Capítulo II: MECÁNICA DEL SÓLIDO RÍGIDO

5ª Lección: **Sistema de fuerzas gravitatorias. Cálculo de centros de gravedad de figuras planas: teoremas de Guldin.**

Sistemas de fuerzas gravitatorias

La deducción parte de la ley de Newton de la gravitación universal, uno de los seis principios fundamentales de la Mecánica[1].

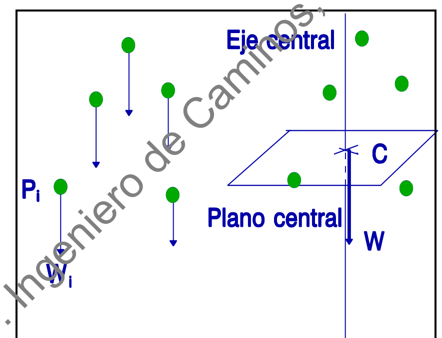

Fig.1 Esquema conceptual.

Se considera un sistema de "i" partículas, definido por el peso W_i de cada una, aplicado en $P_i(x_i, y_i, z_i)$.

Los vectores W_i son, por tanto, ligados o fijos, es decir, tienen punto de aplicación y además, al indicar la citada ley de Newton que sus rectas de aplicación se cortan en el centro de la Tierra, sus rectas se consideran paralelas entre sí.

Durante la explicación de la teoría de vectores –fuerzas, en el caso tratado en el curso 2016-2017 de Fundamentos Físicos de la Ingeniería- deslizantes, se demostró -y ejemplificó-, que los sistemas de fuerzas paralelas, ya sea en 3D (placa exagonal de cimentación ej. 3.95, BJ5) o en 2D, admitían eje central, además, claro está, de los sistemas de fuerzas coplanarias.

El sistema de fuerzas gravitatorias de un sistema de partículas está constituido, por tanto, por fuerzas paralelas, por lo que si no se tratara de fuerzas ligadas, tendría perfecto sentido hablar de eje central.

Hay que recordar que el sistema de fuerzas gravitatorias, aunque paralelas, es un sistema de fuerzas ligadas, por lo que en rigor, no existe eje central. Sin embargo, la teoría de vectores deslizantes proporciona solución al caso de vectores paralelos, por lo que será aplicada, como aproximación, con el objetivo de avanzar en el estudio de las fuerzas gravitatorias.

Así pues, se supondrá que las fuerzas gravitatorias son vectores deslizantes y que, por consiguiente, tienen eje central que, como se sabe es, por definición, la recta soporte de la fuerza que equivale mecánicamente al sistema de fuerzas paralelas deslizantes. Esa fuerza mecánicamente equivalente al sistema de fuerzas gravitatorias -supuestas deslizantes-, recibe el nombre de peso.

En este momento de la aproximación al análisis de las fuerzas gravitatorias se ha llegado -como cabía esperar, al haber asimilado vectores ligados con vectores deslizantes-, a una inconsistencia, como es el que un sistema de vectores ligados sea mecánicamente equivalente a una fuerza que no tiene punto, sino recta, de aplicación.

Se necesita introducir un nuevo concepto que se denomina "Virial[2,3,4] en un punto "Q" cualquiera, (V_Q), de un sistema de vectores ligados" y que se define como la suma del producto escalar de un vector dirigido desde el punto "Q" al "P_i" por el vector W_i, es decir:

$$V_Q = \sum QP_i \bullet \vec{W}_i \qquad (0)$$

El virial es, por tanto, una magnitud escalar, y como tal puede ser positiva, negativa o nula. En el caso de que los vectores ligados sean paralelos, se demuestra que el espacio queda "compartimentado" en planos cuyos puntos tienen el mismo valor de virial y que, además, tales planos son perpendiculares a la dirección de los vectores ligados.

Se denomina plano central al que está asociado al valor nulo del virial, es decir, que si "P" pertenece a dicho plano, entonces:

$$V_P = \sum \vec{P}P_i \bullet \vec{W}_i = 0 \qquad (1)$$

Por otro lado, de la aproximación que suponía que los vectores ligados paralelos eran deslizantes, resulta que en cada punto "Q" del eje central, se verifica que:

$$\vec{M}_Q^R = \sum \vec{Q}P_i \, x \, \vec{W}_i = \vec{0} \qquad (2)$$

La intersección del plano central con el eje central es el punto central, que es el punto de aplicación del sistema de vectores ligados, que en el caso de las fuerzas gravitatorias, se denomina "centro de gravedad".

