UNIVERSIDAD DE LEÓN

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA Y DE SISTEMAS Y AUTOMÁTICA

Memoria

Análisis de la modulación por ruido en las señales de tiempo de sistemas DVB-T para su utilización en radioposicionamiento

Presentada por Carlos Fernández López para optar al grado de Doctor por la Universidad de León

Dirigida por

Dr. D. Ángel Alonso Álvarez

Agradecimientos

Son muchas las personas con las que he contraído una deuda por el apoyo que me han dado, no solamente en la elaboración de esta tesis, sino en todas las circunstancias que han modelado mi vida. Es una obligación moral expresar mi agradecimiento a quienes me formaron y educaron, especialmente a mis padres, origen de todo lo positivo que yo haya realizado, pero también a mis maestros y profesores, a mis alumnos de ayer y de hoy, de los que tanto he aprendido intentando enseñarles, y a todas aquellas personas que han sido un espejo en el que he intentado reflejarme.

He de agradecer la ayuda, paciencia y condescendencia de mi familia más directa, mi esposa y mis hijos, que han soportado a un esposo y padre que les ha robado demasiado tiempo de convivencia y que suele estar ausente en presencia.

Mi agradecimiento también a mi director de Tesis, D. Ángel Alonso por todas las facilidades, empuje y ayuda que me ha prestado.

A todos ellos, gracias.

Resumen

La medida del tiempo ha sido una necesidad humana siempre, en todas las etapas de civilización. Todas las actividades tienen un cronograma, y todas las planificaciones se asocian a alguna escala de tiempos.

La medida de esta magnitud permite aplicarla a usos que requieren relojes cada vez más estables. La medida exacta del tiempo y la caracterización de las señales de reloj para evaluar su incertidumbre, ha dado lugar a una rama de la metrología de enorme importancia.

La relación del espacio con el tiempo, que identifica las velocidades relativas de los objetos, alcanza un significado especial cuando afecta a señales radioeléctricas. Dos circunstancias son particularmente importantes. La primera es el hecho de que la velocidad de las señales radioeléctricas en el vacío es una magnitud absoluta, bien conocida. La segunda es el hecho de que el tiempo es la magnitud que somos capaces de medir con mayor exactitud. Resulta inmediato el intento de extender esta exactitud a la medida del espacio. Este es el fundamento de los sistemas de posicionamiento basados en la medida del tiempo.

Los sistemas de posicionamiento global basados en satélite permiten a un receptor conocer su posición gracias a la medida exacta del tiempo de vuelo de una señal radioeléctrica y de la posición exacta del satélite en el momento de enviar la señal. Pero estas exactitudes nunca son absolutas y las incertidumbres en todas las magnitudes de origen, condicionan los resultados del posicionamiento.

Existen sistemas radiantes locales con emisores de posición fija, que puede ser conocida con poca incertidumbre y que transmiten señales de reloj de gran exactitud, pero que están pensados para aplicaciones que nada tienen que ver con el posicionamiento. Las estaciones de telefonía móvil y las de radiodifusión de televisión tejen, en la mayoría de los países, redes enormemente tupidas. Cabe preguntarse si es posible construir sistemas de posicionamiento local suficientemente exactos, utilizando las señales transmitidas por los nodos de estas redes.

Este estudio está dirigido a la caracterización de las señales de tiempo extraídas de las tramas transmitidas por sistemas de radiodifusión DVB-T que cumplen especificaciones

normalizadas en Europa. El resultado obtenido nos permitirá estimar la incertidumbre de posición asociada a la obtenida en la medida del tiempo. Pero evaluar la exactitud de las señales de tiempo es un fin en sí mismo que permite pensar en otras aplicaciones, que pueden incluir tiempo, espacio y, consecuentemente, velocidad.

Las herramientas para caracterizar relojes de alta estabilidad se han desarrollado, principalmente, en los últimos sesenta años. Se han identificado los modelos de ruido asociados a estas señales. Se las ha caracterizado en el dominio de la frecuencia, estudiando sus espectros de densidad de potencia y en el dominio del tiempo, proponiéndose diversos estimadores de dispersión específicos capaces de separar los tipos de ruido.

Para la caracterización en el dominio del tiempo se utilizará la varianza de Allan que, cincuenta años después de su introducción, y habiéndose desarrollado otras varianzas para propósitos específicos, sigue siendo la herramienta más utilizada.

Abstract

Measurement of time has always been a human necessity, in all stages of human civilization. All activities have a chronogram, and all planifications are associated to some time scale.

Measurement of this magnitude permits its being applied to uses which require more and more stable clocks. The exact measurement of time and the characterization of clock signals in order to evaluate its uncertainty have given rise to a branch of metrology of huge importance.

The relation between space and time, which identifies the relative speeds of objects, reaches a special meaning when it affects radioelectric signals. Two circumstances are particularly significant. The first one is the fact that the speed of radioelectric signals in the void is an absolute magnitude, well known by everyone. The second one is the fact that it is time we are able to measure with the highest accuracy. The attempt to extend this accuracy to the measurement of space is almost immediate. This is the foundation for the positioning systems based on the measurement of time.

Global positioning systems based on satellite allow receivers to know their positions thanks to the exact measurement of the time of flight of a radioelectric signal. But here accuracy is never absolute, and uncertainty in all original magnitudes conditions the positioning results.

There are local radiating systems with fixed-position transmitters, whose location can be known with little uncertainty and which transmit clock signals of great accuracy. However, these are not designed for positioning issues. Mobile telephony and television broadcasting stations spin incredibly dense networks. The question is, if it is posible to build local positioning systems which are exact enough, by using signals transmitted by the nodes in these networks.

This study is aimed at the characterization of the time signals obtained from frames transmitted by broadcasting DVB-T systems, which meet the standard European specifications. The results will allow us to estimate the uncertainty of position associated to that obtained from the measurement of time. But evaluating the accuracy in time signals is an

end in itself which allows us to think of other applications, including time, space, and consequently, speed.

The tools to characterize high stability clocks have been developed mainly in the last sixty years. The patterns of noise linked to these signals have been identified. They have been characterized in the domain of frequency, by studying their power density spectrum, and in the domain of time, being various specific dispersion estimators able to separate the types of noise.

In order to characterize the domain of time, we will use Allan's variance which, fifty years after its introduction, and having other variances for specific purposes been developed, remains as the most used tool.

Prefacio

El trabajo que sigue a esta introducción, como todo trabajo científico, refleja, al menos parcialmente, las inquietudes personales de su autor. Considera este que, para la mayoría de las personas y para todas las civilizaciones, la vida se cimenta sobre un conjunto de creencias sólidas, cuya estabilidad permite construir todo el edificio de valores que justifican y dan sentido a la existencia. La inmutabilidad de las creencias debe ser incuestionable para garantizar la estabilidad. Sin embargo, los lemas que constituyen esta base evolucionan en el tiempo, convirtiendo nuestro suelo en arenas movedizas. La respuesta es no admitirlo, negarlo, esconder la cabeza. Inevitablemente todo el edificio se tambalea. La ciencia, por su carácter inquisitivo, contribuye de forma notable a estos terremotos intelectuales. Una parte de nuestras creencias la constituye nuestra interpretación del mundo físico en el que vivimos. El juicio y condena de Galileo es un buen ejemplo de nuestra resistencia a modificarlas. Su planteamiento de sustituir un sistema de referencia geocéntrico por otro heliocéntrico capaz de interpretar el movimiento de todos los objetos del sistema solar, era una revolución. La Tierra ya no constituía el centro del universo, pasaba a ser un objeto más y no permanecía estática. La sociedad de su tiempo no estaba en condiciones de admitir una idea tan avanzada. Suponía un cambio del sistema de referencia espacial, donde la Tierra se movía. Su desarrollo cuestionaba las referencias, hasta entonces inmutables, de espacio y tiempo.

La filosofía del espacio y del tiempo ha conocido un amplio desarrollo desde la antigüedad. Nos movemos en un mundo, en el que el espacio y el tiempo nos resultan tan intuitivos como natural la gravedad. Nos situamos, nos desplazamos, subimos, bajamos, aceleramos, frenamos y desarrollamos nuestra existencia en un mundo de espacio y tiempo, aparentemente inmutable. La cosmología filosófica ha tratado ampliamente este tema. El hecho de que el espacio-tiempo se pueda contraer e incluso pueda no existir, da lugar a preguntas transcendentes básicas.

Diversas aproximaciones en el terreno de la filosofía cuestionan la existencia del tiempo e incluso nuestra propia existencia. San Agustín lo plantea en sus Confesiones "¿Qué es el tiempo? Sé bien lo que es si no se me pregunta. Pero cuando quiero explicárselo al que me lo pregunta, no lo sé. Pero me atrevo a decir que sé con certeza que si nada pasara no habría tiempo pasado. Y si nada existiera no habría tiempo presente" [1]. Quizá no existen ni el tiempo ni el espacio ni nosotros mismos y solo somos un sueño, una ilusión. Descartes, en

su Discurso del Método (parte IV) [2], considera la cuestión y rechaza esta posibilidad resumida en el aforismo latino "cogito ergo sum" (en el original "Je pense, donc je suis", pues escribía en lengua "vulgar" o en latín, dependiendo del público). Einstein, en su estudio "Sobre la electrodinámica de los cuerpos en movimiento" descarta el carácter absoluto del tiempo al concluir que "… no podemos atribuir una significación absoluta al concepto de simultaneidad; dos sucesos que, vistos desde un sistema dado de coordenadas, son simultáneos, no pueden ser considerados como sucesos simultáneos al contemplarlos desde un sistema que se halle en movimiento con respecto al primero" [3]. Pero no nos adentremos en el terreno de la cosmología filosófica.

El espacio, aunque tan incomprensible como el tiempo, resulta más tangible porque lo vemos. El tiempo, con su transcurrir unidireccional no percibido, resulta más inquietante. La velocidad, que relaciona a ambos, la caracterizamos midiendo espacio y tiempo, si bien para valores suficientemente grandes de la velocidad, ni espacio ni tiempo son invariables. Puesto que la velocidad de las ondas electromagnéticas en el vacío, hasta donde sabemos, es constante, definimos las unidades utilizadas para medir tanto el tiempo como el espacio asociándolas a una radiación electromagnética de una transición energética en una determinada especie de un elemento atómico concreto. El tiempo se asocia con un periodo y el espacio con una longitud de onda de una radiación que, por ahora, es nuestro suelo más estable.

El tiempo es la magnitud que somos capaces de medir con mayor exactitud y a su caracterización va dirigido este trabajo. Para enfocarlo, estudiamos su influencia en la medida del espacio, analizando la incertidumbre de los sistemas de posicionamiento basados en la medida del tiempo. Analizamos, a continuación, la propia incertidumbre en la medida del tiempo para después caracterizar una base de tiempos de bajo coste para laboratorio, derivada de fuentes trazables.

1. INDICES

Contenido

Prefacio I
1. INDICES III
Contenido V
Índice de gráficas VII
Acrónimos utilizados IX
2. ANTECEDENTES 1
2.1 Introducción 3
2.2 Radiolocalización 3
2.3 Métodos basados en la medida del tiempo y la fase 4
2.3.1 Sistemas esféricos 4
2.3.2 Sistemas hiperbólicos 6
2.3.3 Posicionamiento remoto 8
2.3.4 Otras técnicas de radioposicionamiento 8
2.4 Errores de posición y tiempo 9
2.5 Tiempo y frecuencia 10
2.6 Unidades y escalas de tiempo 13
2.7 Relojes 18
2.8 Ruido 19
2.9 Fuentes de frecuencia. Estabilidad 20
3. HIPÓTESIS DE TRABAJO Y OBJETIVOS 23
3.1 Hipótesis de trabajo 25
3.2 Objetivos 26
4. ANÁLISIS Y CARACTERIZACIÓN DE LAS SEÑALES 29
4.1 Estimación de errores. Incertidumbre 31
4.1.1 Expresión de la incertidumbre 31
4.1.2 Dilución de la precisión 34
4.1.3 Obtención de la posición en sistemas TDOA 35
4.1.4 Relación entre sistemas TDOA y TOA 41
4.1.5 Obtención de la posición en sistemas TOA 43
4.1.6 Posición y GDOP en aproximaciones sucesivas 44
4.2 Estabilidad de la señal 49
4.2.1 Jitter y ruido de fase 52
4.2.2 Espectro de la modulación de ángulo 53
4.2.2.1. Modulación con ruido monotonal de banda estrecha 55
4.2.2.2. Modulación multitonal 63
4.2.2.3. Espectro de modulación de ángulo pequeño 72

4.2.3 Modulación conjunta de amplitud y ángulo. Modelo de oscilador 74
4.2.3.1. Representación fasorial y señal analítica 76
4.2.4 Ruido gaussiano 80
4.2.5 Ruido de fase y frecuencia fraccional 81
4.2.6 Ruido aditivo y multiplicativo. Figura de ruido 82
4.2.7 Ruido térmico 83
4.3 Caracterización de la señal 84
4.3.1 Caracterización en el dominio de la frecuencia 84
4.3.1.1. Tipos de ruido 89
4.3.2 Caracterización en el dominio del tiempo 91
4.3.2.1. Varianza de Allan 96
5. MATERIAL Y MÉTODOS 101
5.1 Obtención de la señal 103
5.1.1 Fuentes de señal 103
5.1.2 La señal DVB-T 103
5.1.3 Sistema de medida y obtención de datos 105
6. RESULTADOS Y DISCUSIÓN 113
6.1 Obtención de resultados 115
6.1.1 Señal de reloj TMDS 115
6.1.2 Señales de sincronismo asociadas a la trama MPEG 135
6.1.3 Sincronismo entre señales 148
6.2 Efectos en el posicionamiento 151
7. CONCLUSIONES Y LINEAS FUTURAS 155
7.1 Conclusiones 157
7.2 Líneas futuras 157
8. REFERENCIAS 159
Bibliografía 161

Índice de gráficas

Figura 1. Representación gráfica del nivel de confianza en función del factor de expansión. Los porcentajes en los sectores bajo la campana representan su área 33
Figura 2. Funciones de Bessel de primera especie para los diez primeros órdenes y tabla con los primeros valores de beta que anulan a las funciones de primer y segundo orden 58
Figura 3. Potencia en armónicos superiores relativa al fundamental 59
Figura 4 Relaciones de potencia de los armónicos a la portadora (gráfica superior) y de los armónicos superiores al primero de ellos (gráfica inferior) 60
Figura 5. Potencias de primer y segundo armónico y resto de la señal 61
Figura 6. Relación de potencias de los armónicos a la de portadora para valores pequeños de β 62
Figura 7. Representación log-log de la densidad de potencia espectral de la frecuencia fraccional y del ruido de fase 91
Figura 8. Funciones sinc para diferentes valores de τ 94
Figura 9. Representación gráfica de las función de filtro $|H(f)|^2$ para τ=5 y su función sinc de origen 95
Figura 10. Reloj TMDS. Incrementos de fase durante un periodo de observación de 14 minutos para τ=1 116
Figura 11. Varianza de Allan para señal de reloj TMDS de 27 MHz para un periodo de observación cercano a 14 minutos 117
Figura 12. Fase incremental y frecuencia fraccional del reloj TMDS para un periodo de observación de 24 horas 118
Figura 13. Varianza de Allan para serie a 24 de reloj TMDS de 27 MHz sin filtrar 119
Figura 14. Densidad espectral de fase Sx(f) y frecuencia fraccional Sy(f) para serie a 24 horas de reloj TMDS 120
Figura 15. Histogramas de fase y frecuencia fraccional para la señal de batido 121
Figura 16. Histogramas de fase y frecuencia fraccional para la señal de reloj TMDS 122
Figura 17. Varianza de Allan para serie a 24h de reloj TMDS filtrada 123
Figura 18. Fase incremental y frecuencia fraccional del reloj TMDS para un periodo de observación de 48 horas 125
Figura 19. Densidad espectral de fase Sx(f) y frecuencia fraccional Sy(f) para datos a 48 horas de reloj TMDS 126
Figura 20. Varianza de Allan para serie a 48h de reloj TMDS 127
Figura 21. Varianza de Allan para serie a 48h de reloj TMDS filtrada 128
Figura 22. Fase incremental y frecuencia fraccional del reloj TMDS para un periodo de observación de 72 horas 129
Figura 23. Resumen estadístico para una serie de 72 horas y un intervalo de la misma de 50 minutos, centrado a 47,5 horas posteriores al inicio de las medidas 130
Figura 24. Densidad espectral de fase Sx(f) y de frecuencia fraccional Sy(f) para datos a 72 horas de reloj TMDS 132
Figura 25. Varianza de Allan para serie a 72h de reloj TMDS 133
Figura 26. Varianza de Allan para serie a 72h de reloj TMDS filtrada 134

Figura 27. Fase incremental de la señal de sincronismo compuesto 136
Figura 28. Fase incremental y frecuencia fraccional de la señal de sincronismo de línea para un periodo de observación de 17,30 horas 137
Figura 29. Densidad espectral de fase Sx(f) y de frecuencia fraccional Sy(f) de la señal de sincronismo de línea para un periodo de observación de 17,30 horas 138
Figura 30. Varianza de Allan de la señal de sincronismo de línea para un periodo de observación de 17,30 horas 139
Figura 31. Fase incremental y frecuencia fraccional del reloj de 30MHz para un periodo de observación de 72 horas 142
Figura 32. Densidad espectral de fase Sx(f) y de frecuencia fraccional Sy(f) para datos a 72 horas de reloj 30 MHz 143
Figura 33. Varianza de Allan para serie a 72h de reloj 30MHz 144
Figura 34. Varianza de Allan para serie a 72h de reloj 30MHz filtrada 145
Figura 35. Fase incremental y frecuencia fraccional del reloj de 30MHz en ausencia de trama MPEG para un periodo de observación de 26 horas 146
Figura 36. Varianza de Allan para serie a 26h de reloj 30MHz en ausencia de trama MPEG 147
Figura 37. Señal de sincronismo de líneas comparada con patrón de reloj PCMCIA 149
Figura 38. Señal de reloj S/PDIF comparada con patrón de reloj PCMCIA 150

Acrónimos utilizados

ADEV, (Allan DEViation) Desviación de Allan

AOA, (Angle Of Arrival) Ángulo de llegada

AT (Atomic Time) Escala de tiempo atómica

AVAR (Allan VARiance) Varianza de Allan

BIPM (Bureau International des Poids et Mesures) Oficina Internacional de Pesas y Medidas

CENELEC (Comité Européen de Normalisation Électrotechnique) Comité europeo de normalización electrotécnica

COFDM (Coded Orthogonal Frequency-Division Multiplexing) Multiplexión por división de frecuencia ortogonal codificada

CRT (Cathode Ray Tube) Tubo de rayos catódicos

CRU (Clock Recovery Unit) Unidad de recuperación de reloj

DOP (Dilution of Precision) Dilución de la precisión

DVB-T (Digital Video Broadcasting – Terrestrial) Radiodifusión de vídeo digital - Terrestre

DVI (Digital Visual Interface) Interfaz visual digital

EMI (Electromagnetic Interference) Interferencias electromagnéticas

ENOB (Effective number of bits) Número efectivo de bits

ET (Ephemeris Time) Escala de tiempo efeméride

ETSI (European Telecommunications Standards Institute) Instituto europeo de normalización de las telecomunicaciones (antiguo CEPT)

GDOP (Geometric Dilution Of Precision) Dilución geométrica de la precisión

GLONASS. (GLObal NAvigation Satellite System) Sistema de navegación global por satélite

GMT (Greenwich Time Meridian) Hora del meridiano de Greenwich

GNSS (Global Navigation Satellite System) Sistema global de navegación por satélite

GPIB (General Purpose Interface Bus) Interfaz de bus de propósito general

GPS(Global Positioning System) Sistema de posicionamiento global

GPSDO (GPS disciplined oscillator) Oscilador disciplinado a GPS

GUM (Guide to the expression of Uncertainty in Measurement) Guía para la expresión de la incertidumbre en la medida

HDMI (High-Definition Multimedia Interface) Interfaz multimedia de alta definición

HDOP (Horizontal Dilution of Precision) Dilución horizontal de la precisión

IEC (International Electrotechnical Commission) Comisión Electrotécnica Internacional

IEEE (Institute of Electrical and Electronics Engineers) Instituto de ingenieros eléctricos y electrónicos

IERS (International Earth Rotation and Reference Systems Service) Servicio Internacional de rotación de la Tierra y sistemas de referencia

IFCC (International Federation of Clinical Chemistry and Laboratory Medicine) Federación internacional de química clínica y medicina de laboratorio

ILAC (International Laboratory Accreditation Cooperation)

IRIG (Inter-Range Instrumentation Group) Grupo de instrumentación inter-rango (generador de los códigos de tiempo IRIG)

ISO (International Standard Organization) Organización internacional de normalización

ITU (International Telecommunication Union) Union Internacional de telecomunicaciones

ITU-R (ITU-Radiocommunication sector) Unión Internacional de telecomunicaciones, rama de radiocomunicaciones

IUPAC (International Union of Pure and Applied Chemistry) Unión internacional de química pura y aplicada

IUPAP (International Union of Pure and Applied Physics) Unión internacional de física pura y aplicada)

JCGM (Joint Committee for Guides in Metrology) Comité conjunto para guías en metrología

JEDEC (Joint Electron Device Engineering Council) Comisión conjunta de ingeniería de dispositivos electrónicos

LORAN (LOng RAnge Navigation) Navegación de gran distancia

LS (Least-Squares) Mínimos cuadrados

MPEG (Moving Picture Experts Group) Grupo de expertos en imágenes en movimiento

NIST (National Institute of Standards and Technology) Instituto nacional de normas y tecnología

OCXO (Oven Controlled crystal oscillator) Oscilador de cuarzo termostatado

OFDM (Orthogonal Frequency-Division Multiplexing) Multiplexión por división de frecuencia ortogonal

OIML (Organisation Internationale de Métrologie Légale) Organización internacional de metrología legal

PCMCIA (Personal Computer Memory Card International Association) Asociación internacional de tarjetas de memoria para PC

PCR (Program Clock Reference) Referencia de reloj de programa

PDOP (Position Dilution of Precision) Dilución de la precisión de posición

PLL (Phase-locked loop) Bucle de enganche en fase

QXGA (Quad eXtended Graphics Array) XGA quad (estándar de definición de vídeo)

RAE (Real Academia Española)

RGB (Red-Green-Blue) Interfaz de vídeo de señales de crominancia

RSS (Received Signal Strength) Potencia de señal recibida

SCART (Syndicat des Constructeurs d'Appareils Radiorécepteurs et Téléviseurs) Interfaz vídeo normalizado EN 50049-1:1997

S/PDIF (Sony/Philips Digital Interface Format) Formato de interfaz digital Sony-Philips

TAI (Temps Atomique International) Tiempo Atómico Internacional

TCB (Barycentric Coordinate Time) Tiempo coordinado baricéntrico

TCG (Geocentric Coordinate Time) Tiempo coordinado geocéntrico

TDB (Barycentric Dynamical Time) Tiempo dinamico baricéntrico

TDOA (time difference of arrival) diferencia de tiempo de llegada

TDOP (Time Dilution of Precision) Dilución temporal de la precisión

TDT (Terrestrial Dynamical Time) Tiempo dinámico terrestre

TIE (time interval error) Error de intervalo de tiempo

TLS (total least-squares) Mínimos cuadrados totales

TMDS (Transmisión Minimized Differential Signaling) Señalización diferencial minimizada de transmisión

TOA (time of arrival) Tiempo de llegada

TT (Terrestrial Time) Tiempo terrestre

TUR (Test Uncertainty Ratio) Relación de incertidumbre de medida

UHF (Ultra High Frequency) Banda de frecuencia de 300 MHz a 3 GHz

USNO (U.S. Naval Observatory) Observatorio naval de la armada USA

UT1 (UT Universal Time) Escala universal de tiempo

UTC (Anagrama de Tiempo Universal Coordinado)

VCO (Voltage-Controlled Oscillator) Oscilador controlado en tensión

VCXO (Voltage-Controlled crystal oscillator) Oscilador de cuarzo (XO) controlado en tensión

VDOP (Vertical Dilution of Precision) Dilución vertical de la precisión

VGA (Video Graphics Array) Estándar de definición de vídeo

VHF (Very high frequency)) Banda de frecuencia de 30 MHz a 300 MHz

VIM (international Vocabulary of basic and general terms In Metrology) Vocabulario internacional de términos generales y básicos en metrología

WLS (weighted least-squares) Mínimos cuadrados ponderados

2. ANTECEDENTES

2.1 Introducción

Denominamos espacio a la percepción del medio físico que nos rodea. Lo caracterizamos como un entorno de tres dimensiones en el que observamos objetos que nos sirven como puntos de referencia para situarnos respecto a ellos. La determinación de nuestra posición y la de otros objetos con respecto a referencias conocidas resulta imprescindible para desenvolvernos en este ámbito. El entorno aumenta con nuestra capacidad de abarcar más espacio y establecer sobre este, nuevas referencias de posición. El desarrollo actual, científico y tecnológico, permite englobar toda la superficie del planeta que habitamos como entorno vital. El planeta está sujeto a cambios, pero la diferencia de escala entre los tiempos geológicos y los ciclos vitales de las personas y de sus actividades, permiten considerarlo como un objeto estático en el tiempo, sin modificaciones significativas, sobre el que pueden establecerse referencias de situación duraderas. Así, los antecedentes de la geolocalización pueden remontarse a las necesidades de ubicación y conocimiento del territorio propias de la especie humana, para su supervivencia.

La posición en el entorno y la identificación de puntos de referencia ha propiciado el desarrollo de la cartografía a lo largo de la historia. Sin embargo, la navegación se ha visto obligada al cabotaje durante la mayor parte de ese periodo, guiada por marcas terrestres. La ausencia de referencias fiables en el mar, ha impedido la navegación de altura, obligándola a realizarse a estima con un alto grado de riesgo. Esta forma de surcar los mares, en ausencia de identificación visual de referencias, se ha desarrollado enormemente con la capacidad para medir el tiempo y relacionarlo con referencias astronómicas.

2.2 Radiolocalización

A lo largo del pasado siglo los avances en la comprensión y utilización de las ondas electromagnéticas han permitido una enorme variedad de sistemas de geoposicionamiento cuya base fundamental sigue siendo la medida precisa del tiempo. Así, aunque existen precedentes antes de la Segunda Guerra Mundial, ha sido durante esta y en el largo periodo de tensión llamado Guerra Fría, cuando se han desarrollado de forma extraordinaria estas tecnologías. Su importancia militar reside en la identificación de unidades propias y enemigas y en el guiado de armas. Aparecen sistemas ecométricos, basados en la medida del tiempo de retorno de emisiones radioeléctricas (radar), sistemas basados en la medida de los tiempos de

recepción de señales radioeléctricas (TOA, time of arrival) y en la medida de la diferencia de tiempos de recepción TDOA (time difference of arrival). También otros que no implican necesariamente la medida del tiempo sino que se basan en la medida de la potencia de las señales recibidas (RSS, received signal strength), en técnicas radiogoniométricas para la medida de ángulos (AOA, angle of arrival), en sistemas interferométricos y en la utilización conjunta de diferentes tecnologías. La aplicación de estas tecnologías al uso civil/militar o conjunto las hace inseparables de nuestro actual modo de vida.

2.3 Métodos basados en la medida del tiempo y la fase

Tiempo y distancia son magnitudes relacionadas linealmente si se mantiene constante la velocidad. Si consideramos la velocidad de las ondas electromágneticas en el vacío, o haciendo las correcciones oportunas, en otro medio de propagación, la medida de distancias puede transformarse en la medida de tiempos y está última realizarse con notable exactitud. Los tiempos de vuelo de señales procedentes de emisores situados en diferentes puntos, permiten conocer las distancias o rangos desde estos puntos hasta el lugar de recepción de las señales. Las medidas pueden ser absolutas (con referencia a una escala común de tiempos), o diferenciales, bien en tiempo, bien en ángulos de fase. Las medidas diferenciales angulares pueden introducir ambigüedad en el posicionamiento por cuanto no es posible discriminar incrementos de fase que difieran en un múltiplo entero de 2π.

2.3.1 Sistemas esféricos

Los sistemas que miden el instante de recepción (TOA), se fundamentan en la transmisión de una señal desde un emisor cuya posición es conocida con suficiente exactitud. El receptor dispone de un oscilador patrón sincronizado con el del transmisor, lo que le permite generar su propia señal. El sistema puede basarse en la medida, por parte del receptor, de la diferencia de fases entre su propia señal y la recibida. La diferencia de ángulo de fase refleja un retardo en el tiempo, de la señal recibida con respecto a la señal local. Sea ΔΦ la diferencia de fase y f la frecuencia de la señal, que ha de ser la misma para los relojes de transmisor y receptor. El retardo en el tiempo da lugar a un retardo de la fase en la señal recibida respecto a la obtenida en el reloj local del receptor. La diferencia de tiempos se obtiene mediante la siguiente expresión:

$$\Delta t = \frac{\Delta\Phi + 2k\pi}{2\pi f}$$

El término k es una constante que tendrá valor nulo o bien será un número entero positivo (valores negativos representarían adelantos de fase, lo que resulta absurdo). Este retardo representa el tiempo de vuelo de la señal transmitida. Multiplicado por la velocidad de las ondas electromagnéticas en el medio de transmisión, permite obtener la distancia recorrida por esta señal, es decir la distancia (rango, en la terminología del radioposicionamiento) que separa a emisor y receptor. El receptor, en consecuencia, ha de encontrarse sobre una superficie esférica, perteneciente a una familia de esferas con centro en el transmisor y radio dado por el producto $c \cdot \Delta t$, siendo c la velocidad de propagación de la señal. Cada esfera de la familia corresponde a un valor de k y los radios entre esferas consecutivas difieren en un valor dado por c/f.

Si se dispone de otros emisores de posición conocida que emitan también señales patrón sincronizadas, el receptor obtendrá nuevas familias de esferas, cuya intersección permita obtener la posición del receptor.

Obsérvese que si se dispone de dos emisores y un receptor, sus posiciones determinan un plano y la intersección de esferas se reduce a una intersección de circunferencias. Estas dan lugar a una red cuyos puntos de intersección son las posibles situaciones del receptor. Se precisa, al menos, otro emisor para resolver esta ambigüedad. El uso de frecuencias muy elevadas aumenta la densidad de posibles puntos de situación del receptor.

Si tanto los emisores como el receptor cuentan con relojes sincronizados que generen señales de tiempo (tiempo horario) y la señal transmitida se modula incorporando marcas de tiempo que el receptor puede recuperar, la diferencia entre el tiempo horario del reloj del receptor y el obtenido de cada señal recibida, dará lugar a una única esfera. Dos emisores y un receptor caracterizan a un plano en el cual intersectan dos circunferencias. Una tercera circunferencia puede resolver, salvo situaciones particulares, la ambigüedad. Con más de tres emisores y en un espacio tridimensional, la resolución del problema de multilateración resultante permite, gracias a la redundancia de la información, reducir la incertidumbre en la estimación de la posición.

Los actuales sistemas globales de navegación basados en satélites (GNSS, Global Navigation Satellite System), cuyo representante más extendido actualmente es GPS (Global Positioning System), son sistemas TOA. Se basan en una constelación de satélites equipados con relojes de cesio altamente estables, que transmiten con continuidad la información

necesaria para conocer su posición en todo momento, y su tiempo horario. Sus relojes se mantienen cuidadosamente sincronizados.

El receptor, normalmente, dispone de un reloj de bajo coste, de mucha menos estabilidad y es preciso sincronizarlo con los relojes de satélite. Supóngase, en un sistema de coordenadas cartesianas, que el receptor se encuentra en un punto P(X,Y,Z) y recibe una señal procedente de un satélite que en el instante de transmisión ocupaba la posición $S_1(X_1,Y_1,Z_1)$. La distancia obtenida por el receptor a partir de la diferencia de tiempo entre el oscilador local y el recibido del satélite (pseudorango) incorpora un error debido a la inexactitud del reloj local. El receptor se encuentra sobre una esfera centrada en S_1 y cuyo radio R_1, se estima mediante la siguiente expresión:

$$\sqrt{(X-X_1)^2+(Y-Y_1)^2+(Z-Z_1)^2} = R_1 + c.\varepsilon$$

donde c es la velocidad de la señal y ε el error de tiempo del reloj local. Se precisan cuatro ecuaciones semejantes a la anterior para resolver las incógnitas ε, X, Y y Z, lo que implica señales procedentes de cuatro satélites. Algunas consideraciones de situación sobre el modelo de geoide utilizado para representar la Tierra pueden permitir la eliminación de posiciones absurdas y obtener la posición del receptor y la corrección de su reloj, con la recepción de señales de solamente tres satélites.

Una consecuencia importante de este método de posicionamiento, radica en que se puede tener una señal de tiempo local, sincronizada al reloj del satélite y, en consecuencia, muy exacta, en lugares donde se disponga de un receptor. Toda información recibida en cualquier punto (con independencia de su procedencia) donde se disponga de un reloj con esta exactitud, puede ser marcada con señales horarias que identifican el instante de recepción (timestamping). Esto es de gran importancia para muchas aplicaciones industriales, científicas y legales. Entre estas últimas destaca la entrega de documentos en registro electrónico. Respecto a las científicas, sirve de ejemplo este mismo trabajo.

2.3.2 Sistemas hiperbólicos

De los métodos basados en la medida del tiempo, presentan un interés especial las técnicas TDOA por trabajar con diferencias de tiempo de recepción, sin precisar el conocimiento del instante de transmisión.

El fundamento de la radiolocalización basada en TDOA consiste en transmitir simultáneamente una señal desde dos estaciones emisoras sincronizadas de posiciones conocidas. El receptor mide la diferencia de tiempo entre los instantes de recepción de las señales procedentes de los dos emisores y, conocida la velocidad de propagación de la señal en el medio, obtiene la diferencia de distancias a ambas estaciones. Si consideramos el plano determinado por los dos emisores y el receptor, este último estará situado en algún punto de una hipérbola contenida en dicho plano cuyos focos se sitúan en la posición de los emisores. Un nuevo par de emisoras, situadas en el mismo plano, permiten obtener una nueva hipérbola. La intersección de ambas identifica la posición, o posibles posiciones, del receptor. A efectos de geoposicionamiento, estamos suponiendo una hipótesis de tierra plana donde emisores y receptor se sitúan a la misma altitud.

Con mayor generalidad, considerando tres dimensiones, cada par de emisores determina una recta que representa el eje de un hiperboloide de revolución de dos hojas, en cuya superficie se encuentra el receptor. La intersección de un número suficiente de hiperboloides determina la posición del mismo. Obsérvese que el receptor debe estar equipado con un reloj que le permita medir con exactitud la diferencia de tiempos de recepción de las señales, pero no necesita sincronismo con los relojes de transmisión, ni se precisa conocer el tiempo horario, ni el instante de emisión de las señales.

Al igual que sucede en los sistemas TOA, si el receptor compara los ángulos de fase de las señales recibidas en lugar de las diferencias de tiempo, no podrá discriminar incrementos de fase múltiplos de 2π y, en consecuencia, su posición se encontrará sobre una familia de hiperboloides de revolución, cuyo eje está determinado por la recta que une a ambos emisores y cuyos focos son las posiciones de estos. Al igual que en los sistemas TOA, la intersección de familias de hiperboloides puede contener cierta ambigüedad en la determinación de la posición, al generarse diagramas de puntos de intersección.

Históricamente, el mayor desarrollo de los métodos de radiolocalización TDOA, ha correspondido a sistemas ya desaparecidos, basados en emisiones terrestres como el LORAN apagado en 2010, el sistema Omega, sistema militar apagado en 1997, el británico Decca y el ruso Chayca.

2.3.3 Posicionamiento remoto

Es oportuno describir el problema inverso. Hasta aquí se ha considerado un objeto que obtiene su posición a partir de las señales generadas por estaciones fijas de posición bien conocida. Considérese ahora un objeto que transmite una señal y es posicionado a partir de la información de tiempo o fase recibida por estaciones de posición conocida. La inteligencia que identifica la posición no reside, en este caso, en el objeto, sino que se encuentra asociada a las estaciones receptoras. Estas, equipadas con relojes sincronizados, envían los instantes significativos de recepción (o las diferencias de fase) a una unidad de proceso que obtiene la posición del objeto. Tanto el proceso de trilateración en los métodos TOA, como el posicionamiento por diferencia de tiempos o de fases en TDOA son similares a los realizados en el problema directo.

Un antecedente acústico del problema inverso es la detección de la dirección de procedencia de un sonido, realizada por el cerebro de una persona, a partir de la diferencia de fase de las señales acústicas percibidas por ambos oídos. Puede mejorarse la sensibilidad y la exactitud de este método colocando en ambos oídos dos grandes bocinas que efectúan una amplificación acústica y aumentan la separación efectiva entre ambos receptores. Este método se ha utilizado en la Primera Guerra Mundial para la detección lejana de aviones.

2.3.4 Otras técnicas de radioposicionamiento

La extensión de la telefonía móvil, cuyas estaciones de radio dan cobertura a un entorno, distribuyéndose el territorio en celdas que mantienen identificados los terminales telefónicos de su ámbito, ha propiciado la aparición de iniciativas de geolocalización de personas basadas en estas redes. Esto permitiría mantener localizadas a personas, como enfermos de Alzheimer, e incluso mascotas. Así, las Administraciones de muchos países impusieron a los operadores la obligación de desarrollar progresivamente esta capacidad. El abaratamiento de los receptores GPS que ha permitido su integración en los teléfonos móviles ha permitido otras soluciones independientes de la compañía operadora. No obstante, se han publicado multitud de trabajos sobre este tema. Cabe decir que la localización de objetos en el interior de edificios despierta gran interés por sus aplicaciones industriales. Las señales exteriores, procedan de GPS, estaciones radio de telefonía u otras, no penetran o presentan ecos múltiples que las hacen difícilmente utilizables. Se recurre a repetidores interiores de

señal GPS o a otras fuentes de señal como radios WiFi de la red de área local u otros tipos de emisiones de interior.

La obtención de la posición del objeto alcanza mayor complejidad de proceso cuando aumenta el número de transmisores, como es el caso de redes multisensores. Se obtienen muchas informaciones no coincidentes que es preciso ajustar, recurriéndose a métodos de mínimos cuadrados en alguna de sus variantes. En el problema inverso, el posicionamiento de un objeto puede realizarse con un mínimo de receptores, incluso con uno solo, en mediciones sucesivas, si el objeto a posicionar permanece estático durante el proceso. Existen equipos comerciales que combinan diferentes técnicas como RSS, interferometría, AOA efectuando la radiogoniometría con un solo receptor situado sucesivamente en diferentes posiciones, para identificar la posición de un transmisor.

2.4 Errores de posición y tiempo

A la hora de definir factores de mérito para estimar la exactitud en la obtención de una posición, se evalúa separadamente la incertidumbre en la medida del tiempo del resto de los factores, estimándose luego, globalmente, una figura de mérito que se evalúa mediante una expresión denominada “dilución geométrica de la precisión”. Las incertidumbres individuales, como se verá más adelante, se componen conforme a las expresiones que rigen la propagación de la incertidumbre. La exactitud con que se determina la posición de un objeto mediante técnicas TOA o TDOA, tiene una fuerte dependencia de la exactitud de los relojes utilizados. Es preciso que todos ellos observen un estricto sincronismo. Las desviaciones aleatorias de frecuencia y fase se tratan como señales de ruido añadido y generan incertidumbre en las medidas. La variación de la velocidad de la señal como consecuencia de fluctuaciones en el medio de transmisión, los ecos producidos por multitrayectos y los retardos introducidos en cables y circuitos son también fuentes de error.

La necesidad de mantener cuidadosamente sincronizados los relojes de emisores y receptores en los sistemas de posicionamiento basados en la medida del tiempo y de la fase, exige la obtención por parte del receptor, de la señal patrón del emisor. Como consecuencia el receptor no solamente obtiene la posición sino también el patrón y la escala de tiempo. En muchos sistemas, esta última es la información buscada.

2.5 Tiempo y frecuencia

El tiempo es una magnitud intangible, difícil de definir. De forma diferente a lo que sucede con el espacio o la temperatura, no disponemos de ningún órgano sensor que nos permita definir el tiempo en función de nuestra percepción física. El hecho de que dos sucesos no tengan lugar simultáneamente establece un "antes" y un "después" y esta es la primera noción de la existencia de esta magnitud. El desarrollo de la memoria y un cierto grado de inteligencia en los animales superiores les permite intuir y tomar en cuenta esta magnitud. La observación inteligente de procesos con distintas velocidades de transcurso y envejecimiento permiten hacer abstracción de su existencia y unidireccionalidad. Siendo difícil una explicación racional de esta magnitud, que intuimos que no se detiene ni retrocede, recurrimos, para su definición, a su caracterización metrológica.

Para la medida del tiempo es preciso apoyarse en unidades que se materializan en intervalos fijos de repetición de algún fenómeno observable. A la duración de estos intervalos se la denomina periodo y se introduce el concepto de frecuencia como magnitud inversa del periodo o número de repeticiones del fenómeno en un intervalo de tiempo determinado. De este modo la definición del tiempo se apoya en la frecuencia y esta, a su vez, se define en función del tiempo. No resulta fácil trascender esta tautología. Acudiendo al diccionario RAE [4], el tiempo se define, en primera acepción como "duración de las cosas sujetas a mudanza". La duración, en sentido de permanencia, se define, a su vez, como "acción y efecto de durar" recurriendo a términos que, nuevamente, hacen referencia al tiempo. La segunda acepción del diccionario RAE para "tiempo" parece romper la ambigüedad estableciendo una definición más adecuada: "magnitud física que permite ordenar la secuencia de los sucesos, estableciendo un pasado, un presente y un futuro". Pero el término "secuencia" definido como "continuidad, sucesión ordenada" lleva implícito que esta sucesión tiene lugar en el tiempo, magnitud que se pretende definir. Se tiene, pues, una magnitud que no se ve ni se puede definir con precisión y que solo percibimos (y medimos) mediante la ordenación de sucesos no simultáneos. La Unión Internacional de Telecomunicaciones (antiguo CCITT), rama de Radiocomunicaciones (ITU-R) lo define así: "Tiempo es un continuum aparentemente irreversible de eventos ordenados" [5].

Sin definirlo, caracterizamos el tiempo por su utilización. "El tiempo sirve para comparar la secuenciación de los cambios de estado (siendo el estado de un elemento o grupo de elementos, el conjunto de las características percibidas de ese elemento o elementos)" [6].

Sin entrar en más consideraciones, el tiempo puede definirse como la separación entre dos sucesos cuantificada en unidades de medida constituidas por periodos de repetición de un proceso de frecuencia determinada. De nuevo, la definición de frecuencia no puede hacerse sin recurrir al tiempo. La frecuencia se define como el número de veces que se repite un proceso periódico por unidad de tiempo (RAE [4]). Para establecer cuando una frecuencia tiene un valor constante es preciso definir previamente una unidad de tiempo constante. Esta definición de constancia en el tiempo, a su vez, se apoya en el periodo de repetición de otro proceso de frecuencia también constante.

En la práctica, no queda otro camino que asumir como periódico, con periodo constante, algún proceso observado. De la comparación de los diferentes procesos periódicos que se pueden observar, puede deducirse cuales son más estables, lo que permite definir unidades de tiempo (y de frecuencia) más constantes. Los fenómenos periódicos que se utilizan para obtener unidades de tiempo son llamados relojes. La constancia del periodo (o de la frecuencia) de un reloj nos indica su exactitud. La exactitud se define en metrología, como el "grado de concordancia entre el resultado de una medición y un valor verdadero del mensurando" [7]. Los relojes más exactos se utilizan como patrones a partir de los cuales se generan las unidades de medida.

Adicionalmente, es preciso definir un origen de tiempos que permita la separación temporal entre sucesos no simultáneos. Una vez que se ha definido un origen de tiempos, los sucesos quedan caracterizados (o datados) por la fecha o tiempo transcurrido desde el origen de tiempos hasta el instante en que tienen lugar. Para comparar tiempos y frecuencias, es preciso utilizar unidades comunes de medida y el mismo origen de tiempos. Dicho en otros términos, es necesaria la creación de una escala de tiempos. Es necesario indicar que un mismo proceso que da lugar a un reloj de elevada exactitud, puede generar unidades diferentes cuando se le observa desde una ubicación situada en un sistema inercial de referencia distinto de aquel en el que se encuentra el reloj. Así, una de las referencias de tiempo más utilizados en muchas actividades proviene de relojes de cesio de gran exactitud, situados en satélites que orbitan la Tierra a velocidades elevadas. Los sistemas de geoposicionamiento (GPS, GLONASS, Galileo etc) reciben, en la superficie de la Tierra, referencias de tiempo de relojes situados en satélites sobre las cuales es preciso efectuar dos correcciones relativistas para compensar la contracción del tiempo debida a la velocidad relativa del reloj respecto del observador y la diferencia de gravedad existente entre las

ubicaciones de ambos [8]. Un observador situado en el satélite, no percibe contracción temporal alguna en su sistema de referencia.

Para la coordinación temporal de las actividades humanas es necesario mantener referencias precisas de tiempo, frecuencia y fecha, es decir escalas de tiempo cada vez más exactas, necesidad que ha exigido que el desarrollo de esta rama de la metrología sea muy antigua y enormemente desarrollada. Es un hecho evidente que no es posible el desarrollo de ninguna actividad comercial, industrial, técnica o científica sin efectuar medidas. La medida del tiempo es tan antigua como la vida tal como la conocemos, puesto que los procesos vitales se gobiernan (o se adaptan) con arreglo a ciclos temporales medidos de forma inconsciente.

La metrología científica es una de las primeras actividades de la humanidad y sin ella no habría sido posible la civilización. Un libro de consulta habitual en laboratorios de calibración [9], remonta su origen, en clave de humor, a Moisés, citando el Antiguo Testamento: "…thou shalt have a perfect and just weight, a perfect and just measure shalt thou have: that thy days may be lengthened in the land which the LORD thy God giveth thee". Ciertamente en diversos pasajes de la Biblia se habla de pesas y medidas. Y en la Biblia Católica el Pentateuco no difiere de la cita anterior: "No tendrás en tu bolsa pesa grande y pesa chica. No tendrás en tu casa medida grande y medida chica. Pesa exacta y justa tendrás; medida exacta y justa tendrás, para que tus días se prolonguen en la tierra que Jehovah, tu Dios, te da" (Deuteronomio 5:25:13 - 15). Pero estas admoniciones no tienen como finalidad fomentar la metrología científica, ni le otorgan un origen divino. Parecen más orientadas al desarrollo de una de sus ramas, la metrología legal y suenan a normativa previa a la auditoría. Y conviene ser prudente con los auditores en el Antiguo Testamento. Con idéntico criterio podría también considerarse a Moisés padre del Derecho. Ambas ciencias son, con seguridad, mucho más antiguas.

Volviendo a la metrología del tiempo y de la frecuencia el desarrollo actual ha permitido obtener patrones muy exactos obteniéndose errores inferiores a una parte en $10^{15.}$ Ninguna otra magnitud física se mide con tanta exactitud. Su importancia en la actividad humana ha generado una red coordinada de laboratorios distribuidos por todo el mundo, dedicados a esta actividad (timekeeping).

2.6 Unidades y escalas de tiempo

En la documentación sobre metrología, emanada de las principales instituciones de normalización (BIPM, ITU, ISO, IEEE, etc.) es habitual definir las unidades de medida de las magnitudes fundamentales, pero sin entrar en la definición de la magnitud. Se supone al lector interesado, familiarizado de forma natural con los conceptos de longitud, tiempo, etc., que resultan intuitivos en la vida diaria. De este modo, es suficiente definir cuidadosamente las unidades a utilizar y los puntos de referencia que darán lugar a las escalas de medida. Tampoco es frecuente definir el concepto de escala de medida. Para la metrología del tiempo encontramos en ETSI (European Telecommunications Standards Institute) [10], una definición tanto de tiempo como de escala de tiempo[1]. Sin embargo la definición de tiempo no se refiere a la magnitud sino al tiempo horario que es el uso habitual para este término en la metrología del tiempo y la frecuencia. La definición de escala de tiempos es semejante a la de ITU-R en la Rec. TF.686-2. Para ITU-R una escala de tiempo es un "sistema de ordenación inequívoca de los acontecimientos" [5]. Para cuantificar la distancia entre estos acontecimientos se necesitan intervalos precisos de tiempo que sirvan como unidades de medida. Estas unidades o marcas en el tiempo son suministradas por los relojes.

Los primeros relojes utilizados por la humanidad han sido astronómicos. La duración del día, los ciclos lunares, el ciclo anual, han marcado los ritmos biológicos y condicionado la actividad humana. Estos ciclos, derivados de los movimientos de los astros, han sido medidos cada vez con más exactitud y han servido para las sucesivas definiciones de las unidades y escalas de tiempo, hasta mediados del siglo XX. El desarrollo de los relojes atómicos en la segunda mitad del siglo XX ha permitido definir la unidad de tiempo con mayor exactitud en base a relojes de cesio, adoptándose oficialmente en 1967. Aparece entonces una unidad de tiempo atómica que da lugar a una escala de tiempo atómica que coexiste con las escalas de Tiempo Universal (UT) existentes hasta ese momento.

[1] **time:** Is used to specify an instant (time of the day) or as a measure of time interval.
NOTE 1: The words time or timing, when used to describe synchronization networks, usually refer to the frequency signals used for synchronization or measurement.
time scale: A system of unambiguous ordering of events.
NOTE 2: This could be a succession of equal time intervals, with accurate references of the limits of these time intervals, which follow each other without any interruption since a well defined origin. A time scale allows to date any event. For example, calendars are time scales. A frequency signal is not a time scale (every period is not marked and dated). For this reason "Universal Time Coordinated (UTC) frequency" should be used instead of "UTC".

En los primeros relojes astronómicos las unidades de tiempo no permanecían constantes. En estos instrumentos, la duración de la hora varía a lo largo del día y con la estación. La aparición de relojes mecánicos de péndulo y de resorte permite normalizar la duración de la unidad de tiempo. El día quedó dividido en veinticuatro horas como herencia cultural mesopotámica y cada hora en sesenta minutos por la misma razón. El minuto se dividió en sesenta segundos en el siglo XIII por similitud con la división anterior, a pesar de las dificultades existentes en esa época para medirlo.

Las escalas de tiempo han tenido (y tienen) diferentes referencias en las diferentes culturas. Así, en el mundo romano, aunque era habitual referenciar los años por el nombre de los cónsules correspondientes al mismo, el origen de tiempos se hizo coincidir con la fundación de Roma, fechándose los eventos por los años transcurridos desde la fundación de la ciudad ("ab urbe condita", abreviadamente "a.u.c."). En el año 1285 a.u.c. correspondiente al 532 de nuestra era (indicado como "después de Cristo", abreviadamente "d.C." o bien "anno Domini" o "a.D") un monje llamado Dionisio "el Exiguo" determinó (al parecer erróneamente) que el nacimiento de Jesucristo había tenido lugar en el año 753 a.u.b., adoptándose el año 754 a.u.b. como año 1 d.C. (no existe año cero ni tampoco siglo cero). La fecha de inicio del año se fijó inicialmente en el 25 de diciembre (por tradición romana), que en la tradición cristiana corresponde a la Natividad del Señor, si bien el origen del año se desplazó posteriormente al 1 de enero por influencia de la tradición judía que consideraba la integración de los niños en su comunidad en el día de su circuncisión, ocho días después del nacimiento. En los reinos cristianos de la península ibérica se utilizó como origen de tiempos el año 38 a.C. (Era Hispánica) hasta 1383. Otras culturas utilizan otros calendarios, bien calendarios solares como el cristiano (actualmente el más extendido), bien calendarios lunares (como el islámico) o bien calendarios mixtos lunisolares (como el judío y el chino), adoptándose en cada caso diferentes orígenes de tiempos. Los musulmanes adoptan el día de la Hégira y los judíos la fecha de la creación del mundo (7 de octubre de 3761 a.C.) [11].

La medida del tiempo cobró notable importancia con la navegación transoceánica. La posición de un buque puede determinarse en latitud por observación de la inclinación del sol, teniendo en cuenta la fecha en que se realiza la observación. No así la longitud, que requiere un reloj preciso para mantener la hora de referencia Greenwich, cuya diferencia con la hora solar observada permite determinar esta magnitud. En octubre de 1707 la flota del almirante Sir Cloudesley Shovell, regresaba de Gibraltar, tras un ataque a Tolón, en el contexto de la

Guerra de Sucesión Española. Por un error en el cálculo de la longitud, agravado por el mal tiempo, esta flota de veintiún buques, fue arrojada sobre los arrecifes de las Scilas perdiéndose cerca de dos mil vidas, incluida la del almirante [11]. En el desastre se hundieron cuatro grandes buques que sumaban más de doscientos cañones. La magnitud de esta catástrofe puso de manifiesto la necesidad de contar con relojes fiables y llevó al gobierno inglés a crear en 1714 un organismo denominado "The Board of Longitude". Esta entidad ofreció un premio de veinte mil libras de la época a quien contribuyese de forma significativa a determinar la posición en el mar con un error no superior a treinta millas náuticas en una navegación hasta las Indias Occidentales. Tal exactitud en la determinación requería un reloj con un error inferior a tres segundos por día. En 1760 John Harrison, tras varios desarrollos, presenta un cronómetro marítimo capaz de alcanzar esta exactitud [12]. Tras diversas pruebas de navegación, el hijo de Harrison recibió, en 1773, el premio ofrecido medio siglo antes.

