TRABAJO DE UNA FUERZA

Se define el diferencial de trabajo de una fuerza (dW) como el producto escalar del vector fuerza por el vector diferencial de desplazamiento, es decir:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} \qquad (1)$$

expresión en la que el vector "dr" representa el desplazamiento infinitesimal del punto de aplicación del vector fuerza.

El trabajo es, por tanto, una magnitud escalar; como tal, puede ser positivo, nulo o negativo, dependiendo de que el ángulo que formen el vector "F" y el vector "dr", sea menor, igual o mayor de 90°, respectivamente.

El signo del trabajo refleja su realidad física, por eso es importante comprobarlo, de otra manera se correría el riesgo de cometer un serio error. "Comprobar el signo del trabajo" significa fijarse en el ángulo que forman los vectores "F" y "dr" durante el desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza. Por ejemplo, si durante el desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza dicho ángulo es continuamente mayor de 90°, el trabajo sólo puede tener signo negativo. Tal cosa sucede, p.e., con el trabajo del peso cuando una partícula de masa "m" se desplaza en sentido contrario al del campo gravitatorio.

Se deja al lector deducir la ecuación de dimensiones de la nueva magnitud definida por la ecuación (1). Las unidades en las que se expresa el trabajo son: ergio (CGS), julio (SI) y kpm ó kgm (ST). Es importante saber que el kilowatio hora (kWh) es unidad de trabajo, como se comprueba fácilmente deduciendo su ecuación de dimensiones.

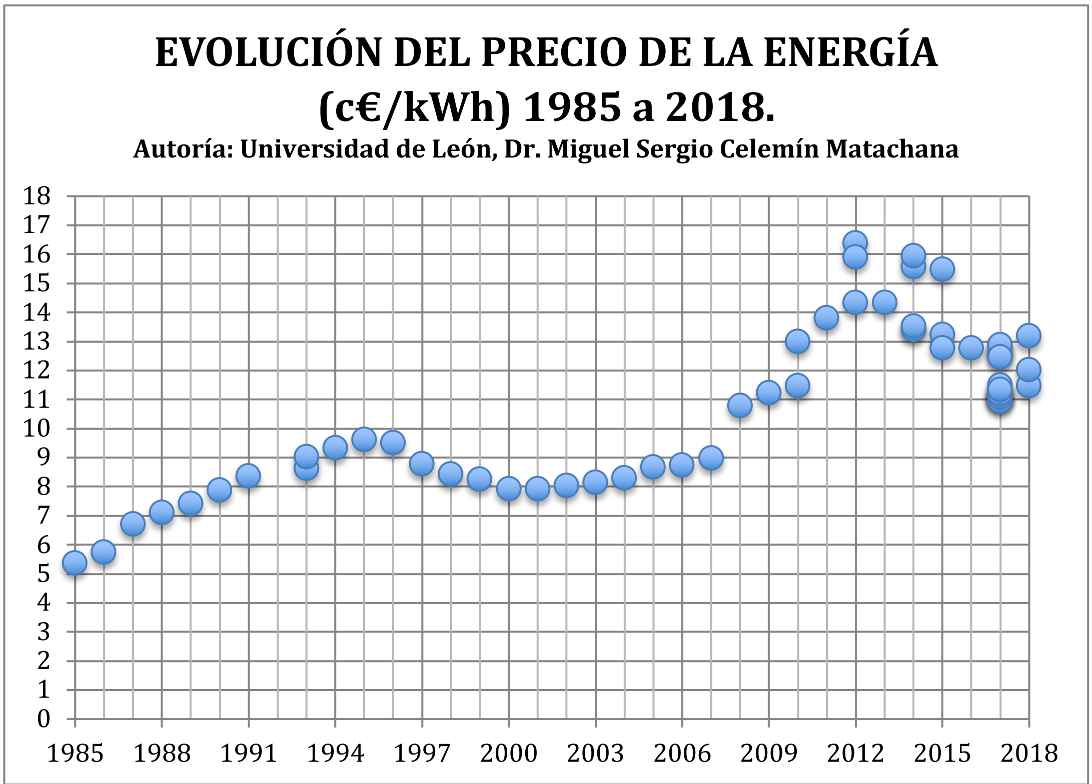
En la página siguiente se muestra la variación que ha experimentado el precio de la energía eléctrica –doméstica- desde 1985 hasta 2018.