La resolución del sistema de ecuaciones correspondientes al eje y al plano central, proporciona las coordenadas del punto central "C", del sistema de vectores ligados:

$$X_C = \frac{\sum x_i \bullet W_i}{\sum W_i} \quad Y_C = \frac{\sum y_i \bullet W_i}{\sum W_i} \quad Z_C = \frac{\sum z_i \bullet W_i}{\sum W_i} \qquad (3)$$

en las que "x_i", "y_i" y "z_i" son las coordenadas de "P_i", punto de aplicación de W_i. Conviene ya, desde este momento, que dichas coordenadas del punto "P_i" sean vinculadas al punto de aplicación del peso, que pronto será sustituido por el de masa.

Las expresiones dadas por la ecuación (3) se generalizan al caso de un cuerpo continuo en 3D:

$$\overline{X} = \frac{\int x_{el.} \bullet dw}{\int dw} \quad \overline{Y} = \frac{\int y_{el.} \bullet dw}{\int dw} \quad \overline{Z} = \frac{\int z_{el.} \bullet dw}{\int dw} \qquad (4)$$

que proporcionan las coordenadas del centro de gravedad del cuerpo considerado, en las que, como se anticipó, "x_{el}", "y_{el}" y "z_{el}", son las coordenadas del elemento diferencial de peso "dw".

Cuando el sistema de vectores ligados es el de las fuerzas gravitatorias, se suele hablar de "centro de gravedad" aunque, en rigor, se trata del centro de masas, pues sólo la masa es propiedad de los cuerpos, ya que el peso no lo puede ser, en tanto que depende del valor de la constante gravitatoría.

Centro de gravedad de figuras planas: centroides de áreas y líneas.

A continuación se desarrollará el caso particular de esta teoría que resulta más importante en ingeniería civil, que es la determinación del centro de gravedad de áreas y, en su caso, de líneas.

Los elementos estructurales básicos de la edificación convencional son vigas y columnas. En ambos casos, tales cuerpos pueden considerarse como generados por una sección plana que se repite indefinidamente. Se trata pues, de sólidos que admiten el tratamiento que se desarrollará a continuación.

Si se trata de un sólido continuo, hay que recurrir al cálculo diferencial e integral y para ello, empezar por concretar la expresión del peso del elemento diferencial considerado:

$$dW = g \bullet dm = g \bullet \rho \bullet dVol \qquad (5)$$

Si en el sólido continuo considerado resulta que dos de sus dimensiones predominan sobre la tercera; es decir, si el sólido es una placa de densidad "ρ" y espesor "t", resulta:

$$dW = g \bullet dm = g \bullet \rho \bullet dVol = g \bullet \rho \bullet t \bullet dA \qquad (6)$$

y las expresiones (4), quedarían de la siguiente forma:

$$\overline{X} = \frac{\int x_{el.} \bullet g \bullet \rho \bullet t \bullet dA}{\int \rho \bullet t \bullet g \bullet dA};\ \overline{Y} = \frac{\int y_{el.} \bullet g \bullet \rho \bullet t \bullet dA}{\int \rho \bullet t \bullet g \bullet dA};Z = 0 \qquad (7)$$

Si se supone que, como suele ser habitual, el espesor "t" de la placa es constante y que también lo es su densidad –es decir que se trata de una placa homogénea-, el producto "$\rho \bullet t$" sale fuera de la integral y desaparece de numerador y denominador, quedando:

$$\overline{X} = \frac{\int x_{el.} \bullet dA}{\int dA};\ \overline{Y} = \frac{\int y_{el.} \bullet dA}{\int dA};Z = 0 \qquad (8)$$

que proporcionan las coordenadas del centro de gravedad del área de una placa cuyos ejes XY se han hecho coincidir con ella.

El numerador de las expresiones (8) es el producto del diferencial de área por la distancia a un eje. En "Fundamentos Físicos de la Ingeniería" se utilizan ciertos conceptos en diferentes contextos. Uno de ellos es el de momento que, en sentido amplio, se refiere al producto de "algo" por una distancia. Cuando ese "algo" es un área, dicho producto se denomina momento estático y hay dos: el momento estático respecto al eje OY, que es el numerador de la abscisa del centro de gravedad en las expresiones (8), y el momento estático respecto al eje OX que es el numerador de la ordenada del cdg.

