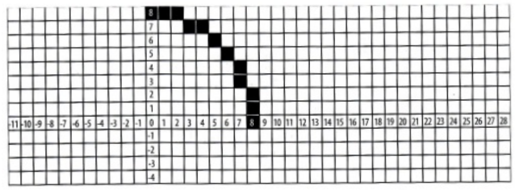


Figura 9: Representación cuadrante para R=9

existen soluciones múltiples, característica que permite elegir la solución que más convenga en cada caso. En los dos ejemplos, que acaban de ponerse, sobre la circunferencia, se ha elegido una solución que utiliza como número realista de inicio, el que genera la mitad de los valores que hay por encima y por debajo del valor básico, sin utilizar superposición. Y, de igual modo que en el caso de las líneas rectas, pueden combinarse varias soluciones para corregir el aliasing.

Las operaciones no pueden definir lo que queramos según nos convenga. Si es asi, es porque NO están bien definidas.

En el caso de la cirunferencia, una solución de interés en algunas aplicaciones, es la que genera el menor número de píxeles posibles, quedando la circunferencia cerrada. Para conseguir esta solución se toma como número inicial el (0).Observando los ejemplos anteriores se comprueba que la circunferencia también tiene simetría dentro de cada cuadrante y no es necesario, asimismo, calcular la mitad de los píxeles de un cuadrante. El resto se obtienen directamente, tal como se muestra en el siguiente ejemplo, para una cirunferencia de $R = 9$. Los calores de 'X' e 'Y' en el primer cuadrante son:

$(X) = (0) \longrightarrow (Y) = \sqrt{(64) - (0)} = \sqrt{(64)} = (8)$

$(Y) = (0) \longrightarrow (X) = (8)$

$(X) = (1) \longrightarrow (Y) = \sqrt{(64) - (1)} = \sqrt{(63)} = (8)$

$(Y) = (1) \longrightarrow (X) = (8)$

$(X) = (2) \longrightarrow (Y) = \sqrt{(64) - (4)} = \sqrt{(60)} = (8)$

$(Y) = (2) \longrightarrow (X) = (8)$

$(X) = (3) \longrightarrow (Y) = \sqrt{(64) - (9)} = \sqrt{(55)} = (7)$

$(Y) = (3) \longrightarrow (X) = (7)$

$(X) = (4) \longrightarrow (Y) = \sqrt{(64) - (16)} = \sqrt{(48)} = (7)$

$(Y) = (4) \longrightarrow (X) = (7)$

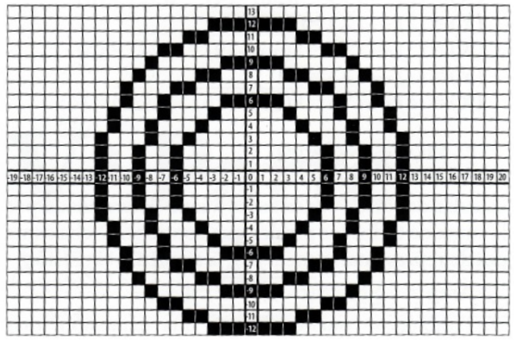


Figura 10: Representación de circunferencias

$(X) = (5) \longrightarrow (Y) = \sqrt{(64) - (25)} = \sqrt{(39)} = (6)$

$(Y) = (5) \longrightarrow (X) = (6)$

Podemos ver en la figura 10 la representación de las circunferencias correspondientes a los radios $R = 13$, $R = 10$ y $R = 7$.

7.4. El área de un círculo

En el dominio discreto, el área de un círculo se puede calcular de forma consistente. Viene determinada por la suma de todos los píxeles que contiene. Dicha suma puede representars emediante la siguiente expresión:

$\acute{A}rea = (\sum_{x=0}^{x=r-1} \sqrt{(r-1)^2 - x^2}) * 4 + 1$

En todo caso, vendría representada por la suma de las áreas de dichos píxeles, con lo que previamente a demostrar una fórmula para el área de círculo, deberia comprobarse el área del cuadrado. Y una vez determinado, demostrar que la suma de las áreas de los cuadrados es igual a la fórmula dada para calcular el área del círculo.

También se puede obtener una expresión, más sencilla que la anterior, para calcular el área de forma aproximada, mediante una expresión que utiliza el radio y un número realista, que cumple una función similar al número π de la matemática continua. Dicha expresión puede epxresarse como sigue:

$\acute{A}rea = (r-1)^2 * N_R + 1$

Siendo N_R un número realista que es preciso calcular. Conceptualmente no plantea ninguna dificultad. Basta con realizar varios miles o millones de pruebas para determinar si conviene tener uno general o es mejor varios, dependiente de las dimensiones del radio.

Evidentemente, podemos encontrar cualquier fórmula para determinar el área de un círculo si dejamos letras o parámetros sin calcular.Además, si un número no representa ninguna dificultad conceptual, no es necesario hacer miles de pruebas para poder determinarlo.

En la geometría moderna, la descripción de las figuras immersas en un espacio se realiza a través del estudio de las funciones que se pueden definir sobre ese espacio. Así, dada una función $f(x)$, la ecuación, $f(x) = 0$, determina una figura (curva, superficie,...). Por ello se hace la siguiente propuesta de investigación:

Propuesta: Reinterpretar los números realistas como funciones sobre la pantalla del ordenador

Para ello será conveniente, como dijimos al principio, dar una definición formal de plano (o espacio) que pueda ser representada por la pantalla pixelada de un ordenador.