La existencia de cronómetros marítimos de precisión puso de manifiesto la necesidad de sincronizarlos con un reloj de referencia. Cada país desarrolló su patrón y en Inglaterra los barcos sincronizaron sus cronómetros con una señal diaria de referencia, procedente de la torre del observatorio de Greenwich observable a la 1:00pm. Francia estableció su referencia horaria legal para todo el país a partir de la hora solar en París (observatorio de Meudon) mediante una ley de 14 de marzo 1891. En España, con algún intento de formalizar la hora legal en plena "Gloriosa", se utilizaron como origen de longitudes, diferentes meridianos como el de Cádiz y el de la isla de Hierro. La hora aplicada con más frecuencia fue la correspondiente al meridiano de Madrid, junto con la hora local.

En 1884 la Conferencia Internacional del Meridiano celebrada en Washington, con delegaciones de 26 países, entre ellos España, eligió como patrón la hora local del Real Observatorio de Greenwich en Inglaterra. Esta conferencia aprobó, por veintitrés votos a favor y dos abstenciones, la resolución IV: "Que la Conferencia propone la adopción de un día universal para todos los propósitos, para los que pueda ser conveniente y los cuales no interferirán con el uso de tiempo horario local donde sea conveniente" Y la resolución V por quince votos favorables, dos en contra y siete abstenciones: "Que este día universal sea un día solar medio; comienza para todo el mundo en el momento de la medianoche promedio del meridiano inicial, coincidiendo con el comienzo del día y fecha civil de ese meridiano; y será contado desde cero a veinticuatro horas". Esta unidad de tiempo recibió el nombre de día solar verdadero.

En Estados Unidos y Canadá las zonas de tiempo estándar se introdujeron el 18 de noviembre de 1883. Francia, que se opuso a la adopción de Greenwich como meridiano de referencia en la conferencia de Washington, mantuvo la hora de París hasta 1911 (Ley de 9 de Marzo). Finalmente adoptó la hora del meridiano de Greenwich sin citarlo, definiendo la hora oficial francesa como hora del tiempo medio del observatorio de París retardada en nueve minutos y veintiún segundos.

En España [13], la utilización del meridiano de Madrid persistió hasta el 1 de enero de 1901, fecha de entrada en vigor del Real Decreto del Gobierno de 26 de julio de 1900 por el que se adoptó la hora GMT (Greenwich time meridian). Para 1929 la mayor parte de los países habían aceptado las zonas horarias.

El día solar verdadero no resultó ser una unidad de tiempo adecuada. La duración de un día solar no es la misma a lo largo del año. La Tierra se desplaza según una órbita elíptica que mantiene constante su velocidad areolar, pero el movimiento del planeta es más rápido cuando se encuentra más cerca del sol que cuando se encuentra más lejos. Por otra parte el eje de la Tierra sufre variaciones de inclinación de manera que el ecuador celeste de la Tierra experimenta también variaciones, alargándose el día cuando el sol (el plano de la órbita de la Tierra) se aleja del ecuador y acortándose cuando se acerca. Así, el día solar verdadero resulta más corto de febrero a marzo y de agosto a septiembre y más largo de mayo a junio y de noviembre a diciembre. La diferencia entre el día solar verdadero más largo y el más corto se aproxima a la media hora. Una diferencia tan evidente fue rápidamente detectada. Como consecuencia se definió una nueva unidad básica de tiempo llamada “día solar medio”. Esta unidad se corresponde con el valor promedio del día solar calculado a lo largo de un año. Es equivalente al “día solar verdadero” corregido con la llamada “ecuación del tiempo”. Este “día solar medio” se tomó como base para definir el segundo y la escala universal de tiempos UT1 que estuvo en vigor hasta 1956.

El “día solar medio” tampoco resulta ser suficientemente constante por múltiples razones. La Tierra ralentiza su velocidad de giro sobre su eje probablemente por la disipación de energía debida a las mareas. Otros fenómenos como movimientos atmosféricos o, el movimiento relativo entre núcleo de la Tierra y la corteza también afectan a la duración del día solar medio. En 1956 el Comité Internacional de Pesas y Medidas adoptó como unidad de tiempo el segundo en base a la siguiente definición [14]:

"El segundo es la fracción 1/31 556 925.9747 del año tropical para enero de 1900, 0 a 12 horas tiempo efeméride".

Esta nueva escala de tiempo recibió el nombre de tiempo efeméride (ET) y se definió a partir de la rotación de la Tierra alrededor del sol, mucho más estable que la rotación de la Tierra sobre su propio eje. Esta definición fue elegida para que la escala ET (Ephemeris Time) coincidiese lo más aproximadamente con la UT1 en el año 1900. Como consecuencia de la disminución de la velocidad de rotación de la Tierra sobre su eje, en el año 1988 la escala UT1 acumulaba un retraso de cincuenta y seis segundos respecto a la escala ET. Por otra parte, la escala ET no consideraba los efectos relativistas debido al potencial gravitatorio y a la velocidad de desplazamiento entre sistemas de referencia. En 1981 fue sustituida por dos nuevas referencias, una geocéntrica TDT (Terrestrial Dynamical Time) referida a un sistema con origen en el centro de la Tierra, y otra referida a un sistema con origen en el centro del sistema solar, conocida como TDB (Barycentric Dynamical Time). Desde 1991 TDT se denomina TT (Terrestrial Time) y se han adoptado dos nuevas referencias TCG (Geocentric Coordinate Time) y TCB (Barycentric Coordinate Time) [15].

En 1967 la "13 Conférence générale des Poids et Mesures" adoptó una nueva definición para el segundo [16]:

"El segundo es la duración de 9 192 631 770 periodos de radiación correspondientes a la transición entre los dos niveles hiperfinos del estado de masa del átomo de cesio 133".

En la Conferencia de 1997 se añadió "Esta definición se refiere al átomo de cesio en reposo a 0ºK". Esta nota se entiende con el fin de aclarar que la definición del segundo está basada en un átomo de cesio no perturbado por radiación de cuerpo negro, esto es, en un entorno cuya temperatura es 0ºK. La frecuencia de todos los patrones primarios de frecuencia debe ser corregida por la deriva debida a la radiación ambiente, como se ratificó en la recomendación S1 de la conferencia de 1999 [17].

La adopción de una unidad atómica para la medida del tiempo parte del hecho de que los niveles de energía de cada átomo de una especie dada, si se les aísla de perturbaciones, son los mismos en cualquier lugar del universo y no puede modificarse como sucede con los movimientos de los astros. Estos niveles de energía definen la frecuencia de la radiación emitida o absorbida cuando tiene lugar una transición entre niveles. De este modo, la

frecuencia correspondiente a una transición entre dos niveles energéticos de una especie dada de átomo es la misma en todo el universo y la unidad de tiempo definida a partir de transiciones atómicas es intrínsecamente más estable que las unidades de tiempo astronómicas. En laboratorios de metrología pueden mantenerse relojes atómicos con exactitudes en la medida de la frecuencia fraccional y su estabilidad de una parte en 10^{15} (inferior a un segundo en 31,7 millones de años).

La definición del segundo a partir del reloj de cesio ha dado lugar a una nueva escala de tiempo llamada escala de tiempo atómica (AT) que ha dado lugar a la escala de Tiempo Atómico Internacional (TAI). Esta a su vez, ha dado lugar a una escala corregida denominada UTC (Tiempo Universal Coordinado, aunque sus siglas son, por convenio, un anagrama no coincidente con las iniciales en los idiomas más usuales). Esta escala busca la coincidencia con la escala UT1 (las siglas GMT han quedado como expresión de la hora local correspondiente a la escala UTC en el meridiano de Greenwich) intercalando, cuando es necesario, un segundo adicional. El GPS difunde una escala basada en TAI pero con origen a las 0 horas (tiempo universal) del 6 de enero de 1980 lo que origina una diferencia de 19 segundos como consecuencia del "segundo intercalar" hasta esa fecha.

La diferencia horaria actual (marzo de 2015) entre UTC y TAI es de 35 segundos, debido al "segundo intercalar" utilizado para buscar la coincidencia entre hora UTC y UT1. La diferencia entre escalas GPS y UTC, es de 16 segundos. El mensaje de navegación GPS incluye este dato. La escala UTC es la que se difunde habitualmente por diversos medios. El próximo segundo intercalar se introducirá el 30 de junio de 2015 [18].

La escala de tiempo TAI y, consecuentemente, la escala UTC, no cuenta con un reloj físico. El tiempo TAI se obtiene a partir de datos suministrados por relojes atómicos de un gran número de laboratorios de diferentes países. La escala UTC intercala segundos con arreglo a la información suministrada por el IERS (International Earth Rotation and Reference Systems Service) [19] y [20].

2.7 Relojes

Ya se ha comentado como los primeros relojes han sido astronómicos. La exactitud de estos relojes era suficiente para las actividades humanas y no se ha cuestionado durante milenios. Aunque los errores acumulados han llevado a efectuar reformas al calendario, no ha

sido posible determinar, con algún rigor, la exactitud de las unidades básicas de medida hasta la Edad Moderna. Desde la observación, por Galileo (1583), de la constancia del periodo del movimiento de un péndulo, hasta el cronómetro marino de Harrison (1736) transcurre un siglo y medio. Los relojes y cronómetros basados en sistemas mecánicos de resorte, aunque portátiles, no son más exactos que el de péndulo. El descubrimiento de las propiedades piezoeléctricas del cuarzo y los primeros estudios por parte de Pierre y Jacques Curie en 1880, abre el camino para el estudio de diferentes materiales que presentan esta propiedad. Para 1910, están identificadas las veinte clases de cristales naturales con propiedades piezoeléctricas. En 1917, en el marco de la Primera Guerra Mundial, Langevin y French desarrollan un dispositivo resonante a 50 KHz para detección submarina. A partir de este momento comienza la utilización de los materiales piezoeléctricos para diversas aplicaciones. Aunque mucho más estables, los osciladores basados en la piezoelectricidad son, igualmente, resonadores mecánicos. El cuarzo es el cristal con propiedades piezoeléctricas más ampliamente utilizado.

2.8 Ruido

Al igual que el cronómetro de Harrison supuso una mejora importante en el posicionamiento de los buques, la exactitud de la frecuencia (o del periodo) en los patrones utilizados en la actualidad es un parámetro crítico que marca límites al avance tecnológico. Así, el aterrizaje totalmente instrumental de un avión requiere un posicionamiento muy exacto de la nave y supone referencias de tiempo igualmente exactas, o la asignación de frecuencias en el espectro radioeléctrico, requiere patrones que garanticen rigurosamente la señal para no invadir canales adyacentes. Pero no es posible obtener un patrón de tiempo absolutamente exacto. Tal instrumento habría de generar un tono puro cuya representación espectral fuese una raya infinitamente estrecha, una “δ” (delta) de Dirac en el dominio de la frecuencia. En el dominio del tiempo se correspondería con una sinusoide pura, no modulada de duración infinita. Las señales patrón que se obtienen en la realidad, tienen un ancho de banda, no son señales puras. La señal patrón pura lleva añadidas otras señales que tratamos de minimizar y que denominamos ruido. Este ruido deteriora los instantes significativos de la señal generando errores. Por supuesto, estos pueden ser aleatorios o sistemáticos. En el caso de errores sistemáticos es posible investigar su origen para eliminarlos. Pero el ruido aleatorio es consecuencia de una multiplicidad de orígenes y causa el deterioro de la estabilidad de la señal. El objetivo es obtener fuentes de muy bajo ruido y mantener este acotado.

2.9 Fuentes de frecuencia. Estabilidad

El cuarzo (SiO_2) es un material altamente estable, que permite obtener osciladores con una frecuencia muy exacta en el corto plazo. Un oscilador corriente de cuarzo, como el que equipa a un barato reloj de pulsera, presenta un error que puede ser inferior a una parte en 10^7. Esto equivale a poco más de tres segundo en un año. Este resultado mejora con diferentes técnicas, y puede alcanzar una parte en 10^9 manteniendo el cristal en horno a temperatura constante. Esta exactitud en el corto plazo, tiene su contrapartida en la deriva a largo plazo. El cristal de cuarzo deriva lentamente con el envejecimiento, a causa, probablemente, de la difusión en la red cristalina, de impurezas procedentes de las metalizaciones efectuadas para aprovechar sus propiedades piezoeléctricas. Se recurre entonces, a los relojes atómicos, basados en transiciones entre estados metaestables de determinados elementos como el cesio. Dado que los relojes de cesio son más erráticos en el corto plazo que los de cuarzo, los relojes de cesio utilizan un reloj de cuarzo, al que gobiernan en el largo plazo. Mediante relojes atómicos se obtienen errores inferiores a una parte en 10^{15}.

La arquitectura de un oscilador atómico, requiere un oscilador local (flywheel oscillator) que aporta estabilidad en el corto plazo, y un resonador atómico muy estable en el largo plazo. Para mejorar la respuesta en el corto plazo del oscilador de cuarzo, se utilizan también relojes de rubidio, máseres de hidrógeno, resonadores basados en las propiedades dieléctricas del zafiro monocristalino y resonadores ópticos [21]. Todos ellos son dispositivos macroscópicos, y, al igual que los de cuarzo, están condicionados por magnitudes dimensionales de los cristales o de las cavidades de resonancia. Esta dependencia hace que su estabilidad sea sensible a las variaciones de magnitudes de su entorno, tales como presión, temperatura, humedad, campos magnéticos, aceleración vibraciones y golpes. En los resonadores microscópicos, la frecuencia de oscilación responde a transiciones atómicas que dan lugar a la emisión de fotones cuya frecuencia viene dada por la diferencia de estados energéticos a través de la constante de Plank. Este tipo de resonadores resulta menos sensible al entorno y más estable en el largo plazo.

La obtención de un patrón de tiempo de alta calidad puede abaratarse, mediante las tecnologías para la difusión de las señales de tiempo y frecuencia. Las señales patrón procedentes de relojes de cesio, pueden difundirse modulando una portadora de radiofrecuencia mediante códigos conocidos (típicamente códigos IRIG). Existen diversas estaciones de radiodifusión que transmiten patrones de tiempo y frecuencia y escalas de

tiempo TAI. Pueden obtenerse también, patrones de tiempo de las emisoras de LORAN (aunque el antiguo LORAN C cesó de emitir el 4 de enero de 2010, permanece un servicio experimental denominado enhanced LORAN para la investigación de la utilización de señales de difusión terrestre como sistema de respaldo al GPS), de las señales radiodifundidas de televisión (DVB-T), de los sistemas de navegación global GNSS (GPS es el más extendido), e incluso de la red eléctrica.

La señal, procedente del reloj, es una señal eléctrica que se repite con periodicidad constante. Un reloj está constituido por un oscilador altamente estable, basado en un fenómeno físico que entrega una señal sinusoidal. Los equipos comerciales entregan habitualmente una señal sinusoidal de 10 MHz e incluyen una salida impulsiva de un pulso por segundo (1pps). Los divisores de frecuencia y, de forma general la electrónica necesaria para obtener esta señal de 1 pps, a menudo degradan la estabilidad. Por otra parte, los flancos de subida de la señal son muy abruptos, idealmente con pendiente infinita. Se requiere, para la comparación con otras señales de referencia, de etapas de entrada de gran anchura de banda, para mantener la verticalidad de los flancos. La incertidumbre en el nivel de disparo del circuito de sincronismo, también juega un papel importante. Todo ello obliga a ser extremadamente cuidadosos en las medidas directas de tiempo con señales de pulsos.

3. HIPÓTESIS DE TRABAJO Y OBJETIVOS

3.1 Hipótesis de trabajo

Los sistemas actuales de posicionamiento basados en satélites, están ligados intrínsecamente a la generación y medida exacta de marcas temporales y permiten obtener además de las coordenadas de situación del punto deseado, información del tiempo horario. La escala de tiempos que entregan, resulta mucho más exacta que los datos de posición. La información suministrada constituye un espacio de cuatro dimensiones, tres espaciales y una temporal, que resultan inseparables en el proceso de posicionamiento.

La obtención de señales de reloj también puede obtenerse a partir de señales de radiodifusión DVB-T. Las estaciones que transmiten estas señales son fijas y de posición conocida. Los sistemas DVB-T transmiten tramas MPEG de modo transparente extremo a extremo. La información de trama modula a un conjunto de portadoras agrupándose en símbolos OFDM. Estos símbolos se transmiten simultáneamente por todos los emisores, con intervalos de transmisión y silencio fijados para minimizar los errores de recepción debidos a señales procedentes de diferentes emisores y ecos por reflexiones de la señal. Para asegurar la transmisión simultánea de cada símbolo toda la red de emisores se sincroniza con un reloj patrón de alta estabilidad, común a todos ellos. En cierto modo, se dispone de relojes muy exactos transmitiendo señales de tiempo desde plataformas fijas cuya posición puede conocerse con exactitud aunque no envían información de su situación. Las señales MPEG contienen información de la escala de tiempo y el procedimiento normalizado por el sistema DVD-T añade exactitud al reloj de la trama. Si es posible identificar el emisor del que procede cada señal recibida, se dispone de toda la información necesaria para construir un sistema de posicionamiento.

La decodificación de una trama MPEG requiere la generación de una señal a partir de la cual se obtengan los relojes de pixel y de carácter para construir las salidas de vídeo digitales y las subportadoras de las señales de crominancia para las salidas de señal analógica. Dado que la trama se transmite y recibe en tiempo real, la señal de reloj generada en recepción debe ser idéntica a la utilizada en transmisión sin disponer del grado de libertad que supone reconstruir tramas almacenadas en memoria.

La señal MPEG original se acomoda al reloj de transmisión de los símbolos OFDM, de modo que, aunque a la entrada del transmisor ambas señales sean plesiócronas, se

sincronizan al transmitirlas. En recepción, el reloj de la señal MPEG es el de transmisión de símbolos OFDM, heredando la estabilidad de este.

En recepción, la señal MPEG extraída puede presentar ruido de fase como consecuencia de la deriva del reloj de recepción respecto al de transmisión. Es preciso que el primero se sincronice con el segundo para cumplir con los requisitos de calidad exigidos en la reconstrucción de las señales de vídeo. Cabe preguntarse si es posible extraer señales de reloj con suficiente estabilidad como para permitir la construcción de sistemas de posicionamiento basadas en las redes DVB-T. Las redes comerciales no están diseñadas para este fin y la electrónica utilizada en los receptores, propia de la radio digital, muestrea las señales de frecuencia intermedia detectando la fase (cruce por cero de la señal). El receptor utiliza esta información para sincronizar su reloj resultando un PLL controlado por software.

3.2 Objetivos

Los objetivos marcados para este trabajo consisten en:

- Obtención y caracterización de señales patrón de tiempo en receptores DVB-T.
- Análisis de su estabilidad en el corto plazo.
- Evaluación del efecto de su incertidumbre en sistemas de posicionamiento construidos sobre redes DVB-T.

Para ello se revisará el ruido introducido en señales de alta estabilidad, la forma en que este ruido las modula, como evaluar su calidad, y la influencia que tiene la incertidumbre de estas señales de tiempo en los indicadores de la bondad de los sistemas de posicionamiento.

Este estudio nos llevará a revisar los fundamentos de los sistemas de posicionamiento y la obtención del parámetro GDOP que los caracteriza para estimar en él la influencia de la incertidumbre de la señal temporal. Se analizará la modulación de amplitud y fase por señales de ruido, partiendo del análisis del espectro de las modulaciones de ángulo con señales convencionales. Las señales de ruido modularán en cuadratura a la de reloj y serán tratadas con un modelo de señal compleja (señal analítica), cuyo espectro de densidad de potencia las caracteriza. De forma paralela, es posible una caracterización en el dominio del tiempo, donde el parámetro que se utilizará será la varianza de Allan. Se extraerán en el laboratorio y caracterizaran diversas señales obtenidas mediante receptores DVB-T, tanto recuperadas de

interfaces normalizados, como obtenidas de relojes internos de proceso del receptor. Finalmente se presentarán y discutirán estos resultados y las conclusiones obtenidas.

4. ANÁLISIS Y CARACTERIZACIÓN DE LAS SEÑALES

4.1 Estimación de errores. Incertidumbre

Aunque el concepto de error y el análisis de errores han sido siempre de uso habitual en ciencia y también en otros campos, la sistematización del concepto de "incertidumbre" y el consenso sobre su evaluación se sitúan en la segunda mitad del siglo XX. La necesidad de dar coherencia a la comparación de medidas efectuadas en diferentes ámbitos tanto industriales, científicos, tecnológicos etc. como geográficos, ha sido recogida por diversas entidades de normalización. Esta inquietud dio lugar al desarrollo por parte de ISO (International Standard Organization) de una guía para la expresión de la incertidumbre, la célebre, GUM (Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement) que constituye el documento de referencia en metrología. En este documento se hará referencia a la tercera edición [22], editada conjuntamente por las organizaciones pertenecientes al JCGM (BIPM, IEC, IFCC, ILAC, ISO, IUPAC, IUPAP y OIML).

La magnitud utilizada para la expresión de la incertidumbre en la medida, debe ser internamente consistente, es decir, debe poder obtenerse de las componentes que contribuyen a ella y debe ser también transferible, es decir, esta incertidumbre puede ser componente de otra incertidumbre. Estos criterios apuntan a la utilización de la dispersión y la desviación en la caracterización de las medidas. Ambas características se satisfacen mediante las propiedades de combinación de varianzas.

4.1.1 Expresión de la incertidumbre

Conforme a la GUM, la incertidumbre en la medida se define como un "parámetro asociado al resultado de una medición, que caracteriza la dispersión de los valores que podrían ser razonablemente atribuidos al mensurando" [22] [7]. Asimismo, se define la incertidumbre expandida como la "magnitud que define un intervalo en torno al resultado de una medición y en el que se espera encontrar una fracción importante de la distribución de valores que podrían ser atribuidos razonablemente al mensurando". Esta fracción puede entenderse como la probabilidad o el nivel de confianza del intervalo.

Para asociar un nivel específico de confianza a un intervalo definido por la incertidumbre expandida se requiere conocer la distribución de probabilidad del resultado de la medida y su incertidumbre típica combinada. En magnitudes en las que intervienen muchos factores independientes con sus correspondientes dispersiones de valores, la distribución combinada resultante es gaussiana, en virtud del teorema del límite central.

La distribución normal N(μ,σ) para una magnitud x, con valor esperado μ y desviación típica σ, responde a una función de densidad de probabilidad dada por la expresión:

$$fdp(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Para un factor k dado, el área comprendida entre μ-kσ y μ+kσ representa la probabilidad de obtener una realización de x contenida en un entorno μ±kσ y se corresponde con la expresión:

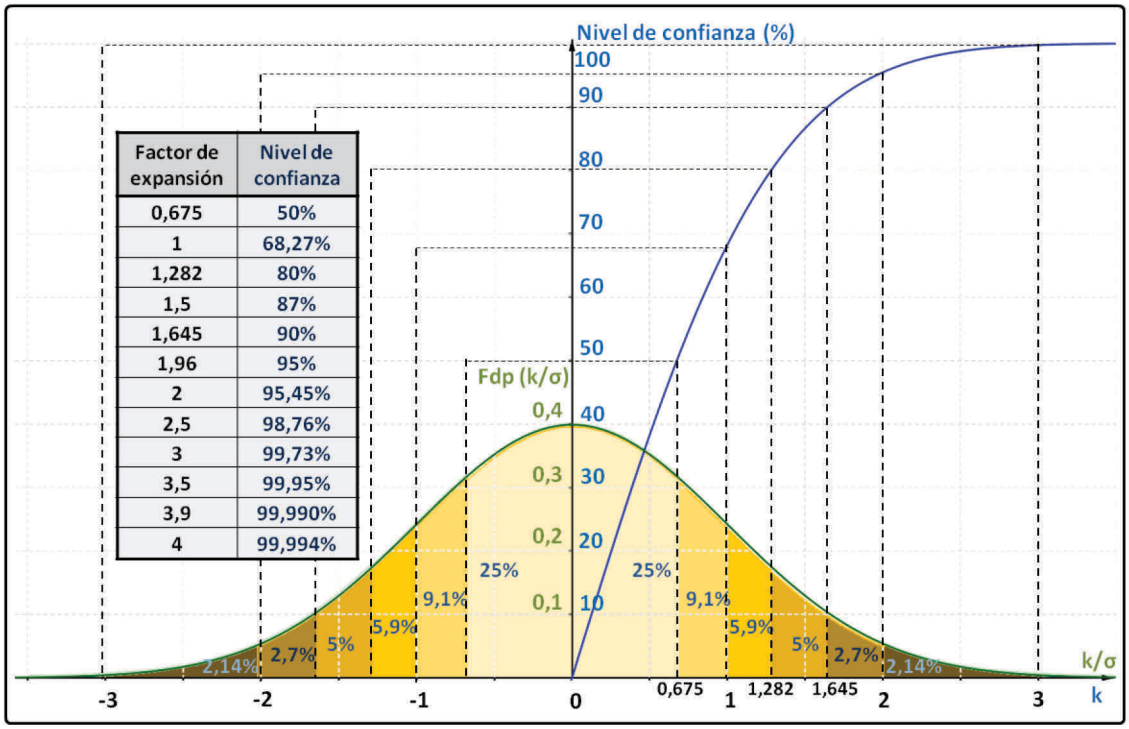
$$p(\mu - k\sigma \leq x \leq \mu + k\sigma) = \int_{\mu-k\sigma}^{\mu+k\sigma} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

Mediante métodos numéricos puede obtenerse el resultado de esta integral para diferentes valores de k. Este parámetro, denominado factor de expansión, queda así asociado con un nivel de confianza expresado en términos del porcentaje de área bajo la curva en el intervalo μ±kσ. El término kσ representa la incertidumbre expandida. Puede verse fácilmente que el nivel de confianza, para distribuciones gaussianas, se relaciona con el factor de expansión mediante la función de error según la expresión:

$$\frac{(Nivel\ de\ confianza\ porcentual)}{100} = \int_{\mu-k\sigma}^{\mu+k\sigma} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = erf\left(\frac{k}{\sqrt{2}}\right)$$

En la Figura 1 se representa la función de densidad de probabilidad gaussiana normalizada N(0,1) y el nivel de confianza ($erf\left(\frac{k}{\sqrt{2}}\right)$ en valor unitario), así como algunos valores representativos para k.

A lo largo de este documento se utilizará la desviación típica σ para caracterizar la incertidumbre. Esto equivale a utilizar un factor de expansión k=1 equivalente a un nivel de confianza de, aproximadamente, el 68%, siempre en la suposición de distribución gaussiana. Los resultados son siempre susceptibles de expansión en función del nivel de confianza requerido.



Factor de expansión	Nivel de confianza
0,675	50%
1	68,27%
1,282	80%
1,5	87%
1,645	90%
1,96	95%
2	95,45%
2,5	98,76%
3	99,73%
3,5	99,95%
3,9	99,990%
4	99,994%

Figura 1. Representación gráfica del nivel de confianza en función del factor de expansión. Los porcentajes en los sectores bajo la campana representan su área

La característica de tranferibilidad en la composición de incertidumbres queda cumplida gracias a las propiedades de las varianzas. La propagación de la varianza en el caso de funciones compuestas da lugar a idéntica propagación del cuadrado de las incertidumbres, expresándose la incertidumbre resultante del siguiente modo, conforme a las recomendación recogida en la GUM [22]. Se considera una magnitud obtenida a partir de otras N magnitudes X_1, X_2, ..X_N, mediante una relación funcional $Y=f(X_1, X_2, ..X_N)$. La incertidumbre para la magnitud Y, denominada incertidumbre combinada se obtiene mediante la expresión:

$$\sigma_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{\partial f}{\partial x_i}\right]^2 \cdot \sigma^2(x_i) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot cov(x_i, x_j)$$

donde x_i y x_j son estimaciones de X_i, X_j y $cov(x_i,x_j)$ es la covarianza estimada, asociada a x_i y x_j. Puede expresarse el último término a partir de los coeficientes de correlación estimados de x_i y x_j:

$$r(x_i, x_j) = \frac{cov(x_i, x_j)}{\sigma(x_i) \cdot \sigma(x_j)}$$

Obteniéndose para la incertidumbre combinada:

$$\sigma_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{\partial f}{\partial x_i}\right]^2 \cdot \sigma^2(x_i) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot \sigma(x_i) \cdot \sigma(x_j) \cdot r(x_i, x_j)$$

Si no existe correlación entre las magnitudes de entrada, la expresión para la incertidumbre combinada se reduce a:

$$\sigma_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{\partial f}{\partial x_i}\right]^2 \cdot \sigma^2(x_i) = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \sigma(x_i)\right]^2$$

4.1.2 Dilución de la precisión

El factor que se utiliza habitualmente para valorar la exactitud en el posicionamiento recibe el nombre de "dilución de la precisión" (DOP, Dilution of Precision). Este factor evalúa el error de situación debido, bien a las incertidumbres en la estimación de la posición, bien a las incertidumbres en la estimación del tiempo. Se utiliza el error en distancia (rango) como elemento de referencia para la comparación.

Así, si se considera un desplazamiento rectilíneo sobre un eje x y se mide la distancia R_x a un punto de referencia conocido sobre dicho eje, la dilución de la precisión vendrá dada por el cociente σ_x / σ_R, donde σ_x representa la incertidumbre de posición en la dirección X y σ_R la incertidumbre en la estimación del rango [23]. Extendiendo esta definición a tres direcciones ortogonales, se obtiene la dilución de la precisión en posición (PDOP) sobre tres ejes:

$$DOP_x = \frac{\sigma_x}{\sigma_{R_x}} \; ; \quad DOP_y = \frac{\sigma_y}{\sigma_{R_y}} \; ; \quad DOP_z = \frac{\sigma_z}{\sigma_{R_z}}$$

Para el caso en el que la incertidumbre en la estimación de los rangos en las tres direcciones sea idéntica:

$$PDOP = \frac{\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2}}{\sigma_R} \quad \text{donde} \quad \sigma_R = \sigma_{R_x} = \sigma_{R_y} = \sigma_{R_z}$$

Se utiliza esta misma expresión para PDOP, aunque en la obtención de la posición, las direcciones entre el blanco y los puntos de referencia no sean ortogonales y cuando existan más de tres referencias.

Esta forma de caracterizar la bondad del posicionamiento da lugar a la aparición de una familia de acrónimos que incluye PDOP (Position Dilution of Precision), HDOP (Horizontal Dilution of Precision), VDOP (Vertical Dilution of Precision), TDOP (Time Dilution of Precision) y GDOP (Geometric Dilution of Precision) [24]:

$$HDOP = \frac{\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}}{\sigma_R};\quad VDOP = \frac{\sigma_y}{\sigma_R};\quad TDOP = \frac{\sigma_t}{\sigma_R};\quad GDOP = \frac{\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 + \sigma_t^2}}{\sigma_R}$$

$$PDOP^2 = HDOP^2 + VDOP^2$$

$$GDOP^2 = PDOP^2 + TDOP^2$$

El término "precisión" bajo el punto de vista de la metrología [7], es una expresión que alude a la repetibilidad de un resultado y no a su "exactitud". Al expresar los errores de posición en términos de incertidumbre resulta más adecuado evitar el término "precisión". Sin embargo, esta expresión se ha consolidado desde los primeros sistemas de radiolocalización a finales de la Segunda Guerra Mundial, mucho antes de la aparición de la VIM (International Vocabulary of Basic and General Terms in Metrology).

4.1.3 Obtención de la posición en sistemas TDOA

En la estimación de la posición de un blanco mediante sistemas radiométricos TOA y TDOA, el punto buscado ocupa la intersección de esferas o hipérbolas que obligan a resolver sistemas de ecuaciones no lineales, dificultando su proceso y consumiendo un exceso de recursos de computación. El conocimiento previo de una situación aproximada del blanco, permite, mediante el desarrollo de Taylor en el entorno de este punto, sustituir las superficies por planos tangentes y linealizar las ecuaciones. Sucesivas iteraciones pueden mejorar el posicionamiento.

En el caso de sistemas TDOA en dos dimensiones, es posible obtener soluciones fáciles de computar. Siguiendo el trabajo de Fang [25] vamos a suponer tres estaciones cuya posición sobre un sistema de ejes cartesiano viene dada por A(0,0,0), B(b,0,0) y C(c_x,c_y,0). En la posición a determinar P(x,y,z), el retardo en el tiempo de recepción de la señal procedente de B respecto a la señal procedente de A se expresa $T_{ab}=T_a-T_b$ y la diferencia de distancias entre P y ambos puntos vendrá dada por $R_{ab}=R_a-R_b=v.T_{ab}$, donde v representa la velocidad de las señales radioeléctricas en el medio. Esta diferencia puede escribirse:

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2}-\sqrt{(x-b)^2+y^2+z^2}=R_{ab}$$

Que corresponde a un hiperboloide de revolución de dos hojas:

$$\frac{\left(x-\frac{b}{2}\right)^2}{\left(\frac{R_{ab}}{2}\right)^2}-\frac{y^2}{\left(\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{R_{ab}}{2}\right)^2}\right)^2}-\frac{z^2}{\left(\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{R_{ab}}{2}\right)^2}\right)^2}=1$$

De manera análoga, la diferencia en los tiempos de recepción de las señales procedentes de C y de A indica una diferencia de rangos que puede escribirse:

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2}-\sqrt{(x-c_x)^2+\left(y-c_y\right)^2+z^2}=R_{ac}$$

que, a su vez, responde también a un hiperboloide.

Reescribiendo las expresiones de la diferencia de rangos en la forma:

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2}-R_{ab}=\sqrt{(x-b)^2+y^2+z^2}$$

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2}-R_{ac}=\sqrt{(x-c_x)^2+\left(y-c_y\right)^2+z^2}$$

y elevándolas al cuadrado:

$$R_{ab}^2-2R_{ab}\sqrt{x^2+y^2+z^2}=b^2-2bx$$

$$R_{ac}^2-2R_{ac}\sqrt{x^2+y^2+z^2}=c_x^2+c_y^2-2c_xx-2c_yy$$

Eliminando el término $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ entre ambas expresiones se obtiene un plano paralelo al eje z:

$$y=gx+h$$

Donde g y h vienen expresadas por:

$$g = \frac{1}{c_y}\left(\frac{b.R_{ac}}{R_{ab}} - c_x\right); \qquad h = \frac{1}{2c_y}\left\{c_x^2 + c_y^2 - R_{ac}^2 + R_{ab}.R_{ac}\left[1 - \left(\frac{b}{R_{ab}}\right)^2\right]\right\}$$

La coordenada z se encuentra en el plano así obtenido, perpendicular al que contiene a las tres estaciones A, B y C. La intersección del plano y el primer hipérboloide permiten obtener:

$$z = \pm\sqrt{dx^2 + ex + f}$$

donde d, e y f son, respectivamente:

$$d = -\left[1 - \left(\frac{b}{R_{ab}}\right)^2 + g^2\right]; \qquad e = b\left[1 - \left(\frac{b}{R_{ab}}\right)^2\right] - 2gh$$

$$f = \frac{R_{ab}^2}{4}\left[1 - \left(\frac{b}{R_{ab}}\right)^2\right]^2 - h^2$$

De este modo se obtienen las coordenadas z e y en función de x, con expresiones fácilmente procesables, pero para la obtención de esta última se requiere un nuevo hiperboloide.

Un caso particular es la suposición de tierra plana con la coordenada z nula para todos los puntos en el que se obtienen dos posibles valores para x, correspondientes a la intersección de dos hipérbolas contenidas en el plano. Esta situación podría darse en navegación marítima. El trayecto radioeléctrico presenta curvatura como consecuencia de la variación del índice de refracción de la atmósfera con la altura. Puede modelizarse efectuando la corrección a un radio de curvatura terrestre ficticio para una suposición de propagación rectilínea de la señal.

El trabajo de Fang identifica la posición del blanco en un plano perpendicular al que contiene las tres estaciones de referencia, siendo necesaria, al menos, una estación adicional para construir un nuevo hiperboloide. Este hecho sugiere la posibilidad de agrupar las estaciones en triadas que determinan los planos de base que las contienen, de manera que el blanco se encontrará en planos perpendiculares a estos planos base. La intersección de estos planos perpendiculares determinará la posición del blanco. Obsérvese que la obtención de la posición del blanco implica la resolución de sistemas lineales fácilmente procesables, en lugar de la resolución de expresiones cuadráticas. Siguiendo esta línea Bucher y Misra [26]

plantean una solución para el posicionamiento en un sistema hiperbólico, del siguiente modo. Considerense, al menos cuatro estaciones cuya posición es conocida. La estación i-ésima estará situada en el punto $E_i(x_i,y_i,z_i)$ y el blanco cuyas coordenadas se desea obtener se encuentra en un punto P(x,y,z). Sea *v* la velocidad de la señal electromagnética en el medio de propagación. La distancia entre cada estación y el blanco puede escribirse como:

$$\sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2} = R_i = v.t_i$$

La diferencia de distancias entre el blanco y dos estaciones E_i y E_j se expresa:

$$R_{ij} = v.(t_i - t_j)$$

$$R_{ij} = \sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2} - \sqrt{(x_j - x)^2 + (y_j - y)^2 + (z_j - z)^2}$$

Reordenando y elevando al cuadrado la expresión anterior:

$$\sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2} - R_{ij} = \sqrt{(x_j - x)^2 + (y_j - y)^2 + (z_j - z)^2}$$

$$x_i{}^2 + y_i{}^2 + z_i{}^2 - 2x_i x - 2y_i y - 2z_i z - 2R_{ij}\sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2} + R_{ij}^2 = x_j{}^2 + y_j{}^2 + z_j{}^2 - 2x_j x - 2y_j y - 2z_j z$$

expresión de un hipérboloide que puede escribirse de un modo más compacto:

$$P_i{}^2 - P_j{}^2 + 2x_{ji}x + 2y_{ji}y + 2z_{ji}z + R_{ij}^2 = 2R_{ij}\sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2}$$

donde p_i representa la distancia (conocida) de la estación i-ésima al origen de coordenadas y los términos con subíndice "ij" indican la diferencia de coordenadas entre las correspondientes estaciones:

$$P_i{}^2 = x_i{}^2 + y_i{}^2 + z_i{}^2; \quad x_{ji} = x_j - x_i; \quad y_{ji} = y_j - y_i; \quad z_{ji} = z_j - z_i$$

Considerando tres estaciones E_i, E_j, y E_k:

$$\sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - y)^2} = \frac{P_i{}^2 - P_j{}^2}{2R_{ij}} + \frac{R_{ij}}{2} + \frac{x_{ji}}{R_{ij}}x + \frac{y_{ji}}{R_{ij}}y + \frac{z_{ji}}{R_{ij}}z$$

$$\sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - y)^2} = \frac{{P_i}^2 - {P_k}^2}{2R_{ik}} + \frac{R_{ik}}{2} + \frac{x_{ki}}{R_{ik}}x + \frac{y_{ki}}{R_{ik}}y + \frac{z_{ki}}{R_{ik}}z$$

Igualando ambas expresiones se obtiene:

$$\frac{{P_i}^2 - {P_j}^2}{2R_{ij}} + \frac{R_{ij}}{2} + \frac{x_{ji}}{R_{ij}}x + \frac{y_{ji}}{R_{ij}}y + \frac{z_{ji}}{R_{ij}}z = \frac{{P_i}^2 - {P_k}^2}{2R_{ik}} + \frac{R_{ik}}{2} + \frac{x_{ki}}{R_{ik}}x + \frac{y_{ki}}{R_{ik}}y + \frac{z_{ki}}{R_{ik}}z$$

Reordenando, se obtiene una ecuación lineal correspondiente a un plano, correspondiente a la generalización del resultado obtenido por Fang:

$$\frac{{P_i}^2 - {P_k}^2}{2R_{ik}} - \frac{{P_i}^2 - {P_j}^2}{2R_{ij}} + \frac{R_{ik}}{2} - \frac{R_{ij}}{2} + \left(\frac{x_{ki}}{R_{ik}} - \frac{x_{ji}}{R_{ij}}\right)x + \left(\frac{y_{ki}}{R_{ik}} - \frac{y_{ji}}{R_{ij}}\right)y + \left(\frac{z_{ki}}{R_{ik}} - \frac{z_{ji}}{R_{ij}}\right)z = 0$$

Operando sobre esta expresión puede reescribirse de modo más compacto:

$$y = Ax + Bz + C$$

donde el valor de los coeficientes A, B y C viene dado por:

$$A = \frac{R_{ik}x_{ji} - R_{ij}x_{ki}}{R_{ij}y_{ki} - R_{ik}y_{ji}} \; ; \qquad B = \frac{R_{ik}z_{ji} - R_{ij}z_{ki}}{R_{ij}y_{ki} - R_{ik}y_{ji}}$$

$$C = \frac{R_{ik}\left(R_{ij}^2 + {P_i}^2 - {P_j}^2\right) - R_{ij}\left(R_{ik}^2 + {P_i}^2 - {P_k}^2\right)}{2\left(R_{ij}y_{ki} - R_{ik}y_{ji}\right)}$$

Considerando ahora las estaciones E_k, E_j, y E_l se obtiene un nuevo plano:

$$y = Dx + Ez + F$$

cuyos coeficientes D, E y F son, respectivamente:

$$A = \frac{R_{kl}x_{jk} - R_{kj}x_{lk}}{R_{kj}y_{lk} - R_{kl}y_{jk}} \; ; \qquad B = \frac{R_{kl}z_{jk} - R_{kj}z_{lk}}{R_{kj}y_{lk} - R_{kl}y_{jk}}$$

$$C = \frac{R_{kl}\left(R_{kj}^2 + {P_k}^2 - {P_j}^2\right) - R_{kj}\left(R_{kl}^2 + {P_k}^2 - {P_l}^2\right)}{2\left(R_{kj}y_{lk} - R_{kl}y_{jk}\right)}$$

La intersección de ambos planos es una recta:

$$Ax + Bz + C = Dx + Ez + F \quad \text{reescrita como:} \quad x = Gz + H$$

donde:

$$G = \frac{E - B}{A - D} \quad y \quad H = \frac{F - C}{A - D}$$

y sustituyendo x en la ecuación del primer plano, se obtiene:

$$y = A(Gz + H) + Bz + C \quad \text{reescrita como:} \quad y = Iz + J$$

$$\text{donde:} \quad I = AG + B \quad y \quad J = AH + C$$

Estas expresiones permiten obtener las coordenadas X e Y del blanco en función de la coordenada Z. Para el cálculo de esta última, se sustituirán las anteriores en la expresión del hiperboloide correspondiente a las estaciones E_i y E_k, dado por:

$$P_i{}^2 - P_k{}^2 + 2x_{ki}x + 2y_{ki}y + 2z_{ki}z + R_{ik}^2 = 2R_{ik}\sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2}$$

Reescrita como:

$$2R_{ik}\sqrt{\big(x_i - (Gz + H)\big)^2 + \big(y_i - (Iz + J)\big)^2 + (z_i - z)^2} = Lz + K$$

donde:

$$L = 2(x_{ki}G + y_{ki}I + z_{ki})\,; \qquad K = P_i{}^2 - P_k{}^2 + R_{ik}^2 + 2(x_{ki}H + y_{ki}J)$$

Elevando al cuadrado y operando se obtiene:

$$Mz^2 - Nz + Q = 0$$

con valores para los coeficientes M, N y Q dados por:

$$M = 4R_{ik}^2(1 + G^2 + I^2) - L^2; \qquad N = 8R_{ik}^2[G(x_i - H) + I(y_i - J) + z_i] + 2LK$$

$$Q = 4R_{ik}^2\big[P_i{}^2 - 2x_iH + H^2 - 2y_iJ + +J^2\big] - K^2$$

De este modo se obtienen, igual que Fang [25] los dos posibles valores para la coordenada Z:

$$z = \frac{N}{2M} \pm \sqrt{\left(\frac{N}{2M}\right)^2 - \frac{Q}{M}}$$

De nuevo, como ya vimos en Fang, aparece una ecuación no lineal para la obtención de z. Puede darse el caso de que la ambigüedad en el valor de z pueda disiparse, por resultar absurdo, en un sistema real, alguno de sus valores. Sin embargo, en este caso, se consideran cuatro estaciones, que dan lugar a cuatro planos de base conteniendo cada uno tres estaciones. Dado que cada tres estaciones permiten identificar la situación del receptor en un plano perpendicular al plano de base, puede determinarse su posición mediante la intersección de tres de los cuatro planos obtenidos. Pero esto solo es cierto para el caso de que las cuatro estaciones no se encuentren en un mismo plano. Aún existiendo un número mayor de estaciones, si todas son coplanarias, cada agrupación de tres de ellas dará lugar a un plano perpendicular y todos los planos perpendiculares intersectarán en una única recta.

Bucher y Misra no imponen ninguna condición a la situación de los emisores y en consecuencia, no plantean resolver la ambigüedad en z. Si las cuatro estaciones no son coplanarias, el problema se reduce a una intersección de planos eliminándose la ambigüedad. Es también interesante considerar la conveniencia de que una de las estaciones se sitúe lejos del plano que contiene a las otras tres. Ese alejamiento permite aumentar el ángulo entre los planos de base disminuyendo la incertidumbre en la estimación de la posición.

4.1.4 Relación entre sistemas TDOA y TOA

El sistema esférico puede fácilmente convertirse en hiperbólico. Para un número n de estaciones, basta restar a los instantes de recepción de la señal en el blanco, el instante de recepción correspondiente a una de las estaciones para obtener un sistema de n-1 ecuaciones cada una de ellas correspondiente a un hiperboloide. En efecto, sea R_i el rango del punto P respecto de la i-ésima estación:

$$\sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2} = R_i = v.t_i$$

Restando la distancia R_j al punto P, desde la estación j-ésima:

$$\sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2} - \sqrt{(x_j - x)^2 + (y_j - y)^2 + (z_j - z)^2} = R_i - R_j$$

Obsérvese que en esta transformación se pierde la referencia de tiempo absoluto, innecesaria en sistemas TDOA, conservándose únicamente las diferencias:

$$R_i - R_j = v(t_i - t_j)$$

El proceso inverso, el paso de un sistema hiperbólico a uno esférico no es inmediato. No se dispone de una referencia de tiempo absoluta, aunque está implícita en todos los emisores. Para analizarlo, considérese un sistema cartesiano de coordenadas en cuyo origen se sitúa la estación E_0. El resto de estaciones se encuentran en las posiciones $E_i(x_i,y_i,z_i)$ donde el subíndice i identifica la estación. El receptor se encuentra en la posición P(x,y,z). En este, la diferencia en los tiempos de recepción de la señal de todas las estaciones respecto a la primera (situada en el origen de coordenadas), genera un conjunto de hiperboloides cuya intersección determina sus coordenadas. Obsérvese que el módulo del vector de posición del receptor no es otra cosa que la distancia entre el punto P y el origen.

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = R = v.t_0$$

En consecuencia el rango R del punto P se corresponde con su distancia a la estación E_0. Para el resto de estaciones, la distancia desde la estación E_i al punto P:

$$\sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2} = R_i = v.t_i$$

En el punto P, se obtiene la diferencia de distancia de cada estación respecto a la situada en el origen, mediante:

$$R_{io} = R_i - R_o = v.(t_i - t_0)$$

Dando lugar a los hiperboloides:

$$\sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2} - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = v.(t_i - t_0)$$

La obtención del rango no es inmediata. Como ya se ha visto, se requerirán, al menos, cuatro estaciones para obtener las coordenadas del blanco y, consecuentemente, su rango. Una vez conocido este, es inmediato el cálculo de las distancias R_i, y el sistema esférico

equivalente. Pero resulta carente de sentido generar el sistema esférico cuando ya se ha resuelto el posicionamiento.

El reloj local puede sincronizarse con el de los emisores una vez conocido el rango respecto a una estación (y consecuentemente, el tiempo de vuelo de la señal). El receptor, una vez sincronizado, puede corregir el deslizamiento de la escala de tiempo horario si el mismo la genera y mantiene, dado que en un sistema hiperbólico los emisores solo transmiten señal de tiempo sin referencias de escala.

4.1.5 Obtención de la posición en sistemas TOA

En el caso de los sistemas esféricos puede efectuarse un estudio similar al realizado para los sistemas hiperbólicos. La intersección de dos esferas da lugar a una circunferencia. Con una tercera esfera, no coincidente con las dos anteriores, se identifican dos puntos posibles para la posición del blanco. Aún cuando sea posible eliminar uno de los puntos por resultar una posición absurda, el sistema no es lineal. Una nueva estación permite eliminar la ambigüedad y obtener un sistema lineal.

Considérense cuatro estaciones $E_i(x_i,y_i,z_i)$ cuya posición es conocida y el blanco P(x,y,z) cuyas coordenadas se desea obtener. Se obtienen en el punto P los tiempos de vuelo t_i de la señales procedentes de E_i y, a partir de estos, los rangos R_i:

$$\sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2} = R_i = v.t_i$$

Elevando al cuadrado y operando:

$$2x_i x + 2y_i y + 2z_i z = x^2 + y^2 + z^2 + x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 - R_i^2$$

Restando la expresión correspondiente a la primera estación de las demás:

$$x_{1i}x + y_{1i}y + z_{1i}z = \frac{x_1^2 - x_i^2 + y_1^2 - y_i^2 + z_1^2 - z_i^2 - R_1^2 + R_i^2}{2} = \frac{P_1^2 - P_i^2 - R_1^2 + R_i^2}{2}$$

donde:

$$x_{1i} = x_1 - x_i; \quad y_{1i} = y_1 - y_i; \quad z_{1i} = z_1 - z_i; \quad P_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2$$

que puede escribirse en forma matricial:

$$[\boldsymbol{P_1} - \boldsymbol{P_i}]^T \boldsymbol{P} = [\|\boldsymbol{P_1}\|^2 - \|\boldsymbol{P_i}\|^2 - R_1^2 + R_i^2]$$

con $\|\boldsymbol{P_i}\|$ la norma de Frobenius para $\boldsymbol{P_i}$.

Como se puede ver, es posible la obtención de la posición del blanco mediante la solución algebraica de un sistema lineal, cuya construcción requiere al menos cuatro emisores.

4.1.6 Posición y GDOP en aproximaciones sucesivas

Es habitual la obtención de la posición del blanco, partiendo de una posición inicial estimada. Las expresiones esféricas o hiperbólicas obtenidas para los rangos, o diferencias de rangos pueden desarrollarse en serie de Taylor en el entorno de la posición estimada. Los errores de estima se minimizan mediante el método de mínimos cuadrados (LS, least-squares) [27], existiendo trabajos sobre la utilización de alguna variantes como los métodos de mínimos cuadrados ponderados (WLS, weighted least-squares) [28] y los métodos de mínimos cuadrados ortogonales (TLS, total least-squares) [29].

Es preciso ahora considerar las desviaciones de los diferentes relojes que intervienen en el proceso de posicionamiento. Hasta ahora se ha considerado que se encuentran perfectamente sincronizados. Puede mantenerse esta suposición en los relojes de los emisores situados en los puntos de referencia que son calibrados continuamente por entes de gestión del sistema como es el caso del GPS donde el segmento de control sincroniza todos los relojes con el Master Clock de USNO (U.S. Naval Observatory) siendo también verificado por el NIST (National Institute of Standards and Technology). En estas condiciones, la incertidumbre en tiempo se traslada al reloj del receptor cuya frecuencia se supone desviada en Δf.

La distancia a un emisor, obtenida por el receptor a partir de la diferencia entre la señal horaria recibida y el tiempo local, vendrá dada por $v(t_r - t_e)$ donde t_r es el tiempo horario en el reloj del receptor en el momento de recibir la señal marcada con el tiempo horario del reloj del transmisor t_t. Ambos deben estar sincronizados en frecuencia y origen de tiempos o fase horaria. Una desviación de frecuencia en el reloj del receptor supone una diferencia entre los periodos de ambos relojes T_r y T_e, dando lugar a un error acumulativo en la medida de la distancia dado por:

$$v(T_r - T_e) = v\frac{\Delta f}{f}(T + \Delta T) \sim \frac{\Delta f}{f} v.T$$

En esta expresión, despreciando infinitésimos de segundo orden puede verse que para un reloj batiendo segundos, el error en distancia sufre un incremento en cada segundo que viene dado por el producto de la velocidad *v* de la señal por la frecuencia fraccional Δf/f. Para limitar este error, el reloj del receptor es disciplinado en frecuencia al del transmisor, que actúa como maestro.