El momento estático también se denomina momento de primer orden, para diferenciarlo del momento de segundo orden que es el momento de inercia de un área.

Así pues, si la placa es homogénea y de espesor constante, las coordenadas del centroide, o centro de gravedad de un área resultan ser:

$$X = \frac{\int x_{el.} dA}{\int dA} ; Y = \frac{\int y_{el.} dA}{\int dA} \qquad (9)$$

En la figura 2 se precisa el significado de "x_{el}" e "y_{el}" en las expresiones (9), que no es sino el de las coordenadas del centro de gravedad del elemento diferencial.

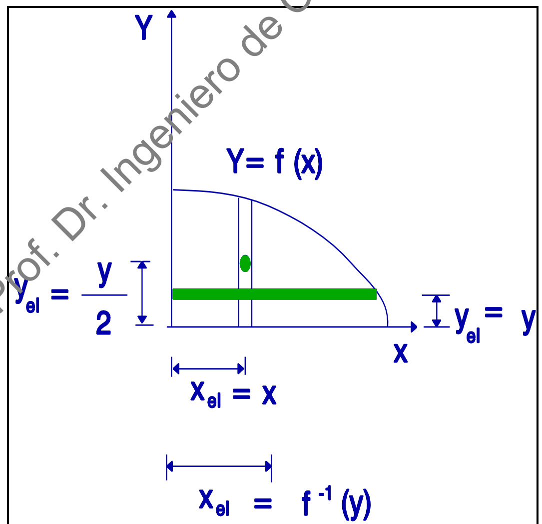

Fig. 2. Elementos diferenciales de área.

Si en la figura 2, y para hallar el cdg del área encerrada por la función f(x), se considera un elemento diferencial vertical, el cdg del elemento diferencial es el punto señalado en color verde y sus coordenadas, las acotadas.

Para el caso del elemento diferencial horizontal –el señalado con la trama verde–, la abscisa de su centro de gravedad "x_{el}" no es la erróneamente acotada en la figura 2, sino la mitad de ella, pues como se ha venido subrayando, se trata de la abscisa del cdg del rectángulo verde. En consecuencia, la abscisa del cdg del elemento diferencial verde es la mitad de la recíproca de f(x)

En el caso de que el área del que se solicita el centroide se pueda descomponer en áreas más sencillas, como es el caso de la superficie rayada de la figura 3, que puede suponerse formada por agregación de un rectángulo, un triángulo y un cuarto de círculo, las expresiones (9) se pueden convertir en las que se muestran a continuación:

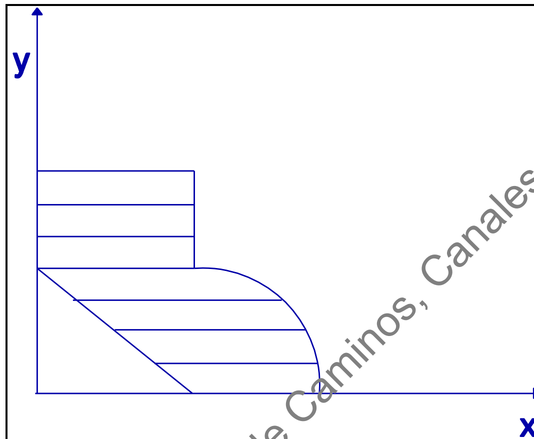

Fig. 3. Área formada por figuras sencillas.

$$\bar{x} = \frac{\sum \bar{x}_i \bullet A_i}{\sum A_i} \quad \bar{y} = \frac{\sum \bar{y}_i \bullet A_i}{\sum A_i} \qquad (10)$$

en las que el sumatorio tiene tres sumandos, los correspondientes a cada una de las sub áreas antes citadas.

El otro caso cuyo tratamiento es de interés es el de un sólido en el que dos de las dimensiones son similares entre sí y muy inferiores a la tercera. A esa descripción responden, como casos más relevantes en ingeniería, los de los cables, pórticos o estructuras lineales formadas por alineaciones rectas y curvas.