En este punto es conveniente recordar que, desde hace decenas de años, se estudian geometrías finitas. Estas geometrías están definidas sobre cuerpos de números finitos y, habitualmente, se estudian aquellas figuras que quedan determiandas por funciones polinómicas sobre dicho espacio. Es importante decir también que el plano definido, por ejemplo, sobre el cuerpo finito de 8 elementos ($\mathbb{F}_8$, en la literatura) es perfectamente representable por la pantalla de un ordenador dividida en 64 píxeles. De todas estas observaciones surge la pregunta, ¿Es posible definir sobre un plano definido sobre un cuerpo finito de números, $\mathbb{F}_n$, funciones no polinómicas que determinen los objetos correspondientes a los números realistas?. La respuesta afirmativa a esta pregunta permitiría una axiomatización de la *geometría realista* basada en los conceptos e ideas que le son naturales a cualquier humano, pudiendo, así, hacerla tratable y computable, y abriendo una nueva línea de investigación en la rama de las matemáticas.

8. Conclusiones

El problema de las definiciones, en cualquier idioma, es no entender el lenguaje que utilizan, y por tanto, no saber interpretarlas.

Cuando estamos en un país extranjero y queremos usar una palabra que no sabemos cómo decir en el idioma del país, lo que hacemos es buscar el entendimiento mediante explicaciones ,en el lenguaje del país, que representen lo mismo que nuestra palabra.¿Por qué? Porque, aunque queramos,y digamos la palabra en nuestro idioma, las veces que sean y con el volumen que sea, no nos van a entender.

La única manera en la que se entiende esa palabra sin usar el idioma del país, es acompañarla de un lenguaje no verbal. Pero es evidente entonces que debemos mostrar, de forma correcta, clara, y sin posibilidad de equívocos, lo que la palabra en cuestión significa.

Si nosotros nos paramos a pensar en los avances científicos, los logros se basan en tres pasos fundamentales:

1. Modelar el problema de forma lo más genérica posible,para así poder mejorarlo y predecir resultados.

2. Desarrollar aplicaciones del modelo en otros ámbitos prácticos.

3. Mediante las necesidades que surgen de aplicar el modelo en la práctica, buscar un modelo teórico más eficiente.

Y hay un lenguaje común, desde la resolución de ecuaciones diferenciales para entender cómo se desplazan y evolucionan las células cancerígenas, hasta la geometría algebraica de Grothendieck de la que se despliegan gran parte de las aplicaciones actuales en las que intervienen códigos, y ese lenguaje son las matemáticas.

Las mejores ideas no obtienen validez hasta que no existe un modelo formal matemático que las respalda. Y para conseguirlo, debemos abrir la puerta a las matemáticas formales, abstractas. El problema de abrir la puerta a este tipo de matemáticas, es la formación que necesitamos para poder entenderlas. Y lo primero que debemos aprender, es a **utilizar, entender y respetar** el lenguaje que usan.

El mismo problema tenemos en la enseñanza. Enseñar matemáticas como un producto acabado, sin enseñar el idioma que vamos a utilizar y sin justificar y demostrar que no existen trucos de magia, es el primer paso para no ver las matemáticas formales como una torre de marfil a la que sólo unos pocos pueden acceder. Pero el problema no está tanto en el idioma, sino en el que enseña.

El problema de las ideas, de las buenas ideas,que podemos encontrar en *Idolatría en las matemáticas* es que se pierden por el camino y quedan ocultas tras una nube de humo hecha de prejuicios y de contradicciones. Cuando en un mismo libro, podemos leer:

Un cúmulo de formulaciones que contraviene los principios básicos del conocimiento científico y del razonamiento humano, esto es, ***ausencia de rigor****. Estas matemáticas, a mayores, en su demérito ni siquiera son simbólicas.*

Si al menos fueran simbólicas, serían respetables. Su problema es que son absurdas. Pero, como la palabra es gruesa, y acaso literaria, preferimos llamarlas, añadiendo precisión, inconsistentes. Y las matemáticas inconsistentes deben ser erradicadas del ámbito científico, Están haciendo mucho daño.

Y posteriormente, esa ausencia de rigor marca en profundidad la base sobre la que empezar a trabajar, la idea se desvanece, y lo único que se recuerda al fin y al cabo, no es la ilusión y la reflexión de intuir que una nueva línea de investigación se abre camino, sino el mal sabor de boca y las anécdotas. Eso debería quedar aparte de la ciencia.

Un científico debe tomarse la libertad de plantear cualquier cuestión, de dudar de cualquier afirmación, de corregir errores. (Julius Robert Oppenheimer (1904-1967) Físico estadounidense)

Referencias

[1] Alonso Álvarez, A., *Idolatría en las matemáticas: De las Matemáticas inconsistentes a la Cognomática*, Instituto de Automática y Fabricación (Cognomática), Septiembre de 2012, Universidad de León.

[2] Castells, M. (1994).*Flujos, redes e identidades: Una teoría crítica de la sociedad informacional.* En: M. Castells et al., Nuevas perspectivas críticas en educación, pp. 13-53. Barcelona: Paidós.

[3] Davis, P., Hersh, R. (1988). *Descartes'dream: The world according to mathematics.* London: Penguin Books.

[4] Skovsmose, O. (1994a). *Towards a critical mathematics education. En Educational Studies in Mathematics,* 27, 35-57.

[5] El método científico, recuperado de `http://gers.uprm.edu/pdfs/metodo_cientifico.pdf`

[6] Las ciencias formales: el método axiomático-deductivo.Recuperado de `http://antropokrisis.files.wordpress.com/2010/11/sistemas-formales-axiomaticos.pdf`

[7] La dialéctica como arma, método, concepción y arte. Recuperado de `http://www.rebelion.org/docs/55787.pdf`