Por otra parte, el error temporal ε acumulado por el reloj del receptor da lugar a una estimación errónea de la distancia que puede expresarse mediante:

$$v(t_r - t_e) = R + v.\varepsilon$$

Considérese de nuevo el sistema TOA del caso anterior con cuatro estaciones $E_i(x_i,y_i,z_i)$ cuya posición es conocida y el blanco P(x,y,z). Se han obtenido los tiempos de vuelo t_i de las señales procedentes de E_i y los rangos R_i. Ha de tenerse en cuenta el error de retardo introducido por la diferencia de fase del reloj de recepción mediante un término $v.\varepsilon$ donde v es la velocidad de la señal en el medio y ε refleja el error de fase en términos de desplazamiento temporal. Ahora, se partirá de una estimación previa de la posición P que se denominará $P_o(x_o,y_o,z_o)$ y se desarrollarán las esferas de radio R_i, denominados pseudorangos, y centro $E_i(x_i,y_i,z_i)$ mediante series de Taylor en el entorno del punto estimado, conservando solamente los términos de primer orden. Esta manera de linealizar equivale a convertir el problema esférico en la intersección de un conjunto de planos tangentes. Las expresiones de los pseudorangos vienen dadas por:

$$R_i = \sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2} + v.\varepsilon$$

Desarrollando en el entorno de P_o y truncando los términos de orden superior al primero:

$$R_i \approx R_{0i} + \frac{x_0 - x_i}{R_{0i}}\Delta x + \frac{y_0 - y_i}{R_{0i}}\Delta y + \frac{z_0 - z_i}{R_{0i}}\Delta z + v.\varepsilon$$

donde:

$$R_{0i} = \sqrt{(x_0 - x_i)^2 + (y_0 - y_i)^2 + (z_0 - z_i)^2}$$

Como puede verse, el error para cada rango, viene dado por el producto escalar del vector unitario en la recta que une la estación correspondiente con el punto P_o y el vector determinado por los puntos P y P_o, que es el vector de errores en las tres coordenadas, más el error debido al reloj. Teniendo en cuenta el error temporal puede construirse un vector de cuatro dimensiones con los cosenos directores del primero, añadiéndole un término unitario para el tiempo:

$$\Delta R_i = R_i - R_{0i} \approx \begin{bmatrix} \frac{x_0 - x_i}{R_{0i}} & \frac{y_0 - y_i}{R_{0i}} & \frac{z_0 - z_i}{R_{0i}} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \\ v.\varepsilon_i \end{bmatrix}$$

Obsérvese que esta aproximación tiene interés para una única lectura de pseudorangos procedentes, al menos, de cuatro estaciones. Se dispondrá, en ese caso, de cuatro ecuaciones que permitirán obtener las cuatro coordenadas del vector de error.

Si se dispone de un conjunto más amplio de lecturas, puede buscarse un vector de errores de coordenadas y tiempo que minimice el error de los pseudorangos [30]:

$$\begin{bmatrix} \frac{x_0 - x_1}{R_{01}} & \frac{y_0 - y_1}{R_{01}} & \frac{z_0 - z_1}{R_{01}} & 1 \\ \frac{x_0 - x_2}{R_{02}} & \frac{y_0 - y_2}{R_{02}} & \frac{z_0 - z_2}{R_{02}} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{x_0 - x_n}{R_{0n}} & \frac{y_0 - y_n}{R_{0n}} & \frac{z_0 - z_n}{R_{0n}} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \\ v.\varepsilon_i \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \Delta R_1 \\ \Delta R_2 \\ \vdots \\ \Delta R_n \end{bmatrix}$$

Esta matriz de dimensiones (n,4) con n≥4 recibe el nombre de matriz de visibilidad y denominándola **H** se puede escribir abreviadamente:

$$\boldsymbol{H}.\Delta\boldsymbol{P} \approx \Delta\boldsymbol{R}$$

Para n=4 ya es posible resolver el sistema y obtener el vector $\boldsymbol{\Delta P}$**.** Para n> 4 ajustando por mínimos cuadrados se tiene:

$$\Delta\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{H})^{-1}\boldsymbol{H}^T\Delta\boldsymbol{R}$$

Una vez obtenidas las correcciones a la posición P_o pueden efectuarse iteraciones sucesivas para obtener mejor aproximación a la posición real.

Teniendo en cuenta las incertidumbres tanto en la medida de los pseudorangos, como en el posicionamiento de los puntos, se pueden expresar los términos de error del siguiente modo [31]:

$$\Delta \boldsymbol{P} = \boldsymbol{P} - \boldsymbol{P_0} + \boldsymbol{dP}$$

$$\Delta \boldsymbol{R} = \boldsymbol{R} - \boldsymbol{R_0} + \boldsymbol{dR}$$

y, en consecuencia, escribir:

$$\boldsymbol{H}.\boldsymbol{dP} = \boldsymbol{dR} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

Donde los errores acumulados en el vector $\boldsymbol{\varepsilon}$ se asumen aleatorios, con distribución gaussiana de valor medio nulo. Minimizando este vector por mínimos cuadrados se obtiene para **dP**:

$$\boldsymbol{dP} = (\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{H})^{-1}\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{dR}$$

La matriz de covarianzas de **dP** vendrá dada por el valor esperado del producto de este vector por su transpuesto:

$$Cov(\boldsymbol{dP}) = E(\boldsymbol{dP}.\boldsymbol{dP}^T) = E[((\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{H})^{-1}\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{dR}).((\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{H})^{-1}\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{dR})^T]$$

$$Cov(\boldsymbol{dP}) = E[(\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{H})^{-1}\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{dR}.\mathbf{dR}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}((\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{H})^{-1})^T]$$

$$Cov(\boldsymbol{dP}) = (\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{H})^{-1}\boldsymbol{H}^T Cov(\boldsymbol{dR})\boldsymbol{H}((\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{H})^{-1})^T$$

Donde la matriz de covarianzas de **dP** contiene en su diagonal principal las varianzas en las tres coordenadas (σ_x^2, σ_y^2, σ_z^2) y en el tiempo ($v^2\sigma_t^2$).

Las medidas de los pseudorangos son independientes por lo que es razonable suponer que los errores están incorrelados. En esas condiciones la matriz de covarianzas de **dR** resulta ser una matriz diagonal e iguales las varianzas en la estimación de los pseudorangos.

$$Cov(\boldsymbol{dR}) = \sigma_R^2\boldsymbol{I}$$

$$Cov(\boldsymbol{dP}) = \sigma_R^2(\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{H})^{-1}\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{I}\boldsymbol{H}((\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{H})^{-1})^T$$

obteniéndose como resultado:

$$Cov(\boldsymbol{dP}) = \sigma_R^2((\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{H})^{-1})^T = \sigma_R^2(\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{H})^{-1}$$

donde se ha hecho uso de las propiedades de simetría de la matriz gramiana de **H**.

$$(\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{H})^{-1} = \frac{Cov(\boldsymbol{dP})}{\sigma_R^2}$$

Dado que la diagonal principal de la matriz de covarianzas de **dP** contiene los términos de varianza en las tres coordenadas (σ_x^2, σ_y^2, σ_z^2) y en el tiempo ($v^2\sigma_t^2$), la inversa de la matriz gramiana de **H** contendrá en su diagonal principal las componentes de la GDOP elevados al cuadrado:

$$(\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{H})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_x^2}{\sigma_R^2} & & & \\ & \frac{\sigma_y^2}{\sigma_R^2} & & \\ & & \frac{\sigma_z^2}{\sigma_R^2} & \\ & & & \frac{v^2\sigma_t^2}{\sigma_R^2} \end{bmatrix}$$

Puede escribirse de forma compacta:

$$\boldsymbol{GDOP} = \sqrt{\|(\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{H})^{-1}\|}$$

Expresión que permite calcular la GDOP con los resultados obtenidos en tiempo real, en la matriz de visibilidad.

Un tratamiento similar puede hacerse para la GDOP en sistemas hiperbólicos. En ellos, la diferencia de distancias del punto de posición P respecto a dos estaciones i y j viene dado por:

$$R_i - R_j =$$

$$\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2} - \sqrt{(x-x_j)^2+(y-y_j)^2+(z-z_j)^2} + v.\varepsilon$$

$$\Delta R_i = R_i - R_{0i} \approx \begin{bmatrix} \frac{x_0 - x_i}{R_{0i}} & \frac{y_0 - y_i}{R_{0i}} & \frac{z_0 - z_i}{R_{0i}} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \\ v.\varepsilon_i \end{bmatrix}$$

$$\Delta R_{ji} = \left(R_j - R_{0j}\right) - \left(R_i - R_{0i}\right) \approx$$

$$\approx \begin{bmatrix} \frac{x_0 - x_j}{R_{0j}} - \frac{x_0 - x_i}{R_{0i}} & \frac{y_0 - y_j}{R_{0j}} - \frac{y_0 - y_i}{R_{0i}} & \frac{z_0 - z_j}{R_{0j}} - \frac{z_0 - z_i}{R_{0i}} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \\ v.\varepsilon_i \end{bmatrix}$$

y la matriz de visibilidad:

$$\begin{bmatrix} \frac{x_0 - x_2}{R_{02}} - \frac{x_0 - x_1}{R_{01}} & \frac{y_0 - y_2}{R_{02}} - \frac{y_0 - y_1}{R_{01}} & \frac{z_0 - z_2}{R_{02}} - \frac{z_0 - z_1}{R_{01}} & 1 \\ \frac{x_0 - x_3}{R_{03}} - \frac{x_0 - x_1}{R_{01}} & \frac{y_0 - y_3}{R_{03}} - \frac{y_0 - y_1}{R_{01}} & \frac{z_0 - z_3}{R_{03}} - \frac{z_0 - z_1}{R_{01}} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{x_0 - x_n}{R_{0n}} - \frac{x_0 - x_1}{R_{01}} & \frac{y_0 - y_n}{R_{0n}} - \frac{y_0 - y_1}{R_{01}} & \frac{z_0 - z_n}{R_{0n}} - \frac{z_0 - z_1}{R_{01}} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \\ v.\varepsilon_i \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \Delta R_{21} \\ \Delta R_{31} \\ \vdots \\ \Delta R_{n1} \end{bmatrix}$$

La GDOP se obtendrá del mismo modo que en el caso de sistemas TOA pero con la nueva matriz de visibilidad.

4.2 Estabilidad de la señal

Los parámetros que indican la bondad de un reloj pueden ser la exactitud de la frecuencia y su estabilidad o la exactitud del periodo y su estabilidad.

Es frecuente indicar la desviación o error en la medida de un intervalo de tiempo dividido entre la duración de dicho intervalo. Al resultado y(t) obtenido se le denomina frecuencia fraccional. A lo largo de la introducción se ha venido utilizando este concepto sin nombrarlo. En los laboratorios de tiempo y frecuencia se obtienen patrones con $y(t)=10^{-15}$. Este parámetro refleja la exactitud del reloj. El error introducido por el reloj es una magnitud x(t) que varía con el tiempo.

$$t_{medido} = t_{real} + x(t)$$

En la medida de un intervalo de tiempo Δt, con inicio en t_0 el reloj incrementa su error en un valor dado por $\Delta x(t) = x(t_0+\Delta t)-x(t_0)$. La frecuencia fraccional resultante viene dada por:

$$y(t) = \frac{\Delta x(t)}{\Delta t}$$

y llevando el intervalo al límite cuando Δt tiende a cero, se obtiene la frecuencia fraccional instantánea particularizada para un instante t_0. De forma general para cualquier instante t puede escribirse:

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

Como ya se ha visto, una fuente de señal sinusoidal entrega una magnitud que varía en el tiempo (típicamente una tensión), siguiendo una ley que puede expresarse como:

$$v(t) = [V_0 + \varepsilon(t)]\, sen[2\pi\nu_0 t + \phi(t)]$$

V_0 representa la tensión de pico nominal entregada por la fuente, ε(t) la desviación o error de amplitud respecto a su valor nominal, ν_0 es la frecuencia nominal de la señal y ϕ(t) la desviación o error de fase.

La pulsación o frecuencia angular es la derivada del ángulo respecto al tiempo y la frecuencia instantánea ν(t) resulta ser la pulsación dividida por 2π :

$$\nu(t) = \nu_0 + \frac{1}{2\pi}\frac{d\phi(t)}{dt}$$

Las fluctuaciones de fase ϕ(t) representan desplazamientos en el tiempo (fluctuaciones del periodo) debidos a la inestabilidad del tiempo introducida por x(t):

$$\phi(t) = 2\pi\nu_0 x(t)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi\nu_0}\phi(t)$$

La frecuencia fraccional definida como la desviación unitaria en frecuencia, resulta ser, de nuevo:

$$y(t) = \frac{v(t) - v_0}{v_0} = \frac{1}{2\pi v_0}\frac{\mathrm{d}\phi(\mathrm{t})}{\mathrm{dt}} = \frac{\mathrm{dx(t)}}{\mathrm{dt}}$$

Obsérvese que se ha definido la frecuencia fraccional como la desviación unitaria en el tiempo y también, como la desviación unitaria de frecuencia. Queda de manifiesto que ambas definiciones son equivalentes aunque la relación entre tiempo y frecuencia no es lineal.

Tiene importancia examinar la estabilidad que cabe esperar a corto y largo término. En el largo término puede indicarse en partes por millón (ppm), pero en osciladores altamente estables es más habitual la desviación unitaria (p. e. una parte en 10^{12} o, simplemente 10^{-12}). Existe alguna ambigüedad en la definición puesto que esta forma de expresión se corresponde con la "inestabilidad", como se recoge en la norma IEEE Std 1139™-2008 [32]. Sin embargo, es de uso común hablar de "estabilidad" en estos términos, como sucede en ITU-T y ETSI [10]. Es muy raro que esta incoherencia normativa genere problemas de interpretación por lo obvio de la magnitud tratada. Es una práctica habitual utilizar con este formalismo el término "estabilidad", aunque sea incorrecto desde un punto de vista semántico.

La estabilidad de un reloj en el corto término indica la constancia de su periodo ciclo a ciclo. Ya se ha dicho anteriormente que el reloj de cuarzo presenta periodos con repetitividades mejores que el de cesio. Es más estable en el corto plazo, aunque el de cesio resulte más exacto (menor frecuencia fraccional) en el largo plazo. Las variaciones en la duración del periodo ciclo a ciclo equivalen a una modulación de la frecuencia con una señal moduladora resultante de integrar la fase $\phi(t)$. El estudio de la estabilidad de la señal puede abordarse en el dominio del tiempo, evaluando las fluctuaciones del periodo (jitter), o en el dominio de la frecuencia evaluando el espectro de la señal. A la fluctuación del periodo de la señal se le denomina "jitter" que equivale al término TIE (time interval error). En la terminología de las telecomunicaciones el jitter se refiere a las variaciones rápidas del error del intervalo de tiempo (variaciones a corto término), utilizándose para las variaciones lentas (a largo término) la expresión "wander". De acuerdo con ITU-T, y ETSI [10] se conocen como wander las variaciones de intervalo de tiempo con frecuencias inferiores a 10Hz, aunque existen otros criterios. En la industria de los semiconductores no suele utilizarse el término "wander". Así, por ejemplo JEDEC (Joint Electron Device Engineering Council), institución que elabora normas para la industria microelectrónica se define el jitter[2] en términos parecidos pero sin hacer distinción alguna acerca de su frecuencia y pensando

[2] Jitter: the time deviation of a PLL-generated controlled edge from its nominal position.

fundamentalmente en PLLs y, por extensión, en circuitería digital [33]. La definición de los entes reguladores de las telecomunicaciones (ITU-T, ETSI) es más genérica[3].

En la práctica, es imposible conocer la posición exacta de los instantes significativos de una señal, dado que no se dispone de un reloj ideal con el que comparar. La industria ha acuñado términos como el jitter de periodo [33] (desviación de una señal durante un ciclo, con respecto al periodo ideal, sobre una muestra aleatoria de ciclos) pero, en la práctica, obtiene el periodo ideal como valor medio del periodo real a lo largo de muchos ciclos. Un concepto relacionado, normalizado por ETSI es el Time Interval Error (TIE) [10] definido como la diferencia entre la medida de un intervalo de tiempo proporcionado por el reloj y el suministrado por un patrón de frecuencia.

El término TIE también es recogido por la comunidad de tiempo y frecuencia a través de IEEE ([32].

Es habitual especificar también, en osciladores y relojes, el periodo de ciclo a ciclo como promedio a lo largo de un intervalo, de los incrementos de tiempo en ciclos sucesivos[4]. Otras especificaciones incluyen valores de pico (jitter de pico a pico) y valor cuadrático medio ($jitter_{rms}$).

En ausencia de derivas de frecuencia el valor medio del jitter es nulo. Corquodale y Brown [34] señalan como, excepto en el entorno del control de frecuencia, los trabajos más recientes sobre osciladores de estado sólido, en lugar de la varianza de Allan (una medida de dispersión del periodo, como se verá), ofrecen expresiones que relacionan el ruido de fase con la varianza en el tiempo. También los fabricantes de PLLs, osciladores y demás dispositivos de control de frecuencia, tienden a especificar el ruido de fase y las diferencias de primer y segundo orden del jitter.

4.2.1 Jitter y ruido de fase

La definición formal de jitter está referida a señales digitales. Como ejemplo, en ETSI [10] se expresa como las variaciones a corto término de los instantes significativos de una señal digital respecto a su posición de referencia en el tiempo. En la comunidad del tiempo y

[3] Short term variations of the significant instants of a digital signal from their reference positions in time.
[4] **cycle-to-cycle period jitter ($t_{jit(cc)}$):** The variation in cycle time of a signal between adjacent cycles, over a random sample of adjacent cycle pairs. JEDEC-JESD65B

la frecuencia no se define este término, pero para una señal sinusoidal, se considerarán como instantes significativos los de cruce por cero y la definición mantendrá su validez. En las señales digitales de alta frecuencia, el deterioro sufrido por los flancos de subida y caída de las señales degenera su formato rectangular impidiendo precisar con exactitud los instantes significativos. Esta ambigüedad se traduce en un incremento del jitter de la señal.

El jitter puede producirse en una fuente de señal (output jitter o jitter generado), o sufrir modificaciones en el proceso de la señal y puede tener componentes aleatorias y determinísticas. El jitter determinístico tiene su origen en procesos predecibles que permiten reducir o, al menos, acotar su valor. Puede ser consecuencia de interferencias, señales con ciclos de trabajo asimétricos, interferencia entre símbolos, etc. El jitter aleatorio es la suma de diversos procesos aleatorios como el ruido térmico, ruido de flicker, etc., y su distribución es gaussiana.

4.2.2 Espectro de la modulación de ángulo

Las variaciones en el periodo de una señal como consecuencia del jitter, pueden presentarse como modulaciones de ángulo. Un planteamiento clásico [35] consiste en considerar, como ya se ha visto, una señal periódica con una frecuencia ν_0 y una fase $\phi(t)$:

$$v(t) = V_0\, sen[2\pi\nu_0 t + \phi(t)]$$

Las variaciones del periodo de la señal pueden considerarse consecuencias de la variación del ángulo de fase de la misma. Modulaciones de fase no deseadas constituyen el ruido de fase. Queda a la vista la existencia de una relación entre el jitter y el ruido de fase de la señal. Tiene interés, en consecuencia, analizar el espectro resultante de la modulación de ángulo con una señal de ruido.

Es habitual representar una señal eléctrica v(t) como la parte real o imaginaria (según sea una señal coseno o seno) de un vector en el plano complejo. Este vector gira alrededor del origen de coordenadas, es decir, su ángulo de fase es una función del tiempo. Si su velocidad de giro es constante, la señal resultante tendrá frecuencia constante ν_0 (dada en Hz) que se corresponde con una velocidad de giro del vector $2\pi\nu_0$ dada en radianes/segundo. Si la velocidad de giro del vector no es constante, se considera su velocidad angular instantánea, como derivada respecto al tiempo del ángulo girado. Se obtiene así la frecuencia instantánea y

puede considerarse que la señal tiene una frecuencia que varía con el tiempo o, en otros términos, está modulada en frecuencia.

$$\omega_i(t) = 2\pi v_i(t) = \frac{d\theta(t)}{dt}$$

donde θ(t) es el ángulo de fase del vector considerado.

Si se expresa el ángulo de fase como:

$$\theta(t) = 2\pi v_0 t + \phi(t)$$

o lo que es lo mismo, consideramos un vector que gira a velocidad constante pero sufre modulaciones en su fase representadas por ϕ(t), la frecuencia instantánea viene dada por:

$$v_i(t) = v_0 + \frac{1}{2\pi}\frac{d\phi(t)}{dt}$$

Este resultado permite interpretar la modulación de fase como una modulación de frecuencia en la cual, la señal moduladora de la frecuencia es la derivada en el tiempo de la señal moduladora de fase.

De forma análoga, la modulación de frecuencia puede considerarse como una modulación de la fase en la cual la variación del ángulo de fase se obtiene integrando la señal moduladora de frecuencia.

En efecto, si representamos la señal moduladora en frecuencia por $v_m(t)$, la frecuencia instantánea vendrá dada por:

$$v_i(t) = v_0 + v_m(t)$$

Donde, como se ha visto, $v_m(t)$ puede interpretarse como la derivada del ángulo de fase ϕ(t) dividido por 2π:

$$v_m(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{d\phi(t)}{dt}$$

$$\phi(t) = \int_{-\infty}^{t} 2\pi v_m(t)dt = \phi_0 + \int_{0}^{t} 2\pi v_m(t)dt$$

y el ángulo total de fase θ(t):

$$\theta(t) = 2\pi\nu_0 t + \phi(t) = 2\pi\nu_0 t + \phi_0 + 2\pi \int_0^t \nu_m(t)dt$$

Como consecuencia de esta relación entre las modulaciones de frecuencia y fase, puede hablarse simplemente de modulación de ángulo. La distribución espectral que se obtiene en ambos casos es semejante, con la salvedad de que los lóbulos laterales que aparecerán repetidos en el espectro de esta modulación de ángulo se corresponderán con el espectro de señal moduladora (si se modula en frecuencia), o con el de su derivada respecto al tiempo (si se modula en fase).

4.2.2.1. Modulación con ruido monotonal de banda estrecha

Supongamos una señal sinusoidal de frecuencia ν_o, que, habitualmente, recibe el nombre de portadora en la terminología propia de las telecomunicaciones. Esta señal es modulada en frecuencia por un solo tono de amplitud V_m y frecuencia ν_m que se denominará moduladora. La señal resultante o señal modulada tendrá una frecuencia instantánea que puede expresarse como:

$$\nu_i(t) = \nu_0 + V_m \cos 2\pi\nu_m t$$

donde V_m representa la máxima desviación de la frecuencia instantánea con respecto a la frecuencia ν_o de la señal en ausencia de modulación. Reescribiendo la señal modulada:

$$\mathrm{v}(t) = V_0 \, sen\left[2\pi\nu_0 t + \int_0^t 2\pi \, V_m \cos 2\pi\nu_m t \, dt + \phi_0\right]$$

$$\mathrm{v}(t) = V_0 \, sen[2\pi\nu_0 t + \beta \operatorname{sen} 2\pi\nu_m t + \phi_0]$$

donde:

$$\beta = \frac{V_m}{\nu_m}$$

El parámetro β recibe el nombre de índice de modulación para un solo tono y representa la máxima desviación del ángulo de fase de la señal como consecuencia de esta modulación.

Obsérvese que la expresión de v(t) es análoga a la que se obtiene para una señal de frecuencia ν_o modulada en fase con un tono puro $\beta sen2\pi\nu_m t$, en cuadratura con el utilizado para modular en frecuencia, pero también de frecuencia ν_m. También aquí el parámetro β representa la máxima desviación del ángulo de fase.

Desarrollando v(t) se obtiene:

$$v(t) = V_0[sen(2\pi\nu_0 t + \phi_0)\cos(\beta \operatorname{sen} 2\pi\nu_m t) + \cos(2\pi\nu_0 t + \phi_0)\, sen(\beta \operatorname{sen} 2\pi\nu_m t)]$$

Este desarrollo puede representarse mediante las funciones de Bessel [36] de primera especie y orden n que, para un argumento β, pueden expresarse como:

$$J_n(\beta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(n\tau-\beta sen\tau)}\, d\tau$$

Para ello se parte de la función generadora, válida para t≠0 [37]:

$$e^{\frac{\beta}{2}(t-\frac{1}{t})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n . J_n(\beta)$$

Esta función particularizada para $t = e^{i\theta}$ permite obtener la identidad de Jacobi-Anger:

$$e^{i\beta sen\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) e^{in\theta}$$

y sustituyendo t por 1/t en la función generadora se obtienen las propiedades de simetría de las funciones $J_n(\beta)$ [38]:

$$J_{-n}(\beta) = (-1)^n J_n(\beta)$$

Separando los términos pares e impares en el desarrollo de Jacobi-Anger y sustituyendo los términos $J_{-n}(\beta)$ conforme a la propiedad anterior:

$$e^{i\beta sen\theta} = J_0(\beta) + 2\sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(\beta) cos\, 2k\theta + 2i\sum_{k=0}^{\infty} J_{2k+1}(\beta) \operatorname{sen}\,[(2k+1)\theta]$$

A partir de esta expresión, sustituyendo θ por $2\pi\nu_m t$, pueden demostrarse las dos siguientes:

$$\cos(\beta\ sen\ 2\pi\nu_m t) = \mathrm{J}_0(\beta) + 2\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{J}_{2k}(\beta)\cos(2k.2\pi\nu_m t)$$

$$\mathrm{sen}(\beta\ sen\ 2\pi\nu_m t) = 2\sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{J}_{2k+1}(\beta)\,\mathrm{sen}[(2k+1).2\pi\nu_m t]$$

Sustituyendo ambas en v(t) y operando, se obtiene:

$$\mathrm{v}(t) = V_0 . \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathrm{J}_k(\beta)\,\mathrm{sen}\,[2\pi(\nu_0 + k\nu_m)t + \phi_0]$$

Este último resultado permite ver un espectro, simétrico en módulo, alrededor de la frecuencia ν_o, con rayas espectrales de amplitud $J_k(\beta)$ situadas en las frecuencias $\nu_o \pm k\nu_m$. Como consecuencia de la relación entre los términos J_k y J_{-k}, las líneas correspondientes a valores impares y negativos de k situadas en la banda lateral inferior cambian su signo con respecto a sus homólogas en la banda lateral superior (valor impar y positivo de k) que permanecen siempre con signo positivo. Este espectro, ilimitado en frecuencia, decrece rápidamente en amplitud con los sucesivos armónicos. Esto se debe al pronunciado decrecimiento de las funciones de Bessel al aumentar el valor del parámetro k. Para k=0 se obtiene el término correspondiente a la portadora. El resto de valores de k da lugar a las bandas laterales superior e inferior que contienen a las rayas correspondientes a la señal moduladora (k=±1) y a infinitos armónicos de la misma decrecientes en amplitud, que son consecuencia de la no linealidad de la modulación de ángulo.

La energía total contenida en la señal permanece constante durante el proceso de modulación. En efecto, si sumamos la potencia correspondiente a todas las rayas espectrales se obtiene:

$$\mathrm{P} = \frac{1}{2}{V_0}^2 . \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\,\mathrm{J}_k(\beta)]^2 = \frac{1}{2}{V_0}^2$$

donde se ha utilizado la siguiente propiedad de las funciones de Bessel:

$$1 = J_0^2(\beta) + 2\sum_{k=1}^{\infty} J_k^2(\beta)$$

que se obtiene como caso especial del teorema de adicción de Newmann-Lommel [36] o bien directamente a partir del producto de la función generadora por su conjugada (series de cuadrados de Hansen) [38] . Haciendo uso de las relaciones de simetría para las funciones $J_{-n}(\beta)$, se obtiene fácilmente:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k^2(\beta) = 1$$

Este resultado indica que la potencia transportada por los armónicos se obtiene del fundamental. Resulta interesante estudiar la distribución de la potencia en el espectro de frecuencias, en función del índice de modulación β y particularmente para el caso de modulación en banda estrecha.

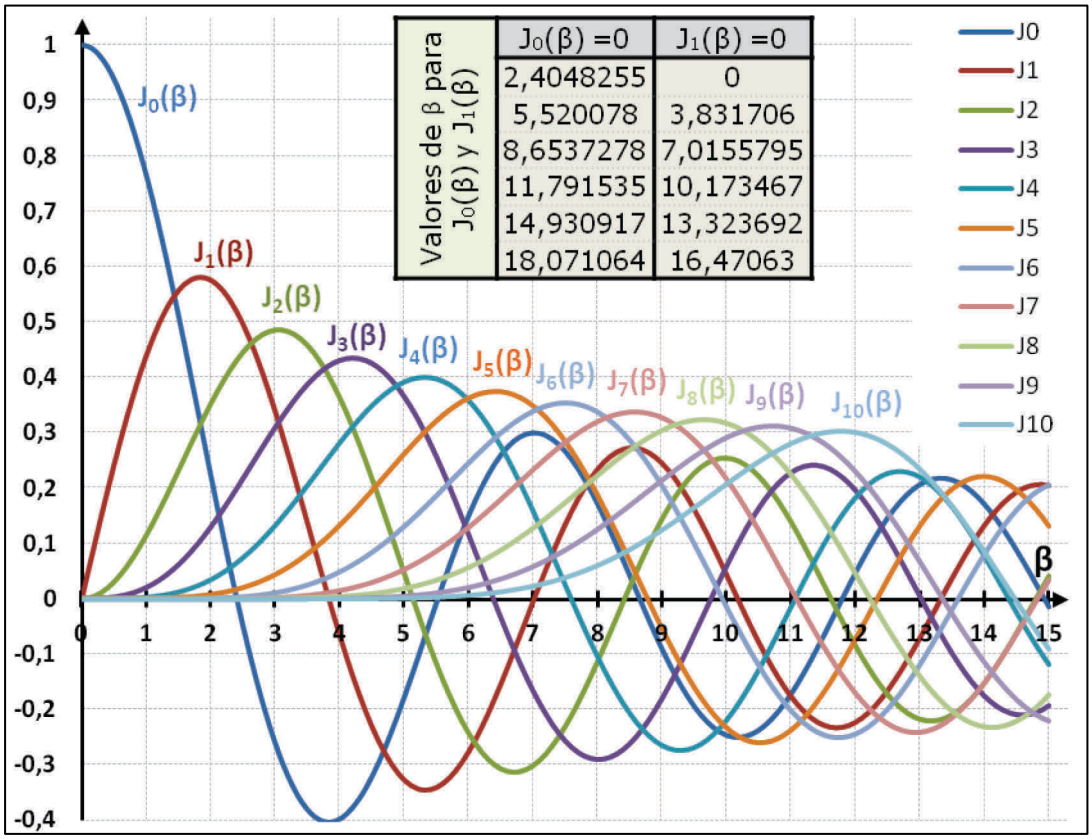


Figura 2. Funciones de Bessel de primera especie para los diez primeros órdenes y tabla con los primeros valores de beta que anulan a las funciones de primer y segundo orden

Considérense ahora las funciones de Bessel de primera especie. En la Figura 2 se representan los diez primeros órdenes así como los primeros valores de β que anulan $J_0(\beta)$ y $J_1(\beta)$.

Obsérvese que para valores del índice de modulación β que anulan la función de orden cero, correspondiente a la portadora, toda la potencia se encuentra en los armónicos, principalmente en el primero. Puede verse que, para los restantes valores de β, la potencia contenida en los armónicos es mínima.

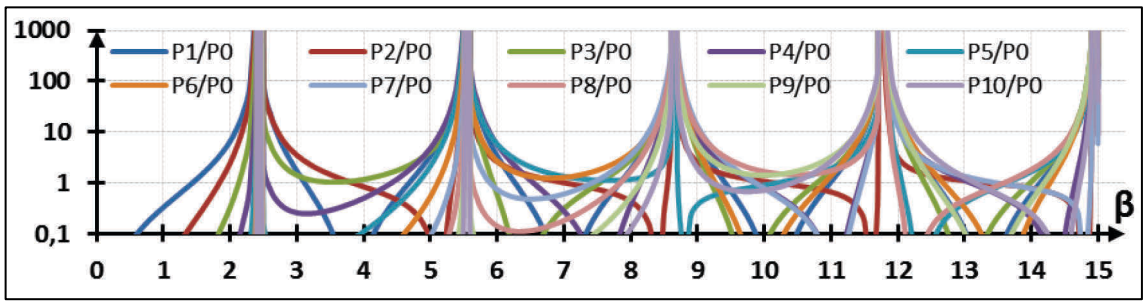


Figura 3. Potencia en armónicos superiores relativa al fundamental

En la Figura 3 puede verse representada la potencia contenida en cada armónico en relación a la potencia de portadora. Para el k-ésimo armónico esta proporción vendrá dada por la expresión:

$$\frac{P_k}{P_0} = \left(\frac{J_k(\beta)}{J_0(\beta)}\right)^2$$

La compresión efectuada al expresar el eje de ordenadas en escala logarítmica permite ver la transferencia de potencia desde la portadora a los armónicos al variar el índice de modulación. Para apreciar gráficamente las diferencias de magnitud resulta más conveniente expresar la relación de potencias en dB. En la Figura 4 se han representado las relaciones de potencia de los armónicos a la portadora y también las potencias de los armónicos superiores en relación al primero. Ambas representaciones resultan similares, con la salvedad de que los valores de β que anulan a la portadora no coinciden con aquellos que anulan al primer armónico. Este último recoge el 27% de la pérdida de potencia de aquella en su primer valor nulo.

Para valores pequeños de β puede observarse en todas las gráficas que la potencia contenida en los armónicos disminuye muy rápidamente a medida que aumenta su orden. Para

valores mayores de β el reparto de la potencia transportada por la señal modulada va equilibrándose entre portadora, primer armónico y sucesivos, con la lógica salvedad de aquellos valores que anulan las correspondientes funciones de Bessel.

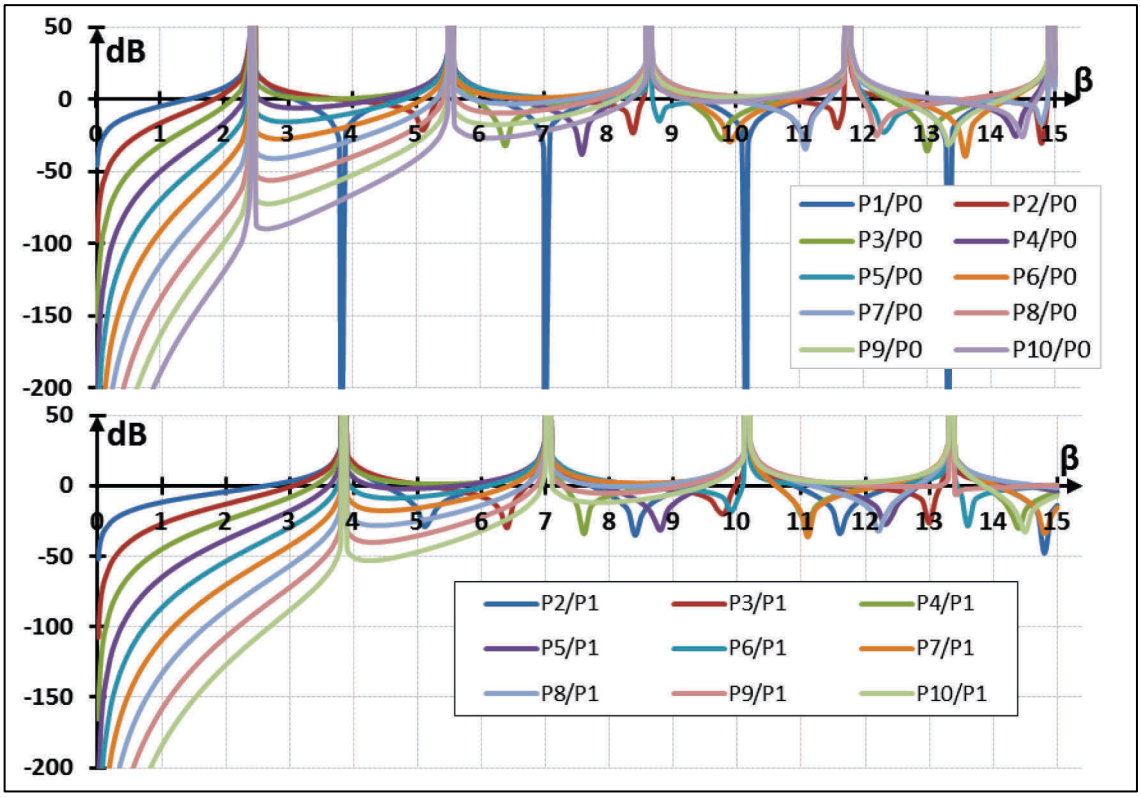


Figura 4. Relaciones de potencia de los armónicos a la portadora (gráfica superior) y de los armónicos superiores al primero de ellos (gráfica inferior)

Del análisis de ambas gráficas resulta evidente que para valores pequeños de β la mayor parte de la potencia se encuentra en el primer armónico. Para β=1.43 rad portadora y primer armónico contienen la misma potencia, un 30% cada una, encontrándose el 40% restante en los armónicos superiores.

Para un valor β=0,6 rad la potencia de portadora es el 83,2% de la potencia total y el primer armónico contiene el 8,2%. Para β=0,2 rad resulta interesante observar la comparación entre primer armónico y superiores. La potencia de portadora alcanza el 99% y el 2% restante se reparte por igual entre segundo armónico y resto de la señal. La Figura 5 permite comparar la potencia contenida en la portadora y en los dos primeros armónicos con la potencia total de la señal en función de β.

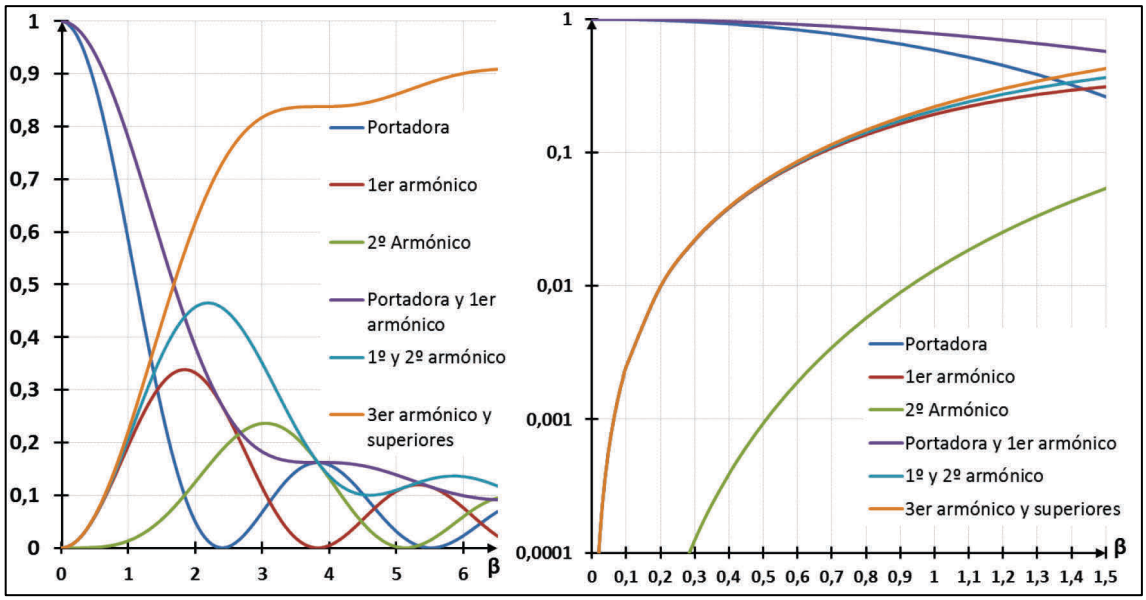


Figura 5. Potencias de primer y segundo armónico y resto de la señal

Para valores muy pequeños de β, solamente alcanzan valores significativos las funciones de Bessel $J_0(\beta)$ y $J_1(\beta)$. Aquellas que corresponden a valores superiores de k tienen, en este caso, un valor despreciable. Valores de β muy pequeños significan desviaciones de fase también muy pequeñas y esta situación se alcanza cuando la amplitud de la señal moduladora es muy pequeña frente a su frecuencia, Vm << ν_m. Este es el caso de de las señales obtenidas de osciladores de alta estabilidad, donde un ruido de fase bajo equivale a una variación muy pequeña del ángulo de modulación. El espectro resultante solo contiene las líneas correspondientes a la frecuencia ν_0 y dos bandas laterales antisimétricas al cumplirse J_1=-J_{-1}. La amplitud de la línea correspondiente a la frecuencia del oscilador viene afectada por un coeficiente $J_0(\beta)$ que, para valores tan pequeños de β puede aproximarse a la unidad. Las dos bandas laterales están afectadas por coeficientes $|J_1(\beta)|$. El espectro resultante se asemeja al que se obtiene en una modulación de amplitud donde la profundidad de modulación sea equivalente a $|J_1(\beta)|$. Como ejemplo, para una excursión máxima de fase β=0.1 rad se obtienen los siguientes valores de las funciones de Bessel:

$$J_0(\beta)= 0{,}9975 \qquad J_1(\beta)= 0.04994 \qquad J_2(\beta)= 0{,}001249$$

y las potencias contenidas en las primeras líneas espectrales en relación con la potencia de portadora presentarán el siguiente resultado:

$$\frac{P_1}{P_0} = \left(\frac{J_1(\beta)}{J_0(\beta)}\right)^2 = 2.507 \,.\, 10^{-3} = -26.01dB$$

$$\frac{P_2}{P_0} = \left(\frac{\mathrm{J}_2(\beta)}{\mathrm{J}_0(\beta)}\right)^2 = 1.568\,.10^{-6} = -58.05dB$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{\mathrm{J}_2(\beta)}{\mathrm{J}_1(\beta)}\right)^2 = 6.255\,.10^{-4} = -32.04dB$$

$$\frac{1-(P_1+P_2)}{P_1} = \frac{1-(\mathrm{J}_1(\beta))^2-(\mathrm{J}_2(\beta))^2}{(\mathrm{J}_1(\beta))^2} = 1.002 = 0.001dB$$

Se observa una caída de 26 dB en la potencia contenida en la raya espectral del primer armónico de moduladora con respecto a la potencia de portadora. Para el segundo armónico, la pérdida, 58 dB, es aún mucho mayor. Pero lo verdaderamente relevante es que la potencia de segundo armónico resulta mil seiscientas veces inferior a la del primero (-32,04 dB) y la de este resulta semejante a la de todo el resto de la señal. En la Figura 6 puede verse con más detalle como la potencia en armónicos disminuye rápidamente para valores de beta inferiores a 0,1 rad.

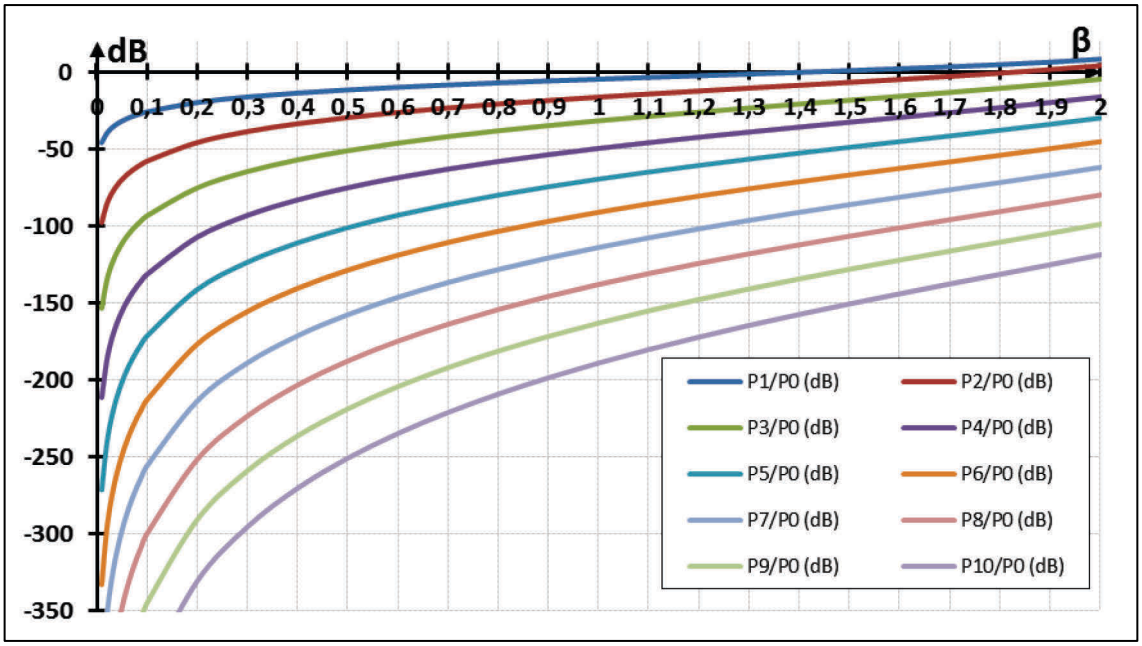


Figura 6. Relación de potencias de los armónicos a la de portadora para valores pequeños de β

Considerando un caso aún exagerado pero más real, con una señal patrón normalizada de frecuencia 10MHz modulada con un ruido sinusoidal de frecuencia 100 Hz. cuya amplitud ronde el orden de milivoltios se obtiene un ángulo β (estimado para 1 mV y 100 Hz.) cuyo valor es:

$$\beta = \frac{V_m}{\nu_m} < 10^{-5} rad$$

Como puede verse, el índice de modulación resultante es muy inferior al valor de 0.1 radianes que se ha utilizado para el ejemplo anterior. En consecuencia la potencia de primer armónico de moduladora aún será mucho más pequeña que la que corresponde a la señal y la del segundo armónico, insignificante. El espectro resultante coincide perfectamente con el correspondiente a una modulación de amplitud.

Es adecuado resaltar que una fuente de tiempo entrega una señal que ha sido convenientemente filtrada y presenta un alto grado de pureza. Quiere decirse que las bandas laterales han sido muy atenuadas lo que significa que el primero y más significativo de los armónicos del jitter estará muy próximo a la señal y tanto el valor del índice de modulación β como la frecuencia de la moduladora ν_m serán muy pequeñas. Puede considerarse plenamente válido para este caso, que la modulación en frecuencia por jitter solamente presenta dos bandas laterales antisimétricas y equivale a una modulación de amplitud cuya profundidad de modulación viene dada por $|J_1(\beta)|$. La moduladora es de baja frecuencia y se estará hablando más bien de wander que de jitter.

4.2.2.2. Modulación multitonal

Se analizará ahora el caso de una modulación multitonal. Un caso particular de este tipo de modulación lo constituye una señal moduladora periódica. En este caso el ruido multitonal lo componen los diferentes términos del desarrollo en serie de Fourier de la señal considerada. Con este tipo de modulación se evidencia notablemente la naturaleza no lineal de las modulaciones de ángulo. Así, si consideramos una señal moduladora compuesta por dos tonos de frecuencias ν_1 y ν_2, con amplitudes V_1 y V_2, la frecuencia instantánea será:

$$\nu_i(t) = \nu_0 + V_1 \cos 2\pi\nu_1 t + V_2 \cos 2\pi\nu_2 t$$

Operando de modo análogo al caso de un solo tono se obtiene para la señal modulada:

$$v(t) = V_0 \, sen[2\pi\nu_0 t + \beta_1 \operatorname{sen} 2\pi\nu_1 t + \beta_2 \operatorname{sen} 2\pi\nu_2 t + \phi_0]$$

donde:

$$\beta_1 = \frac{V_1}{\nu_1} \quad y \quad \beta_2 = \frac{V_2}{\nu_2}$$

Desarrollando v(t):

$$\begin{aligned} \mathrm{v}(t) = V_0[&sen(2\pi\nu_0 t + \phi_0)\cos(\beta_1 \operatorname{sen} 2\pi\nu_1 t)\cos(\beta_2 \operatorname{sen} 2\pi\nu_2 t) \\ &- sen(2\pi\nu_0 t + \phi_0)\operatorname{sen}(\beta_1 \operatorname{sen} 2\pi\nu_1 t)\operatorname{sen}(\beta_2 \operatorname{sen} 2\pi\nu_2 t) \\ &+ \cos(2\pi\nu_0 t + \phi_0)\operatorname{sen}(\beta_1 \operatorname{sen} 2\pi\nu_1 t)\cos(\beta_2 \operatorname{sen} 2\pi\nu_2 t) \\ &+ \cos(2\pi\nu_0 t + \phi_0)\, cos(\beta_1 \operatorname{sen} 2\pi\nu_1 t)\operatorname{sen}(\beta_2 \operatorname{sen} 2\pi\nu_2 t)] \end{aligned}$$

Sustituyendo y operando:

$$\mathrm{v}(t) = V_0 \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathrm{J}_n(\beta_1)\,\mathrm{J}_m(\beta_2) \operatorname{sen}\left[2\pi(\nu_0 + n\nu_1 + m\nu_2)t + \phi_0\right]$$

donde aparecen términos cruzados resultantes de la combinación lineal de las frecuencias ν_1 y ν_2. Para interpretar este resultado se considerarán cuatro grupos de rayas espectrales:

1.- Raya espectral de frecuencia ν_0 (n=0, m=0), correspondientes a la frecuencia de portadora y cuya amplitud viene dada por:

$$V_0 \cdot \mathrm{J}_0(\beta_1) \cdot \mathrm{J}_0(\beta_2)$$

2.- Rayas espectrales de frecuencia $\nu_0 \pm n\nu_1$ (n≠0, m=0), que corresponden a las bandas laterales de la modulación en frecuencia con el primer tono, con amplitudes:

$$V_0 \cdot \mathrm{J}_n(\beta_1) \cdot \mathrm{J}_0(\beta_2)$$

3.- Rayas espectrales de frecuencia $\nu_0 \pm m\nu_2$ (n=0, m≠0), que corresponden a las bandas laterales de la modulación en frecuencia con el segundo tono, con amplitudes:

$$V_0 \cdot \mathrm{J}_0(\beta_1) \cdot \mathrm{J}_m(\beta_2)$$

4.- Rayas espectrales correspondientes a las frecuencias de batido $\nu_0 \pm n\nu_1 \pm m\nu_2$ (n≠0, m≠0), con amplitudes:

$$V_0 \cdot \mathrm{J}_n(\beta_1) \cdot \mathrm{J}_m(\beta_2)$$

Este último grupo de términos corresponden a frecuencias de batido de armónicos de ν_1 y ν_2 que no existen en la señal moduladora original. Estas frecuencias aparecen como consecuencia de la no linealidad de la modulación de ángulo. Al superponerse sobre los espectros correspondientes a las modulaciones separadas de los dos tonos que componen la señal distorsionan su espectro. En consecuencia, aparentemente el espectro resultante no parece útil para analizar la señal moduladora.

De nuevo vamos a hacer la consideración de banda estrecha como consecuencia de desviaciones de ángulo muy pequeñas (valores muy bajos de β_1 y β_2). Como resultado, solo serán apreciables los valores de $J_0(\beta)$ y $J_1(\beta)$. Revisando los cuatro grupos de rayas espectrales en que se ha distribuido el espectro, observamos que el primer grupo permanece inalterado. El segundo grupo queda reducido a dos rayas espectrales cada una en una banda lateral antisimétrica respecto de la frecuencia de señal patrón ν_0 (frecuencias $\nu_0 \pm \nu_1$) y cuya amplitud tiene por módulo:

$$V_0 \cdot J_1(\beta_1) \cdot J_0(\beta_2)$$

De forma análoga, el tercer grupo también se reduce a dos rayas espectrales con el mismo esquema de simetría que el grupo anterior (frecuencias $\nu_0 \pm \nu_2$) y con amplitud:

$$V_0 \cdot J_0(\beta_1) \cdot J_1(\beta_2)$$

El grupo de rayas espectrales correspondiente a las frecuencias de batido $\nu_0 \pm n\nu_1 \pm m\nu_2$, queda ahora reducido a cuatro rayas del espectro correspondientes a valores de m=1 y n=1 con amplitud:

$$V_0 \cdot J_1(\beta_1) \cdot J_1(\beta_2)$$

Este término resulta mucho menor que los anteriores debido al pequeño valor de $J_1(\beta)$, muy inferior a la unidad, resultando una potencia despreciable en esta línea. Para centrar el orden de magnitud de estos armónicos pueden reutilizarse los valores obtenidos anteriormente para las funciones de Bessel en el ejemplo de modulación monotonal. Suponiendo iguales β_1 y β_2 y que alcancen un valor de 0.1 radianes, se obtiene una relación de potencia contenida en cada una de las dos primeras rayas espectrales del segundo y tercer grupo con referencia a la potencia de portadora:

$$\frac{P(\nu_0 \pm \nu_1)}{P(\nu_0)} = \frac{P(\nu_0 \pm \nu_2)}{P(\nu_0)} = \left(\frac{\mathrm{J}_1(\beta)}{\mathrm{J}_0(\beta)}\right)^2 = 2.5065 \,.\, 10^{-3} = -26dB$$

$$\frac{P(\nu_0 \pm 2\nu_1)}{P(\nu_0)} = \frac{P(\nu_0 \pm 2\nu_2)}{P(\nu_0)} = \left(\frac{\mathrm{J}_2(\beta)}{\mathrm{J}_0(\beta)}\right)^2 = 1.5703 \,.\, 10^{-6} = -58dB$$

En el cuarto grupo, para los términos cruzados de primer y segundo armónico de ambos tonos moduladores

$$\frac{P(\nu_0 \pm \nu_1 \pm \nu_2)}{P(\nu_0)} = \left(\frac{\mathrm{J}_1(\beta)}{\mathrm{J}_0(\beta)}\right)^4 = 6.2825.\, 10^{-3} = -52dB$$

$$\frac{P(\nu_0 \pm 2\nu_1 \pm \nu_2)}{P(\nu_0)} = \frac{P(\nu_0 \pm \nu_1 \pm 2\nu_2)}{P(\nu_0)} = \left(\frac{\mathrm{J}_1(\beta).\mathrm{J}_2(\beta)}{\mathrm{J}_0(\beta).\mathrm{J}_0(\beta)}\right)^2 = 3.9360.\, 10^{-9} = -84dB$$

$$\frac{P(\nu_0 \pm 2\nu_1 \pm 2\nu_2)}{P(\nu_0)} = \left(\frac{\mathrm{J}_2(\beta)}{\mathrm{J}_0(\beta)}\right)^4 = 2.4658.\, 10^{-12} = -116dB$$

Considerando dos tonos de ruido sinusoidales de amplitudes tan altas como un milivoltio, modulando a una señal patrón normalizada de 10 MHz se obtienen para β_1 y β_2, valores inferiores a 10^{-9} rad., muchísimo más pequeños que el valor de 0.1 rad utilizado para el ejemplo.