Si se representa por "dW" el peso de, por ejemplo, un elemento diferencial de cable, resulta:

$$dW = \rho \bullet g \bullet A \bullet ds \qquad (11)$$

$$siendo\ \ ds = \sqrt{dx^2 + dy^2};\, ds = \sqrt{1 + y'^2}dx \qquad (12)$$

Si el cable en cuestión se supone homogéneo y de sección constante, y se le supone en el plano XY, las expresiones (4) quedarían en la forma:

$$\bar{x} = \frac{\int \bar{x}_{el.} \bullet ds}{\int ds} \quad \bar{y} = \frac{\int \bar{y}_{el.} \bullet ds}{\int ds}$$

Simetrías

Si una figura plana tiene un eje de simetría, es posible considerarlo como eje coordenado, y en tal caso, todo elemento diferencial tendrá otro igual al otro lado de dicho eje. Como consecuencia, la coordenada del elemento diferencial que es perpendicular al eje de simetría, tendrá siempre otra coordenada de signo contrario, por lo que será nula la suma de los momentos estáticos correspondientes al eje de simetría que ha sido adoptado como eje y en tal caso, el centro de gravedad tendrá que estar situado en dicho eje. Es decir, si hay un eje de simetría → c.d.g. del área se encuentra necesariamente en él.

Si la figura tiene dos –o más-, ejes de simetría, su punto de intersección se denomina centro de simetría y la aplicación de la consideración anterior conduce a que el cdg será el punto de intersección de los dos ejes de simetría. En consecuencia, si hay centro de simetría → c.d.g.

Teoremas de Guldin

Los teoremas de Guldin –o de Pappus Guldinus, como los denominan Beer y Johnston-, son de aplicación a figuras planas y a los cuerpos que tales figuras pueden generar cuando giran alrededor de un eje que, por sencillez en el desarrollo inicial de dichos teoremas, se supondrá que no tiene intersección con dichas figuras.

Los teoremas de Guldin pueden ser utilizados para determinar la posición del centro de gravedad de líneas y áreas siempre que se conozca la superficie tridimensional que engendran las primeras y el volumen de las áreas.

En la práctica, la restricción anterior supone que casi siempre se tendrá que hablar de superficies sencillas como la de una esfera ($4\pi R^2$), o la superficie lateral de un cilindro, etc. En cuanto a los volúmenes, tendrá que estarse a los de una esfera ($4\pi R^3/3$), cilindro ($\pi R^2 H$), etc.

El primer teorema de Guldin indica que la superficie generada por una línea al dar una vuelta alrededor de un eje al que no corta, se obtiene multiplicando la longitud de la línea generatriz por la distancia recorrida por su centro de gravedad al girar.

El segundo teorema de Guldin expresa que el volumen que se obtiene cuando es un área lo que gira alrededor de un eje al que se supone que tampoco corta, se obtiene multiplicando el área generatriz por la distancia recorrida por el centro de gravedad del área generatriz.

Finalmente, los teoremas de Guldin también pueden ser aplicados en forma inversa a como se utilizan si se trata de determinar el centro de gravedad de áreas y líneas.

En efecto, si lo que se conoce es "lo que está" en el segundo miembro de la igualdad que representan los teoremas; es decir, si se conoce la longitud de la línea que gira y la posición de su centro de gravedad, entonces el primer teorema de Guldin proporciona la superficie generada por la línea generatriz.

De forma similar a lo expresado en el párrafo precedente, si se conoce el área que gira y la posición que ocupa su centro de gravedad, entonces se puede calcular el volumen que dicho área genera al girar alrededor de un eje al que se seguirá suponiendo que el área generatriz no corta.

BIBLIOGRAFÍA

1. Beer, Ferdinand P. y Johnston, E. Russell, "Vector Mechanics for Engineers: Statics and Dynamics", 5th edition, McGraw-Hill Inc, 1998.
2. Iñiguez Almech, J.M., y Cid Palacios, R., "Mecánica Teórica: Clásica y Relativista, Tomo I, Editorial Dossat, S.A., Madrid, 1965.
3. Belda Villena, E., "Mecánica, Tomo I: Mecánica Clásica", La Editorial Vizcaína, S.A., Bilbao, 1966.
4. Bastero de Eleizalde, J.M. y Casellas Roure J., "Curso de mecánica", Ediciones de la Universidad de Navarra (EUNSA), 3ª ed. Pamplona, 1987.