Al igual que en el caso de un solo tono, también aquí la energía contenida en la señal permanece constante durante el proceso de modulación. La potencia de la señal modulada vendrá dada por:

$$\mathrm{P} = \frac{1}{2}{V_0}^2 \,.\, \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} {\mathrm{J}_n}^2(\beta_1)\, {\mathrm{J}_m}^2(\beta_2) = \frac{1}{2}{V_0}^2 \,.\, \sum_{n=-\infty}^{\infty} {\mathrm{J}_n}^2(\beta_1) \sum_{m=-\infty}^{\infty} {\mathrm{J}_m}^2(\beta_2) = \frac{1}{2}{V_0}^2$$

De forma generalizada, en el estudio de la modulación en frecuencia [39] con una señal f(t) que pueda ser desarrollada como suma de términos sinusoidales (señales multitonales), puede escribirse:

$$f(t) = a_0 + \sum_{i=1}^{k} [a_i \cos 2\pi\nu_i t + b_i \, sen \, 2\pi\nu_i t] = c_0 + \sum_{i=1}^{k} c_i \cos (2\pi\nu_i t + \theta_i)$$

En particular, en el caso de señales moduladoras constituidas por funciones periódicas desarrolladas en serie de Fourier el sumatorio se extendería hasta k=∞.

La frecuencia instantánea de la señal modulada vendrá dada por:

$$\nu_i(t) = \nu_0(1+\beta_0) + \sum_{i=1}^{k} \beta_i \cos(2\pi\nu_i t + \theta_i)$$

Donde:

$$\beta_0 = \frac{c_0}{\nu_0} \quad y \quad \beta_i = \frac{c_i}{\nu_i}$$

y la señal modulada puede escribirse como:

$$\mathrm{v}(t) = V_0\, sen\left[2\pi\nu_0(1+\beta_0)t + \sum_{i=1}^{k} \beta_i\, sen\,(2\pi\nu_i t + \theta_i) + \phi_0\right]$$

El desarrollo de esta expresión [39] dará como resultado:

$$\mathrm{v}(t) = V_0 \cdot \sum_{n_1=-\infty}^{\infty}\sum_{n_2=-\infty}^{\infty}\dots\sum_{n_k=-\infty}^{\infty} \mathrm{J}_{n_1}(\beta_1).\mathrm{J}_{n_2}(\beta_2)\dots\mathrm{J}_{n_k}(\beta_k)\ \mathrm{sen}\left[2\pi\left(\nu_0(1+\beta_0) + \sum_{i=1}^{k} n_i\,\nu_i\right)t + \sum_{i=1}^{k} n_i\theta_i + \phi_0\right]$$

Aparecen, en este caso, términos cruzados resultantes de la combinación lineal de todas las frecuencias ν_i que conforman el espectro de la señal moduladora f(t). Además, puede observarse que la componente continua de la señal moduladora provoca un desplazamiento constante de la frecuencia de portadora a un valor $\nu_0(1+\beta_0)$.

Para interpretar este resultado se agruparán los términos resultantes de la expresión anterior, en tres grupos de rayas espectrales:

1. Raya espectral de frecuencia $\nu_0(1+\beta_0)$ (todos los valores n_i=0) cuya amplitud viene dada por:

$$V_0 \cdot \mathrm{J}_0(\beta_1).\mathrm{J}_0(\beta_2)\dots.\mathrm{J}_0(\beta_k)$$

2. Rayas espectrales correspondientes a las frecuencias $\nu_0(1+\beta_0) \pm n_i\nu_i$ (un único valor $n_i \neq 0$), con amplitudes:

$$V_0 \cdot J_0(\beta_1) \cdot J_0(\beta_2) \dots J_{n_i}(\beta_i) \dots J_0(\beta_k)$$

3. Rayas espectrales correspondientes a las frecuencias de batido de las componentes espectrales de la señal moduladora $\nu_0(1+\beta_0) \pm \sum n_i\nu_i$ (para dos o más valores $n_i \neq 0$) con amplitudes:

$$V_0 \cdot J_{n_1}(\beta_1) \cdot J_{n_2}(\beta_2) \dots J_{n_k}(\beta_k)$$

Este último grupo de términos corresponden a frecuencias de batido de armónicos inexistentes en la señal moduladora original. La existencia de estas frecuencias en la señal modulada pone, nuevamente, de manifiesto la no linealidad de la modulación de ángulo, e inutiliza, en apariencia, el espectro de la señal modulada para el análisis de la señal moduladora.

Aplicando aquí la consideración de banda estrecha, resultante de suponer desviaciones de ángulo muy pequeñas (valores muy bajos de β_i), se obtienen amplitudes despreciables para el tercer grupo de rayas espectrales, frente a los dos primeros. La rápida disminución del valor de $J_{n_i}(\beta_i)$ al incrementarse el valor de n_i reduce de forma idéntica las amplitudes de las componentes espectrales en las que se sustituye algún término $J_0(\beta_i)$ o $J_1(\beta_i)$ por términos con parámetro n_i de orden superior.

El segundo grupo representa a las rayas espectrales que componen la señal moduladora desplazadas por la frecuencia de la portadora, o más exactamente por la frecuencia $\nu_0.(1+\beta_0)$. Los términos correspondientes a los armónicos de orden n_i de cada raya del espectro de la señal moduladora, están ponderados por un valor $J_{n_i}(\beta_i)$ que reduce su valor a niveles insignificantes para $n_i > 1$. Se considerará únicamente el armónico fundamental de cada componente del espectro de la señal moduladora, que van ponderados por un término $J_1(\beta_i)$. Se obtiene así un espectro con dos bandas laterales que contienen las mismas frecuencias que componen la señal moduladora f(t). La banda lateral superior se asemeja al espectro de la señal moduladora diferenciándose en la diferente ponderación de sus términos. La banda lateral inferior no resultará simétrica de la superior respecto a la frecuencia de portadora, como corresponde a una modulación de amplitud, pero presenta muchas

similitudes. Los términos impares de la banda lateral inferior serán antisimétricos de sus homólogos en la banda lateral superior, en virtud de las propiedades de las funciones de Bessel. Los términos pares, a su vez, presentaran simetría. No obstante, el módulo del espectro es simétrico como sucede en la modulación de amplitud con señal moduladora real. Al elevar al cuadrado las amplitudes de cada término para hallar el espectro de potencia, conforme al teorema de Parseval, el resultado es idéntico al obtenido para una modulación de amplitud.

El primer grupo solamente contiene la línea correspondiente a la portadora, cuya frecuencia sufre un desplazamiento constante respecto a la frecuencia nominal ν_0 de valor unitario β_0. La modulación por ruido, sea este aleatorio o determinístico, habitualmente se debe a señales de valor medio nulo, o dicho de otro modo sin componente continua. En cualquier caso este término representa un error constante fácil de corregir.

Todos las rayas espectrales contienen en su amplitud el producto de k funciones de Bessel. Como consecuencia de las consideraciones expuestas sobre los tres grupos de rayas espectrales puede suponerse nulo el valor β_0 y despreciables los términos que contienen funciones de Bessel de orden superior a la unidad. En el resto de términos se despreciarán aquellos que tienen más de una función de Bessel de primer orden, frente a los que solo tienen una. La amplitud de cada término de las bandas laterales resultantes, correspondiente a una frecuencia $\nu_0+\nu_i$ resulta ser:

$$V_0 \cdot \mathrm{J}_0(\beta_1) \cdot \mathrm{J}_0(\beta_2) \dots \mathrm{J}_1(\beta_i) \dots \mathrm{J}_0(\beta_k)$$

Que puede escribirse como:

$$V_0 \cdot \mathrm{J}_0(\beta_1) \cdot \mathrm{J}_0(\beta_2) \dots \mathrm{J}_0(\beta_i) \dots \mathrm{J}_0(\beta_k) \cdot \frac{\mathrm{J}_1(\beta_i)}{\mathrm{J}_0(\beta_i)} = V_0 \left[\prod_{i=0}^{k} \mathrm{J}_0(\beta_i) \right] \cdot \frac{\mathrm{J}_1(\beta_i)}{\mathrm{J}_0(\beta_i)}$$

Se obtiene así una expresión para la señal con modulación multitonal en banda estrecha, que puede escribirse:

$$v(t) = V_0 \left[\prod_{i=0}^{k} J_0(\beta_i)\right].\left\{\text{sen}\,[2\pi\nu_0 t + \phi_0] + \sum_{i=1}^{k} \frac{J_1(\beta_i)}{J_0(\beta_i)} \text{sen}\,[2\pi(\nu_0+\nu_i)t + \theta_i + \phi_0] + \sum_{i=1}^{k} \frac{J_{-1}(\beta_i)}{J_0(\beta_i)} \text{sen}\,[2\pi(\nu_0-\nu_i)t - \theta_i + \phi_0]\right\}$$

Vamos a comparar este resultado con el que se obtiene de la modulación de amplitud de una portadora con la misma señal multitonal f(t) (omitiendo, por coherencia, el término c_0):

$$f(t) = \sum_{i=1}^{k} c_i \cos\,(2\pi\nu_i t + \theta_i)$$

La señal modulada en amplitud viene representada por:

$$v(t) = [V_0 + f(t)]\, sen[2\pi\nu_0 t + \phi_0]$$

y desarrollando, se obtiene:

$$v(t) = V_0 .\left\{\text{sen}\,[2\pi\nu_0 t + \phi_0] + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2}\frac{c_i}{V_0} \text{sen}\,[2\pi(\nu_0+\nu_i)t + \theta_i + \phi_0] + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2}\frac{c_i}{V_0} \text{sen}\,[2\pi(\nu_0-\nu_i)t - \theta_i + \phi_0]\right\}$$

En la comparación se observa que las expresiones de la señal modulada en frecuencia de banda estrecha, con una señal moduladora multitonal, y la señal modulada en amplitud con la misma moduladora son muy semejantes. Ciertamente, las bandas laterales son antisimétricas en la modulación de fase, y simétricas en la de frecuencia. Sin embargo, la amplitud de cada raya espectral en la modulación de frecuencia, está ponderada por un factor diferente que varía con β_i, es decir, con la frecuencia y la amplitud de la raya espectral correspondiente en la señal moduladora. En el caso de la modulación de amplitud, el coeficiente de cada término solo varía con la amplitud de la raya espectral correspondiente en la señal moduladora.

En conclusión, en la modulación de frecuencia en banda estrecha con una moduladora multitonal se obtiene un espectro cuyo módulo resulta semejante al correspondiente a una modulación de amplitud con una señal moduladora dada por:

$$f(t) = \sum_{i=1}^{k} 2V_0 \frac{\mathrm{J}_1(\beta_i)}{\mathrm{J}_0(\beta_i)}.cos\,(2\pi\nu_i t + \theta_i)$$

Puede observarse que se ha obtenido un resultado equivalente a una modulación en amplitud con la misma moduladora multitonal, pero esta sufre un proceso de filtrado, donde la función de transferencia del filtro varía con la frecuencia y amplitud del espectro de la señal a filtrar. Cada término de la señal moduladora se ve afectado por un coeficiente dado por:

$$2V_0 \frac{\mathrm{J}_1(\beta_i)}{\mathrm{J}_0(\beta_i)} = 2V_0 \frac{\mathrm{J}_1\left(\frac{c_i}{\nu_i}\right)}{\mathrm{J}_0\left(\frac{c_i}{\nu_i}\right)}$$

En esta expresión se observa como las frecuencias crecientes corresponden a valores β_i más bajos. La rápida variación decreciente para $J_1(\beta_i)$ y creciente para $J_0(\beta_i)$ provocan la pérdida de peso de los armónicos más altos. Equivale a modular en amplitud con una moduladora que ha sufrido un filtrado paso-bajo.

Tomando para $J_0(\beta)$ y $J_1(\beta)$ su expresión de desarrollo en serie [38] [40]:

$$\mathrm{J}_0(\beta) = 1 - \frac{\beta^2}{2^2} + \frac{\beta^4}{2^2.4^2} - \frac{\beta^6}{2^2.4^2.6^2} + \cdots$$

$$\mathrm{J}_1(\beta) = \frac{\beta}{2}\left[1 - \frac{\beta^2}{2.4} + \frac{\beta^4}{2.4.4.6} - \frac{\beta^6}{2.4.6.4.6.8} + \cdots\right]$$

Para valores muy pequeños de β_i) se puede aproximar

$$\frac{\mathrm{J}_1(\beta_i)}{\mathrm{J}_0(\beta_i)} = \frac{\beta_i}{2} = \frac{c_i}{2\nu_i}$$

Con esta aproximación la señal moduladora se simplifica:

$$f(t) = \sum_{i=1}^{k} 2V_0 \frac{\mathrm{J}_1(\beta_i)}{\mathrm{J}_0(\beta_i)}.cos\,(2\pi\nu_i t + \theta_i) = \sum_{i=1}^{k} V_0 \frac{c_i}{\nu_i}.cos\,(2\pi\nu_i t + \theta_i)$$

Puede observarse que cada término de frecuencia ν_i ve su amplitud afectada por un factor $1/\nu_i$.

Con independencia de la consideración de banda estrecha y su efecto sobre el espectro, también aquí la energía contenida en la señal permanece constante durante el proceso de modulación. En efecto, a partir de la expresión general para la modulación multitonal y expresando la potencia de la señal modulada:

$$P = \frac{1}{2} {V_0}^2 \cdot \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{n_k=-\infty}^{\infty} {J_{n_1}}^2(\beta_1) \cdot {J_{n_2}}^2(\beta_2) \dots {J_{n_k}}^2(\beta_k)$$

$$= \frac{1}{2} {V_0}^2 \cdot \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} {J_{n_1}}^2(\beta_1) \cdot \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} {J_{n_2}}^2(\beta_2) \dots \sum_{n_k=-\infty}^{\infty} {J_{n_k}}^2(\beta_k) = \frac{1}{2} {V_0}^2$$

Este resultado es coherente con lo que cabe esperar en una modulación de ángulo. La potencia que se transfiere hacia las bandas laterales se obtiene de la portadora, aún cuando la consideración de banda estrecha permita asemejar el espectro al de una modulación de amplitud.

A tenor de todo el estudio anterior, puede intuirse la complejidad del espectro para una modulación en frecuencia con una señal moduladora real f(t) no periódica. Aunque no es posible obtener una expresión para el espectro de frecuencias correspondiente a una modulación de ángulo con una señal moduladora genérica f(t), si que se puede obtener una aproximación para el caso de la modulación de banda estrecha. Se ha visto en los casos anteriores, con la consideración de ángulo pequeño, que el espectro, al menos en módulo, es semejante al de una modulación en amplitud y que la potencia total de la señal permanece constante. Tal resultado sugiere que el estudio de la modulación en frecuencia de banda estrecha podría abordarse mediante el estudio de la potencia contenida en las bandas laterales.

4.2.2.3. Espectro de modulación de ángulo pequeño

Se estudiará ahora el espectro que se obtiene en el caso de una señal x(t) que modula en ángulo, muy débilmente, a una portadora (hipótesis de ángulo pequeño).

En el caso de las señales de reloj de alta estabilidad, tiene interés el análisis de la modulación en frecuencia, de banda estrecha. En efecto, la inestabilidad de estas señales es consecuencia de la modulación de su ángulo de fase (trátese de una modulación de frecuencia o de fase) por ruido de muy poca amplitud. Este tipo de modulación, presenta un espectro con

dos bandas laterales simétricas respecto a la frecuencia de la señal sin modular, semejante al obtenido con la modulación de amplitud.

En efecto, una señal v(t) modulada por un ruido x(t) suficientemente débil provoca excursiones de frecuencia muy pequeñas alrededor de la frecuencia ν_0 de la portadora. Como consecuencia los desplazamientos de fase $\phi(t)$ son también muy pequeños y la señal modulada puede escribirse:

$$\begin{aligned} v(t) &= V_0 sen[2\pi\nu_0 t + \phi_0 + \phi(t)] \\ &= V_0[sen(2\pi\nu_0 t + \phi_0).cos\phi(t) + sen\phi(t).\cos(2\pi\nu_0 t + \phi_0)] \end{aligned}$$

que para $\phi(t)$ muy pequeño puede escribirse como:

$$v(t) = V_0[sen(2\pi\nu_0 t + \phi_0) + \phi(t).\cos(2\pi\nu_0 t + \phi_0)]$$

donde se ha aproximado el coseno a la unidad y el seno al ángulo para desplazamientos muy pequeños de la fase.

El primer término corresponde a la señal portadora pura. Aplicando la transformación de Fourier al segundo término, se obtiene:

$$\frac{V_0}{2}[\Phi(f + \nu_0) + \Phi(f - \nu_0)]$$

que corresponde, en el dominio de las frecuencias, al desplazamiento del espectro de la moduladora $\phi(t)$ hasta la frecuencia ν_0 (y su simétrica en el semiplano negativo, como corresponde a la transformada de una señal real). Como se verá posteriormente, este es un espectro idéntico al que se obtiene con una modulación de amplitud, con la portadora en cuadratura:

$$v(t) = V_0[1 + \phi(t)]\cos(2\pi\nu_0 t + \phi_0)$$

Si se trata de una modulación en frecuencia con una moduladora x(t), la frecuencia instantánea vendrá dada por:

$$\nu_i = \nu_0 + x(t)$$

siendo equivalente a una modulación de fase con una señal:

$$\phi(t) = \int_{-\infty}^{t} 2\pi x(t)dt$$

Una vez conocida la función x(t) y su espectro X(f), se obtiene la transformada de Fourier de $\phi(t)$:

$$\Phi(f) = \frac{2\pi X(f)}{j2\pi f}$$

Y el espectro de la señal moduladora desplazada hasta la frecuencia de portadora y su correspondiente simétrica en el semiplano negativo se expresan como:

$$\frac{V_0}{j}\left[\frac{X(f+\nu_0)}{f+\nu_0} - \frac{X(f-\nu_0)}{f-\nu_0}\right]$$

El término 1/j representa un desplazamiento constante de fase de $\pi/2$ (la portadora aparece en cuadratura con el espectro de moduladora) y la amplitud de la señal queda dividida por la frecuencia. El resultado es semejante al que se obtiene para una modulación de amplitud con una señal moduladora x(t) previamente sometida a un filtrado con función de transferencia 1/f. Este resultado concuerda con el obtenido anteriormente para la modulación multitonal (integración en el tiempo por un filtro paso bajo).

Considérese una señal modulada en frecuencia por un ruido blanco gaussiano. Los resultados obtenidos en los casos anteriores hacen suponer, por semejanza, una equivalencia con una modulación en amplitud en la cual la señal moduladora sufrirá un filtrado con función de transferencia 1/f.

4.2.3 Modulación conjunta de amplitud y ángulo. Modelo de oscilador

La señal procedente de un oscilador ideal que equipa a un reloj, es una señal sinusoidal de frecuencia ν_0, que ocupa una anchura de banda espectral nula, siendo su representación en el dominio de la frecuencia una δ de Dirac. El oscilador real entrega una señal que tiene un espectro no nulo alrededor de la frecuencia ν_0. Es el espectro de una señal de paso-banda de banda estrecha que corresponde al de una portadora de frecuencia ν_0, modulada por señales de ruido. En la aplicación del proceso de señal a señales paso-banda en radar y telecomunicaciones, es habitual la representación compleja de señales reales $\theta(t)$, añadiendo

un término imaginario $\hat{\theta}(t)$ tal que $\hat{\theta}(t)$ resulta ser la transformada de Hilbert de $\theta(t)$. Se obtiene así una señal compleja ψ(t), cuya parte real es la señal del oscilador objeto de estudio:

$$\psi(t) = \theta(t) + j\hat{\theta}(t)$$

La transformada de Hilbert se obtiene mediante un cambio de fase de –π/2 para todas las frecuencias del espectro. Es una operación lineal que no supone cambio de dominio y, en consecuencia, ψ (t) sigue siendo una función en el dominio del tiempo. En el dominio de la frecuencia la transformada de Hilbert puede efectuarse mediante la función de transferencia, H(f)= -j. sgn f, donde sgn f toma valores ±1 correspondientes al semiplano positivo o negativo en el dominio de la frecuencia. La señal obtenida del oscilador puede corresponder a la parte imaginaria igual que a la parte real, dado que solo difieren en un desplazamiento de fase. La función ψ (t), denominada inicialmente por Gabor [41] como función compleja (complex function), recibe el nombre de función analítica [42].

Efectuando la transformación de Fourier para la función ψ (t) se obtiene un espectro Ψ(f) que se anula para las frecuencias negativas, característico de una función analítica [43], duplicándose el espectro en el semiplano positivo, respecto al de la señal real $\hat{\theta}(t)$:

$$\Psi(f) = 2\Theta(f) \qquad f \geq 0$$

$$\Psi(f) = 0 \qquad f < 0$$

La función de densidad espectral de potencia también se anula para frecuencias negativas.

$$S_{\psi\psi}(f) = 4S_{\theta\theta}(f) \qquad f \geq 0$$

$$S_{\psi\psi}(f) = 0 \qquad f < 0$$

Donde $S_{\psi\psi}(f)$ representa la densidad espectral de potencia de la envolvente compleja ψ (t) y $S_{\theta\theta}(f)$ es la densidad espectral de potencia bilateral de la señal real $\theta(t)$.

La señal procedente del oscilador, es una señal sinusoidal que también puede representarse por:

$$s(t) = V_0[1 + \varepsilon(t)]\, cos[2\pi\nu_0 t + \phi(t)]$$

donde V_0 representa la tensión de pico nominal entregada por la fuente, ε(t) la desviación o error unitario de amplitud respecto a su valor nominal, ν_0 es la frecuencia nominal de la señal y ϕ(t) la desviación o error de fase. Las desviaciones, tanto en amplitud como en fase, pueden ser aleatorias o determinísticas. En el caso de ser determinísticas, puede analizarse su origen y efectuarse las correcciones oportunas. Las desviaciones correspondientes a procesos aleatorios se deben a una infinidad de causas y darán lugar a modulaciones de amplitud y fase con señales aleatorias de valor medio nulo. Un valor medio no nulo, significaría un error constante añadido a la amplitud y/o a la fase de la portadora, susceptible de ser evaluado y corregido. En consecuencia, conviene analizar el efecto debido a los procesos de ruido aleatorio de valor medio nulo. Esto puede expresarse del siguiente modo:

$$\langle \varepsilon(t) \rangle \ll 1$$

$$\langle \phi(t) \rangle \ll 1$$

4.2.3.1. Representación fasorial y señal analítica

La señal del oscilador se corresponde con la parte real de un vector giratorio (fasor), dado por:

$$\psi(t) = V_0[1 + \varepsilon(t)]\, e^{j[2\pi\nu_0 t + \phi(t)]}$$

que también puede escribirse:

$$\psi(t) = V_0 \gamma(t)\, e^{j2\pi\nu_0 t}$$

donde γ(t) es la envolvente compleja de la señal:

$$\gamma(t) = [1 + \varepsilon(t)]\, e^{j\phi(t)}$$

En un oscilador de precisión con la calidad necesaria para equipar a un reloj, la potencia de ruido, tanto de fase como de amplitud, debe ser mínima [44] [45]. Esto significa que el valor cuadrático medio de ε(t) y de ϕ(t) deben ser muy inferiores a la unidad y puede expresarse como:

$$\langle \varepsilon^2(t) \rangle \ll 1$$

$$\langle \phi^2(t) \rangle \ll 1$$

Las amplitudes de ruido que dan lugar a estas potencias, también han de ser muy pequeñas y el término exponencial de la envolvente compleja se puede aproximar por los dos primeros términos de su desarrollo en serie de potencias:

$$e^{j\phi(t)} = 1 + j\phi(t)$$

Despreciando el término infinitesimal de segundo orden se obtiene para γ(t) la siguiente expresión:

$$\gamma(t) = 1 + \varepsilon(t) + j\phi(t)$$

La expresión compleja de la señal queda ahora:

$$\psi(t) = V_0[1 + \varepsilon(t) + j\phi(t)]\, e^{j2\pi\nu_0 t}$$

Como puede observarse en esta expresión, la parte real de la amplitud compleja viene dada por:

$$V_0[1 + \varepsilon(t)]$$

y representa a una portadora de amplitud V_0 más el ruido de amplitud en fase con ella. La parte imaginaria de la amplitud compleja:

$$V_0[j\phi(t)]$$

representa al ruido de fase en cuadratura con la portadora. El ruido de amplitud y el ruido de fase aparecen como dos señales paso-bajo modulando en cuadratura a una portadora pura de de amplitud V_0 y frecuencia ν_0.

Esta propiedad de ortogonalidad en el plano complejo entre ruido de amplitud y ruido de fase para señales de bajo ruido, permite, mediante demodulación síncrona, la obtención por separado de los procesos de ruido de amplitud y fase.

En efecto, se trata de una modulación en cuadratura. Supongamos dos señales reales paso-bajo $[1 + \varepsilon(t)]$ $y\ cos\emptyset(t)$ a partir de las cuales se obtienen las señales $\gamma_I(t)$ que modulará en fase a la portadora y $\gamma_Q(t)$ que lo hará en cuadratura. Sean estas:

$$\gamma_I(t) = [1 + \varepsilon(t)]cos\ \emptyset(t)$$

$$\gamma_{\mathrm{Q}}(t) = [1 + \varepsilon(t)] sen\, \emptyset(t)$$

que se corresponden con la parte real e imaginaria de la envolvente compleja γ(t):

$$\gamma(t) = \gamma_{\mathrm{I}}(t) + \mathrm{j}\gamma_{\mathrm{Q}}(t) = [1 + \varepsilon(t)]\, e^{j\phi(\mathrm{t})}$$

La expresión compleja de la señal queda ahora:

$$\psi(t) = V_0 \gamma(t)\, e^{j2\pi\nu_0 t} = V_0\big[\gamma_{\mathrm{I}}(t) + \mathrm{j}\gamma_{\mathrm{Q}}(t)\big] e^{j2\pi\nu_0 t}$$

$$\psi(t) = V_0\big[\gamma_{\mathrm{I}}(t) + \mathrm{j}\gamma_{\mathrm{Q}}(t)\big][cos\ 2\pi\nu_0 t + j sen\ 2\pi\nu_0 t]$$

$$\psi(t) = V_0\big[\gamma_{\mathrm{I}}(t)\ cos\ 2\pi\nu_0 t - \gamma_{\mathrm{Q}}(t)\ sen\ 2\pi\nu_0 t\big] + \mathrm{j}V_0\big[\gamma_{\mathrm{I}}(t)\ sen\ 2\pi\nu_0 t + \gamma_{\mathrm{Q}}(t) cos\ 2\pi\nu_0 t\big]$$

La parte real de la expresión obtenida, es decir, la señal real, corresponde a una señal paso-banda que, a su vez, es el resultado de la suma de dos portadoras en cuadratura de la misma frecuencia ν_0, moduladas en amplitud por la señales paso-bajo $\gamma_{\mathrm{I}}(t)$ y $\gamma_{\mathrm{Q}}(t)$.

Como se ha visto antes, el pequeño valor de $\varepsilon(t) y\, \emptyset(t)$, permiten aproximar las señales moduladoras por las siguientes expresiones:

$$\gamma_{\mathrm{I}}(t) = 1 + \varepsilon(t)$$

$$\gamma_{\mathrm{Q}}(t) = \emptyset(t)$$

La señal real así obtenida muestra dos términos. El primero de ellos dado por:

$$V_0 \cdot \gamma_{\mathrm{I}}(t) \cdot cos\ 2\pi\nu_0 t = V_0 \cdot \big(1 + \varepsilon(t)\big) \cdot cos\ 2\pi\nu_0 t$$

y corresponde a una portadora modulada en amplitud por $\varepsilon(t)$ cuyo espectro contiene a la propia portadora y las dos bandas laterales correspondientes a la moduladora. El segundo término, viene dado por:

$$V_0 \cdot \gamma_{\mathrm{Q}}(t) \cdot sen\ 2\pi\nu_0 t = V_0 \cdot \emptyset(t) \cdot sen\ 2\pi\nu_0 t$$

que corresponde a una señal en cuadratura con la portadora, modulada por la señal $\emptyset(t)$, en doble banda lateral sin portadora. El resultado espectral es la superposición de los espectros

bilaterales de los dos procesos de ruido $\varepsilon(t) y\ \emptyset(t)$, desplazados a la frecuencia de portadora, modulando a esta en amplitud.

La función de autocorrelación de la envolvente compleja viene dada por:

$$R_{\gamma\gamma}(\tau) = V_0^2\left[1 + R_{\varepsilon\varepsilon}(\tau) + R_{\varphi\varphi}(\tau)\right]$$

siendo $R_{\varepsilon\varepsilon}(\tau)$ y $R_{\varphi\varphi}(\tau)$ las funciones de autocorrelación de los procesos de ruido de amplitud y fase, que se han supuesto de valor medio nulo e incorrelados.

El espectro de la señal compleja $\psi(t)$, como se ha visto, es nulo para frecuencias negativas y se corresponde con el espectro de la señal real, afectado de doble amplitud, para las positivas. Por otra parte, este espectro es el que corresponde a la envolvente compleja desplazado a la frecuencia ν_0 debido al producto por el término $e^{j2\pi\nu_0 t}$ en el dominio del tiempo.

La transformada de Fourier de la función de autocorrelación $R_{\gamma\gamma}(\tau)$, conforme al teorema de Wiener-Khintchine, permite obtener la densidad espectral de potencia que vendrá dada por:

$$S_{\gamma\gamma}^{++}(f) = \frac{V_0^2}{2}\left[\delta(f-\nu_0) + S_{\varepsilon\varepsilon}(f-\nu_0) + S_{\varphi\varphi}(f-\nu_0)\right]$$

Donde $S_{\gamma\gamma}{}^{++}$ representa la densidad espectral de potencia unilateral de la envolvente compleja y $S_{\varepsilon\varepsilon}(f-\nu_0)$ y $S_{\varphi\varphi}(f-\nu_0)$ la densidad espectral de potencia bilateral de los procesos de ruido de amplitud y fase respectivamente.

Como consecuencia de lo expuesto en los párrafos anteriores, el analizador de espectros presentará, para una señal procedente de un oscilador de bajo ruido, la densidad espectral de potencia bilateral correspondiente a los procesos de ruido de amplitud y fase desplazados a la frecuencia ν_0 de la portadora, añadidos a la densidad de potencia de la propia portadora, a la que modulan en amplitud.

Para caracterizar la señal del oscilador en términos de frecuencia (o tiempo), el término de error en amplitud ε(t) pierde relevancia. En un oscilador de bajo ruido, la modulación en amplitud de una portadora pura con una señal de ruido de banda estrecha y un bajo coeficiente de modulación, no tiene efecto significativo en los instantes de cruce por cero

de la señal. Las desviaciones en el tiempo son debidas a los errores de fase. En el caso de demodulación síncrona para osciladores de bajo ruido, se separan las señales de ruido de amplitud y fase, pero es preciso asegurarse de que los equipos utilizados no conviertan la modulación de amplitud en modulación de fase, como sucede cuando la función de transferencia de los filtros no es perfectamente simétrica [44].

4.2.4 Ruido gaussiano

En el mundo de las comunicaciones las modulaciones de ángulo de banda estrecha pierden su interés al no existir diferencias significativas con la modulación de amplitud. Sin embargo, en el análisis de la estabilidad de la señal en osciladores altamente estables, el hecho de que el espectro del ruido de fase sea semejante al que corresponde a una modulación de amplitud, permite utilizar, como ya se ha visto, el analizador de espectros para calcular la potencia contenida en la señal de ruido, pudiéndose evaluar de este modo la estabilidad de la señal.

La multiplicidad de causas que originan el ruido, hacen que su amplitud tenga una distribución gaussiana de probabilidad. Las técnicas de realización de los relojes y el filtrado de las señales para minimizar el ruido, estrechan la banda alrededor de la frecuencia nominal, obteniéndose una señal de salida modulada en ángulo por un ruido gaussiano limitado en banda y valor medio nulo. La existencia de este ruido de fase aleatorio deteriora los instantes significativos de la señal originando jitter.

Si consideramos una portadora de frecuencia ν_0 y una señal de ruido r(t) con valor medio nulo que la modula en frecuencia con banda estrecha, la modulación de fase equivalente también será de banda estrecha y el ruido de fase tendrá valor medio nulo.

En efecto, el ángulo de fase resultante de este proceso vendrá dado por:

$$\varphi(\mathrm{t}) = 2\pi\nu_0 t + \phi_0 + \int_0^{\mathrm{t}} 2\pi r(t)dt$$

Por ser nulo el valor medio de r(t):

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{2\mathrm{t}} \int_{-\mathrm{t}}^{\mathrm{t}} r(t)dt = 0$$

Para una modulación de banda estrecha, la excursión de frecuencia en torno a ν_0 es muy pequeña. Supongámosla limitada por un valor máximo r_M:

$$r(t) < r_M \ll \nu_0$$

En el intervalo de tiempo τ correspondiente a un único ciclo:

$$\tau = \frac{1}{\nu_0}$$

La variación del ángulo de fase estará también limitada a un valor muy pequeño:

$$\Delta\phi(\tau) = 2\pi \cdot \int_0^{\frac{1}{\nu_0}} r(t)dt \leq 2\pi \cdot \frac{|r_M|}{\nu_0} \ll 2\pi$$

lo que significa que la variación de fase en un único ciclo es, también muy pequeña.

El valor medio de la variación de fase:

$$\lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau} \sum_{\tau} \Delta\phi(\tau) = \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau} \sum_{\tau} \int_{\tau} 2\pi r(t)dt = \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} 2\pi r(t)dt = 0$$

Como puede verse, el ruido que modula a la fase queda acotado en valores muy pequeños y su valor medio es nulo. La modulación de fase equivalente, también es de banda estrecha.

4.2.5 Ruido de fase y frecuencia fraccional

En el entorno de las telecomunicaciones, la inestabilidad de fase se contempla a través de su manifestación en el tiempo, midiéndose y acotándose el jitter. Lo mismo sucede en la comunidad de fabricantes de componentes. De este modo UIT-T, ETSI y JEDEC hablan de inestabilidad de fase, pero se centran en el jitter. Tiene sentido que esto sea así, puesto que es el jitter quien degenera el sincronismo en redes y circuitos y este parámetro resulta crítico en los ámbito de actuación de la ingeniería. Sin embargo no sucede así con la comunidad dedicada a la metrología del tiempo y la frecuencia cuyos objetivos son otros, aunque, con frecuencia, converjan y apoyen a otras comunidades. Este grupo pone énfasis en la estabilidad de la frecuencia y no define el jitter. En este estudio se adoptarán las convenciones y

definiciones normalizadas en IEEE Std 1139™-2008 Standard Definitions Fundamental Frequency and Time Metrology) [32]. Tanto IEEE como ITU utilizan densidades espectrales unilaterales.

La inestabilidad de la fase, se relaciona con la fluctuación en el tiempo representada por x(t), donde x(t) se corresponde con el error de tiempo respecto a un reloj de referencia ideal:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi v_0}\Phi(t)$$

y la desviación de frecuencia se representa por y(t), a menudo denominada frecuencia fraccional o estabilidad de frecuencia (más correctamente inestabilidad de frecuencia)

$$y(t) = \frac{v_0 - v}{v_0}$$

La derivada del error en el tiempo x(t) resulta ser la frecuencia fraccional:

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi v_0}\frac{\mathrm{d}\Phi(t)}{dt}$$

En la bibliografía de tiempo y frecuencia es habitual el término fase para denominar indistintamente el ángulo de fase $\Phi(t)$ como al tiempo de fase equivalente $x(t)$, para evitar confusiones con la variable de tiempo "t".

Las discontinuidades aleatorias en el ángulo de la señal, que se observan en ciertos osciladores, conducen, para su caracterización, a estudiarlos en el dominio de la frecuencia haciendo uso de la transformación de Fourier.

4.2.6 Ruido aditivo y multiplicativo. Figura de ruido

La señal procedente del oscilador puede ser tratada por amplificadores y filtros o entregada a un multiplicador para obtener una frecuencia múltiplo del patrón. Todos estos procesos añaden ruido a la señal que llamado ruido aditivo, pero en el caso de la multiplicación de frecuencias la obtención de un múltiplo de orden n supone multiplicar por n el ruido de fase y nos encontramos con un ruido multiplicativo. El ruido multiplicativo habrá multiplicado por n^2 el valor cuadrático medio existente antes de la multiplicación. Puede

darse el caso de que este valor cuadrático resultante sea comparable a la unidad o incluso mayor, y no pueda considerarse la hipótesis de modulación de banda estrecha. En ese caso el espectro de modulación de fase ya no se asemeja al de una modulación de amplitud y el analizador de espectros deja de ser útil. Tampoco es posible extraer, para su análisis, el término de ruido de fase mediante demodulación síncrona por cuanto en la modulación en cuadratura de la portadora las señales moduladoras dejan de asemejarse a las señales separadas de ruido de amplitud y fase.

Si tanto el ruido existente en la señal como el producido al tratarla son muy pequeños, no se perderá la consideración de modulación de banda estrecha y el resultado será aditivo, aún cuando el nuevo ruido de fase introducido sea consecuencia de una multiplicación. En efecto, supónganse valores de ruido de amplitud y fase con valor medio nulo y valor cuadrático medio muy inferior a la unidad. Se indica con el subíndice "i" las señales de ruido iniciales y con el subíndice "n" la nueva modulación de banda estrecha. La envolvente compleja responderá al producto de:

$$\gamma(t) = [1 + \varepsilon_i(t) + j\phi_{\mathrm{i}}(\mathrm{t})] \cdot [1 + \varepsilon_n(t) + j\phi_{\mathrm{n}}(\mathrm{t})] = 1 + \varepsilon_i(t) + \varepsilon_n(t) + j\big(\phi_{\mathrm{i}}(\mathrm{t}) + \phi_{\mathrm{n}}(\mathrm{t})\big)$$

donde se han despreciado los infinitésimos de segundo orden. Las sumas de los ruidos de amplitud mantienen la cuadratura en el plano complejo con la suma de los ruidos de fase. La señal real sigue siendo una modulación en cuadratura donde la modulación de la portadora en fase es la suma de señales de ruido de amplitud y la portadora en cuadratura esta modulada por la suma de señales de ruido de fase.

4.2.7 Ruido térmico

Entre las diferentes fuentes de ruido se encuentra el ruido térmico. Su densidad de potencia es una función lineal de la temperatura. La potencia de ruido se distribuye por igual a lo largo del espectro de frecuencias y, para un ancho de banda dado, puede expresarse así:

$$N_T = K.T.B$$

donde N_T es la potencia de ruido, K la constante de Boltzman, T la temperatura en grados Kelvin y B el ancho de banda. A una temperatura de 290ºK y para un ancho de banda de 1Hz se obtiene una densidad de potencia de ruido dada por -174 dB_m/Hz. Aún en ausencia de otras fuentes de ruido este será el ruido de base de un oscilador. Para radar y comunicaciones la

industria produce osciladores cuyo ruido se encuentra entre, al menos 40 db por debajo de la portadora (-40 dB_c/Hz) hasta -170 dB_c/Hz. Para una portadora de 1mW, este último valor se aproxima mucho al ruido térmico de base.

4.3 Caracterización de la señal

En relojes de alta estabilidad, puede caracterizarse la señal analizando el jitter de fase en el dominio del tiempo haciendo uso de contadores para medir el valor de x(t) en cada ciclo. Esto equivale a observar el ángulo de fase en el dominio del tiempo. Pero la modulación de ángulo en banda estrecha produce espectros semejantes a la modulación de amplitud. Esta circunstancia permite caracterizar las señales observando el espectro de densidad de potencia en el dominio de la frecuencia, mediante el analizador de espectros. Ambos análisis son equivalentes.

4.3.1 Caracterización en el dominio de la frecuencia

Para caracterizar el comportamiento de fuentes de alta estabilidad puede expresarse la frecuencia instantánea como suma de dos términos, uno de ellos correspondiente a su valor medio o valor nominal de la frecuencia de la fuente y otro término que refleja las variaciones de la frecuencia alrededor de su valor nominal:

$$\nu(t) = \bar{\nu} + \Delta\nu(t)$$

Tratándose de fuentes muy estables, se esperan variaciones muy pequeñas de la frecuencia instantánea, es decir:

$$\Delta\nu(t) \ll \bar{\nu}$$

Interesa estudiar este último término $\Delta\nu(t)$, variable en el tiempo y su evolución en el dominio de la frecuencia, haciendo uso de la transformación de Fourier. Siendo reales las magnitudes a considerar, su espectro resulta simétrico en amplitud (antisimétrico en fase) y basta, para caracterizarlas con el estudio del semiplano positivo o el estudio de un solo lóbulo (banda lateral única) en caso de magnitudes con modulación. Asumimos que las excursiones de frecuencia $\Delta\nu(t)$ están distribuidas de forma estacionaria, es decir que su distribución es independiente del tiempo. Sea $R_\nu(\tau)$ la función de autocorrelación definida mediante la siguiente expresión:

$$R_v(\tau) \equiv \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \Delta v(t+\tau) \,.\, \Delta v(t) dt$$

Para $\tau = 0$ se obtiene la varianza de la función $\Delta v(t)$ que también puede interpretarse como la potencia de dicha función o dicho de otro modo, la potencia de las componentes alternas de la función $v(t)$.

$$R_v(\tau = 0) = \sigma_v^2$$

Aplicando el teorema de Wiener-Khintchine, la transformada de Fourier de la función de autocorrelación resulta ser la función de densidad espectral de potencia $S_v(f)$. A esta última función se la denomina densidad de espectro simétrico o de doble cara. La simetría es consecuencia de ser real la función de autocorrelación. Además $R_v(\tau)$ es una función par, $R_v(\tau) = R_v(-\tau)$ y, por tanto $S_v(f)$ es real y no negativa:

$$S_v^{2-caras}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_v(\tau) \,.\, e^{-i\omega\tau} d\tau$$

Dado que la densidad espectral de potencia contiene la misma información tanto en el semiplano de frecuencias positivas como en el de las negativas, es habitual considerar solamente el semiplano positivo definiendo la densidad espectral de potencia de una sola cara:

$$S_v^{1-cara}(f) = 2S_v^{2-caras}(f)$$

Expresión valida únicamente para frecuencias positivas $0<f<\infty$.

Al ser real la densidad espectral de potencia pueden modificarse los límites en el teorema de Wiener-Khintchine obteniéndose:

$$S_v^{1-cara}(f) = 4 \int_{0}^{\infty} R_v(\tau) \,.\, cos\omega\tau \; d\tau$$

$$R_v(\tau) = \int_{0}^{\infty} S_v^{1-cara}(f) \,.\, cos\omega\tau \; df$$

Particularizando esta última expresión para $\tau = 0$, se obtiene la potencia de $\Delta v(t)$ como integral de la densidad espectral de potencia de una sola cara:

$$R_\nu(0) = \int_0^\infty S_\nu^{1-cara}(f)\ df = \int_\infty^\infty S_\nu^{2-caras}(f)\ df$$

Por otra parte, se puede escribir la frecuencia fraccional como:

$$y(t) = \frac{\nu_0 - \nu}{\nu_0} = \frac{\Delta\nu(t)}{\nu_0}$$

donde $\nu_0 \equiv \overline{\nu}$.

Así, la densidad espectral de potencia para la frecuencia fraccional puede escribirse como:

$$S_y(f) = \frac{1}{\nu_0^2} S_\nu(f)$$

y también su relación con la densidad espectral de potencia de la fase, por derivación:

$$S_\nu(f) = f^2 S_\phi(f)$$

De estas dos últimas expresiones se obtiene:

$$S_y(f) = \left(\frac{f}{\nu_0}\right)^2 S_\phi(f)$$

Para la desviación de frecuencia, el valor cuadrático medio se relaciona con la densidad de potencia de su espectro, $S_y(f)$, del siguiente modo:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} y(t)^2 dt \equiv y_{rms}^2 = \int_0^\infty S_y(f) df$$

Aunque históricamente la magnitud utilizada en metrología de frecuencia ha sido el espectro de fase $S_\phi(f)$ [46], en la comunidad de tiempo y frecuencia se ha impuesto el uso de $\mathcal{L}(f)$ (en la literatura anglosajona se lee “script ell of f” que podría traducirse como “ele caligráfica de f”). La primera definición de esta magnitud [47] la identifica como el cociente de dividir la densidad espectral de potencia de la fase por Hercio (de una sola cara para considerar solamente frecuencias positivas y con un ancho de banda de 1 Hz) correspondiente

a una modulación de fase con una señal de ruido, entre la potencia total de la señal (portadora más bandas laterales), es decir:

$$\mathcal{L}(f) = \frac{\text{densidad de potencia, por Hz, en una banda lateral modulada con ruido de fase}}{\text{potencia total de señal}}$$

El resultado de esta definición para $\mathcal{L}$(f) es un valor muy próximo a $S_\phi(f)/2$ siempre y cuando el valor cuadrático medio de la desviación de fase sea muy pequeño (menor que 0,1 radian^2). El valor cuadrático medio puede expresarse:

$$\langle \phi^2(t) \rangle = \int_f^\infty S_\phi(f)\ df$$

Esto solo se cumple para valores de frecuencia muy alejados de la portadora, pero no en las cercanías de esta. Por este motivo se adoptó una nueva definición [48], conforme con el uso ya establecido y medible sin ambigüedad, asimilando $\mathcal{L}$(f) al semiespectro de densidad de potencia de la fase:

$$\mathcal{L}(f) = \frac{S_\phi(f)}{2}$$

Quedando así $\mathcal{L}$(f) como la densidad de potencia por Hz en una banda lateral de una portadora modulada por ruido de fase.

El valor de $\mathcal{L}$(f) suele indicarse en decibelios relativos a la potencia de portadora para un ancho de banda de 1 Hz (dB$_c$/Hz).

En osciladores comerciales suele especificarse la pureza espectral, si bien no parece existir definición en IEEE, ITU ni Jedec para tal término. La pureza espectral hace referencia a la potencia de ruido a ambos lados de la portadora cuando la señal de un oscilador se mide directamente con un analizador de ruido [45]. El espectro de la envolvente compleja, como ya se ha visto viene dado por:

$$S_{\gamma\gamma}^{++}(f) = \frac{V_0^2}{2}\left[\delta(f-\nu_0) + S_{\varepsilon\varepsilon}(f-\nu_0) + S_{\varphi\varphi}(f-\nu_0)\right]$$

Y la señal de banda base normalizada por la potencia de portadora presentará un espectro que puede expresarse por:

$$\frac{S_{\gamma\gamma}^{++}(f+\nu_0)}{\frac{V_0^2}{2}} = \delta(f) + S_{\varepsilon\varepsilon}(f) + S_{\varphi\varphi}(f\nu_0)$$

Si la densidad espectral de la potencia del ruido de amplitud $S_{\varepsilon\varepsilon}(f)$ es despreciable respecto a la de fase $S_{\varphi\varphi}(f)$, se obtiene un resultado equivalente a la definición de $\mathcal{L}(f)$, en todo el espectro de frecuencias excepto en el origen, obviamente. Pero el ruido de amplitud puede no ser despreciable, en particular en generadores de frecuencia sintetizada y en otros dispositivos en que la señal ha pasado por etapas de proceso, con la correspondiente adición de ruido. Por otra parte, los analizadores de espectros no tienen la anchura de banda de resolución de 1Hz, salvo los de muy alto precio, ni tampoco suficiente margen dinámico para obtener la pureza espectral por medida directa en paso-banda. En medidas reales es frecuente indicar $\mathcal{L}(f)$ repartiendo por igual la potencia contenida en el ancho de banda de resolución del analizador como si la densidad de potencia fuese plana en ese intervalo. Esta suposición es menos válida cuanto más nos acercamos a la portadora. Para una medida real, es preciso demodular la señal para obtener el ruido de fase y medir su densidad espectral de potencia mediante el analizador digital de espectros en paso-bajo. Se obtiene así el espectro de fase normalizado por la potencia de portadora $S_{\varphi\varphi}(f)$ y basta dividirlo por dos para obtener $\mathcal{L}(f)$.

La unidad utilizada para $\mathcal{L}(f)$, el dB_c no es una expresión aceptada por el BIPM para su uso con el Sistema Internacional [49]. BIPM y otras organizaciones, caso del NIST [50] tampoco permiten añadir subíndices a los símbolos de las unidades SI. Sin embargo, si consideran la utilización del dB como expresión adimensional no SI, de comparación de magnitudes. Lógicamente las magnitudes a comparar se expresan en las mismas unidades. Se permite el uso del dB conjuntamente con unidades SI, aún sin pertenecer a este y sin ser siquiera unidad, aunque existe controversia a este respecto. Nada se dice de unidades derivadas del dB, que obviamente, tampoco pertenecen al S.I. A pesar de la enorme importancia de la normalización en ingeniería y en ciencia, no siendo unidades S.I. no parece existir dificultad en el uso de subíndices. Al margen de estas consideraciones, es una práctica habitual en ingeniería, caracterizar al decibelio con subíndices que informan acerca de la magnitud que actúa como referencia de comparación, sea esta un valor absoluto, como 1 mW en el caso del dB_m, o una referencia relativa como sucede con el dB_r o el dB_c. Únicamente en el caso de portadora normalizada a 1 mW, coincidirán dB_c y dB_m. De acuerdo con esta práctica IEEE [32] normaliza la expresión de $\mathcal{L}(f)$ en dB_c/Hz. Conforme a la norma IEEE, el

término $\mathcal{L}(f)$ se lee "script ell of f", sin referencia alguna a la pureza del espectro. No obstante, es habitual en las especificaciones de los fabricantes de osciladores el uso de la pureza espectral.

4.3.1.1. Tipos de ruido

De los estudios sobre el espectro de las densidades de potencia de ruido de fase, realizados por diferentes laboratorios sobre diferentes tipos de fuentes de señal, se ha obtenido un modelo que representa adecuadamente las fluctuaciones aleatorias de la señal en fuentes de alta estabilidad. Para este modelo [51], la densidad de potencia espectral unilateral de la frecuencia fraccional viene dado por:

$$S_{yy}^{+}(f) = \sum_{\alpha=-2}^{2} h_{\alpha} f^{\alpha}$$

Este modelo polinómico, identifica cinco tipos de ruido predominantes para cada uno de los valores de α. Puede hacerse una representación gráfica log-log linealizada en cinco tramos como se ve en la Figura 7 [52].

Siguiendo a Rutman [53], se clasifican los tipos de ruido en base al valor de α que los caracteriza y se les denomina del siguiente modo:

α	Tipo de ruido
-2	Modulación en frecuencia por ruido aleatorio
-1	Modulación en frecuencia por centelleo
0	Modulación en frecuencia por ruido blanco
1	Modulación en fase por centelleo
2	Modulación en fase por ruido blanco

Tabla 1. Tipos de ruido en fuentes de alta estabilidad

En general, los procesos de ruido de ley exponencial pura no son estacionarios para valores negativos del exponente dado que no tienen potencia finita.

$$\int_{0}^{\infty} h_{-\alpha} f^{-\alpha}\, df = h_{-\alpha} \int_{0}^{\infty} \frac{1}{f^{\alpha}}\, df = \infty$$

Esto puede considerarse, en palabras de Rutman [53], una patología del modelo. Este es una extrapolación obtenida dentro de unos márgenes del espectro y no tiene en cuenta las restricciones reales tales como que los procesos de ruido correspondientes a osciladores de alta estabilidad se encuentran limitados en banda, de modo que la integral se extenderá solo hasta la frecuencia más alta de su espectro. Un modelo más realista se puede definir mediante:

$$S_{yy}^{+}(f) = \begin{cases} \sum_{\alpha=-2}^{2} h_\alpha f^\alpha & para\ \ 0 \le f \le f_{max} \\ 0 & para \quad f > f_{max} \end{cases}$$

Un caso aparte es el correspondiente al ruido de centelleo con $\alpha = -1$ que seguirá siendo divergente.

Si consideramos el proceso en el tiempo, las fluctuaciones del periodo de la señal x(t) dan lugar a fluctuaciones de la fase cuya relación con la frecuencia fraccional ya se ha visto:

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

El espectro para el proceso de error en el tiempo viene dado por:

$$S_{xx}^{+}(f) = \frac{S_{yy}^{+}(f)}{(2\pi f)^2} = \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{\beta=-4}^{0} h_\alpha f^\beta \quad con\ \beta = \alpha - 2$$

En el análisis del espectro es preferible utilizar Sy(f) debido a que la tipología de procesos de ruido para los cuales y(t) es estacionaria es más amplia que la de aquellos que presentan ruido estacionario de fase.

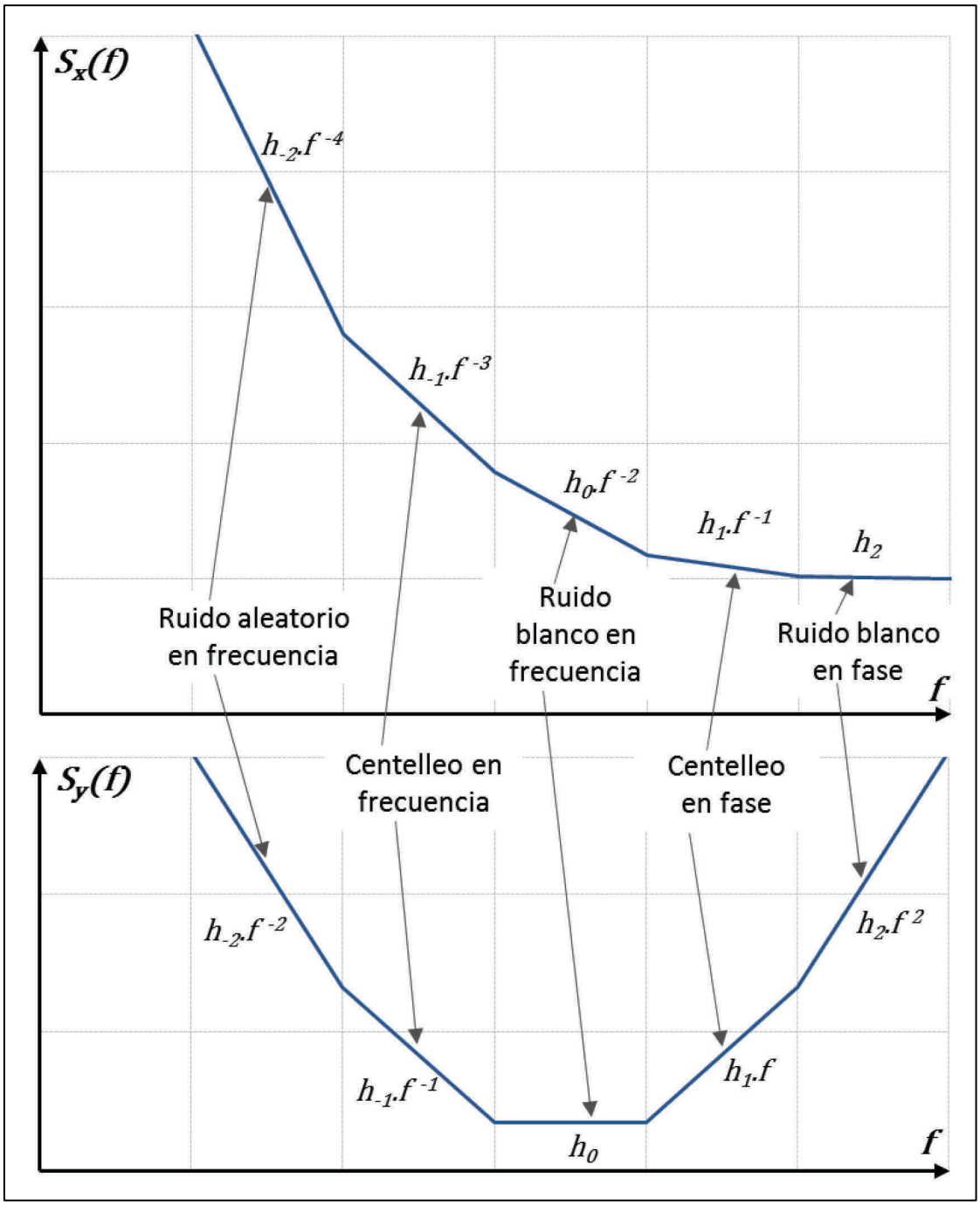


Figura 7. Representación log-log de la densidad de potencia espectral de la frecuencia fraccional y del ruido de fase

4.3.2 Caracterización en el dominio del tiempo

La estabilidad de la frecuencia o frecuencia fraccional y(t) para un patrón ideal debería ser nula. Se ha visto que los patrones de alta estabilidad pueden alcanzar valores de y(t) del orden de 10^{-15}. La frecuencia fraccional presenta variaciones aleatorias en el transcurso del tiempo. Las condiciones de trabajo de estos osciladores, en particular la temperatura, se mantienen estables por lo que la generación de ruido puede considerarse un proceso aleatorio

estacionario. El elevado número de fuentes de ruido da lugar, en virtud del teorema del límite central, a una distribución con densidad de probabilidad gaussiana para y(t). Como no es posible la medida instantánea de la frecuencia (y consecuentemente de su valor fraccional), es preciso efectuar la medición a lo largo de intervalos de observación de duración τ. En cada uno de ellos se pretende obtener el promedio de la frecuencia fraccional y(t) y su dispersión.

Esta medida se repetirá sucesivamente con periodicidad T obteniéndose un histograma con valores promedio de y(t) obtenidos en intervalos de tiempo τ y tiempos muertos de observación T- τ.

Para un intervalo de observación que comienza en el instante t_i, con duración τ, se obtendrá una medida dada por:

$$\overline{y_i} = \frac{1}{\tau}\int_{t_i}^{t_i+\tau} y(t)dt$$

Y recordando que la frecuencia fraccional es la derivada en el tiempo de la fluctuación x(t) del periodo de la señal:

$$\overline{y_i} = \frac{1}{\tau}\int_{t_i}^{t_i+\tau} \frac{dx(t)}{dt}dt = \frac{1}{\tau}\, x(t_i+\tau) - x(t_i)$$

Las desviaciones $x(t_i)$ se obtienen mediante un contador de frecuencias. Esto hace posible la obtención de la varianza a partir de series de valores de la desviación $x(t)$ obtenidos mediante un contador de frecuencias en los instantes significativos t_i de la señal. El contador mide el error de tiempo en los cruces por cero, con referencia a una señal patrón que se supone ideal.

Ahora se estudiará la relación entre la varianza obtenida de esta manera y el espectro de potencia de la frecuencia fraccional.

La convolución de dos funciones y(t) y h(t) se define mediante la siguiente integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} y(\tau).h(t-\tau)d\tau$$

Si adoptamos para h(t) una función rectangular que adopta un valor $\frac{1}{\tau}$ durante un intervalo de duración τ denominada función $\pi\left(\frac{t}{\tau}\right)$ definida del siguiente modo:

$$h(t) = \begin{cases} 0 & para \quad t < -\tau \\ \frac{1}{\tau} & para \quad -\tau \leq t \leq 0 \\ 0 & para \quad t > 0 \end{cases}$$

La integral de convolución de y(t) y h(t) puede escribirse como:

$$\int_{-\infty}^{\infty} y(t).h(t_i - t)dt = \frac{1}{\tau}\int_{t_i}^{t_i+\tau} y(t)\,dt = \overline{y_i}$$

La transformación de Fourier de la integral de convolución obtiene el producto del espectro de y(t) multiplicado por la transformada de h(t), que se denominará H(f). En otras palabras, se ha aplicado a la frecuencia fraccional un filtro cuya función de transferencia es H(f).

Puede obtenerse fácilmente H(f) que resulta ser la función seno cardinal afectada por un fasor como consecuencia de su desplazamiento en el dominio del tiempo:

$$H(f) = \frac{sen\,\pi f\tau}{\pi f\tau} \cdot e^{-j\pi f\tau} = e^{-j\pi f\tau} \cdot sinc\,(f\tau)$$

donde "sinc" es la expresión simbólica del seno cardinal, representada gráficamente en la figura 8.

Para caracterizar la señal en el dominio del tiempo conviene obtener una medida de la dispersión de la frecuencia fraccional. Veamos que sucede cuando tratamos de obtener la varianza de la señal y(t). Esta vendrá dada por el valor cuadrático medio de la señal, que representa la potencia de la señal:

$$\sigma_y^2 = \int_{-\infty}^{\infty} y^2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} S_y(f)df = \int_{0}^{\infty} S_{yy}^{+}(f)df$$

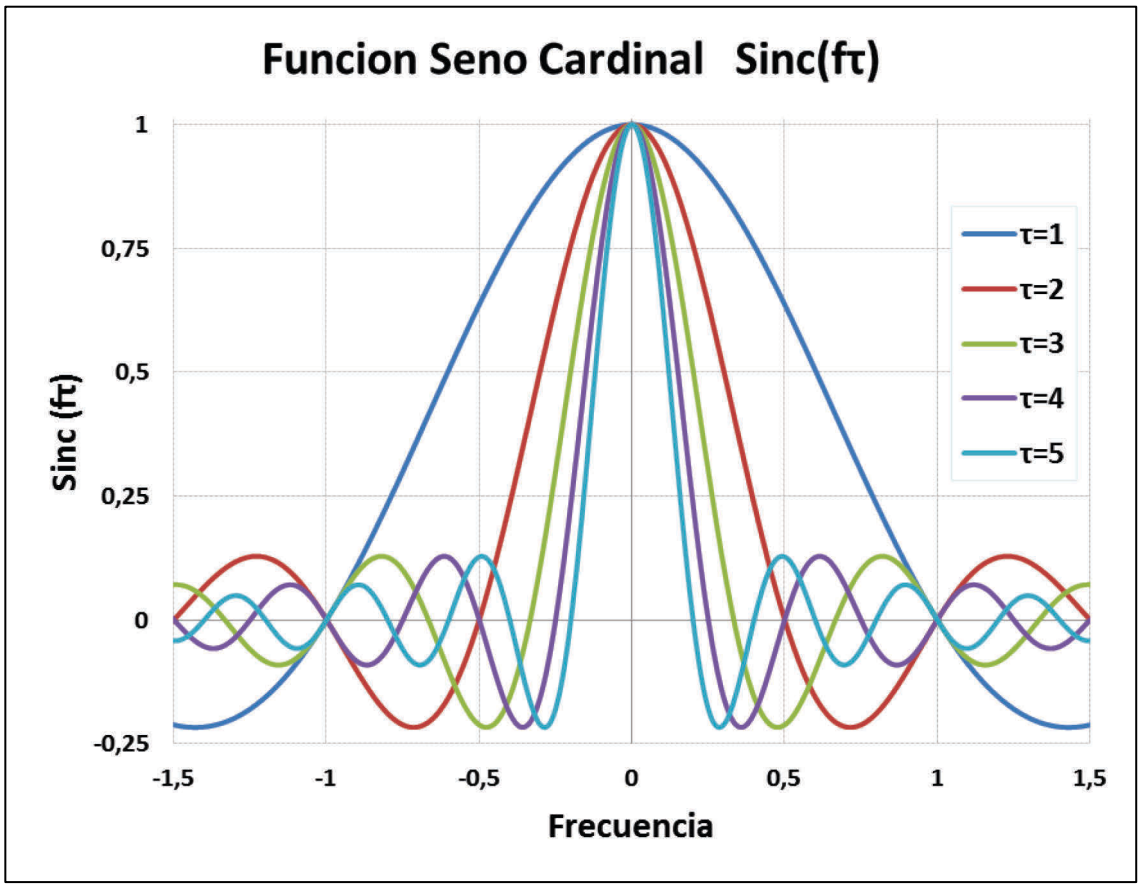


Figura 8. Funciones sinc para diferentes valores de τ

La densidad espectral de potencia $S_y(f)$ de la frecuencia fraccional se corresponde con el cuadrado del módulo del espectro de la señal y(t). El resultado obtenido para un intervalo de observación de la señal de duración τ denominado "varianza verdadera" por algunos autores [53]:

$$I^2(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_y(f) \cdot |H(f)|^2 \, df = \int_{-\infty}^{\infty} S_y(f) \cdot sinc^2(f\tau) \, df = \int_{0}^{\infty} S_{yy}^{+}(f) \cdot sinc^2(f\tau) \, df$$

En la figura 9 se representa el cuadrado del módulo de la función H(f). Si se efectúa, por métodos numéricos, la integración de $|H(f)|^2$ se obtiene un valor de 0,92. Quiere decirse con ello que, para un espectro plano, el 92% de la energía a la salida de este filtro se encuentra en las frecuencias bajo el lóbulo principal.

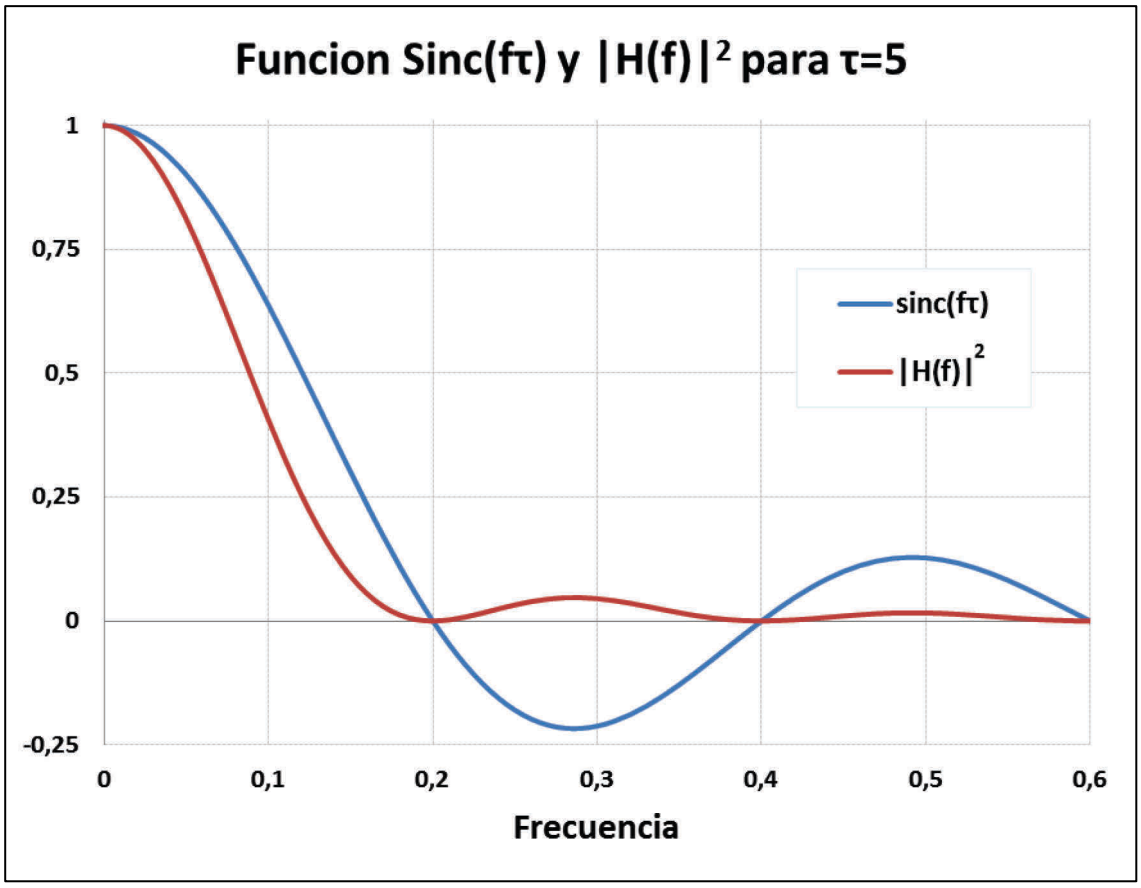


Figura 9. Representación gráfica de las función de filtro $|H(f)|^2$ para τ=5 y su función sinc de origen

Resulta evidente que la función de transferencia H(f) ha sometido al espectro de la señal a un filtrado paso bajo. Como consecuencia, también la densidad espectral de potencia ha sido filtrada por la función $|H(f)|^2$. Esta función adopta valores próximos a la unidad para valores muy pequeños del ángulo $\pi f\tau$, es decir, para f<<1/πτ, para los cuales la densidad espectral no se ve afectada. Recurriendo al modelo de ruido utilizado para fuentes de alta estabilidad se obtiene:

$$I^2(\tau) = \int_0^{\infty} \left(\sum_{\alpha=-2}^{2} h_\alpha f^\alpha \right) \cdot sinc^2(f\tau)\, df = \sum_{\alpha=-2}^{2} \int_0^{\infty} h_\alpha f^\alpha \cdot sinc^2(f\tau)\, df$$

El ruido predominante en las frecuencias más bajas corresponde a valores de α negativos. El ruido de centelleo en frecuencia (flicker frequency noise) predominante a bajas frecuencias y que corresponde a un valor $\alpha = -1$ en el modelo de ruido, integrado en una banda estrecha con una frecuencia máxima f_{max}<<1/πτ, da como resultado:

$$I^2(\tau) = \int_0^{f_{max}} h_{-1} f^{-1} = \infty$$

En otras palabras, el modelo considerado no cumple condiciones de estacionariedad (no tiene un valor finito de potencia) y la varianza obtenida de este modo resulta divergente. No nos sirve para caracterizar la estabilidad de la señal.

4.3.2.1. Varianza de Allan

Se ha planteado la obtención de la varianza clásica mediante la obtención de valores promedio de y(t) en intervalos de tiempo de duración τ repetidos sucesivamente con periodicidad T y tiempos muertos de observación T- τ.

Si se efectúan N observaciones, el valor medio general de los promedios obtenidos se obtendrá de la expresión:

$$\bar{y}(t) = \frac{1}{N}\sum_1^N \bar{y_i}(t)$$

La desviación normal obtenida resultará ser la desviación de y(t) dividida por la raíz de N:

$$S_{\bar{y}} = \frac{S_{\bar{y_i}}}{\sqrt{N}}$$

que, para un valor de N suficientemente grande, converge en media con la desviación típica.

La dispersión muestral de la media se obtiene de:

$$S_y^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^N (\bar{y}_i - \bar{y})^2 = \frac{1}{N-1}\left[\sum_{i=1}^N \bar{y}_i{}^2 - \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \bar{y}_i\right)^2\right]$$

En las expresiones anteriores, los valores y(t) se han promediado en N intervalos de duración τ repetidos con periodicidad T. Si se repite este experimento y se promedian sus resultados, el promedio $\langle \overline{y}(t) \rangle$ resultante tenderá a ser nulo y el promedio de las varianzas convergerá con la varianza general. En 1966 Allan [54] propuso utilizar series de dos

muestras (N=2) con intervalos de observación coincidentes con la periodicidad de la misma (T= τ) sin dejar tiempos muertos. La varianza obtenida de esta manera recibe el nombre de varianza de Allan (AVAR) y su raíz, desviación de Allan (ADEV).

$$AVAR = \sigma_y^2(\tau) = \langle \left[\sum_{i=1}^{2} \bar{y}_i{}^2 - \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{2} \bar{y}_i \right)^2 \right] \rangle = \frac{1}{2} \langle (\bar{y}_2 - \bar{y}_1)^2 \rangle$$

También puede expresarse la varianza de Allan en términos del tiempo de fase x(t):

$$\bar{y}_i = \frac{1}{\tau} \int_{t_i}^{t_{i+1}} y(t)\, dt = \frac{1}{\tau} \int_{t_i}^{t_{i+1}} dx(t) = \frac{1}{\tau} \big(x(t_{i+1}) - x(t_i) \big)$$

$$\bar{y}_i = \frac{1}{\tau} (x_{i+1} - x_i)$$

Consecuentemente:

$$AVAR = \frac{1}{2\tau^2} \langle (x_{i+2} - 2x_{i+1} + x_i)^2 \rangle$$

Conviene ahora estudiar la relación entre la varianza de Allan y la densidad espectral de potencia de la frecuencia fraccional. Para ello considérese el operador incremento $\Delta(\tau)\{\ \}$ definido del siguiente modo:

$$\Delta(\tau)\{x(t)\} = x(t+\tau) - x(t)$$

El resultado de su aplicación recibe el nombre de "primera diferencia". Aplicado una segunda vez permitiría obtener la "segunda diferencia" que puede escribirse:

$$\Delta^{(2)}(\tau)\{x(t)\} = x(t+2\tau) - 2x(t+\tau) + x(t)$$

La transformación de Fourier de $x(t+\tau) - x(t)$ resulta ser $X(f)\big(e^{j2\pi f\tau} - 1\big)$ donde $X(f)$ es el espectro de doble cara de $x(t)$. En otras palabras, el operador incremento $\Delta(\tau)\{\ \}$ efectúa en el dominio del tiempo una convolución de la señal x(t) con la función dada por $\delta(t+\tau) - \delta(t)$ cuya correspondencia en el espectro es la aplicación a $X(f)$ de un filtro. La función de transferencia de este filtro viene dada por:

$$H_\Delta(f) = \left(e^{j2\pi f\tau} - 1\right) = 2je^{j\pi f\tau} sen(\pi f\tau)$$

La aplicación recursiva del operador incremento, para obtener la segunda diferencia, tendrá como consecuencia la aplicación al espectro $x(f)$ de una función de transferencia cuyo módulo es:

$$\left|H_\Delta^2(f)\right| = 4 \cdot sen^2(\pi f\tau)$$

El valor cuadrático medio de un proceso de ruido de ley exponencial como es el caso de x(t), representa la potencia de la señal. Para el caso de la segunda diferencia:

$$\frac{1}{2\tau^2}\langle(x_{i+2} - 2x_{i+1} + x_i)^2\rangle = \frac{1}{2\tau^2} \cdot 2 \cdot \int_0^\infty 4^2 \cdot S_{xx}^+(f) \cdot sen^4(\pi f\tau) df$$

Como se ve, si el procedimiento de toma de datos de $x(t)$ supone un filtro para su espectro de densidad de potencia, idéntica máscara se le estará aplicando al espectro de potencia de la frecuencia fraccional. La varianza de esta última, obtenida mediante promedio en un intervalo τ equivale a un filtro dado por la función $sinc^2(f\tau)$.

Se ha visto, por otra parte, que las densidades espectrales de potencia de la frecuencia fraccional y de la desviación en el tiempo $x(t)$ se relacionan mediante la expresión:

$$S_{xx}^+(f) = \frac{S_{yy}^+(f)}{(2\pi f)^2}$$

La varianza de Allan vendrá ahora expresada por:

$$\sigma_y^2 = 4\int_0^\infty S_{yy}^+(f) \cdot \frac{sen^4(\pi f\tau)}{(\pi f\tau)^2} \cdot sinc^2(f\tau) df$$

Esta integral es finita para todos los tipos de ruido presentes en osciladores de alta estabilidad. La función $sinc^2(f\tau)$, como se ha visto, establece un filtro de paso bajo y tiende a la unidad para frecuencias muy bajas. En todo caso, para procesos de ruido limitados en banda con $f_{max} << 1/\pi\tau$ puede escribirse:

$$\sigma_y^2 = 4 \cdot \int_0^{\infty} \sum_{\alpha=-2}^{2} h_\alpha f^\alpha \cdot \frac{sen^4(\pi f \tau)}{(\pi f \tau)^2}\, df = 4 \cdot \int_0^{f_{max}} \sum_{\alpha=-2}^{2} h_\alpha f^\alpha \cdot (\pi f \tau)^2\, df$$

La consideración de banda limitada permite sortear el caso $\alpha = -2$, evitando la divergencia en frecuencias elevadas.

La varianza de Allan resulta un parámetro muy útil para caracterizar la calidad de las señales procedentes de osciladores muy estables.

5. MATERIAL Y MÉTODOS

5.1 Obtención de la señal

5.1.1 Fuentes de señal

Las señales de los sistemas GNSS presentan algunas limitaciones. En cañones urbanos, interiores o bajo masas forestales las señales recibidas de satélites se atenúan o incluso desaparecen. Como señalan Rabinowitz y Spilker [55], en entornos urbanos las señales de radiodifusión de vídeo digital terrestre (Digital Video Broadcasting Terrestrial o DVB-T) presentan niveles de potencia que pueden superar en más de 40 dB a las señales de GPS. Los problemas derivados del multitrayecto son menores en DVB-T que utiliza anchos de banda que pueden ser de 5, 6 o 7 MHz. y no presentan problemas derivados del efecto Doppler por desplazamiento del transmisor. Los sistemas DVB-T están implantados en las zonas urbanas de Europa, América y Asia, con señales que permiten la extracción de patrones de tiempo. Por otra parte la geometría de la distribución de transmisores de la señal de televisión, puede ser, en general, mucho más favorable que la de los satélites, para la obtención de la posición de un receptor por multilateración. La posición de los transmisores no cambia y pueden obtenerse bajos valores de HDOP. Las señales de televisión digital, tanto en la normativa europea [56] como en la norteamericana [57] y la japonesa, incluyen códigos de sincronismo que pueden utilizarse para el posicionamiento y para la obtención de la señal de tiempo.

5.1.2 La señal DVB-T

Los sistemas de radiodifusión de señales de televisión digital, sea esta terrestre, vía satélite o cable, se definen como el bloque funcional de equipamiento que crea la adaptación de la señal TV banda base procedentes de la salida de un multiplexor de transporte MPEG-2 a las características del medio de radiodifusión. Se considerará el sistema terrestre, conforme a la norma ETSI EN 300 744 [56]. Este sistema se ha desarrollado bajo el principio de acomodar el flujo de transporte MPEG2, de forma transparente entre el emisor y el usuario, ocupando bandas de VHF y UHF que previamente estuvieron asignadas o reservadas para canales de televisión analógica.

El proceso seguido en la transmisión de la señal, consiste en pseudoaleatorizar el flujo de bits de la trama de transporte MPEG2 para dispersar energía (eliminación de componentes continuas) y procesarla mediante códigos de protección de errores (tipo Reed-Salomon) y otras codificaciones y entrelazados. La señal resultante se mapeará modulando portadoras en

QPSK, 16QAM o 64QAM y se crearán símbolos OFDM (Orthogonal Frequency Division Multiplexing). Cada símbolo consiste en un conjunto K de portadoras (K=6817 portadoras en el modo 8K para un canal de 8MHz), que se transmiten durante un intervalo útil T_U (de 896 μs en el modos 8K), dejando tiempos de guarda. Las tramas OFDM consisten en un juego de 68 símbolos OFDM que se transmiten durante T_F segundos, agrupándose cada cuatro tramas en una supertrama. Los valores de todos estos parámetros se han definido para diferentes anchuras normalizadas de canal y dos modos de operación denominados 8K y 2K.

En España, siguiendo la normativa europea, el vídeo, audio y datos transmitidos por la red de televisión digital terrestre TDT se codifica en MPEG2 y el flujo binario resultante se transmite mediante modulación COFDM con portadoras moduladas en 64QAM y el modo de operación 8K, adecuado para territorios extensos donde pueden coexistir diferentes repetidores. Todos ellos transmiten simultáneamente cada símbolo, dejando tiempos de guarda previos al siguiente, que permiten la extinción de ecos.

En este trabajo se van a caracterizar varias señales obtenidas en un receptor comercial DVB-T. Considérese la señal de reloj de pixel obtenida en el enlace TMDS (Transmisión Minimized Differential Signaling), que forma parte de la especificación de conexión tanto de DVI (Digital Video Interface) [58] como de HDMI (High-Definition Multimedia Interface) [59]. Conforme a su especificación de capa eléctrica, el enlace TMDS implementa cuatro canales, uno de ellos de reloj y los tres restantes de datos. Los tres canales de datos transmiten información de color RGB con un código de línea del tipo 8b/10b que codifica ocho bits de datos de vídeo y audio en diez transiciones minimizadas. Se busca minimizar las transiciones para reducir las interferencias electromagnéticas (EMI) permitiendo aumentar la velocidad de transmisión. La señal está balanceada, presentando promedio nulo, es decir ausencia de componente continua. La transmisión se efectúa en modo diferencial para reducir el efecto del ruido, sobre dos hilos balanceados que presentan complementariamente nivel alto y bajo de señal, respecto al blindaje de línea.

El canal de reloj de carácter transporta la referencia de frecuencia correspondiente a la velocidad de carácter a partir de la cual se obtiene, en recepción el reloj de bit para las tramas entrantes. Los canales de datos transportan de manera continua, caracteres compuestos por diez bits. Estos, a su vez, contienen, codificados, ocho bits de datos de pixel, cuando se transmiten datos activos. Durante los periodos de blanqueo (correspondientes a las líneas de retorno de sincronismo, en monitores CRT), se transmiten cuatro caracteres conteniendo otras

informaciones. La velocidad del reloj de pixel viene dada por el producto de la velocidad de refresco de la imagen por el número total de pixels, incluyendo entre estos los necesarios para los tiempos de blanqueo de imagen.

El canal de reloj, como consecuencia de lo expuesto en el párrafo anterior, transporta una señal cuya frecuencia es la décima parte de la que corresponde a la señal de canal. Dependiendo de la calidad de imagen transmitida, se obtendrán diferentes valores para los pixels contenidos en una imagen, variando las velocidades de los relojes de bit y de carácter. El enlace TMDS soporta todas las definiciones de imagen normalizadas, desde los 640 x 480 pixels (VGA) hasta los 2048 X 1536 pixels (QXGA).

Para caracterizar la señal de reloj recibida vamos a hacer uso de la señal del reloj de carácter del enlace TMDS contenido en el interfaz HDMI de un receptor configurado para un formato de imagen 720 X 480 pixels, con velocidad de refresco de imagen de 60Hz. Incluyendo los caracteres no activos, la frecuencia del reloj de carácter tiene un valor nominal de 27,027 MHz.

La segunda señal a caracterizar corresponde al reloj de sincronismo. También este dependerá de la definición de imagen, pero el propio receptor extrae el reloj para incorporarlo a la salida analógica con señal normalizada de 15.625 Hz para sincronismo horizontal.

La tercera señal corresponde al reloj de la señal digital de audio extraído a partir de la trama digital S/PDIF.

La cuarta señal corresponde al reloj de trama MPEG entregado con esta al interfaz PCMCIA pero generado localmente en ausencia de señal.

5.1.3 Sistema de medida y obtención de datos

Para analizar la señal obtenida, se realiza la comparación con una señal patrón de alta estabilidad que genera los instantes significativos, con referencia a los cuales se mide el tiempo de fase de la señal bajo estudio.

La señal patrón procede de un oscilador de rubidio disciplinado a GPS (GPSDO) (SRO-100 de SpectraTime) con una estabilidad en el corto plazo dada por 3.10^{-11} para un tiempo de 1s, que decrece a 10^{-11} para un tiempo de 10s y 3.10^{-12} para un tiempo de 100s, con

una deriva por envejecimiento menor que 5.10^{-11}/mes obtenida tras tres meses de operación ininterrumpida. No obstante, las derivas por envejecimiento y cualquier otra en el largo plazo desaparecen con el enganche en fase al GPS, predominando la estabilidad en el medio plazo del rubidio. En tanto se mantenga el sincronismo GPS el valor para la estabilidad de este patrón será de 3.10^{-12}.

El SR-100 utilizado es un resonador de microondas de cavidad cilíndrica tipo magnetrón. La resonancia de la celda de rubidio se produce a una frecuencia de 6.834,684 MHz. La excitación se genera a partir de un oscilador de cuarzo controlado en tensión (VCXO) trabajando a la frecuencia nominal de 60MHz. Esta frecuencia se divide y procesa para obtener las señales patrón normalizadas de 10 MHz y de 1pps (un pulso por segundo). La comparación de las señales intermedias del proceso con la señal obtenida del reloj GPS permite sincronizar la frecuencia del receptor (trabajo en Tracking) y, opcionalmente, desplazar la fase (trabajo en modo Sync).

La comparación de la señal que se va a analizar con la señal procedente del patrón puede realizarse de varias maneras. Puede efectuarse en un comparador de fase de alta exactitud capaz de determinar unos pocos picosegundos que se encuentra asociado al reloj (Pico-Time de SpectraTime). Todo el conjunto de receptor GPS reloj de rubidio y comparador está contenido en un módulo de laboratorio (Picoreference de SpectraTime). El comparador de fase recibe la señal de referencia de 10 MHz procedente del patrón y la de 27,027 MHz procedente del enlace TMDS. A partir de la referencia de 10 MHz obtiene, por división, una señal de referencia de 1pps, accesible en un conector externo.

La señal de 27,027 MHz es analizada para estimar su frecuencia. A continuación se multiplica en un mezclador con una señal local obtenida a partir de la señal de 10 MHz. De este proceso de heterodinaje se obtiene la primera frecuencia intermedia que es sometida a un filtrado paso-banda y entregada a un segundo mezclador con una nueva frecuencia local, obteniéndose la segunda frecuencia intermedia con un valor nominal de 1KHz. La señal resultante es nuevamente analizada midiendo varios intervalos de fase reprogramándose los osciladores locales para que la señal final de batido sea los más próxima posible a 1KHz. La señal sin filtrar obtenida de este modo presenta un ancho de banda de 100Hz, accesible externamente, que es suficiente para nuestro propósito. No obstante, el instrumento dispone de un filtro de cuarzo sintonizado a 1Kz con un ancho de banda de 1Hz, que supone una mejora muy importante, siendo, también, accesible externamente la señal filtrada.

Los instantes significativos de la señal de 1Hz, pueden ahora compararse con los de la señal de 1pps para obtener la deriva de fase. Esta comparación puede efectuarse externamente, o bien, en el propio instrumento utilizado. Este presenta una resolución en tiempo de fase y ruido que puede ser inferior a 2ps rms. Las señales bajo prueba que es capaz de procesar este instrumento deben estar comprendidas en un margen entre 1 y 30 MHz incrementándose con la frecuencia la resolución del sistema. Para señales bajo prueba en el orden de los 27MHz, como es el caso, y utilizando la señal procesada con el filtro de cuarzo la resolución es inferior a $2e^{-12}$. Naturalmente, este resultado es correcto siempre que la señal de referencia tenga mejores características en el rango en el que se efectúa la medida.

Los resultados en el análisis de señales de alta estabilidad siempre son delicados y en los obtenidos mediante este procedimiento no se han conseguido los resultados buscados. En consecuencia se ha utilizado un mezclador externo para efectuar un heterodinaje de la señal, reduciendo su frecuencia y un contador de precisión, aunque este método sea mucho más lento.

Para ello, señal bajo análisis se multiplica en un mezclador de radiofrecuencia (Mini-Circuits modelo ZAD-3BR) con una señal patrón procedente del oscilador de rubidio SR-100 disciplinado al satélite (GPDSO Spectratime mod.Picoreference). Este instrumento dispone de un sintetizador digital con referencia al patrón de rubidio, pero solamente sintetiza señales hasta una frecuencia de 20 MHz. Puesto que se necesita una referencia de comparación de 27MHz es preciso recurrir a armónicos del patrón. La señal de salida del sintetizador es cuadrada lo que obliga a desechar el segundo armónico de 13,5 MHz, debido a que las señales cuadradas solamente presentan armónicos impares. En consecuencia se sintetiza una señal cuadrada de referencia de 9MHz, que se entrega a un filtro paso-banda pasivo sintonizado en una frecuencia próxima al tercer armónico (Mini-circuits modelo BBP-30) para obtener este, de frecuencia 27MHz.

A la salida del mezclador se obtienen las frecuencias suma y diferencia de la señal bajo análisis con la señal de referencia, así como los productos cruzados de intermodulación derivados de las no linealidades del mezclador. Se selecciona la señal diferencia mediante un filtro pasivo paso-bajo (Mini-Circuits modelo BLP-1.9) obteniéndose una señal por debajo de los 100Hz. Esta señal se amplifica y se visualiza en el osciloscopio, presentando un aspecto cuasi-sinusoidal tendente a triangular, con crestas aplastadas.

El batido de baja frecuencia obtenido, conserva las características de fase angular originales de la señal de alta frecuencia bajo prueba. Su análisis temporal nos permitirá caracterizar los tiempos de fase en baja frecuencia que se traducirán en un análisis equivalente de la señal original, una vez que se le aplique el coeficiente de corrección dado por el cociente entre el valor nominal de la salida de baja frecuencia y el valor nominal de la señal original.

En efecto, la frecuencia angular de batido ω_b es la diferencia entre la frecuencia de la señal bajo análisis ω_o y la de referencia ω_r, seleccionándose a la salida del mezclador el resultado:

$$Señal\ de\ batido = V_b \cdot sen[(\omega_o - \omega_r)t + \Phi_o] = V_b \cdot sen[(2\pi f_b t) + \Phi_o]$$

Los desplazamientos del tiempo de fase en baja y alta frecuencia se relacionan mediante la igualdad de sus fases:

$$\Phi_o = 2\pi \cdot f_o \cdot x_o(t) = 2\pi \cdot f_b \cdot x_b(t)$$

Y en consecuencia:

$$x_o(t) = \frac{f_b}{f_o} \cdot x_b(t)$$

El análisis de la señal de batido, puede hacerse tanto en tiempo como en frecuencia. Si se selecciona una frecuencia para la señal de referencia, coincidente con el valor nominal de la señal bajo análisis, la salida del mezclador entregará las variaciones instantáneas de la señal bajo análisis. El cociente entre esta frecuencia y la de referencia es, directamente, la frecuencia fraccional. Pero el mezclador entrega señales de frecuencia de batido en valor absoluto, sin precisar cuando la diferencia entre las señales de alta frecuencia es positiva o negativa. Los cambios de signo de tal diferencia se corresponden con saltos de fase de la señal de batido y no indican cuando la diferencia es positiva o negativa. El valor de la frecuencia de batido puede obtenerse fácilmente en un contador, pero no se obtiene indicación de los cambios de fase.

La mayor parte de los contadores de frecuencias permiten la obtención directa del cociente entre dos señales. Para ello habilitan la ventana de conteo durante un tiempo igual al periodo de la señal de frecuencia más baja y, durante ese intervalo, efectúan la cuenta de los

ciclos de la de frecuencia más alta. El resultado es, directamente, el cociente entre la frecuencia más alta y la más baja.

Existen dos inconvenientes para obtener la frecuencia fraccional por este procedimiento. El primero de ellos, radica, como se ha visto, en la imposibilidad de obtener el signo de la frecuencia fraccional a partir del cambio de fase de la señal de batido, en un contador convencional. Esta dificultad puede soslayarse, permitiendo un desplazamiento (offset) de la frecuencia de referencia, de manera que la señal de batido corresponda siempre a diferencias positivas y efectuar la corrección oportuna sobre el resultado obtenido.

El segundo inconveniente deriva de los tiempos muertos de lectura en los contadores de frecuencias. La ventana de conteo se habilita durante un intervalo que depende de la escala seleccionada en el contador. La escala seleccionada incide directamente en la resolución del instrumento. Finalizada la ventana de conteo, tiene lugar el tiempo muerto correspondiente al rearme del instrumento. Como consecuencia, las medidas se realizan durante intervalos cuya duración τ es posible seleccionar, pero discontinuos. La varianza de Allan se calcula en base a medidas efectuadas durante intervalos de duración fijada, que se repiten con continuidad. En caso de existir discontinuidades significativas el resultado difiere de la varianza de Allan y es preciso efectuar correcciones [60].

Una solución a esta dificultad consiste en utilizar dos contadores en medidas alternadas para evitar tiempos muertos [61] o bien, la utilización de contadores con características no convencionales [62].

La solución adoptada para nuestro análisis utiliza un único contador de frecuencias, (HP 53132A) y un sintetizador de frecuencias, ambos sincronizados con señal de referencia externa de 10 MHz, procedente del reloj patrón de rubidio GPDSO, para garantizar su exactitud y estabilidad. Las medidas se efectúan a intervalos τ fijos, sin tiempos muertos. La adquisición de datos se efectúa a través del bus GPIB del frecuencímetro y un convertidor GPIB-USB (HP53137). Las pruebas realizadas permiten transferir una lectura cada 0,5 segundos. Durante el intervalo de lectura el contador no trabaja, pero permite su rearme. Para soslayar esta dificultad, se medirán las variaciones del tiempo de fase a partir de la medida del intervalo de tiempo del canal 1 (señal de batido) al canal 2 (referencia del sintetizador a 2 Hz.) del instrumento. El disparo se genera al paso por cero en el flanco positivo de la señal de batido y finaliza al paso por cero en el flanco positivo de la señal de muestreo de duración τ

segundos. Se rearma nuevamente el contador cada τ segundos. Como ejemplo, para un intervalo τ de un segundo puede seleccionarse en el sintetizador una señal cuadrada de dos Hz, que se aplica al canal 2 y a la entrada de rearme externo del frecuencímetro. El flanco positivo de esta señal rearma el instrumento en el instante inicial. El disparo de la ventana de conteo se inicia al primer cruce por cero positivo de la señal de batido. La finalización del intervalo de conteo tiene lugar al segundo flanco positivo de la señal del sintetizador, que tiene lugar al cabo de 0,5 segundos. Esta señal es, también, aplicada a la entrada de rearme externo, pero este no se produce al no haber finalizado la medida. El flanco siguiente de esta señal produce el rearme del instrumento, al cabo de un segundo desde el primer rearme.

Mediante este procedimiento se obtienen intervalos de tiempo entre el cruce por cero del primer flanco positivo de la señal de batido después del rearme y la señal de finalización de conteo a 0,5 segundos después del rearme. Transcurridos otros 0,5 segundos se efectúa un nuevo rearme. Al intervalo de tiempo medido, es preciso sumarle un offset de 0,5 segundos. De este modo la medida se efectúa cada segundo sin tiempos muertos.

También es posible utilizar una frecuencia de 1Hz y efectuar el rearme en el flanco descendente. Aunque el instrumento rearma, puede ser conveniente añadir un retardo al rearme para asegurar que ha concluido la transferencia del dato correspondiente a la lectura anterior. La transferencia de los datos a través del bus GPIB tiene lugar en el intervalo entre la finalización de la medida (señal de canal 2) y el rearme. Dado que este intervalo puede ser insuficiente para transferir el dato y, con el fin de garantizar que no se impida el disparo correspondiente a la siguiente medida, se introduce en el instrumento un tiempo de retardo de 300 milisegundos entre la señal de rearme y el inicio de las medidas. Esto reduce el intervalo de conteo a 200 milisegundos y deja 800 milisegundos para la transferencia del dato. Ahora el offset que es necesario sumar al intervalo de tiempo medido entre canal 1 y canal 2, se eleva a 800 milisegundos.

Este procedimiento es equivalente a utilizar una señal rectangular de un 200 milisegundos de anchura de pulso repetida cada segundo. El flanco positivo rearma el instrumento y el flanco negativo finaliza el conteo. El intervalo de 800 milisegundos de nivel bajo se reserva para la transferencia de datos.

En cualquier caso, no es preciso efectuar la suma de offsets al resultado, porque el posterior proceso de las medidas se realiza mediante diferencias de datos sucesivos que anulan estas constantes añadidas.

El fundamento de la medida es el siguiente. Se aplica un tiempo de observación τ de un segundo, a una señal de batido cuyo periodo es muy inferior. Si el tiempo de observación se iniciase con el flanco de subida de la señal de batido, transcurrirá un tiempo h(t), entre la finalización del intervalo de observación y la del ciclo de la señal de batido (salvo que sea múltiplo exacto del periodo de esta). Al finalizar el segundo intervalo de observación la distancia entre finalizaciones se habrá incrementado a dos veces h(t) y así sucesivamente. La diferencia entre muestras sucesivas es h(t), aunque se desplace la ventana de muestreo y no coincida su inicio en ningún caso con el paso por cero positivo de la señal de batido. En ventanas sucesivas de duración τ, la medida entre el arranque del primer ciclo de la señal de batido y la finalización de la ventana, es el complemento a τ del tiempo transcurrido entre el comienzo de la ventana y el arranque de la señal, o, en otras palabras el retardo respecto a la finalización de la ventana anterior. La diferencia entre medidas sucesivas permitirá obtener los valores h(t) en cada intervalo de duración τ.

Los valores h(t) obtenidos tienen añadido el ruido de fase x(t) de la señal de batido, promediado a intervalos τ, que permitirá caracterizar la señal original de alta frecuencia. La diferencia entre finalizaciones de intervalos se incrementa en un valor h(t) en cada ciclo. Cada cierto número de ciclos el valor del retardo supera al de un periodo de la señal de batido y se produce un salto en la secuencia de medidas que obliga a ser muy cuidadosos con el tratamiento de los datos obtenidos. Las secuencias obtenidas, una vez corregidas, se someten al proceso que permite caracterizar la estabilidad de la señal.

6. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

6.1 Obtención de resultados

Las señal patrón del reloj de rubidio, como ya se ha dicho, tiene una estabilidad en el corto plazo dada por 3.10^{-11} para un tiempo de 1s, que decrece a 10^{-11} para un tiempo de 10s. No obstante, se mantiene disciplinada al satélite, garantizando su estabilidad en 3.10^{-12}. Todo resultado de estabilidad obtenido en este trabajo, queda referido a la estabilidad del patrón sin poder superarla. Es práctica habitual en metrología mantener el valor del TUR (Test Uncertainty Ratio) por encima de cuatro unidades, que puede traducirse en la necesidad de utilizar patrones con incertidumbres cuatro veces inferiores a la del instrumento a caracterizar. Muchos metrólogos son más estrictos y exigen, al menos, un orden de magnitud. Quiere decirse entonces, que todo dato de estabilidad obtenido en la señal a caracterizar, que sea inferior a 3.10^{-11}, supera los alcances establecidos de nuestro sistema de medida.

Dado que las medidas efectuadas son las propias de tiempo y frecuencia, aparentemente no debieran influir en el proceso los parámetros ambientales del laboratorio. Este se encuentra en un local interior bastante estable en humedad y temperatura. Los equipos han permanecido encendidos previamente a las medidas, durante horas para alcanzar las temperaturas de trabajo que permiten asegurar sus especificaciones. Las variaciones en la tensión de red que alimenta a los equipos se encuentra dentro de márgenes legales de suministro, si bien la forma de onda de la tensión, en señal monofásica dista de ser sinusoidal, presentando la distorsión propia de edificios con alta carga de equipos electrónicos. Se han minimizado los ruidos inducidos de red y sus armónicos mediante el blindaje de hilos y un tratamiento cuidadoso de las conexiones de masa.

6.1.1 Señal de reloj TMDS

La primera señal analizada es una fuente de reloj TMDS obtenida como señal diferencial del interfaz HDMI con carga, dado que la salida es un generador de corriente. El interfaz se ha configurado para una frecuencia nominal de 27 MHz. La frecuencia de batido se obtiene por mezcla con el tercer armónico de una señal patrón de 9 MHz filtrada en paso bajo, resultando una frecuencia nominal de batido de 50 Hz.

Los datos sin procesar obtenidos directamente del frecuencímetro ya aportan información significativa. Se mide el intervalo de tiempo transcurrido entre el primer paso por cero de la señal de baja frecuencia obtenida a la salida del mezclador (filtrada en paso-bajo) y

el tiempo de parada establecido, que corresponde a un valor de τ fijado en 1 segundo. Se repite la medida con periodicidad de un segundo, sin tiempos muertos. El resultado es un conjunto de datos de fase como los representados en la Figura 10 para un periodo de observación cercano a los 14 minutos.

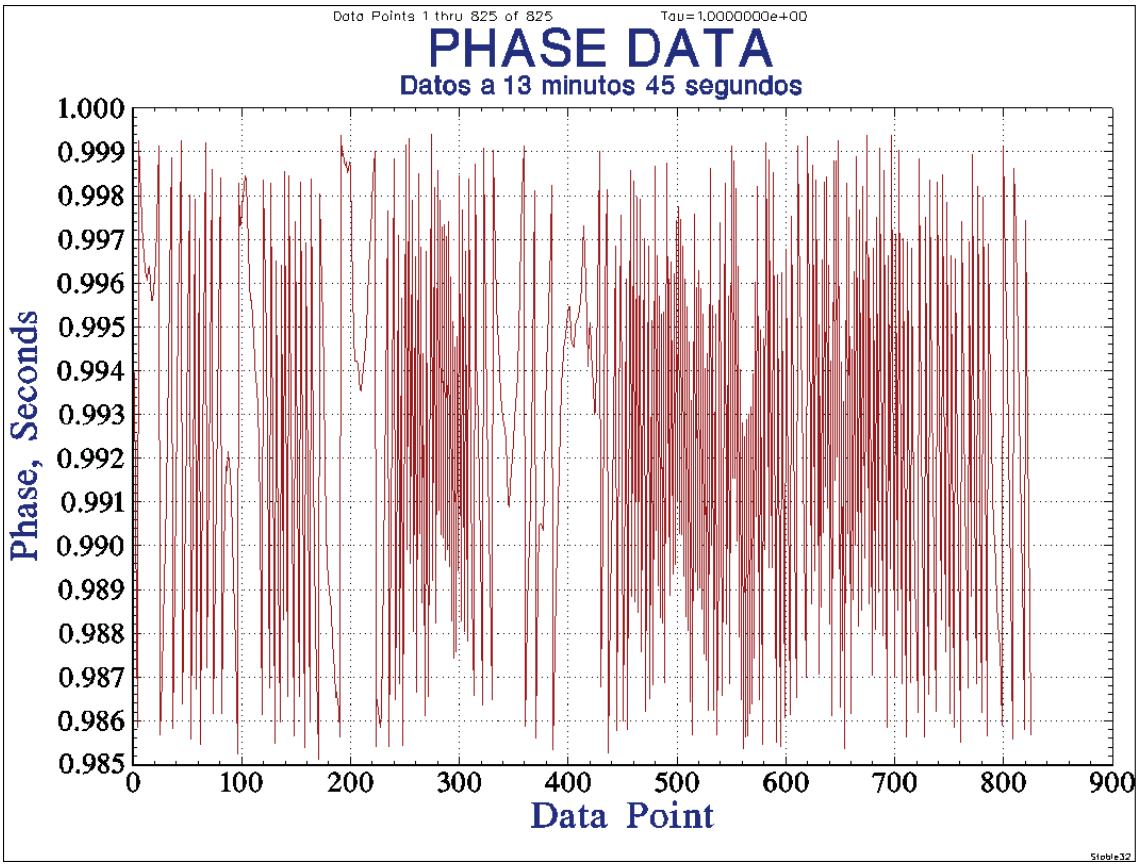
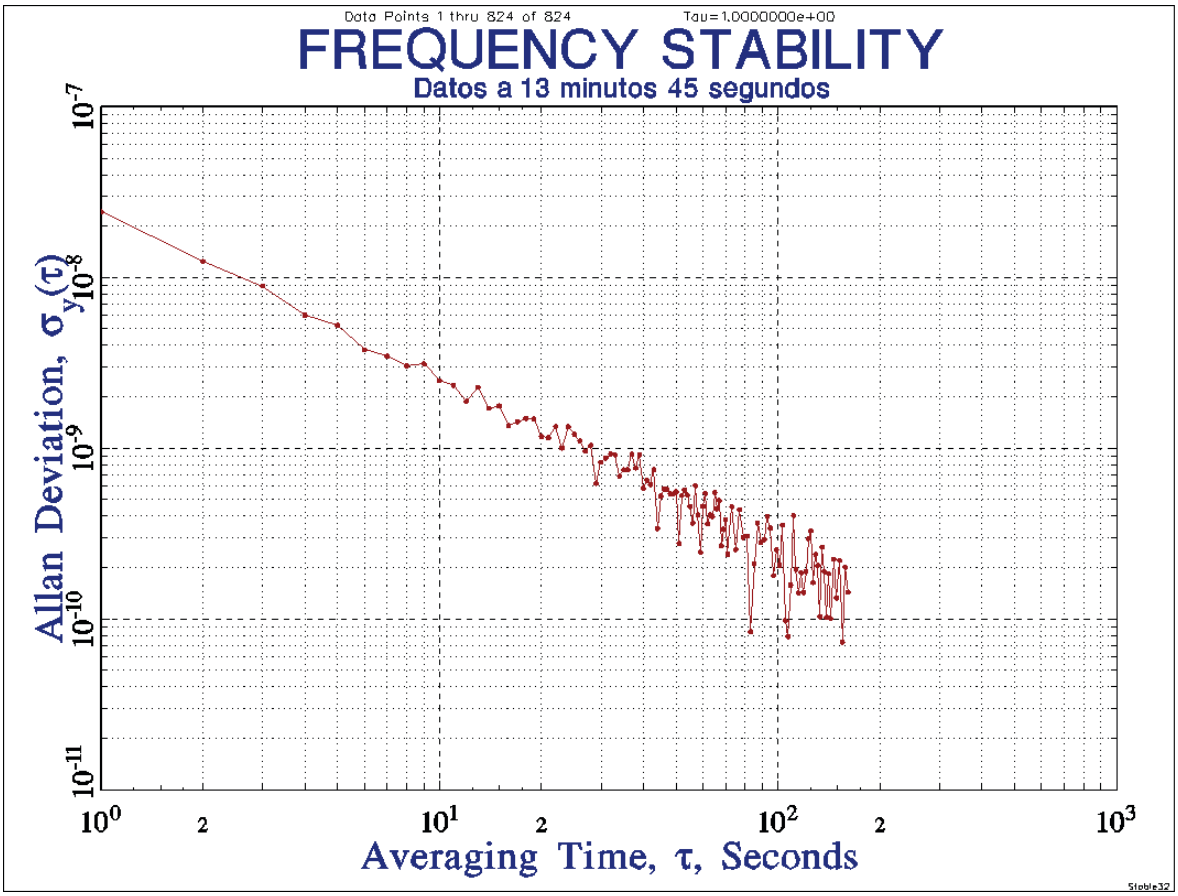


Figura 10. Reloj TMDS. Incrementos de fase durante un periodo de observación de 14 minutos para τ=1

El periodo de observación resulta suficiente para obtener la varianza de Allan con intervalos τ=1 segundo, que puede verse en la Figura 11. La varianza de Allan, con la muestra obtenida puede dibujarse en función de los tiempos de observación, hasta valores en el orden de magnitud de los 100 segundos

No obstante en la repetición de series de observaciones en horas y días diferentes, se observa en el frecuencímetro y en el analizador de señal, variaciones significativas de la frecuencia de batido, que no tienen reflejo en esta figura. Puesto que las diferencias se observan en tiempos muy distantes, resulta necesario efectuar series muy dilatadas que permitan visualizar la deriva.



AF	Tau	#	Alpha	Min Sigma	Sigma	Max Sigma
1	1.0000e+00	823	2	2.3418e-08	2.4204e-08	2.5076e-08
2	2.0000e+00	411	2	1.1881e-08	1.2441e-08	1.3089e-08
4	4.0000e+00	205	2	5.6471e-09	6.0195e-09	6.4773e-09
10	1.0000e+01	81	1	2.2607e-09	2.4870e-09	2.7986e-09
20	2.0000e+01	40	1	1.0286e-09	1.1716e-09	1.3978e-09
40	4.0000e+01	19	1	4.8873e-10	5.8304e-10	7.6728e-10
100	1.0000e+02	7	1	1.0344e-10	1.3281e-10	2.2279e-10

Figura 11. Varianza de Allan para señal de reloj TMDS de 27 MHz para un periodo de observación cercano a 14 minutos

Efectuando series de toma de datos a 24 horas pueden obtenerse los resultados representados en la gráfica de la Figura 12 donde ya se observa una deriva relativamente lenta, que no es corregida por el receptor. La varianza de Allan para esta serie puede verse en la Figura 13, y su espectro de densidad de potencia a 1Hz calculado para un filtro de Hamming se representa en la Figura 14 para $S_x(f)$ y $S_y(f)$.

La deriva observada directamente en el frecuencímetro alcanza excursiones de 25 Hz alrededor de la frecuencia nominal, tanto en la de batido, como en la del reloj TMDS.

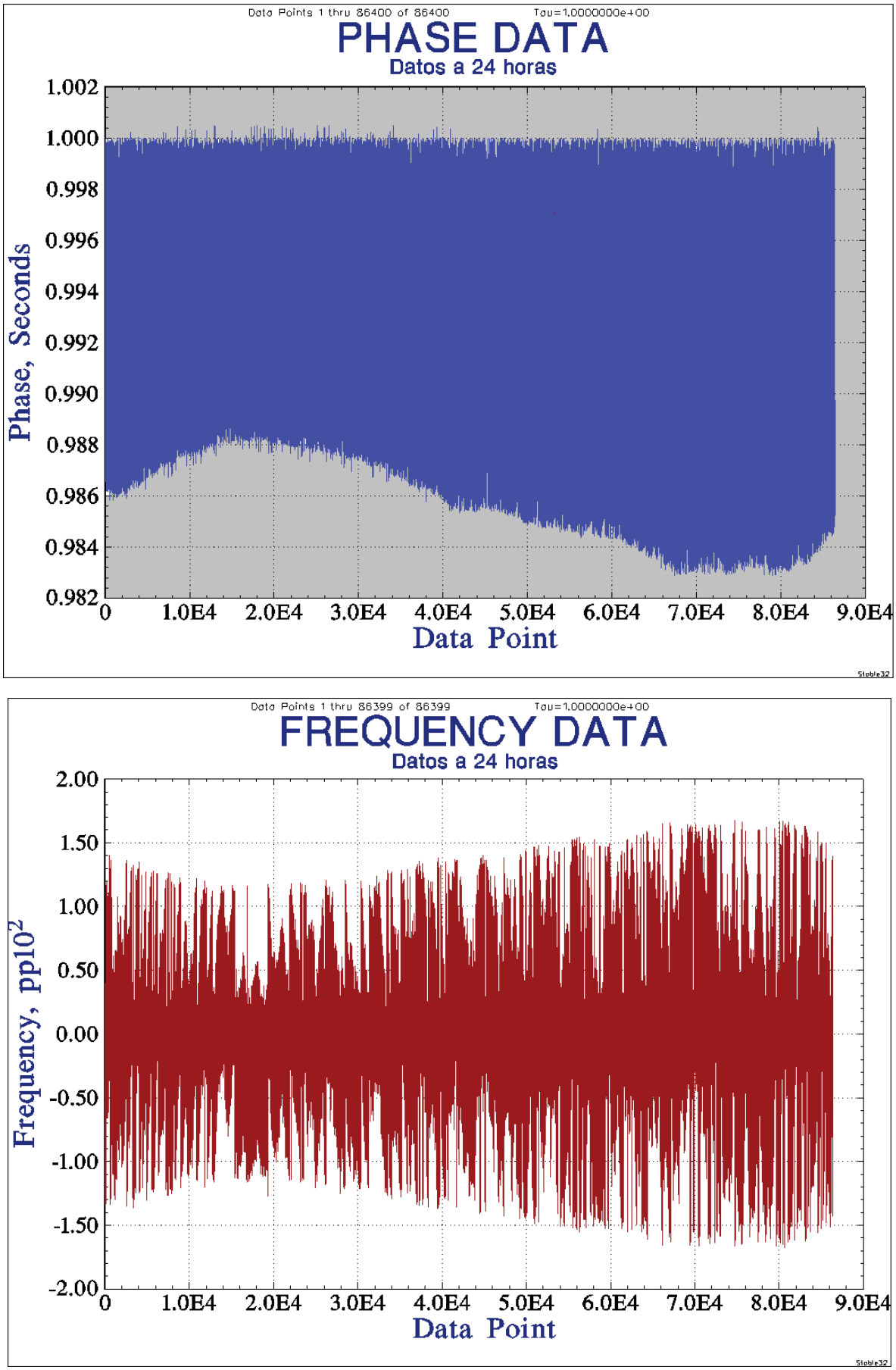
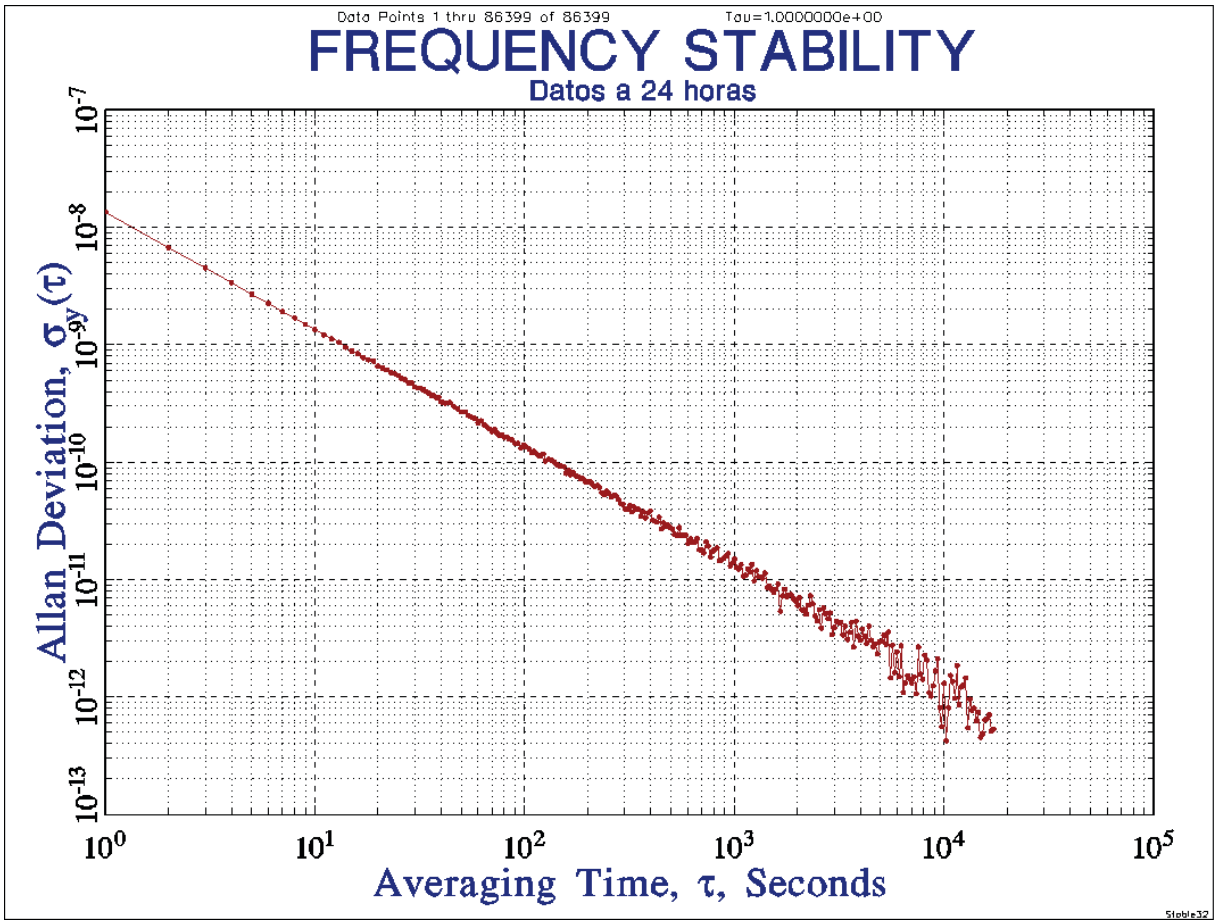


Figura 12. Fase incremental y frecuencia fraccional del reloj TMDS para un periodo de observación de 24 horas



AF	Tau	#	Alpha	Min Sigma	Sigma	Max Sigma
1	1.0000e+00	86398	2	1.3534e-08	1.3579e-08	1.3624e-08
2	2.0000e+00	43198	2	6.6898e-09	6.7213e-09	6.7532e-09
4	4.0000e+00	21598	2	3.3717e-09	3.3941e-09	3.4169e-09
10	1.0000e+01	8638	2	1.3391e-09	1.3531e-09	1.3676e-09
20	2.0000e+01	4318	2	6.4966e-10	6.5928e-10	6.6934e-10
40	4.0000e+01	2158	2	3.1981e-10	3.2649e-10	3.3360e-10
100	1.0000e+02	862	2	1.3031e-10	1.3459e-10	1.3932e-10
200	2.0000e+02	430	2	6.5213e-11	6.8219e-11	7.1685e-11
400	4.0000e+02	214	2	2.9461e-11	3.1364e-11	3.3694e-11
1000	1.0000e+03	85	2	1.0842e-11	1.1934e-11	1.3441e-11
2000	2.0000e+03	42	1	5.5392e-12	6.3018e-12	7.5015e-12
4000	4.0000e+03	20	1	2.7227e-12	3.2415e-12	4.2445e-12
10000	1.0000e+04	7	1	8.1463e-13	1.0472e-12	1.7662e-12

Figura 13. Varianza de Allan para serie a 24 de reloj TMDS de 27 MHz sin filtrar

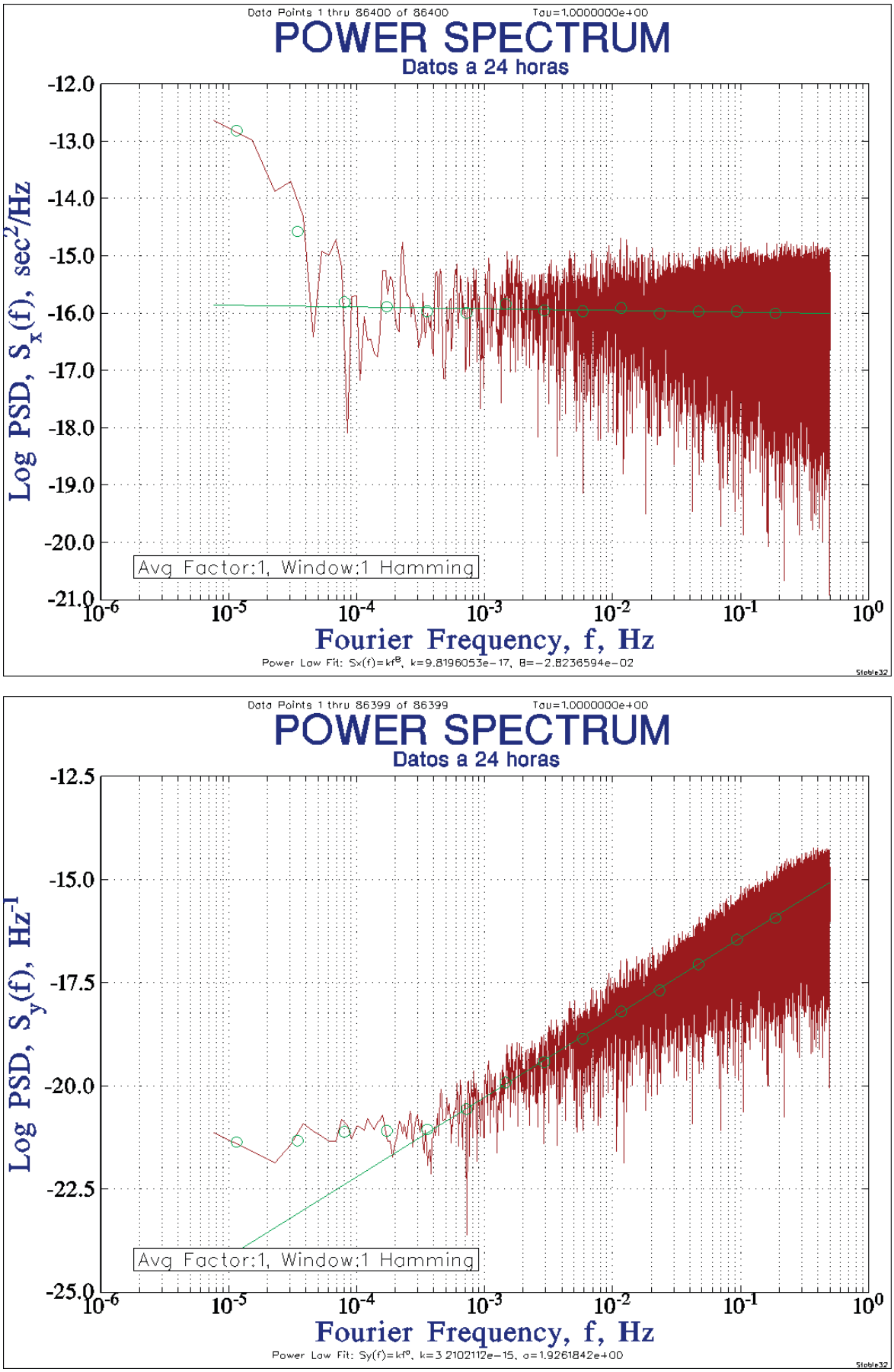


Figura 14. Densidad espectral de fase Sx(f) y frecuencia fraccional Sy(f) para serie a 24 horas de reloj TMDS

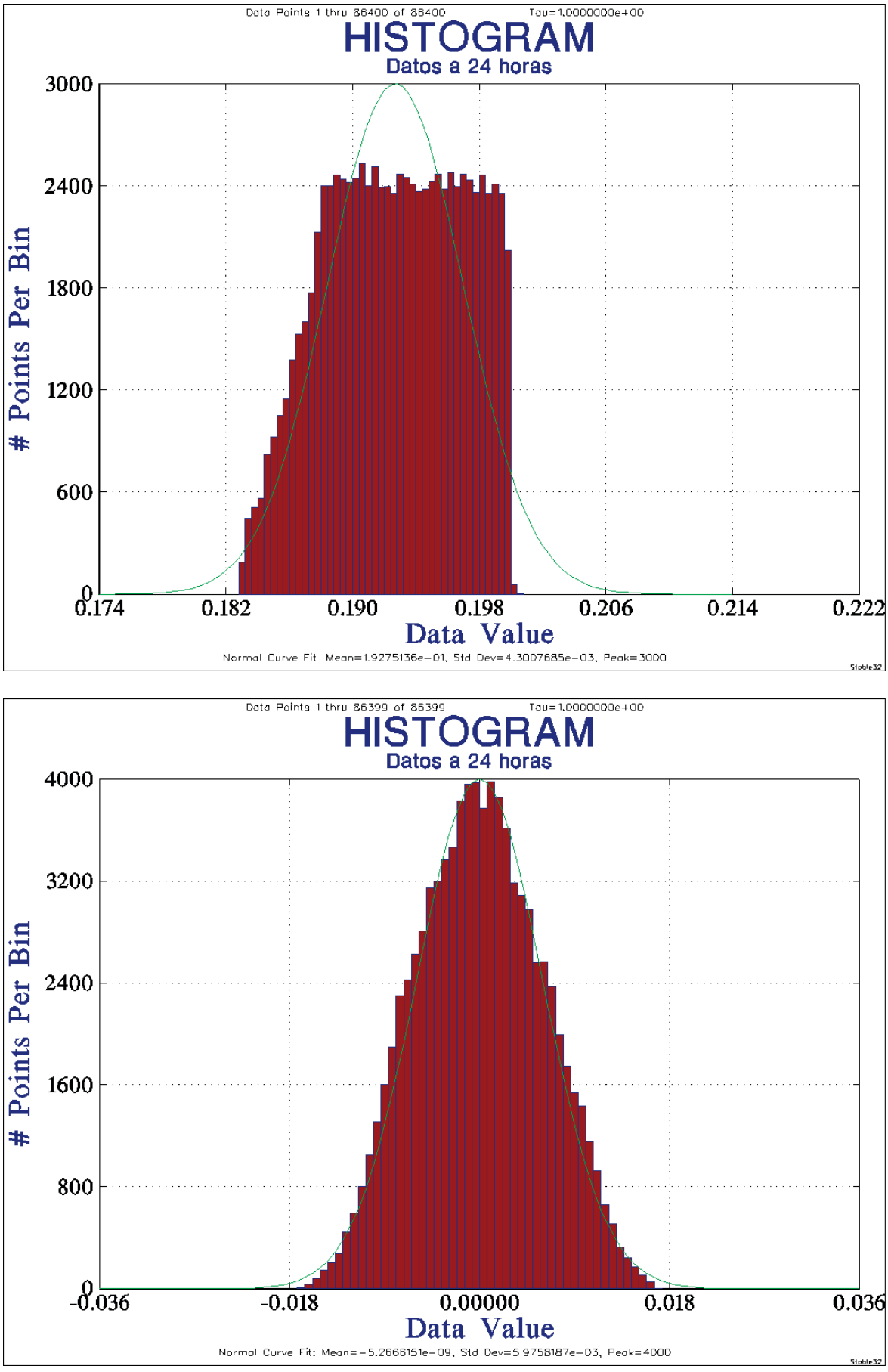


Figura 15. Histogramas de fase y frecuencia fraccional para la señal de batido

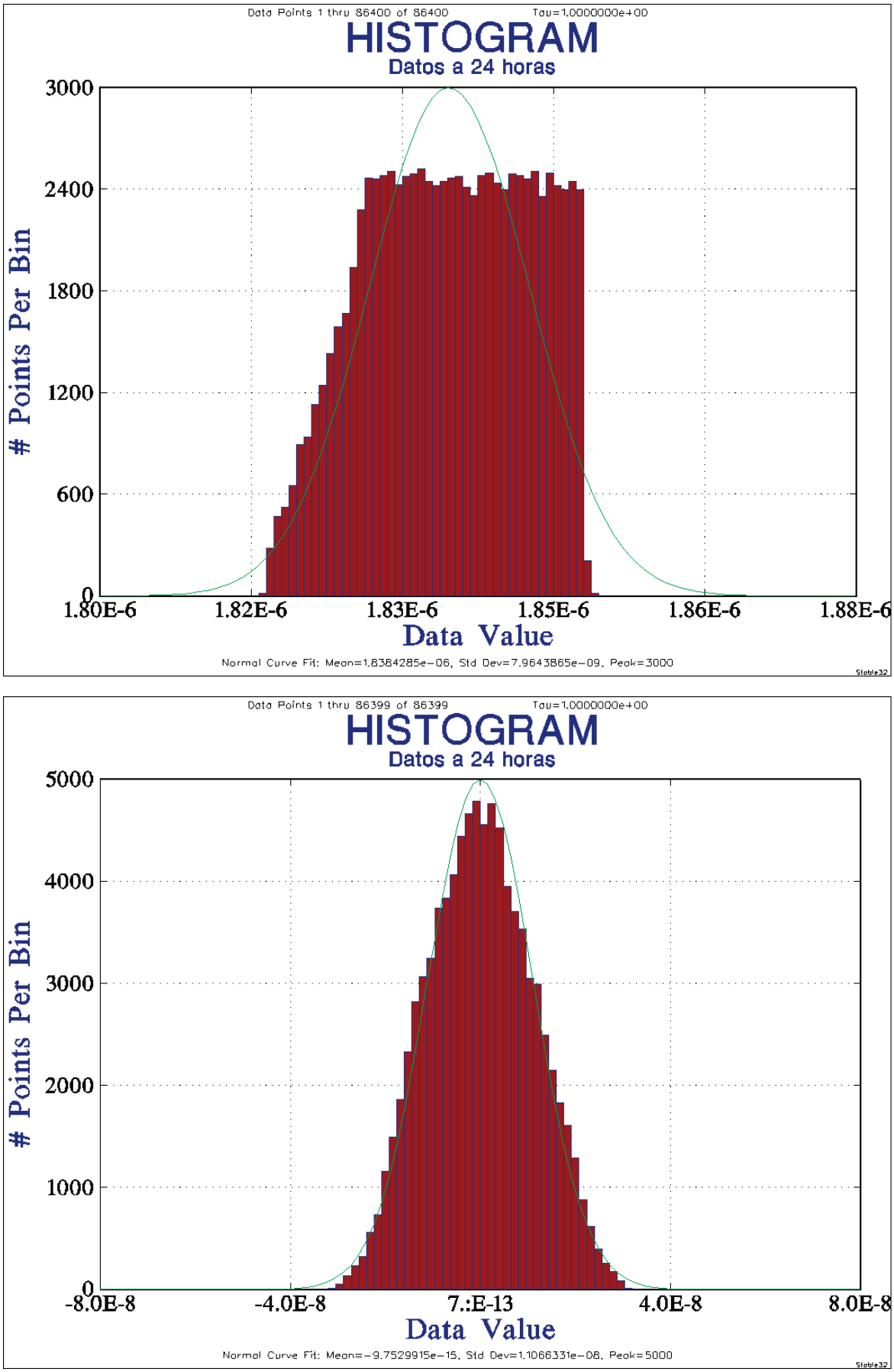
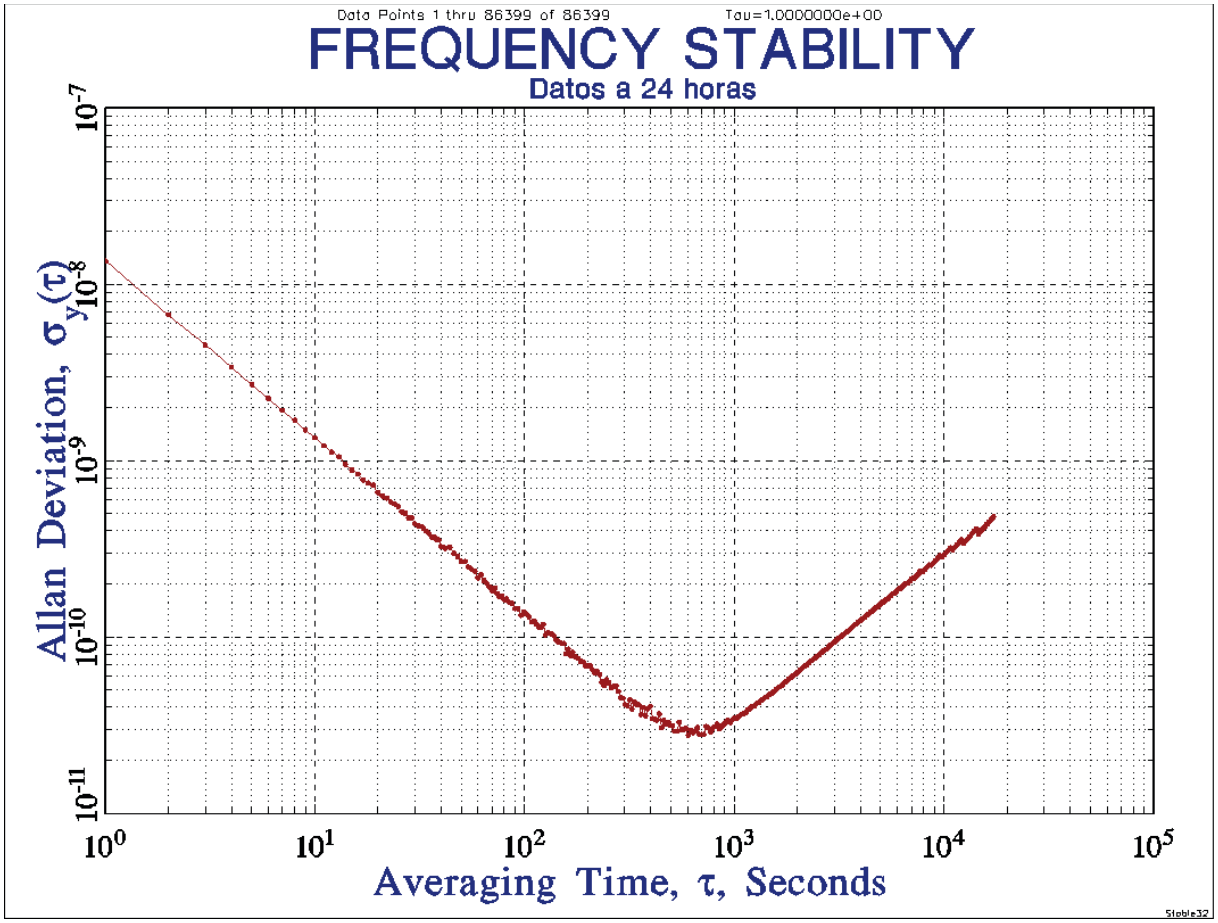


Figura 16. Histogramas de fase y frecuencia fraccional para la señal de reloj TMDS



AF	Tau	#	Alpha	Min Sigma	Sigma	Max Sigma
1	1.0000e+00	86398	2	1.3533e-08	1.3578e-08	1.3624e-08
2	2.0000e+00	43198	2	6.6898e-09	6.7213e-09	6.7532e-09
4	4.0000e+00	21598	2	3.3717e-09	3.3941e-09	3.4169e-09
10	1.0000e+01	8638	1	1.3395e-09	1.3531e-09	1.3672e-09
20	2.0000e+01	4318	0	6.5084e-10	6.5928e-10	6.6807e-10
40	4.0000e+01	2158	2	3.1982e-10	3.2649e-10	3.3361e-10
100	1.0000e+02	862	2	1.3034e-10	1.3462e-10	1.3935e-10
200	2.0000e+02	430	2	6.5491e-11	6.8510e-11	7.1991e-11
400	4.0000e+02	214	0	3.1923e-11	3.3743e-11	3.5917e-11
1000	1.0000e+03	85	0	3.0787e-11	3.3534e-11	3.7178e-11
2000	2.0000e+03	42	-2	5.6731e-11	6.2894e-11	7.1629e-11
4000	4.0000e+03	20	-2	1.0777e-10	1.2420e-10	1.5152e-10
10000	1.0000e+04	7	-2	2.3545e-10	2.9155e-10	4.2613e-10

Figura 17. Varianza de Allan para serie a 24h de reloj TMDS filtrada

En el espectro de potencia de la frecuencia fraccional $S_y(f)$, como se ve en la Figura 14, resultan poco reales los valores correspondientes a frecuencias muy bajas, en el orden de 10^{-5} Hz, correspondientes a ciclos de un día, debido a la insuficiente duración de la serie. No obstante se intuye un codo con tendencia a crecer a frecuencias bajas. En la Figura 15 puede verse el histograma de la fase incremental y de la frecuencia fraccional para la señal de batido. Escalando los datos se obtienen los histogramas para la señal de reloj original, representada en la Figura 16, cualitativamente semejantes a los de la Figura 15. En ambas figuras, la fase sufre variaciones sobre un nivel medio aparentemente estable y la frecuencia fraccional, como era de esperar, presenta una envolvente similar a una campana de Gauss centrada en un valor medio prácticamente nulo. No se percibe la deriva observada en el frecuencímetro para la señal de batido. Estas observaciones proceden de diferentes días, y las diferencias se deben a derivas lentas. Se filtrarán digitalmente los datos obtenidos mediante un filtro paso alto con frecuencia de corte correspondiente a 1 día de duración. Esto supone 86400 segundos y frecuencia de corte inferior $1{,}1574.10^{-5}$ Hz. El resultado presenta una varianza de Allan reflejada en la Figura 17. La estabilidad, enmascarada en la Figura 13 para valores de τ en el orden de 1000 segundos y superiores, queda ahora de manifiesto, aumentando la inestabilidad en el largo plazo.

Para observar derivas muy lentas es preciso efectuar series de mayor duración. Se efectúan medidas durante periodos de dos y tres días y se obtienen variaciones de frecuencia del día a la noche con desplazamientos a lo largo de los días y de la época del año, si bien las varianzas de Allan se mantienen en el mismo orden de magnitud.

Para series de 48 horas se obtienen resultados reflejados en la Figura 18. Ya se observa un ciclo que parece coincidir con el día y la noche. Este resultado apunta directamente a una dependencia con la temperatura. En la densidad espectral correspondiente a este periodo de observación, representada para $S_x(f)$ y $S_y(f)$ en la Figura 19, aún no se aprecian con claridad picos de frecuencia diaria. La varianza de Allan se encuentra reflejada en la Figura 20. El filtrado con frecuencia de corte inferior $1{,}16.10^{-5}$ Hz desenmascara la inestabilidad a largo plazo que puede verse en la Figura 21.

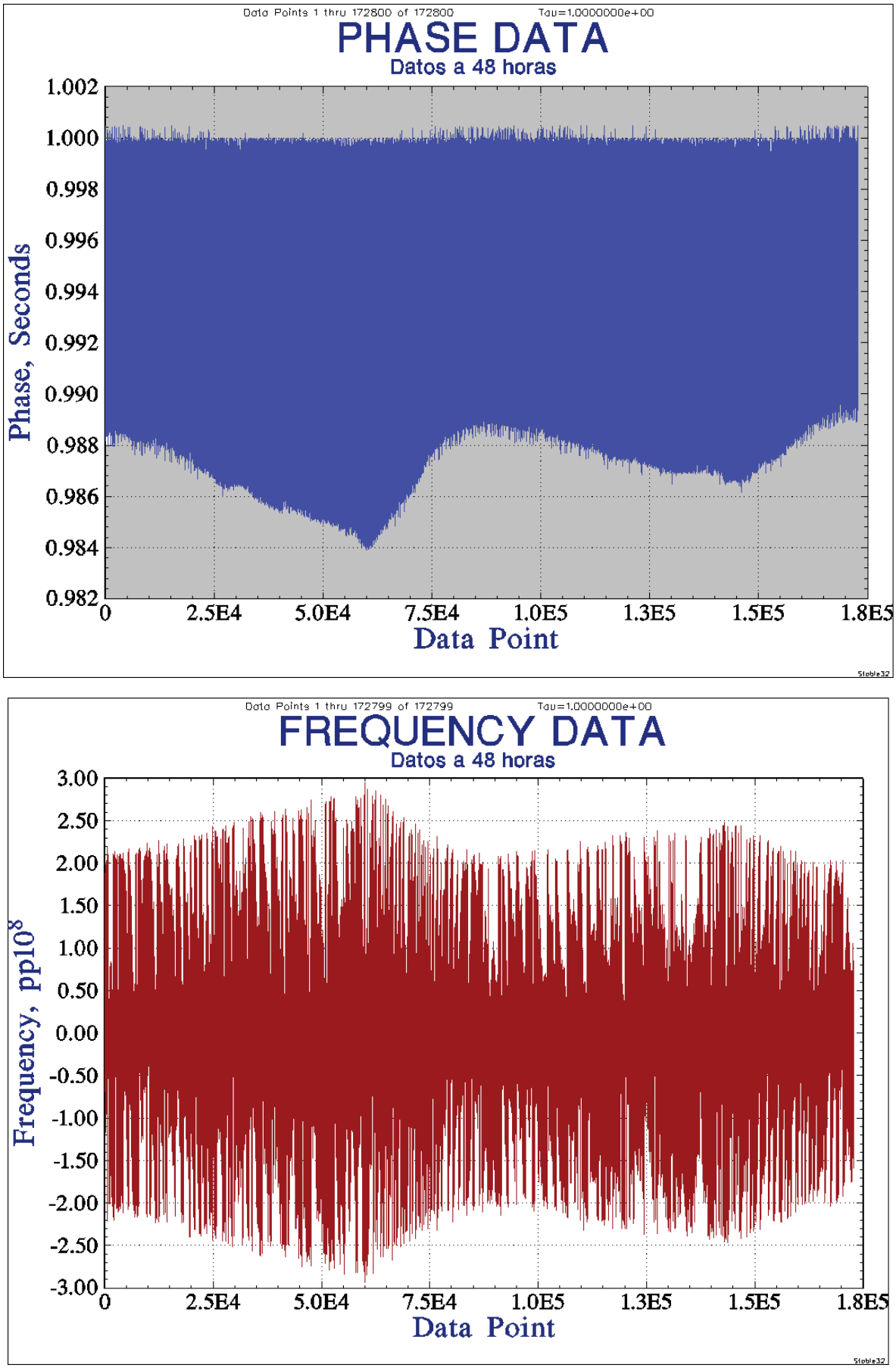


Figura 18. Fase incremental y frecuencia fraccional del reloj TMDS para un periodo de observación de 48 horas

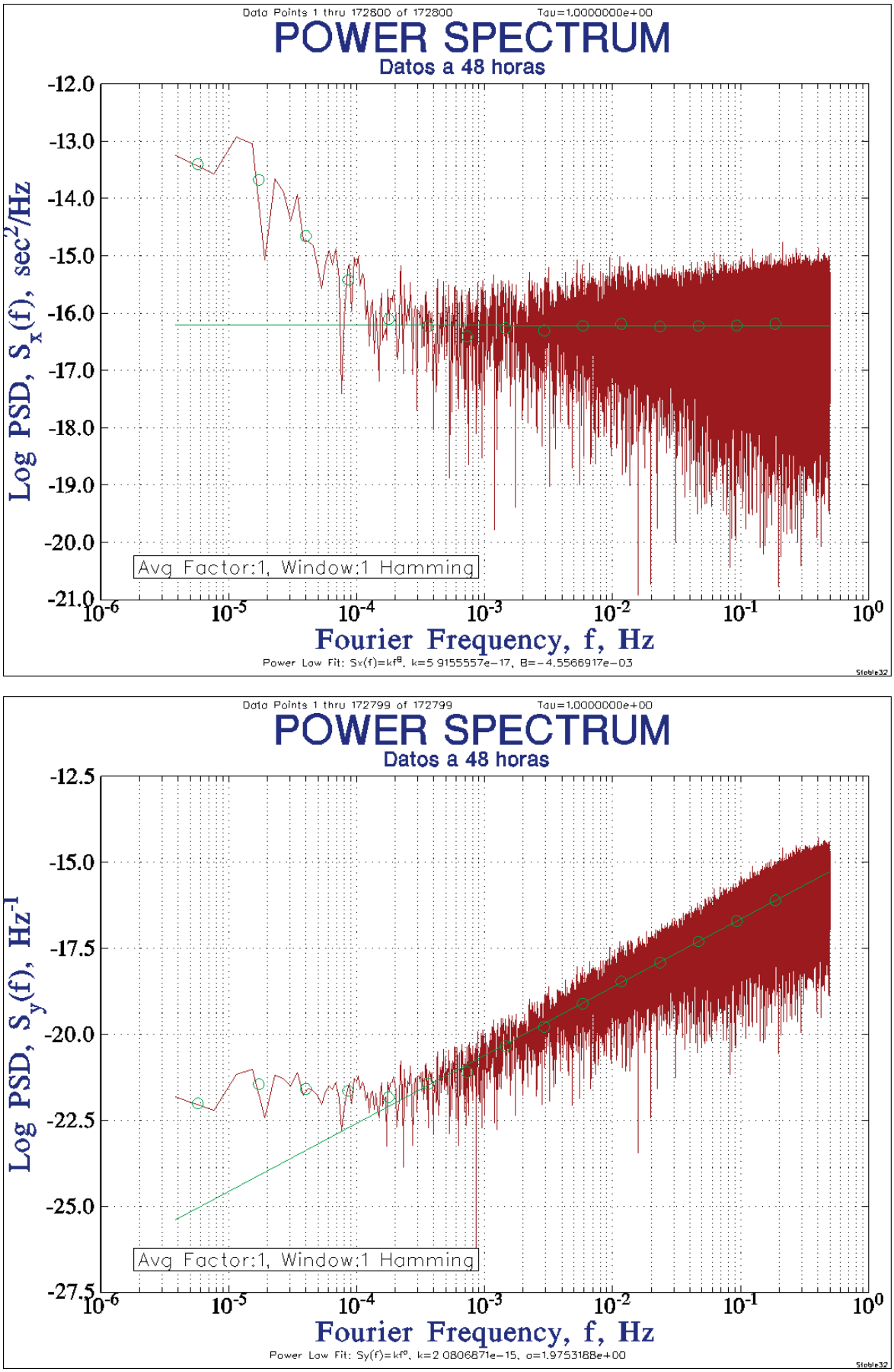
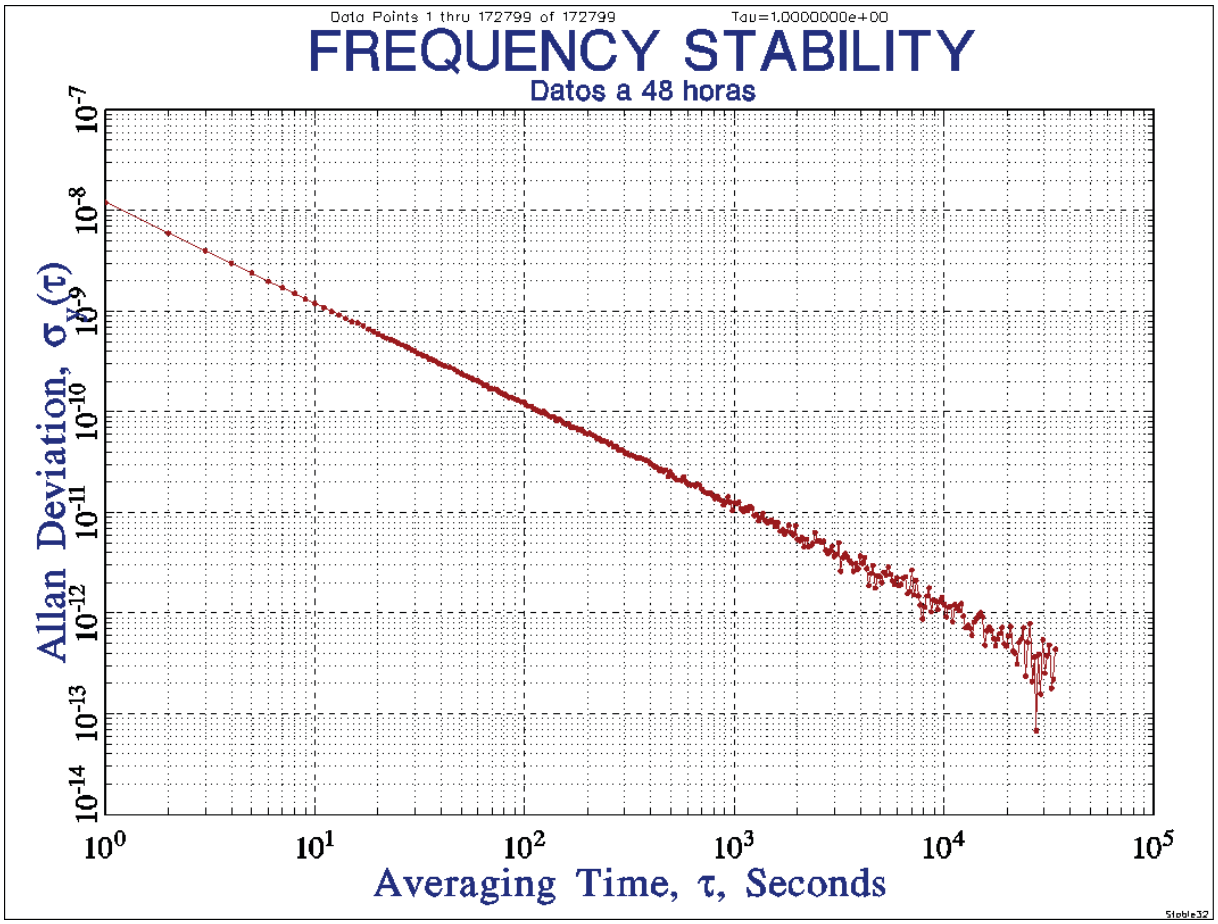
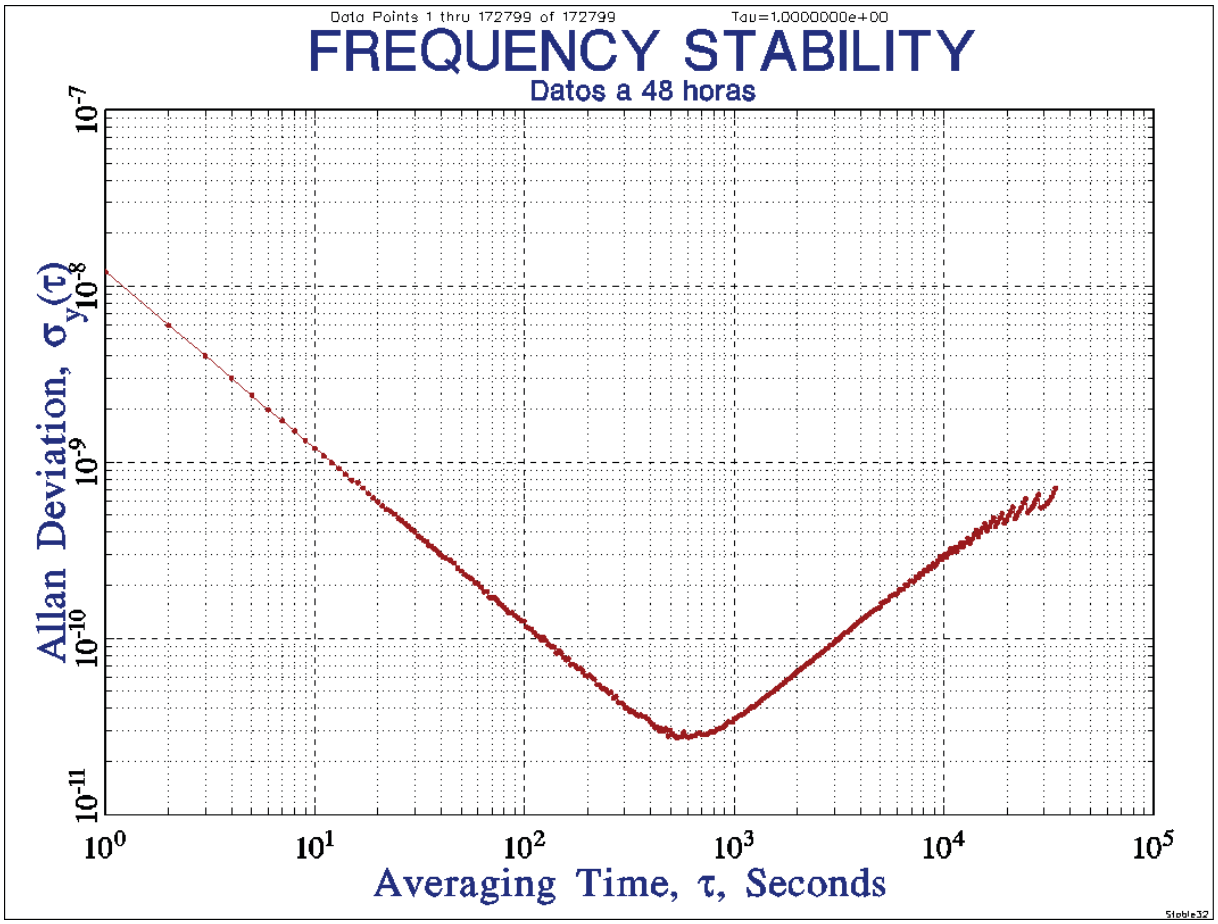


Figura 19. Densidad espectral de fase Sx(f) y frecuencia fraccional Sy(f) para datos a 48 horas de reloj TMDS



AF	Tau	#	Alpha	Min Sigma	Sigma	Max Sigma
1	1.0000e+00	172798	2	1.2027e-08	1.2055e-08	1.2084e-08
2	2.0000e+00	86398	2	5.9730e-09	5.9929e-09	6.0130e-09
4	4.0000e+00	43198	2	2.9894e-09	3.0035e-09	3.0178e-09
10	1.0000e+01	17278	2	1.1920e-09	1.2008e-09	1.2099e-09
20	2.0000e+01	8638	2	5.8919e-10	5.9537e-10	6.0175e-10
40	4.0000e+01	4318	2	2.9066e-10	2.9496e-10	2.9946e-10
100	1.0000e+02	1726	2	1.1286e-10	1.1549e-10	1.1832e-10
200	2.0000e+02	862	2	5.8804e-11	6.0733e-11	6.2866e-11
400	4.0000e+02	430	2	2.8174e-11	2.9472e-11	3.0970e-11
1000	1.0000e+03	171	2	1.2626e-11	1.3540e-11	1.4686e-11
2000	2.0000e+03	85	2	5.6995e-12	6.2736e-12	7.0657e-12
4000	4.0000e+03	42	2	3.1908e-12	3.6350e-12	4.3378e-12
10000	1.0000e+04	16	1	9.7779e-13	1.1823e-12	1.6107e-12
20000	2.0000e+04	7	1	5.3431e-13	6.8691e-13	1.1590e-12

Figura 20. Varianza de Allan para serie a 48h de reloj TMDS



AF	Tau	#	Alpha	Min Sigma	Sigma	Max Sigma
1	1.0000e+00	172798	2	1.2027e-08	1.2055e-08	1.2084e-08
2	2.0000e+00	86398	2	5.9730e-09	5.9929e-09	6.0130e-09
4	4.0000e+00	43198	1	2.9900e-09	3.0035e-09	3.0172e-09
10	1.0000e+01	17278	0	1.1931e-09	1.2008e-09	1.2087e-09
20	2.0000e+01	8638	2	5.8919e-10	5.9537e-10	6.0175e-10
40	4.0000e+01	4318	2	2.9066e-10	2.9496e-10	2.9946e-10
100	1.0000e+02	1726	2	1.1291e-10	1.1554e-10	1.1837e-10
200	2.0000e+02	862	2	5.9141e-11	6.1082e-11	6.3227e-11
400	4.0000e+02	430	0	3.0928e-11	3.2184e-11	3.3608e-11
1000	1.0000e+03	171	2	3.2601e-11	3.4960e-11	3.7919e-11
2000	2.0000e+03	85	-2	5.9711e-11	6.4363e-11	7.0306e-11
4000	4.0000e+03	42	-2	1.1407e-10	1.2646e-10	1.4403e-10
10000	1.0000e+04	16	-2	2.5300e-10	2.9560e-10	3.7087e-10
20000	2.0000e+04	7	-2	3.8599e-10	4.7797e-10	6.9859e-10

Figura 21. Varianza de Allan para serie a 48h de reloj TMDS filtrada

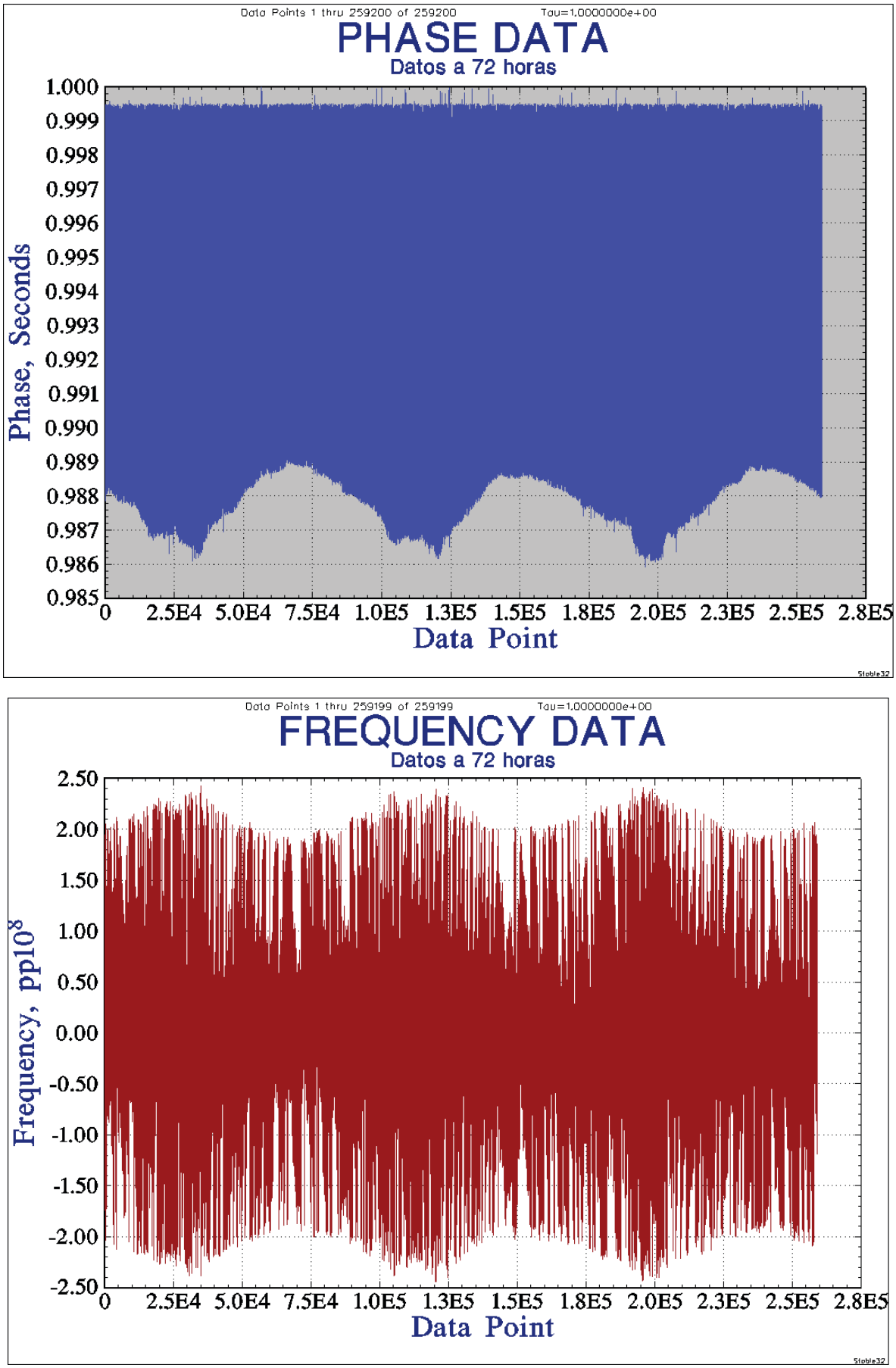


Figura 22. Fase incremental y frecuencia fraccional del reloj TMDS para un periodo de observación de 72 horas

Efectuando medidas en diferentes temporadas hasta obtener tiempo meteorológico exterior estable se obtiene la gráfica de la Figura 22 para un periodo de observación de 72 horas, donde se observa claramente una ciclicidad diaria. Al tratarse de un ciclo lento, resulta difícil observar una deriva sobre una señal de 27 MHz, cuya excursión pico a pico no supera medio centenar de Hz. Sin embargo, sobre la señal de batido supone una variación muy evidente.

Cabe esperar que el histograma de la frecuencia fraccional a 72 horas se encuentre centrado alrededor de un valor medio nulo. Sin embargo, tomando subconjuntos de datos centrados en los puntos del gráfico de fase incremental donde se observa mayor variación, el histograma de frecuencia fraccional debe centrarse en un valor no nulo que indique la pendiente de la curva de deriva de la fase incremental. Sin embargo, la deriva es tan lenta que no cabe esperar que se aprecie en el histograma. En el resumen estadístico de la Figura 23 puede verse el resultado para toda la serie y para un intervalo de 50 minutos centrado alrededor de las 47,5h posteriores al inicio de la serie. La pendiente total de la deriva para toda la serie se encuentra en un orden de magnitud de 10^{-14}, en tanto que en el intervalo de 50 minutos, la pendiente, aunque muy pequeña, ha aumentado en dos órdenes de magnitud situándose en 10^{-12}.

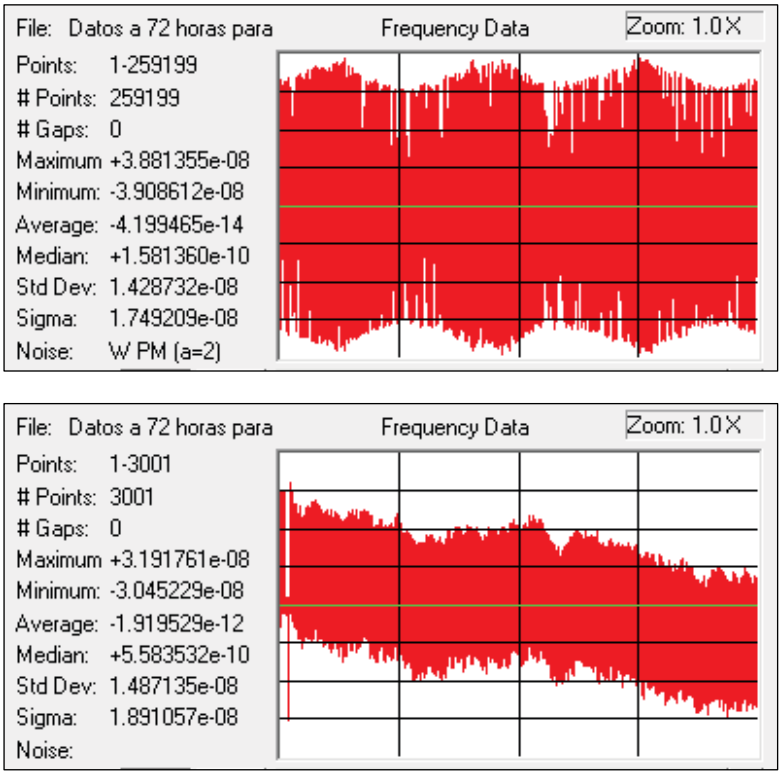


Figura 23. Resumen estadístico para una serie de 72 horas y un intervalo de la misma de 50 minutos, centrado a 47,5 horas posteriores al inicio de las medidas

En la Figura 24 se ven los espectros de potencia $S_x(f)$ y $S_y(f)$ correspondientes a esta serie, en los que aparece un pico que corresponde a una frecuencia de 1,16.10-5 Hz inversa del periodo de 1dia. La varianza de Allan para esta señal, se representa en la Figura 25. Filtrando en paso alto la señal, con frecuencia de corte 1,16.10-5 Hz se obtiene la Figura 26. En esta última figura, al filtrar y eliminar la deriva, queda de manifiesto que, para tiempos de observación superiores a los 300 segundos la varianza de Allan aumenta (wander con periodo de cinco minutos).

Puede comprobarse experimentalmente que la variación con la temperatura tiene lugar en el equipo receptor de la señal DVB-T. En efecto, aunque el equipo se mantiene encendido, procurando que su temperatura de trabajo sea constante, se trata de un equipo comercial de bajo coste que carece de horno y se presentan deslizamientos al variar la temperatura. Manteniendo el equipo cerrado en su carcasa original, esta actúa como aislante convirtiendo el interior en un horno rudimentario y la temperatura interior alcanza un valor más alto y estable. Si se elimina la tapa, y se le aplica, a intervalos, ventilación forzada las variaciones de temperatura se vuelven más rápidas y erráticas reflejándose en los valores observados en el frecuencímetro.

Repitiendo todo el proceso en otros receptores comerciales se obtienen resultados semejantes. La deriva de la frecuencia de la señal procedente del reloj TMDS indica que, con toda probabilidad, es generada en un reloj local de cuarzo cuyo bucle de enganche en fase con la señal MPEG, si existe, es débil. La especificación HDMI permite derivas en la frecuencia del reloj de carácter que pueden alcanzar hasta el 0.5% respecto al valor nominal, aún adaptándose a las diferentes definiciones de pantalla y frecuencias de refresco. Con una tolerancia tan elevada, un reloj local de cuarzo no precisa enganche. Dado que la señal de sincronismo de pixel el múltiplo de la anterior, no cabe esperar de ella, mejor estabilidad.

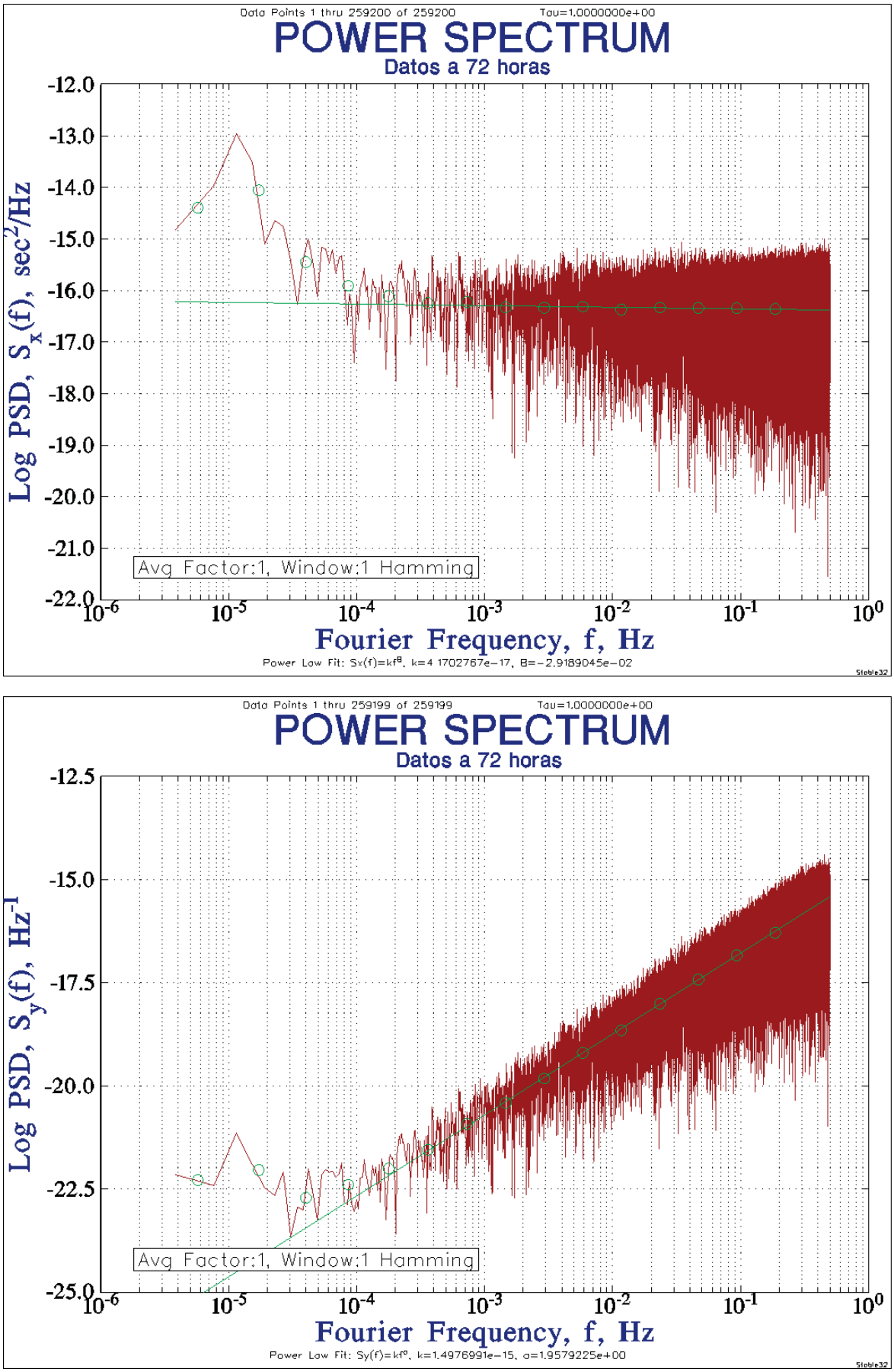
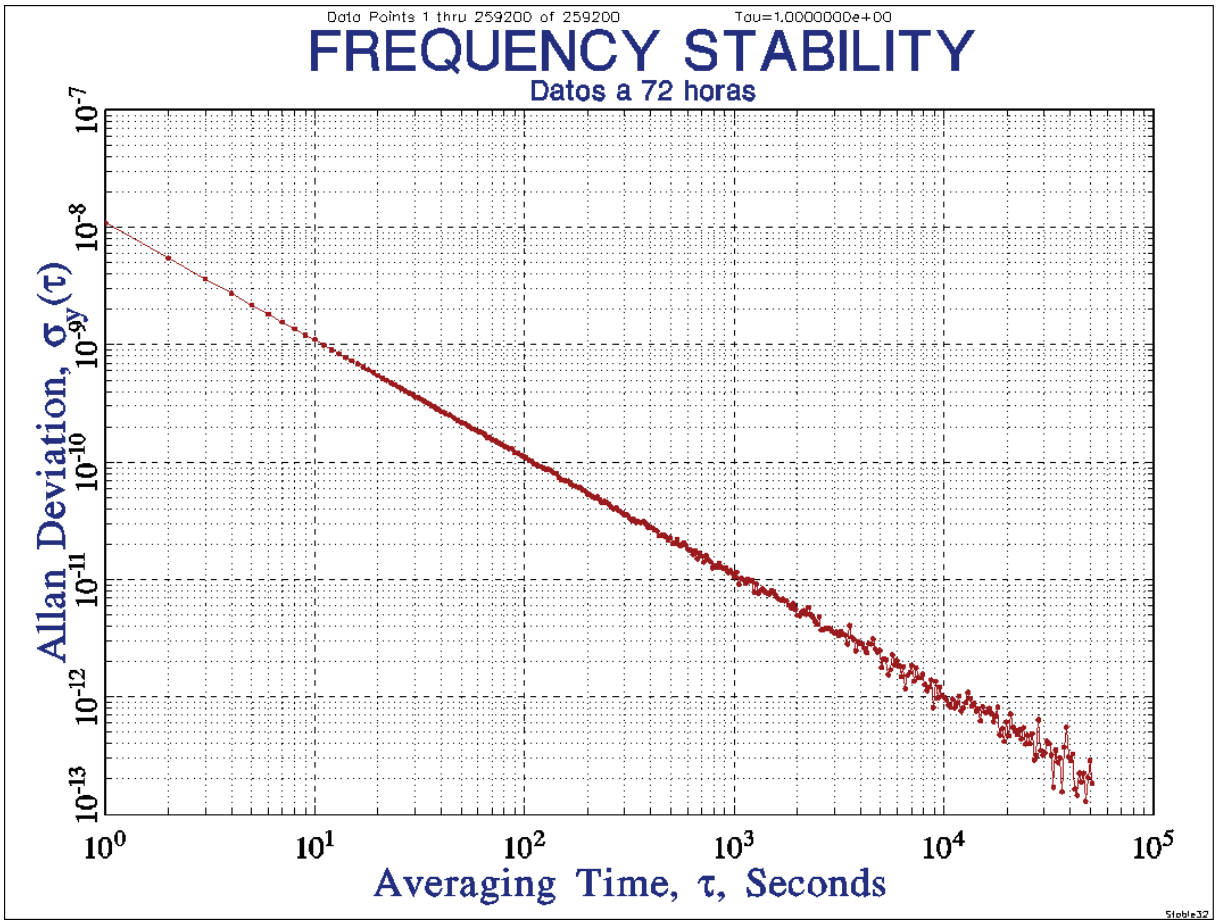
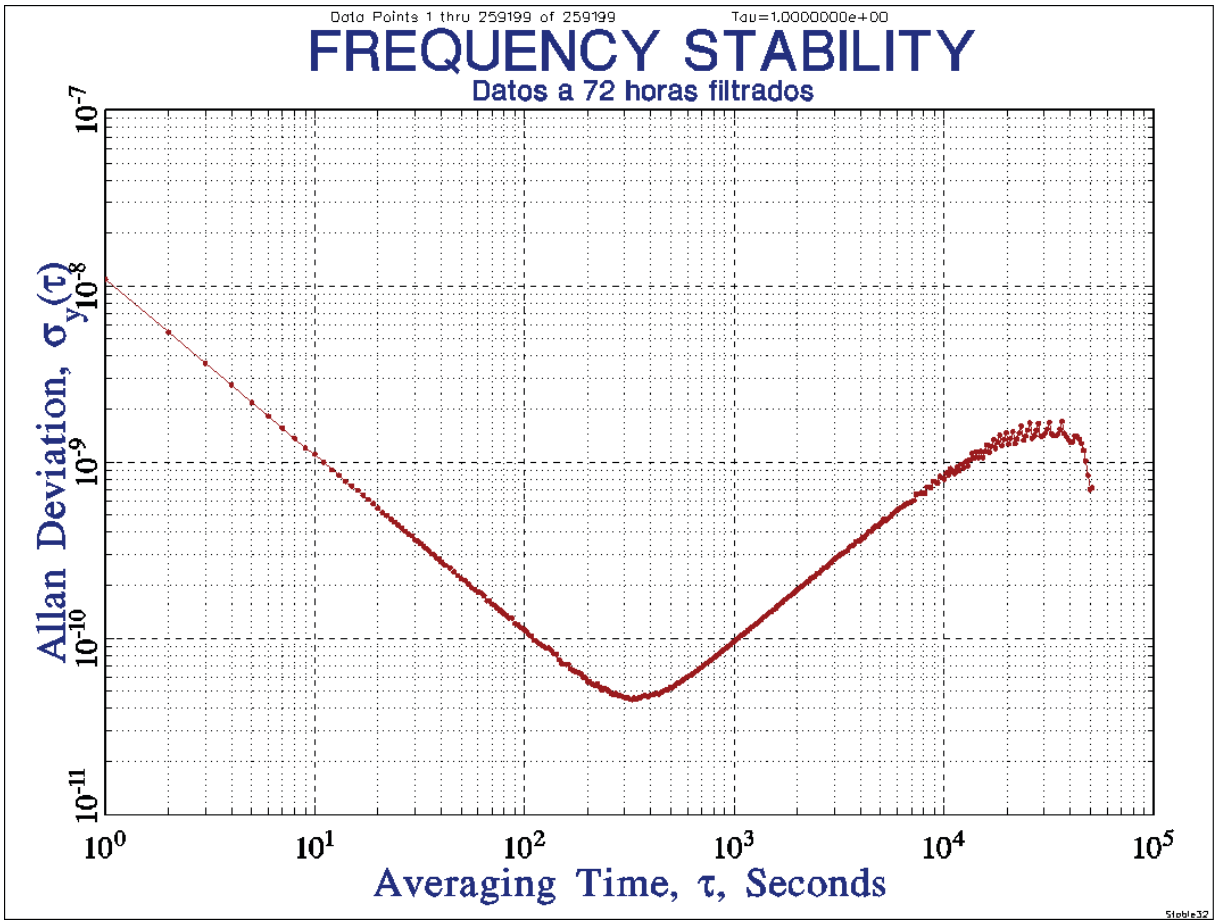


Figura 24. Densidad espectral de fase Sx(f) y de frecuencia fraccional Sy(f) para datos a 72 horas de reloj TMDS



AF	Tau	#	Alpha	Min Sigma	Sigma	Max Sigma
1	1.0000e+00	259198	2	1.0912e-08	1.0933e-08	1.0954e-08
2	2.0000e+00	129598	2	5.4573e-09	5.4722e-09	5.4871e-09
4	4.0000e+00	64798	2	2.7291e-09	2.7396e-09	2.7502e-09
10	1.0000e+01	25918	2	1.1027e-09	1.1094e-09	1.1162e-09
20	2.0000e+01	12958	2	5.4295e-10	5.4761e-10	5.5239e-10
40	4.0000e+01	6478	2	2.6768e-10	2.7092e-10	2.7428e-10
100	1.0000e+02	2590	2	1.0772e-10	1.0978e-10	1.1195e-10
200	2.0000e+02	1294	2	5.2118e-11	5.3518e-11	5.5039e-11
400	4.0000e+02	646	2	2.5857e-11	2.6834e-11	2.7932e-11
1000	1.0000e+03	258	2	9.8304e-12	1.0411e-11	1.1108e-11
2000	2.0000e+03	128	2	4.3562e-12	4.7181e-12	5.1883e-12
4000	4.0000e+03	63	2	1.7715e-12	1.9765e-12	2.2746e-12
10000	1.0000e+04	24	1	7.4894e-13	8.8111e-13	1.1223e-12
20000	2.0000e+04	11	1	5.0589e-13	6.2862e-13	9.2936e-13
40000	4.0000e+04	5	1	1.9681e-13	2.5939e-13	4.9911e-13

Figura 25. Varianza de Allan para serie a 72h de reloj TMDS



AF	Tau	#	Alpha	Min Sigma	Sigma	Max Sigma
1	1.0000e+00	259198	1	1.0914e-08	1.0933e-08	1.0952e-08
2	2.0000e+00	129598	1	5.4582e-09	5.4722e-09	5.4863e-09
4	4.0000e+00	64798	0	2.7305e-09	2.7396e-09	2.7488e-09
10	1.0000e+01	25918	2	1.1027e-09	1.1094e-09	1.1162e-09
20	2.0000e+01	12958	2	5.4295e-10	5.4761e-10	5.5239e-10
40	4.0000e+01	6478	2	2.6771e-10	2.7095e-10	2.7431e-10
100	1.0000e+02	2590	2	1.0813e-10	1.1019e-10	1.1238e-10
200	2.0000e+02	1294	0	5.5550e-11	5.6863e-11	5.8275e-11
400	4.0000e+02	646	2	4.5099e-11	4.6803e-11	4.8717e-11
1000	1.0000e+03	258	0	9.1175e-11	9.5924e-11	1.0151e-10
2000	2.0000e+03	128	-2	1.7643e-10	1.8766e-10	2.0135e-10
4000	4.0000e+03	63	-2	3.3166e-10	3.6145e-10	4.0104e-10
10000	1.0000e+04	24	-1	6.9347e-10	7.9109e-10	9.4639e-10
20000	2.0000e+04	11	-1	1.0158e-09	1.2171e-09	1.6189e-09
40000	4.0000e+04	5	-1	1.0243e-09	1.3017e-09	2.0906e-09

Figura 26. Varianza de Allan para serie a 72h de reloj TMDS filtrada

.

6.1.2 Señales de sincronismo asociadas a la trama MPEG

El resultado anterior hace ver que la señal de reloj TMDS presenta una inestabilidad alta en el largo plazo, respecto a la frecuencia de la trama MPEG lo que invita a considerar la estabilidad que puede obtenerse de las señales de sincronismo de cuadro y línea. Estas están asociadas a la trama MPEG y, como es lógico, solo aparecen cuando el receptor sintoniza alguna emisora. El propio receptor las extrae para incorporarlas en la salida analógica, pero las entrega como señal de sincronismo compuesta. Pueden encontrarse superpuestas a la señal de vídeo compuesta, o en el caso de salidas RGB superpuestas a la señal G (color verde). En caso de que el receptor disponga se salida SCART, se encuentran directamente en el conector pero sin separar el sincronismo horizontal del vertical. Ambas señales son, en teoría, múltiplos exactos del intervalo τ de observación y, de no existir ruido de fase, todos los intervalos de observación deberían arrancar con el pulso de sincronismo de la misma línea con retardos de 25 tramas. Pero los pulsos de reloj de 1pps utilizados para establecer el intervalo τ de observación y los pulsos de sincronismo son señales plesiócronas cuyos deslizamientos van estableciendo retardos sucesivos apareciendo irregularidades periódicas al desplazarnos sobre los sincronismos de cuadro. Como consecuencia, los datos de fase presentan múltiples valores obviamente disparatados (outliers) como los reflejados en la Figura 27.

La medida de los intervalos de tiempo, se efectúa sobre el frecuencímetro, directamente sin mezclador a intervalos τ fijos de un segundo y sin tiempos muertos. Al efectuar medidas directas sin heterodinaje, no hay factor de multiplicación y no se puede obtener mayor exactitud en la medida de la fase incremental, que la propia resolución del instrumento.

Obsérvese en la Figura 27 como los retardos de fase se reparten, en su mayor parte, entre ±32 μS, dado que para variaciones de pico a pico de 64 μS se produce un deslizamiento de ciclo, al corresponder este valor al periodo del sincronismo de linea. Sin embargo se observan claramente los valores fuera de márgenes y cuidadosamente espaciados, atribuibles al sincronismo de cuadro.

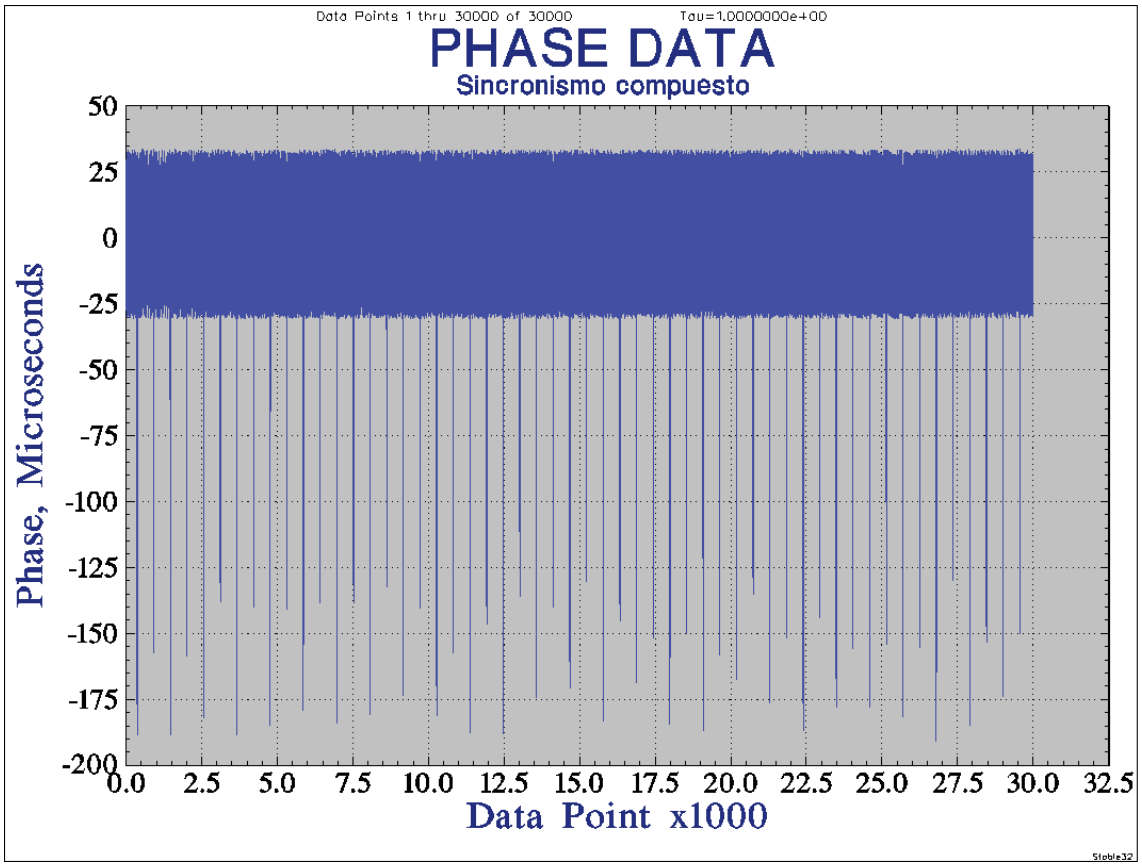


Figura 27. Fase incremental de la señal de sincronismo compuesto

Para eliminar estos errores se toma como criterio suprimir aquellos datos cuya frecuencia fraccional se desvíe más de cinco veces la desviación típica de la muestra. Los datos eliminados se sustituyen por valores interpolados. Para una serie obtenida en un periodo de 17,30 horas de duración, los resultados en medida filtrados de errores se ven en la Figura 28. Las densidades espectrales $S_x(f)$ y $S_y(f)$ se ven en la Figura 29 y la varianza de Allan en la Figura 30.

La varianza de Allan obtenida en la medida directa sobre la señal de sincronismo compuesto empeora respecto a la del reloj TMDS. Este resultado choca con lo esperado y hace pensar que la estabilidad de la señal de líneas queda enmascarada por la presencia de la señal de sincronismo vertical. Es preciso extraer la señal de sincronismo de línea, bien directamente de la trama MPEG, o bien del sincronismo compuesto presente en las salidas analógicas.

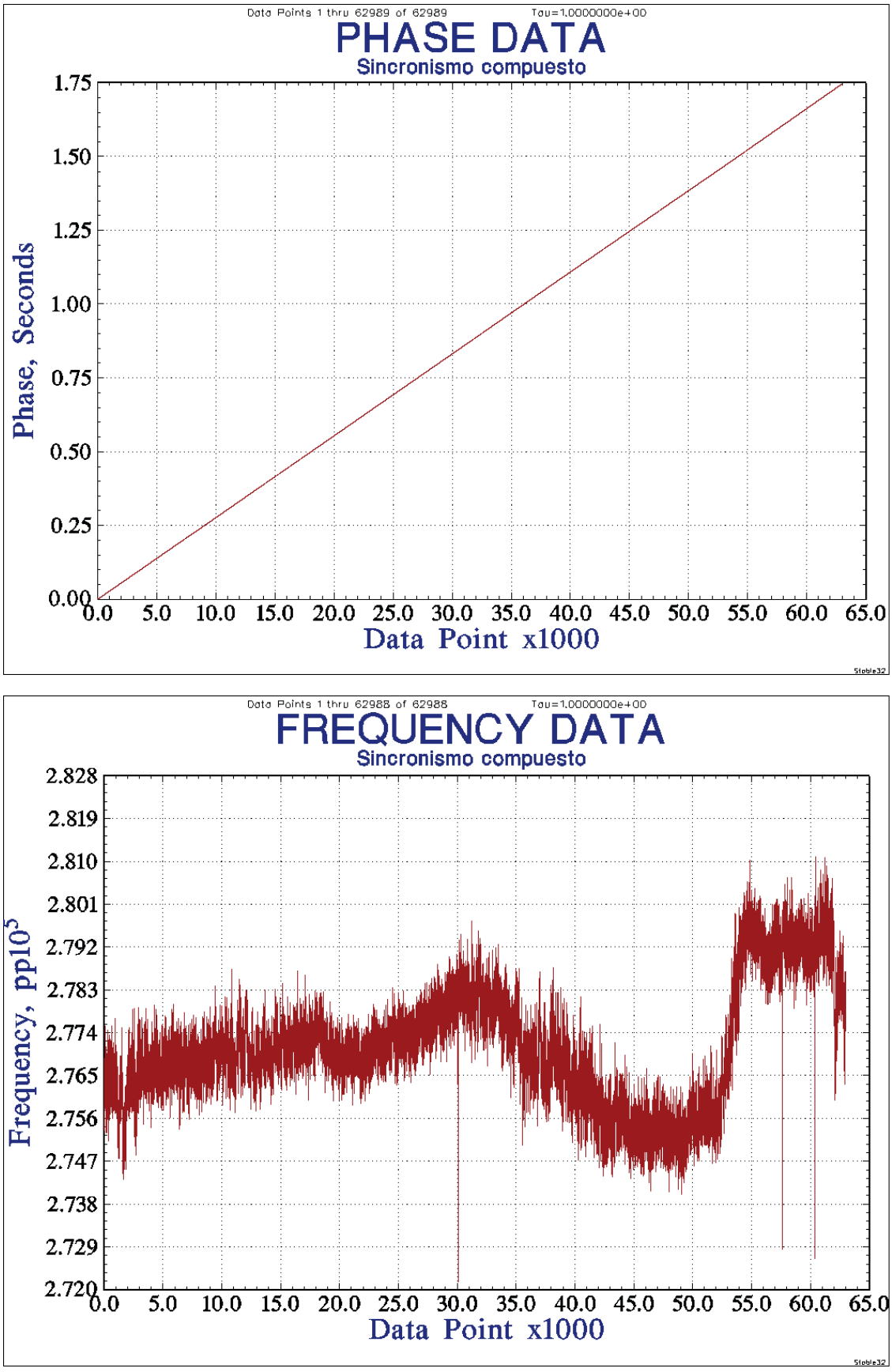
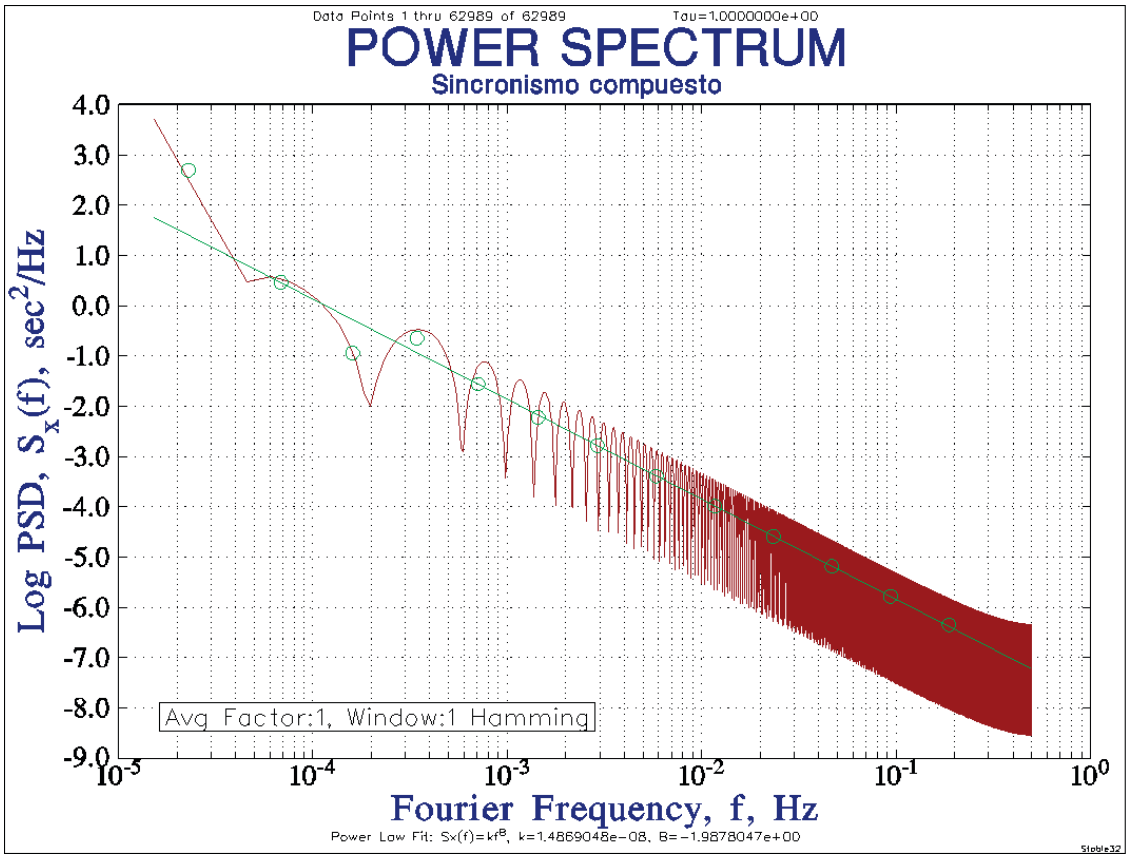


Figura 28. Fase incremental y frecuencia fraccional de la señal de sincronismo de línea para un periodo de observación de 17,30 horas



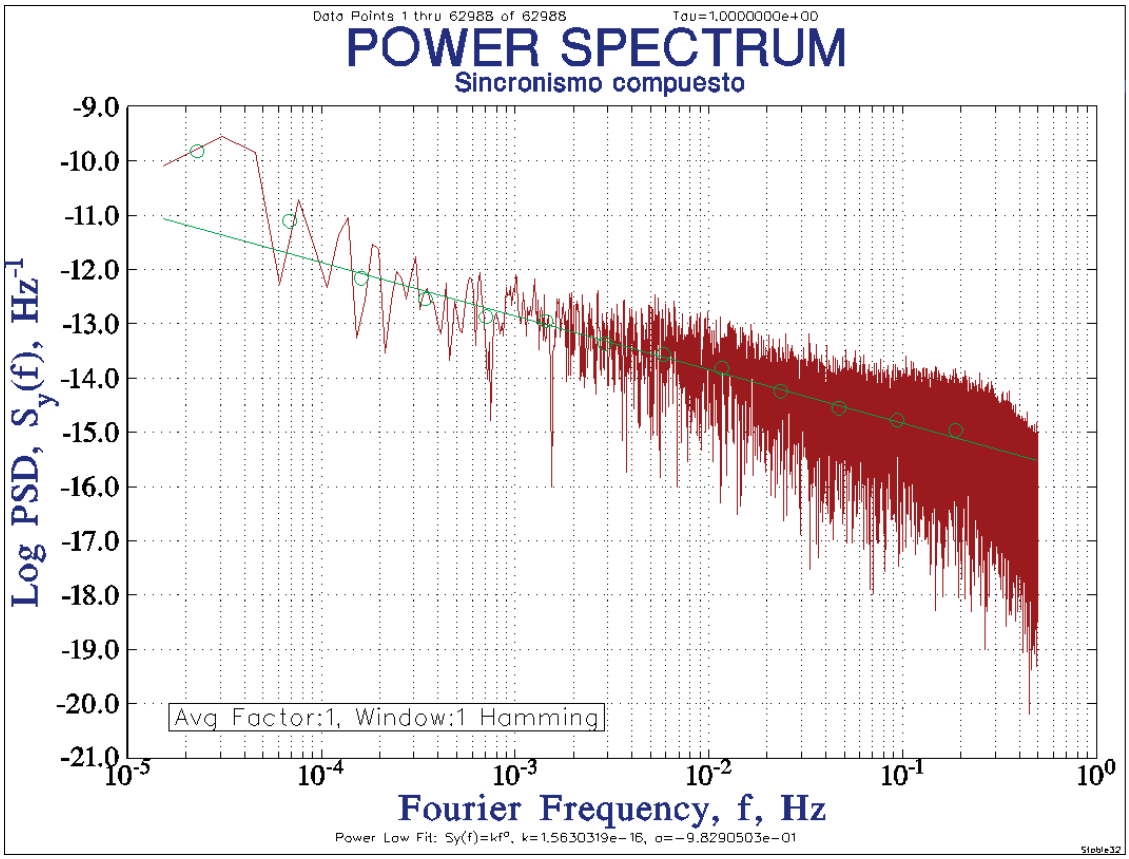
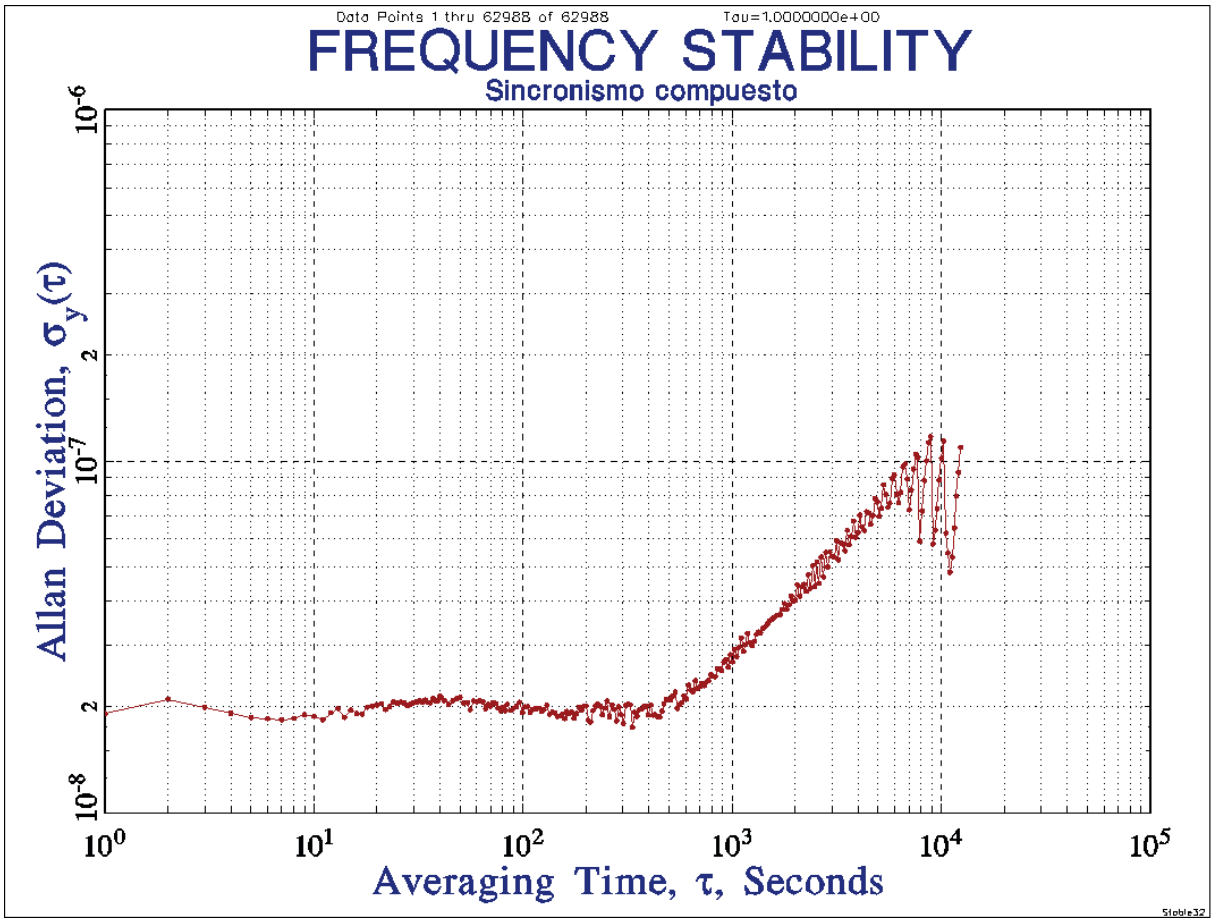


Figura 29. Densidad espectral de fase Sx(f) y de frecuencia fraccional Sy(f) de la señal de sincronismo de línea para un periodo de observación de 17,30 horas



AF	Tau	#	Alpha	Min Sigma	Sigma	Max Sigma
1	1.0000e+00	62987	-2	1.9049e-08	1.9110e-08	1.9172e-08
2	2.0000e+00	31493	-1	2.0936e-08	2.1023e-08	2.1112e-08
4	4.0000e+00	15746	-1	1.9065e-08	1.9178e-08	1.9293e-08
10	1.0000e+01	6297	-2	1.8620e-08	1.8794e-08	1.8973e-08
20	2.0000e+01	3148	-2	1.9948e-08	2.0212e-08	2.0486e-08
40	4.0000e+01	1573	-1	2.1039e-08	2.1432e-08	2.1848e-08
100	1.0000e+02	628	-1	1.9540e-08	2.0114e-08	2.0742e-08
200	2.0000e+02	313	-1	1.9321e-08	2.0119e-08	2.1027e-08
400	4.0000e+02	156	-2	1.9863e-08	2.1011e-08	2.2387e-08
1000	1.0000e+03	61	-2	2.3929e-08	2.6111e-08	2.9026e-08
2000	2.0000e+03	30	-2	3.6487e-08	4.1119e-08	4.8124e-08
4000	4.0000e+03	14	-1	5.3892e-08	6.3523e-08	8.1258e-08
10000	1.0000e+04	5	-1	7.9284e-08	1.0076e-07	1.6183e-07

Figura 30. Varianza de Allan de la señal de sincronismo de línea para un periodo de observación de 17,30 horas

Seleccionamos una nueva señal de sincronismo obtenida internamente del receptor. La circuitería de decodificación entrega la trama MPEG junto con una señal de 30 MHz al conector de interfaz PCMCIA donde se inserta la tarjeta de extracción de los canales de pago. La trama MPEG existe solo en el caso de que se encuentre sintonizada alguna emisora, pero el reloj de 30 MHz se genera en el receptor, y siempre está presente. Cuando se recibe la trama MPEG, se produce su enganche en fase. Una vez que ha tenido lugar el sincronismo, el reloj de 30 MHz puede utilizarse como referencia y comprobarse que las señales de sincronismo de cuadro y línea, así como el reloj de codificación SPDIF de la salida de audio mantienen también el enganche de fase como luego se verá.

En primer lugar se analizará la estabilidad de la señal de 30 MHz con emisora sintonizada y se comparará con la estabilidad obtenida en ausencia de señal MPEG (desconectando la antena). Este procedimiento nos permite si existe mejora de la estabilidad de la señal al sincronizarse.

Se procederá, como anteriormente a mezclar la señal bajo análisis, con el tercer armónico de señal cuadrada de 10 MHz procedente del reloj de satélite, filtrada con un filtro sintonizado a 30 MHz. La señal de batido de 4,5 Hz se utiliza para el disparo del contador y este finaliza con el flanco ascendente de una señal cuadrada de 1Hz derivada del reloj de satélite. La misma señal se utiliza, en su flanco descendente, para el rearme del instrumento.

A pesar de la presencia de trama MPEG, se observa en la representación de los datos de fase de la señal de 30 MHz, deriva diaria, en apariencia debida a la temperatura. Observada en el contador de frecuencias en diferentes días, se estima alrededor de una decena de Hz. Para una serie de 72 horas, el resultado para la fase diferencial y la frecuencia fraccional, se muestra en la Figura 31. Las densidades espectrales de potencia, que se muestran en la Figura 32, presentan un pico a la frecuencia de $1{,}16.10^{-5}$ Hz correspondiente al periodo de un día.

La varianza de Allan para esta señal puede verse en la Figura 33. La estabilidad de la señal en el corto plazo corresponde al reloj local y, al igual que vimos en el reloj TMDS, no varía significativamente con el filtrado. Sin embargo, la señal es más limpia que en el reloj TMDS y presenta mejor estabilidad.

Si se filtra digitalmente la señal mediante un filtro paso-alto con frecuencia de corte dada por $1{,}16.10^{-5}$ Hz, se elimina, al menos en parte, la deriva originada por la temperatura y

se desenmascara el efecto del ruido blanco de fase, como ya vimos en la señal TMDS. La varianza de Allan, para este caso, se encuentra en la Figura 34.

Para la señal de 30 MHz sin sintonía de canal, se ha elegido, de todas las series realizadas, un tramo de 26 horas en un día particularmente estable. La razón de esta elección radica en minimizar la deriva alrededor de los 4,5 Hz de la frecuencia nominal de batido, dado que al bajar esta a cero Hz, se invierte la fase y el contador entrega valores excesivamente grandes que falsean los resultados. La Figura 35 representa la fase incremental y frecuencia fraccional para esta muestra. Su varianza de Allan, como puede observarse en la Figura 36, duplica a la obtenida en el caso anterior, aunque se mantiene en el mismo orden de magnitud.

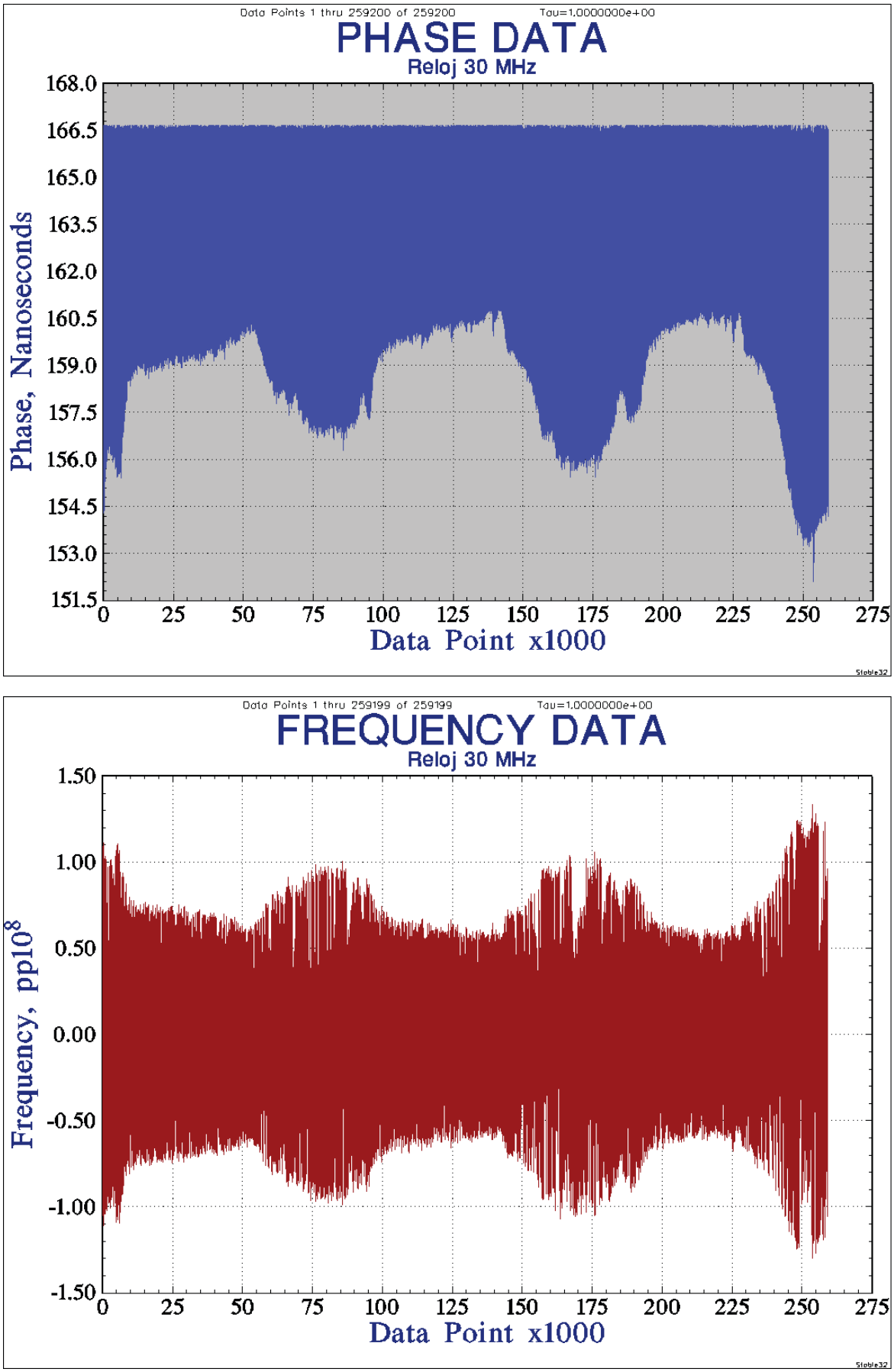
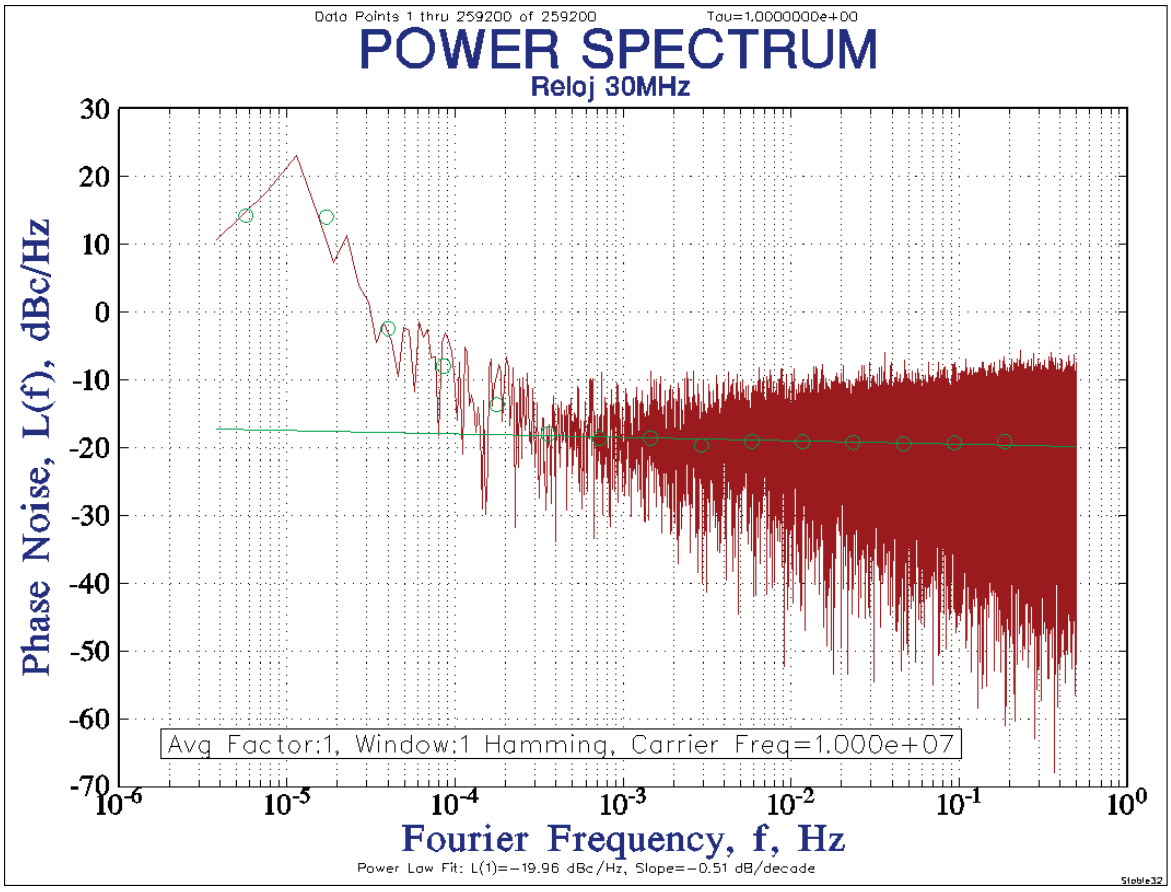


Figura 31. Fase incremental y frecuencia fraccional del reloj de 30MHz para un periodo de observación de 72 horas



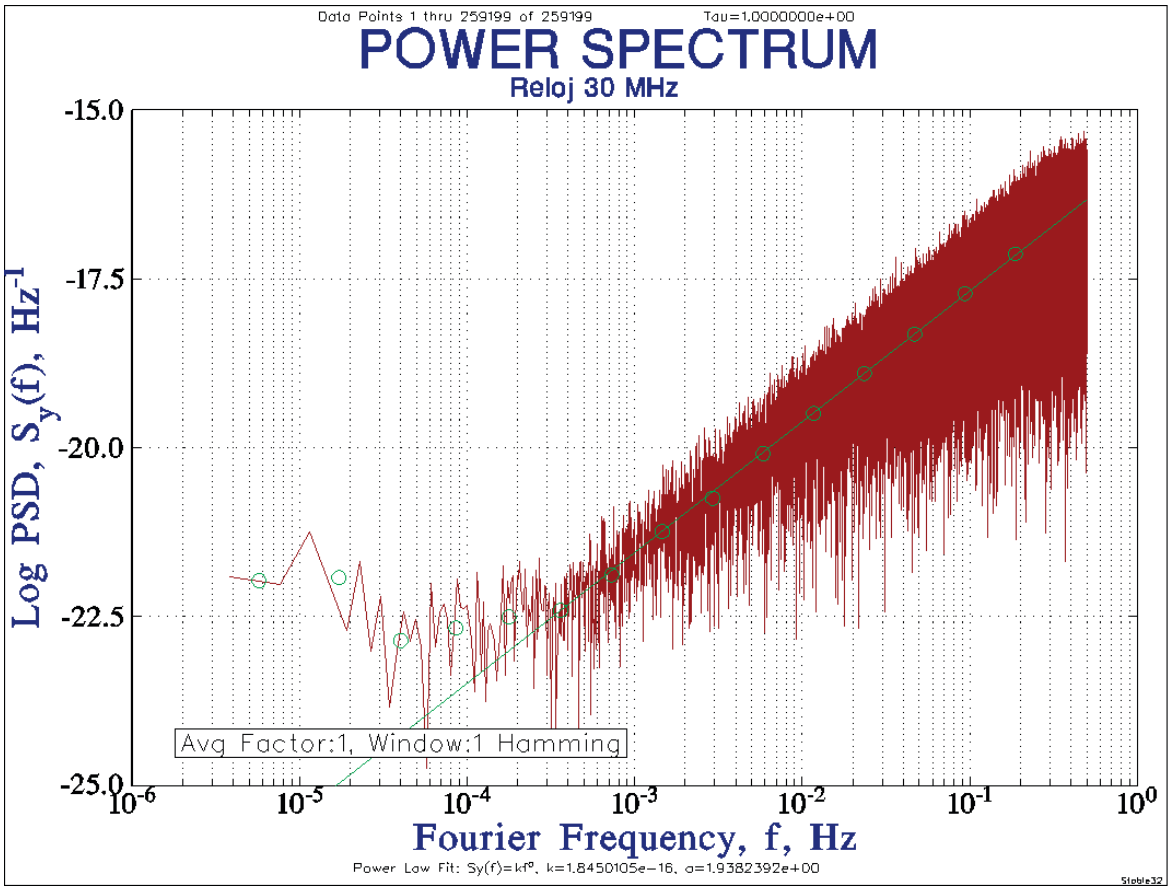
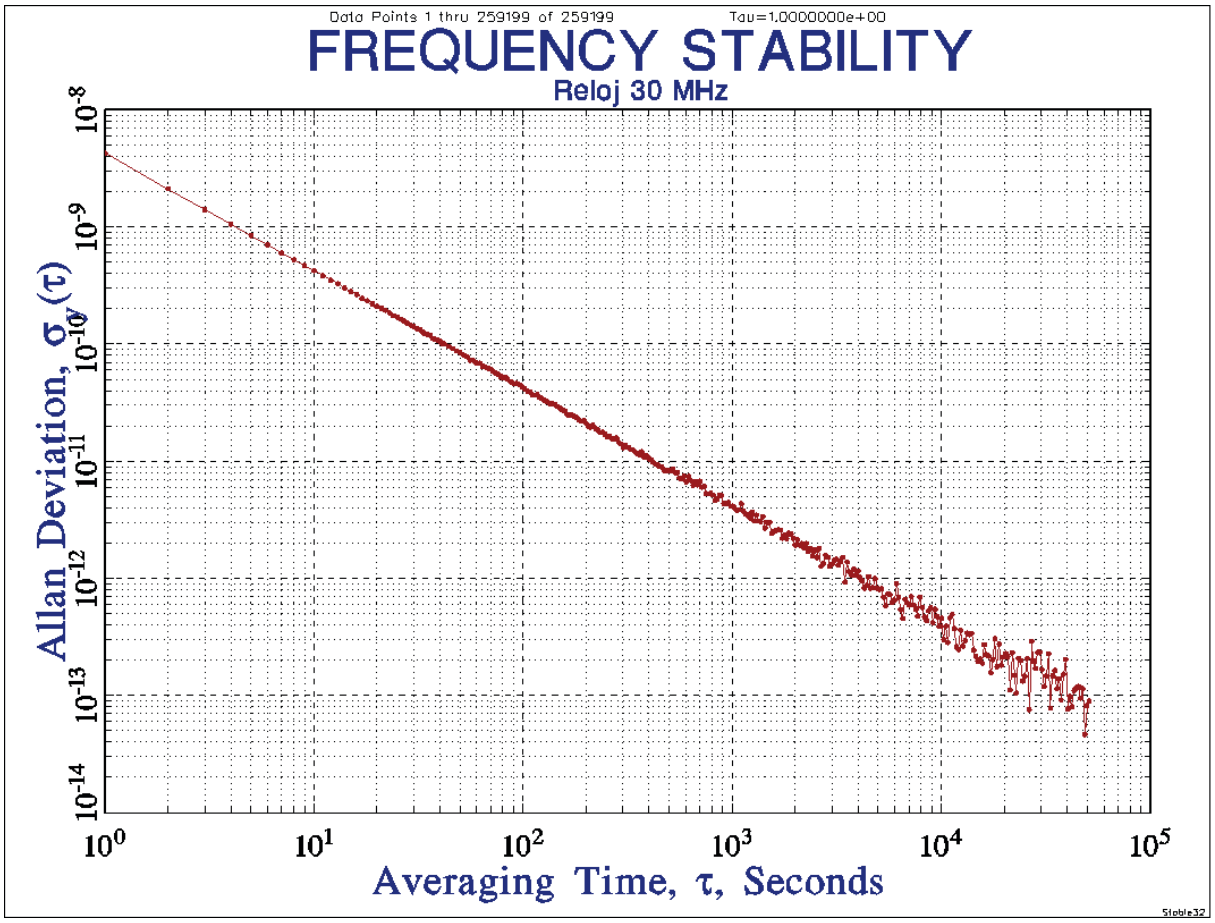
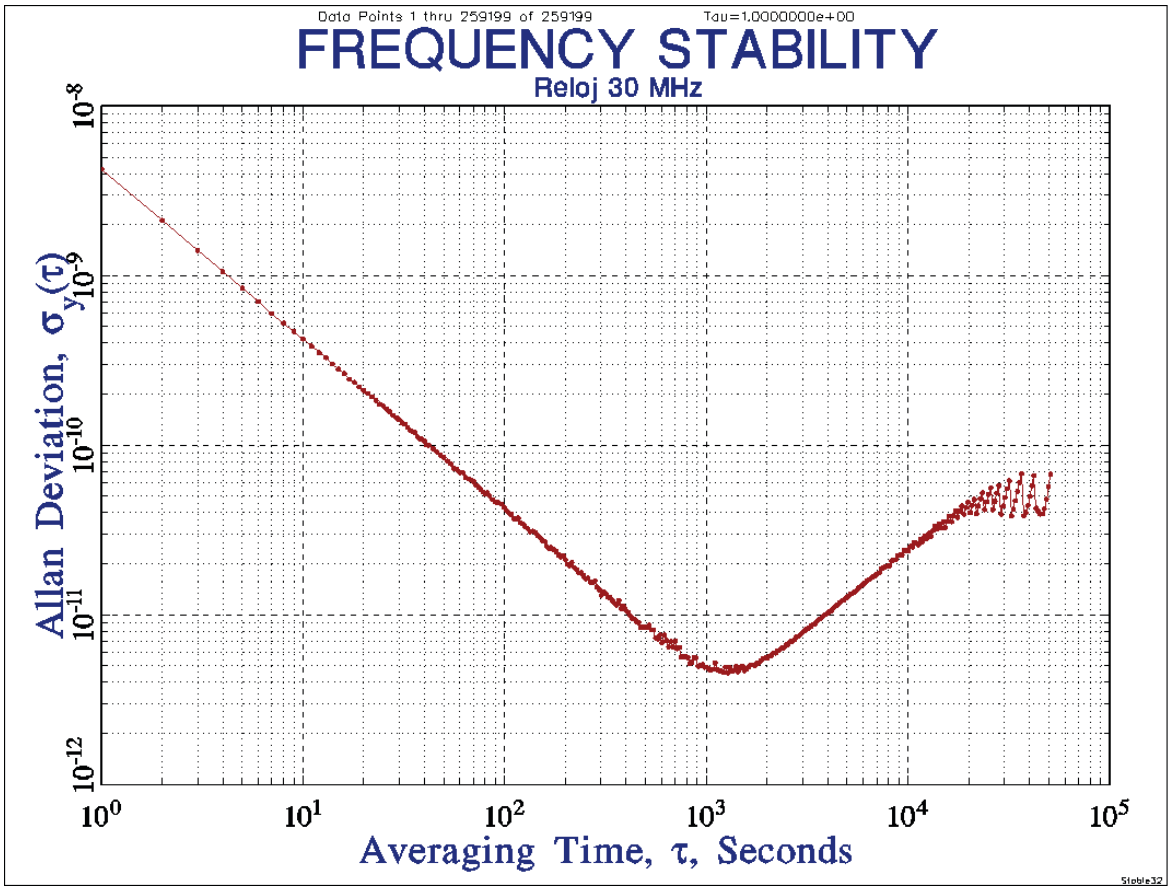


Figura 32. Densidad espectral de fase Sx(f) y de frecuencia fraccional Sy(f) para datos a 72 horas de reloj 30 MHz



AF	Tau	#	Alpha	Min Sigma	Sigma	Max Sigma
1	1.0000e+00	259198	2	4.2420e-09	4.2501e-09	4.2583e-09
2	2.0000e+00	129598	2	2.1146e-09	2.1203e-09	2.1261e-09
4	4.0000e+00	64798	2	1.0493e-09	1.0534e-09	1.0575e-09
10	1.0000e+01	25918	2	4.2056e-10	4.2311e-10	4.2571e-10
20	2.0000e+01	12958	2	2.0833e-10	2.1012e-10	2.1195e-10
40	4.0000e+01	6478	2	1.0434e-10	1.0561e-10	1.0692e-10
100	1.0000e+02	2590	2	4.2148e-11	4.2952e-11	4.3804e-11
200	2.0000e+02	1294	2	2.0599e-11	2.1153e-11	2.1753e-11
400	4.0000e+02	646	2	9.5165e-12	9.8762e-12	1.0280e-11
1000	1.0000e+03	258	1	3.6011e-12	3.8110e-12	4.0626e-12
2000	2.0000e+03	128	2	2.1746e-12	2.3553e-12	2.5900e-12
4000	4.0000e+03	63	2	1.0018e-12	1.1178e-12	1.2863e-12
10000	1.0000e+04	24	0	2.7929e-13	3.2378e-13	3.9966e-13
20000	2.0000e+04	11	0	2.5101e-13	3.0659e-13	4.2972e-13
40000	4.0000e+04	5	0	1.2046e-13	1.5615e-13	2.7415e-13

Figura 33. Varianza de Allan para serie a 72h de reloj 30MHz



AF	Tau	#	Alpha	Min Sigma	Sigma	Max Sigma
1	1.0000e+00	259198	2	4.2420e-09	4.2501e-09	4.2583e-09
2	2.0000e+00	129598	2	2.1146e-09	2.1203e-09	2.1261e-09
4	4.0000e+00	64798	2	1.0493e-09	1.0534e-09	1.0575e-09
10	1.0000e+01	25918	1	4.2063e-10	4.2311e-10	4.2563e-10
20	2.0000e+01	12958	1	2.0838e-10	2.1012e-10	2.1191e-10
40	4.0000e+01	6478	0	1.0450e-10	1.0561e-10	1.0676e-10
100	1.0000e+02	2590	2	4.2149e-11	4.2952e-11	4.3804e-11
200	2.0000e+02	1294	2	2.0606e-11	2.1160e-11	2.1761e-11
400	4.0000e+02	646	1	9.5723e-12	9.9287e-12	1.0328e-11
1000	1.0000e+03	258	-2	4.4278e-12	4.6284e-12	4.8592e-12
2000	2.0000e+03	128	2	5.2494e-12	5.6854e-12	6.2521e-12
4000	4.0000e+03	63	-2	9.3479e-12	1.0187e-11	1.1303e-11
10000	1.0000e+04	24	-2	2.0642e-11	2.3542e-11	2.8153e-11
20000	2.0000e+04	11	-1	3.1067e-11	3.7221e-11	4.9509e-11
40000	4.0000e+04	5	-1	3.7950e-11	4.8230e-11	7.7460e-11

Figura 34. Varianza de Allan para serie a 72h de reloj 30MHz filtrada

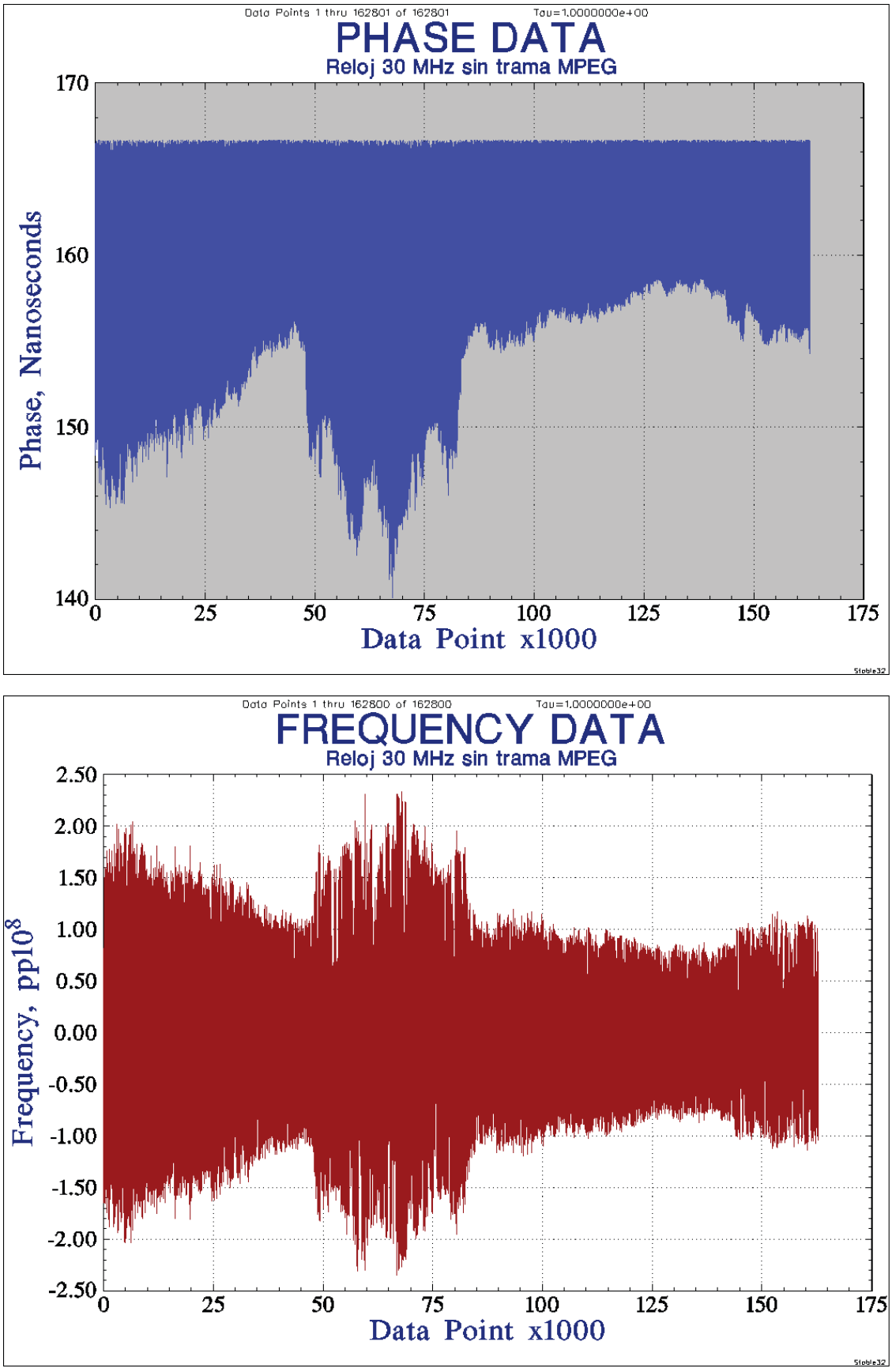
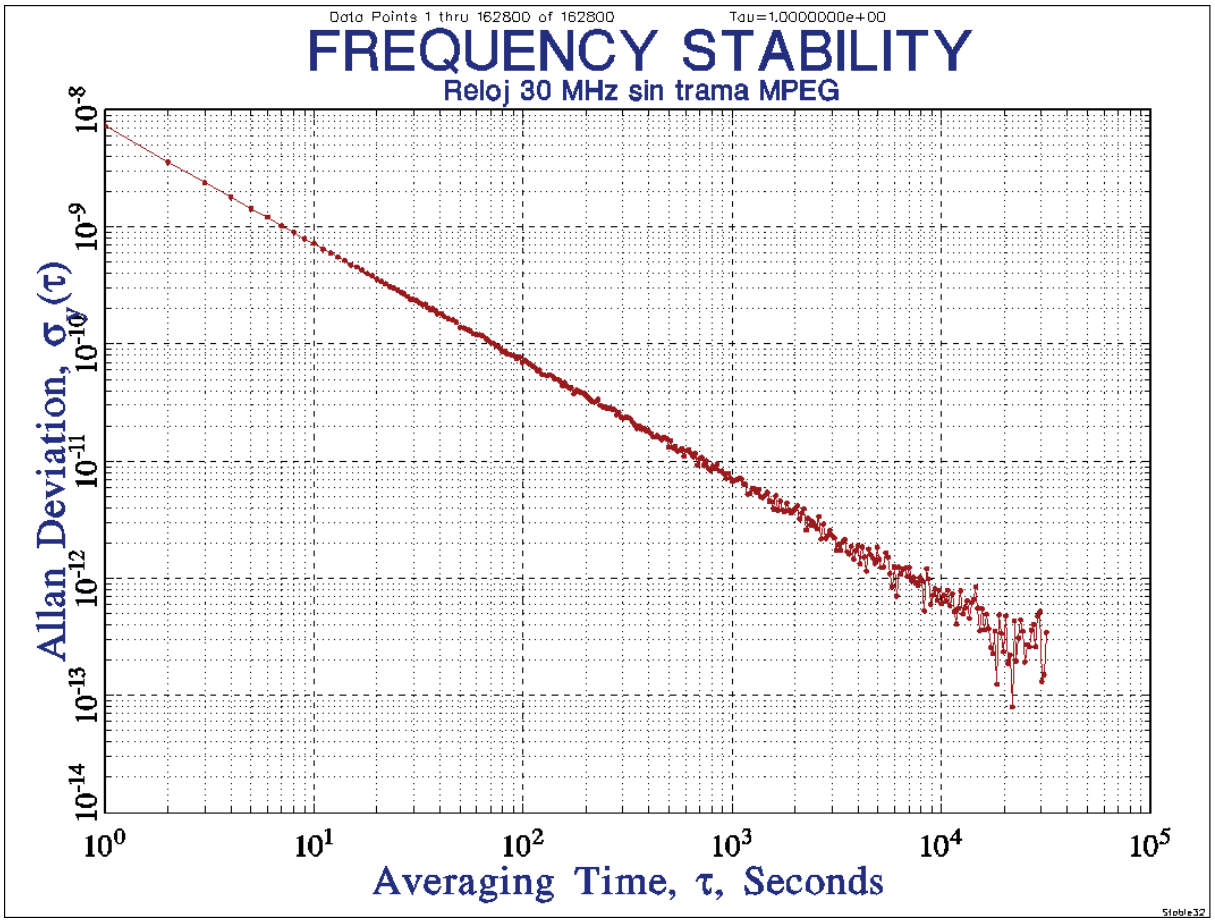


Figura 35. Fase incremental y frecuencia fraccional del reloj de 30MHz en ausencia de trama MPEG para un periodo de observación de 26 horas



AF	Tau	#	Alpha	Min Sigma	Sigma	Max Sigma
1	1.0000e+00	162799	2	7.2274e-09	7.2449e-09	7.2626e-09
2	2.0000e+00	81399	2	3.5721e-09	3.5843e-09	3.5967e-09
4	4.0000e+00	40699	2	1.7913e-09	1.8000e-09	1.8088e-09
10	1.0000e+01	16279	2	7.1811e-10	7.2360e-10	7.2923e-10
20	2.0000e+01	8139	2	3.5632e-10	3.6017e-10	3.6415e-10
40	4.0000e+01	4069	2	1.8001e-10	1.8276e-10	1.8563e-10
100	1.0000e+02	1627	2	7.1271e-11	7.2981e-11	7.4822e-11
200	2.0000e+02	813	2	3.5161e-11	3.6348e-11	3.7665e-11
400	4.0000e+02	406	2	1.6825e-11	1.7622e-11	1.8546e-11
1000	1.0000e+03	161	2	7.2319e-12	7.7706e-12	8.4507e-12
2000	2.0000e+03	80	2	3.4594e-12	3.8179e-12	4.3172e-12
4000	4.0000e+03	39	2	1.8837e-12	2.1548e-12	2.5912e-12
10000	1.0000e+04	15	1	5.4218e-13	6.5858e-13	9.0852e-13
20000	2.0000e+04	7	1	3.5469e-13	4.5598e-13	7.6940e-13

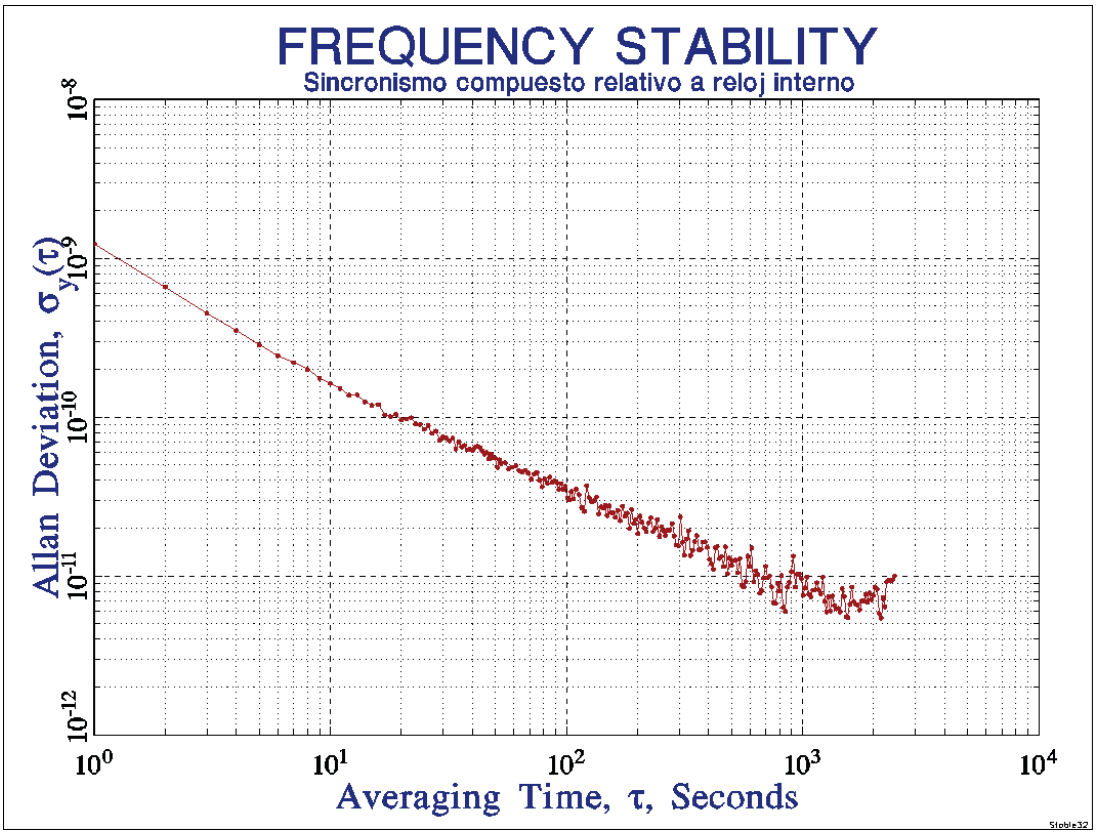
Figura 36. Varianza de Allan para serie a 26h de reloj 30MHz en ausencia de trama MPEG

6.1.3 Sincronismo entre señales

Ahora se comparará la señal de 30 MHz procedente del interfaz PCMCIA con la de sincronismo de línea. Para comparar el sincronismo compuesto, sin implementar una circuitería de extracción de cada una de las dos señales que lo componen, se seguirá el siguiente método. Se mantiene la señal patrón de 1 pps procedente del reloj de satélite para el armado del contador. El disparo se inicia con la señal de sincronismo compuesto, obtenida de la salida analógica y finaliza al paso por cero del flanco ascendente de la señal patrón de 30 MHz. Esta última actúa ahora como reloj patrón. El proceso se repite a cada segundo obteniéndose el ruido de fase promediado en el segundo anterior. No hay tiempos muertos y el ruido de fase resulta muy pequeño como se verá en la varianza de Allan. Evidentemente, la señal de armado es plesiócrona respecto a las otras dos que son sincronas. Los deslizamientos darán algunos valores de medida disparatados que es preciso eliminar. El resultado obtenido puede verse en la Figura 37. Obsérvese la desviación respecto al cero de la frecuencia fraccional se encuentra en el orden de 10^{-12}.

La varianza de Allan indica una estabilidad de señal semejante a la del patrón, lo que quiere decir que su estabilidad es tan próxima que no admite comparación.

Repetimos este proceso para comparar la señal codificada de audio S/PDIF con la señal de reloj PCMCIA que actúa como patrón. La señal S/PDIF, como es lógico, está asociada a la trama MPEG, y solo existe si el receptor sintoniza alguna emisora. Se compone de una trama digital que corresponde a una modulación de impulsos codificados (PCM). No tiene velocidad normalizada para acomodarse a muestras codificadas con diferente número de bits. La señal resultante se codifica mediante un código de línea similar al Manchester diferencial, que supone transiciones en los puntos significativos del reloj, cuando se envía un “1” a la línea, y la pérdida de una transición intermedia al carácter enviado cuando este es un “0”. De nuevo, se utilizará el mismo esquema que en el caso del sincronismo de señal analógica, para evitar implementar la circuitería de extracción de reloj. El armado del contador se realizará mediante la señal de 1ppm, el disparo se efectuará con el flanco de subida de la señal S/PDIF y la finalización del intervalo de conteo, con el paso por cero del flanco ascendente de la señal de 30 MHz, que actúa como señal patrón.



AF	Tau	#	Alpha	Min Sigma	Sigma	Max Sigma
1	1.0000e+00	12473	2	1.2225e-09	1.2332e-09	1.2442e-09
2	2.0000e+00	5820	1	6.5497e-10	6.6260e-10	6.7051e-10
4	4.0000e+00	2924	1	3.4586e-10	3.5164e-10	3.5771e-10
10	1.0000e+01	1174	1	1.5910e-10	1.6332e-10	1.6791e-10
20	2.0000e+01	592	0	9.3293e-11	9.6447e-11	9.9947e-11
40	4.0000e+01	293	0	5.9028e-11	6.1841e-11	6.5100e-11
100	1.0000e+02	119	0	3.1542e-11	3.3904e-11	3.6889e-11
200	2.0000e+02	61	0	1.6350e-11	1.8054e-11	2.0433e-11
400	4.0000e+02	30	0	1.3999e-11	1.6018e-11	1.9273e-11
1000	1.0000e+03	11	0	6.8825e-12	8.4067e-12	1.1783e-11
2000	2.0000e+03	5	0	6.0509e-12	7.8440e-12	1.3771e-11

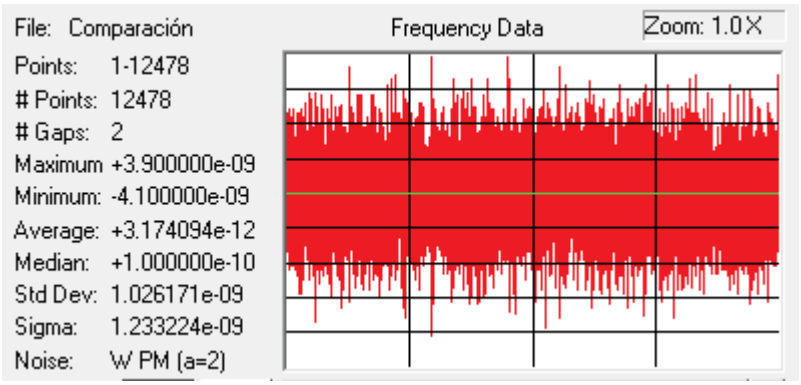
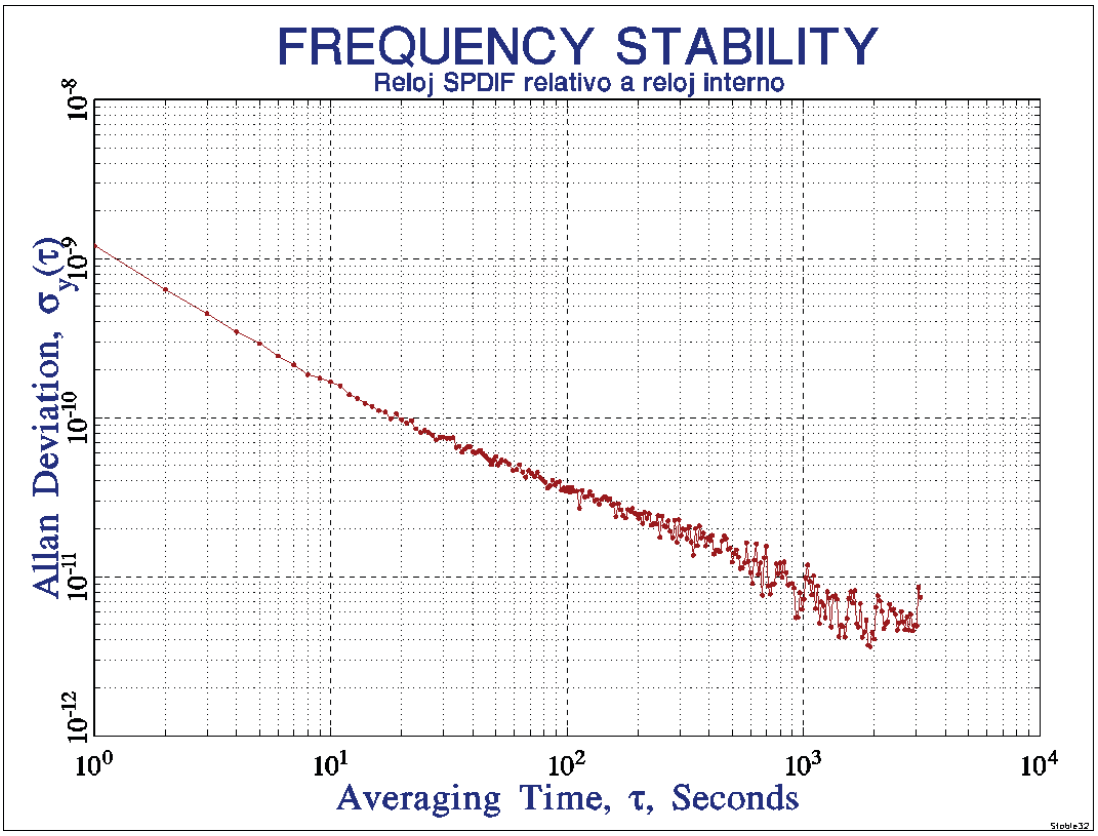


Figura 37. Señal de sincronismo de líneas comparada con patrón de reloj PCMCIA



AF	Tau	#	Alpha	Min Sigma	Sigma	Max Sigma
1	1.0000e+00	15850	2	1.1962e-09	1.2055e-09	1.2150e-09
2	2.0000e+00	7391	1	6.3429e-10	6.4085e-10	6.4762e-10
4	4.0000e+00	3678	1	3.4277e-10	3.4785e-10	3.5317e-10
10	1.0000e+01	1483	1	1.6440e-10	1.6828e-10	1.7245e-10
20	2.0000e+01	757	0	9.4114e-11	9.6942e-11	1.0004e-10
40	4.0000e+01	379	0	5.8477e-11	6.0953e-11	6.3774e-11
100	1.0000e+02	153	0	3.2687e-11	3.4850e-11	3.7512e-11
200	2.0000e+02	78	0	2.0597e-11	2.2511e-11	2.5081e-11
400	4.0000e+02	38	1	1.5860e-11	1.8139e-11	2.1803e-11
1000	1.0000e+03	14	0	6.9672e-12	8.3656e-12	1.1189e-11
2000	2.0000e+03	6	0	2.9151e-12	3.7268e-12	6.1363e-12

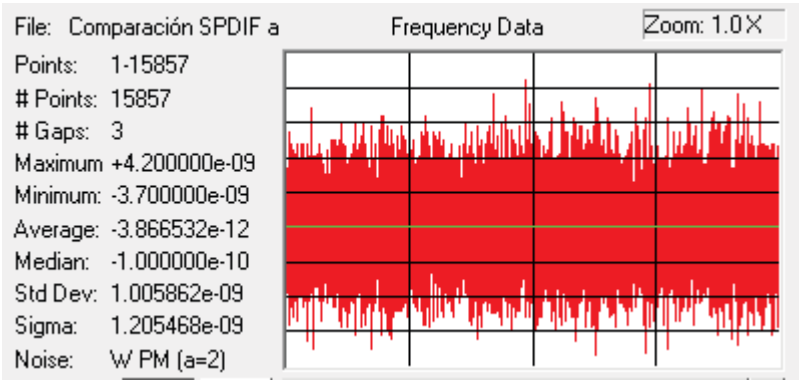


Figura 38. Señal de reloj S/PDIF comparada con patrón de reloj PCMCIA

Cuando coincide un cero lógico en la señal S/PDIF en un instante significativo en que debiera efectuarse el disparo, se producirá un retardo de medio ciclo que supone un pequeño incremento del tiempo τ que, a efectos de esta medida, no se tendrá en cuenta. Los resultados obtenidos son muy similares a los obtenidos para el sincronismo horizontal. Pueden verse en la Figura 38.

En el corto plazo, tanto la señal la señal de sincronismo de líneas como la señal del reloj del interfaz S/PDIF presentan una estabilidad similar a la del reloj del interfaz PCMCIA. Esto significa que heredan la estabilidad del oscilador local. En el largo plazo, la frecuencia local varía con la temperatura con variaciones de una decena de Hercios, lo que hace que los sincronismos generados por la trama MPEG no sean completamente plesiócronos con la señal local y existan deslizamientos. Dado que los pulsos de sincronismo se producen en los instantes significativos de la señal de reloj, aparentan ser síncronos, dado que el método que se ha utilizado únicamente mide la diferencia de fases entre señales, pero no detecta los deslizamientos. Estos, pueden introducir algún ruido de fase en el largo plazo, de tan baja frecuencia como las variaciones de la temperatura.

6.2 Efectos en el posicionamiento

A lo largo de este estudio se ha visto como el ruido añadido a las señales de alta estabilidad convierte a estas en portadoras moduladas en cuadratura con los ruidos de amplitud y fase. El análisis de este proceso refleja que afecta fundamentalmente a su fase. En la modulación de ángulo, la potencia de la señal moduladora se detrae de la portadora y el espectro presenta infinitos armónicos cuyas amplitudes van disminuyendo con la rapidez que caracteriza a las funciones de Bessel que las modelan. Para las señales de ruido consideradas, la modulación es de banda estrecha y da lugar a un espectro semejante al de la modulación de amplitud pero también afectado por una función de transferencia que decae con la frecuencia, aunque esta variación resulte insignificante en banda estrecha. La incertidumbre de fase significa incertidumbre en el periodo instantáneo, que queda reflejada como incrementos del tiempo de fase, que afectan a las señales de reloj. Estos, a su vez, se reflejan en incertidumbres en la obtención del tiempo horario y afectan a las incertidumbres de los datos obtenidos en los sistemas de posicionamiento. Un parámetro utilizado para caracterizar la bondad de tales sistemas es el valor del DGOP que se obtiene a partir de la matriz de visibilidad. El término de incertidumbre en el tiempo en relación a la incertidumbre en la estimación del rango, conforma la TDOP y su suma cuadrática con las incertidumbres de

posición, también en relación a la incertidumbre del rango, da lugar a la GDOP. No se hace mención para este parámetro, del nivel de confianza, por cuanto, al tratarse de un cociente de incertidumbres, ya se suponen todas ellas calculadas para un mismo nivel y cualquier coeficiente de expansión afectará en la misma proporción a numerador y denominador.

La incertidumbre en el tiempo, convertida a valor espacial, se compara en la GDOP con la incertidumbre en posición. Como ya vimos, la diferencia de periodos entre los relojes de transmisión y recepción induce un error de posición que resulta acumulativo. Este error, para un único periodo viene dado por:

$$v(T_r - T_e) = v\frac{\Delta f}{f}(T + \Delta T) \sim \frac{\Delta f}{f} v.T$$

La frecuencia fraccional, para un reloj sin deriva, tiene valor medio nulo, pero presenta dispersión como consecuencia del ruido de fase. Los resultados obtenidos en las medidas que se han presentado en el apartado anterior, muestran varianzas de Allan con órdenes de magnitud que se sitúan en valores como máximo en el entorno de 10^{-9}, estimado para valores de τ de un segundo. Para un sistema de posicionamiento con tiempos de refresco de un segundo, la incertidumbre debida al reloj vendrá dada por la obtenida para la frecuencia fraccional multiplicada por la velocidad de la señal en el medio. Si se supone, para atmosfera estándar, una velocidad de propagación radioeléctrica que no difiere significativamente de su valor en el vacío, ligeramente inferior a 3.10^8 m/s, se obtienen incertidumbres de posición de 1,28 metros, para una incertidumbre de $4{,}25.10^{-9}$.

Por otra parte, la GDOP viene dada, como ya se ha visto, por:

$$GDOP = \frac{\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 + \sigma_t^2}}{\sigma_R}$$

Aún no conociendo la incertidumbre de posición que correspondería a un sistema de navegación basado en estaciones terrestres, se puede efectuar una comparación con la estimación de incertidumbre para sistemas GNSS. Así GPS y GLONASS estiman 30 metros en posicionamiento horizontal y 100 metros en altitud. Asumiendo que la incertidumbre horizontal se corresponde con $\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$ el valor obtenido para $\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_t^2}$ empeora la incertidumbre horizontal en 2,7 centímetros.

Es de suponer que un sistema basado en estaciones fijas cuya posición es perfectamente conocida, sin correcciones relativistas ni ionosféricas y con distancias más pequeñas que las asociadas a los sistemas basados en satélites, pueda dar menores incertidumbres de posición espacial y la incertidumbre debida a la frecuencia fraccional tenga más importancia en la GDOP. En todo caso, aún suponiendo que fuesen nulos los valores de σ_x, σ_y y σ_z, y toda la incertidumbre correspondiese a σ_t estaríamos hablando de incertidumbres en el cálculo de los rangos en el entorno de 1,3 metros. Resulta evidente que el reloj es suficientemente exacto para permitir el posicionamiento.

Las señales de referencia extraídas de un receptor DVD-T comercial, sincronizan su fase con la señal de trama MPEG y cabe pensar que si está es más exacta, puede mejorarse la estabilidad en la referencia de reloj. Los fabricantes de los decodificadores cierran el bucle de sincronismo de fase por software a partir de la señal de frecuencia intermedia que es previamente muestreada. La detección de los cruces por cero permite ajustar los offsets de frecuencia para extraer el reloj, y el jitter de este se ve afectado por la frecuencia de muestreo. También esta tiene un ruido de fase que da lugar a que el número de bits significativos (ENOB) sea inferior al número de bits del bus del conversor, y esta circunstancia también afecta al jitter de la señal de reloj. La electrónica implementada en receptores comerciales se diseña para cumplir las especificaciones propias de la radiodifusión digital, y, cumplidas estas, no se busca obtener mejor estabilidad. La mejora que pueda obtenerse parte del diseño de una circuitería específica para este fin.

El resultado, por otra parte, de la señal de reloj obtenida, tiene una estabilidad para la frecuencia fraccional en el orden de 10^{-9}, equivalente a la de un patrón de cuarzo con temperatura controlada en horno (OCXO). A partir de este reloj se puede obtener un patrón de referencia normalizado a las frecuencias habituales de 1, 5 o 10 MHz. Pero es preciso ser cuidadosos para que el modo de obtención de estas señales no degenere su incertidumbre.

7. CONCLUSIONES Y LINEAS FUTURAS

7.1 Conclusiones

Las conclusiones del estudio realizado pueden resumirse en los siguientes puntos:

1.- La estabilidad en el corto plazo de los osciladores locales en los receptores DVB-T utilizados, resulta suficiente para satisfacer las especificaciones del sistema de radiodifusión, sin necesidad de filtrar el jitter intrínseco al oscilador local. Las tolerancias permitidas en el reloj TMDS se satisfacen con la estabilidad de los osciladores de cuarzo, sin necesidad de mejorarla. Se ha comprobado que los receptores examinados no lo hacen.

2.- La deriva, cuya causa más importante son las variaciones de temperatura, se corrige en los bucles de enganche de fase digitales del receptor, para asegurar la estabilidad del reloj de trama y con él, la estabilidad de las señales de sincronismo, evitando la degradación de la calidad del sistema. Esta corrección actúa eliminando jitter (o wander) de muy baja frecuencia. En un sistema de posicionamiento, un desplazamiento de fase extremadamente lento equivale a un error de reloj y puede corregirse continuamente, en refrescos sucesivos.

3.- La estabilidad medida en el reloj de trama (o en el de sincronismo), en las pruebas realizadas, es suficiente para establecer el posicionamiento (dentro de las incertidumbres que ya discutidas) basándose en señales de tiempo difundidas por sistemas DVB-T. Obviamente estas señales también resultan de utilidad para otras aplicaciones distintas del posicionamiento (time-stamping, patrones de referencia en laboratorio, obtención de tiempo horario etc..)

4.- La unidad de recuperación de reloj incorporada en la circuitería del receptor actúa como un PLL cuya función de transferencia filtra las frecuencias muy bajas, pero actúa débilmente sobre el jitter, que ahora corresponde al generador del receptor. Mejorar la estabilidad supone, en radio digital, modificar el firmware del receptor para mejorar la exactitud de los cruces por cero de la señal de frecuencia intermedia muestreada. El incremento de la velocidad de muestreo o el jitter de la propia señal de muestreo, pueden empeorar el ENOB malogrando la mejora perseguida y forzando a nuevos diseños hardware.

7.2 Líneas futuras

Un sistema de posicionamiento basado en estaciones DVD-T, puede de tipo TOA o TDOA. Los retardos en el tiempo, que puede sufrir la trama MPEG a lo largo de su trayecto,

antes de ser emitida parecen aconsejar sistemas TDOA. Pero la señal MPEG contiene tiempo y escala UTC. Aunque la escala presente algún retardo, al ser la misma en todos los emisores, carece de importancia. Un aspecto fundamental radica en la necesidad de identificar el emisor del que procede la señal. Es preciso insertar esta información en el multiplex MPEG de transporte. Esta necesidad puede requerir la colaboración del operador que gestiona las estaciones de DVB-T, para insertar las marcas necesarias que identifiquen el poste. O mejor aún, su posición exacta.

8. REFERENCIAS

Bibliografía

[1] San Agustin, Confesiones. Libro XI, 1997 (Altaya) ed., Alianza Editorial S.A., 1990.

[2] R. Descartes, Discurso del Método, Dióptrica, Meteoros y Geometría, 2ª ed., Madrid: Alfaguara S.A., 1981.

[3] A. Einstein, La teoría de la relatividad, Madrid: Alianza Editorial S.A., 1973.

[4] Real Academia Española;, Diccionario de la Lengua Española, Ed. 22 ed., Espasa, 2001.

[5] ITU-R, Rec. TF.686-2. Glosario y definiciones de términos de tiempo y frecuencia, Genéve: ITU, 2002.

[6] Á. Alonso-Álvarez, *Acerca de un lenguaje universal para la ciencia. Comunicación privada,* 2012.

[7] JCGM 200:2008, International Vocabulary of Metrology - Basic and general concepts and associated terms (VIM), 3ª ed. ed., ed. BIPM, 2008.

[8] N. Ashby and M. Weiss, Global Positioning System Receivers and Relativity, NIST Technical Note 1385, 1ª ed. ed., U. G. P. OFFICE, Ed., Boulder, Colorado 80303-3328: Time and Frequency Division. National Institute of Standards and Technology (NIST), 1999.

[9] FLUKE, Calibration: Philosophy in Practice, ed. 2ª ed., Everett, WA 98206-9090: Fluke Corporation, 1994.

[10] ETSI, EN 300 462-1-1 V1.1.1 (1998-05) Transmission and Multiplexing (TM); Generic requirements for synchronization networks; Part1.1:Definitions and terminology for synchronization networks, ETSI, 1998.

[11] Espasa-Calpe, Diccionario Enciclopédico Ilustrado tomo xx, Espasa-Calpe.

[12] J. Betts, "John Harrison (1693–1776) and Lt. Cdr Rupert T. Gould R.N. (1890–1948)," [Online]. Available: http://www.nmm.ac.uk/upload/pdf/Gould-Harrison-longitude-JBetts.pdf. [Accessed 4 Ago 2011].

[13] M. M. Gamez Mejias, «Origen, evolución y futuro de la determinación normativa de la hora legal en España y la Unión Europea,» *Revista de Administración Pública,* vol. 2008, nº 177, pp. 377-417, Sept 2008.

[14] Comité International des Poids et Mesures, «Definition of the unit of time (second),» de *10th Conférence Générale des Poids et Mesures*, 1956.

[15] P. K. Seidelmann, Explanatory Supplement to the Astronomical Almanac, University Science Books, 1992.

[16] Conférence Générale des Poids et Mesures, "Resolution 1 of the 13th meeting of the CGPM (1967/68)," 1967.

[17] Conférence Générale des Poids et Mesures (1999), «Comptes Rendus de la 21e réunion de la Conférence Générale des Poids et Mesures (1999),» 2001.

[18] Earth Orientation Center of IERS, «IERS Bulletin C,» París, 2015.

[19] D. W. Allan, N. Ashby and C. C. Hodge, "The Science of Timekeeping," Hewlett Packard, 1997.

[20] M. Desaintfuscien, «Part III Applications,» de *Data Processing in Precise Time and Frequency Applications*, Berlin Heidelberg, Sprinter-Verlag, 2007.

[21] F. Riehle, Frequency standards, Wiley-VCH, 2004.

[22] Joint Committee for Guides in Metrology (JCGM/WG 1), JCGM 100:2008.- Evaluation of measurement data. Guide to the expression of uncertainty in measurement, (BIPM,

IEC, IFCC, ILAC, ISO, IUPAC, IUPAP y OIML), 2008.

[23] M. Kayton y W. Fried, Avionics Navigation Systems, Ed.2 ed., Wiley&Sons, 1997.

[24] R. B. Langley, «Dilution of Precision,» *GPS World,* vol. 10 nº5, pp. 52-59, 1999.

[25] B. T. Fang, «Simple Solutions for Hyperbolic and Related Position Fixes,» *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems,* vol. 26 nº5, pp. 748-753, Sept 1990.

[26] R. Bucher y D. Misra, «A Synthesizable VHDL Model of the Exact Solution for Three-dimensional Hyperbolic Positioning System,» *VLSI Design,* vol. 15, nº 2, pp. 507-520, 2002.

[27] H. B. Lee, «Accuracy of Range-Range and Range-Sum Multilateration System,» *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems,* pp. 1346-1361, Nov 1975.

[28] C. Chien-Sheng, C. Yi-Jen, L. Chin-Tan y L. Jium-Ming, «Calculation of Weighted Geometric Dilution of Precision,» *Journal of Applied Mathematics,* Sept 2013.

[29] K. Yang, J. An, Z. Xu y X. Bu, «A Generalized Total Least-Squares Algorithm for Hyperbolic Location,» de *4th International Conference on Wireless Communications, Networking and Mobile Computing, 2008. WiCOM '08.*, 2008.

[30] R. Yarlagadda, I. Ali, N. Al-Dhahir y J. Hershey, «GPS GDOP metric,» *IEE Proc.-Radar, Sonar Navig.,* vol. 147, nº 5, pp. 259-264, Oct 2000.

[31] . B. Li, A. G. Dempster y J. Wang , «3D DOPs for Positioning Applications Using Range Measurements Wireless Sensor Network,» *Wireless Sensor Network,* vol. 3, nº 10, pp. 334-340, Oct 2011.

[32] IEEE Standards Coordinating Committe 27, «IEEE Std 1139™-2008. IEEE Standard Definitions of Physical Quamtities for Fundamental Frequency and Time Metrology - Random Instabilities,» 2008.

[33] JEDEC Board Ballots JCB-02-67, JCB-02-112, JCB-02-113, and JCB-02-114, «JESD65B. Definition of Skew Specifications for Standard Logic Devices,» 2003.

[34] M. S. McCorquodale y R. B. Brown, «On Modern and Historical Short-Term Frequency Stability Metrics for Frequency Sources,» de *European Time and Frequency Forum and International Frequency Control Symposium (EFTF-IFCS)*, Besançon, 2009.

[35] J. R. Carson, «Notes on the Theory of Modulation,» *PROC. I.R.E.,* vol. 10, pp. 57-64, feb 1922.

[36] F. Olver, «Bessel Functions of Integer Order,» de *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications Inc., 1972.

[37] G. Dattoli, L. Giannessi, L. Mezi y A. Torre, «Theory of Generalized Bessel Functions,» *Il Nuovo Cimento,* vol. 105 B, nº 3, Mar 1990.

[38] G. Watson, A Treatise on the Theory of Bessel Functions, Cambridge University Press, 1996.

[39] L. Giacoletto, «Generalized Theory of Multitone Amplitude and Frequency Modulation,» *Proceedings of the I.R.E.,* pp. 680-693, Jul 1947.

[40] M. Abramowitz y I. A. Stegun, Handbook of Mathematical Functions, Washington: National Bureau of Standards, 1972.

[41] D. Gabor, «Theory of communication,» *Journal IEE,* vol. 93, nº 26, pp. 429-457, Nov. 1946.

[42] E. Bedrosian, «The Analytic Signal Representation of Modulated Waveforms,» *Proc. IRE,* vol. 50, pp. 2071-2076, 1962.

[43] L. Cohen, Time-frequency analysis, Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall PTR, 1995.

[44] L. Bernier y F. Gardiol, «The Analytic Signal Representation of Oscillators with Application to Frequency Stability Analysis,» de *Proc. 39th Annual Frequency Control Symposium*, Philadelphia. USA, 1985.

[45] ITU-R, Selection and Use of Precise Frequency and Time Systems, R. Sidnor y D. Allan, Edits., Genève: ITU, 1997.

[46] L. S. Cutler y C. L. Searle, «Some Aspects of the Theory and Measurement of Frequency Fluctuations in Frequency Standards,» *Proceedings of the IEEE,* vol. 54, nº 2, Feb.1966.

[47] P. Kartaschoff, Frequency and Time, New York: Academic Press, 1978.

[48] D. Allan, P. Kartaschoff, J. Vanier, J. Vig, G. Winkler y N. Yannoni, «Standard terminology for fundamental frequency and time metrology,» de *42nd Annual Frequency Control Symposium*, 1988.

[49] Bureau International des Poids et Mesures - Organisation intergouvernementale de la Convention du Mètre, Le Système international d'unités - The International System of Units SI, 8e édition ed., BIPM, 2006.

[50] A. Thompson y B. N. Taylor, Guide for the Use of the International System of Units (SI), 2008 Edition ed., National Institute of Standards and Technology.

[51] J. Barnes, A. Chi, L. Cutler, D. Healey, D. Leeson, T. McGunigal, J. Mullen, W. Smith, R. Sydnor, R. Vessot y G. Winkler, «Characterization of Frequency Stability,» *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement,* vol. 20, nº 2, pp. 105-120, May 1971.

[52] P. Lesage y C. Audoin, «Characterization and Measurement of Time and Frequency Stability,» *Radio Science,* vol. 14, nº 4, pp. 521-539, 1979.

[53] J. Rutman, «Characterization of Phase and Frequency Instabilities in Precision Frequency Sources: Fifteen Years of Progress,» *Proceedings of the IEEE,* vol. 66, nº 9, pp. 1048-1074, Sept 1978.

[54] D. W. Allan, «Statistics of Atomic Frequency Standards,» *Proceedings of the IEEE,* vol. 54, nº 2, pp. 221-230, feb 1966.

[55] M. Rabinowitz y J. Spilker, «A New Positioning System Using Television Synchronization Signals,» *IEEE Transactions on Broadcasting,* vol. 51, nº 1, pp. 51-61, Mar 2005.

[56] European Broadcasting Union, «ETSI EN 300 744 Digital Video Broadcasting (DVB); Framing structure, channel coding and modulation for digital terrestrial television,» nº REN/JTC-DVB-234, 2009.

[57] ATSC, «ATSC Digital Television Standard With Ammendment no. 1,» Sept. 1995.

[58] Digital Display Working Group, «Digital Visual Interface DVI. Rev. 1.0,» April 1999.

[59] HDMI Licensing, LLC, «High-Definition Multimedia Interface Specification V 1.4,» Jun 2009.

[60] J. A. Barnes y D. W. Allan, «Variances Based on Data with Dead Time Between the Measurements,» de *Proceedings of the Nineteenth Annual Precise Time and Time Interval (PTTI) Applications and Planning Meeting, Redondo Beach, CA, 1-3 Dec 1987*.

[61] S. T. Dawkins, J. J. McFerran y A. N. Luiten, «Considerations on the Measurement of the Stability of Oscillators with Frequency Counters,» *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control,* Dec 2006.

[62] C. Greenhall, «A Method por Using a Time Interval Counter to Measure Frequency Stability,» *TDA Progress Report 42-90,* pp. 149-156, Jun 1987.