Hasta el 2012, el precio de la energía era fijado por el Gobierno de la Nación y publicado, como una disposición más, en el Boletín Oficial del Estado (BOE). Sin embargo, a partir de 2013, lo que se publica en el BOE es el denominado "Precio de los peajes de acceso".

En esencia, la nueva regulación significa que el precio de la energía consumida depende de las condiciones de producción, y por ello, queda sometido, p.e., a las condiciones meteorológicas. En consecuencia, en los períodos de escasez de precipitaciones, la generación de energía eléctrica por las centrales hidráulicas se verá afectada y muy probablemente, ello suponga un encarecimiento del precio.

Con el nuevo sistema de tarifación se puede decir que, entre sus consecuencias, cabe señalar la desaparición del denominado “déficit de tarifa”, que hasta el 2013 se generaba como consecuencia de que el precio de la energía eléctrica tenía carácter político y por ello, sujeto a los condicionantes correspondientes.

Se aprecia en la gráfica adjunta que en 1996 tuvo lugar -en el periodo de observación-, una caída del precio del kWh propiciada por el Gobierno del Partido Popular, siendo presidente D. José María Aznar.



8,93 pta. **(Precios BOE 14.02.1985)**,
9,56 pta. **(Precios BOE 14.03.1986)**,
11,17 pta. **(Precios BOE 25.02.1987)**,
11,83 pta. **(Precios BOE 16.02.1988)**,
12,36 pta. **(Precios BOE 24.01.1989)**,
13,11 pta. **(Precios BOE 24.01.1990)**,
13,93 pta. **(Precios BOE 08.01.1991)**,

14,37 pta. **(Precios BOE.15.01.1992)**,
15,02 pta. **(Precios BOE 14.01.1993)**,
15,55 pta. **(Precios BOE 05.01.1994)**,
16,02 pta. **(Precios BOE 14.01.1995)**,
15,84 pta. **(Precios BOE 28.12.1996)**,
14,61 pta. **(Precios BOE 27.12.1997)**,
14,24 pta. **(Precios BOE 30.12.1998)**,
14,03 pta. **(Precios BOE 30.12.1998)**,
13,73 pta. **(Precios BOE 30.12.1999)**,
13,18 pta. **(Precios BOE 30.12.2000)**, 7,9213 c€,
7,9213 c€, 13,18 pta. **(Precios BOE 28.12.2001)**,
8,0401 c€, 13,37 pta. **(Precios BOE 31.12.2002)**,
8,0410 c€, 13,38 pta. **(Precios BOE 31.12.2002)**,
8,1587 c€, 13,57 pta. **(Precios BOE 27.12.2003)**,
8,3007 c€, 13,81 pta. **(Precios BOE 31.12.2004)**,
8,6726 c€, 14,43 pta. **(Precios BOE 28.12.2005)**,
8,7420 c€, 14,54 pta. **(Precios BOE 01.07.2006)**,
8,9868 c€, 14,95 pta. **(Precios BOE 30.12.2006)**,
8,9868 c€, **(Precios BOE 30.06.2007)**,
10,7994 c€,**(Precios BOE 28.06.2008)**,
11,248 c€,**(Precios BOE 31.12.2008)**,
11,473 c€,**(Precios BOE 29.6.2009)**,
12,5279 c€,**(Precios BOE X.XX.XXXX)**,
12,9953 c€,**(Precios BOE 29.12.2010)**,
13,8613 c€,**(Precios BOE 30.03.2011)**,
13,8613 c€,**(Precios BOE 01.10.2011)**,
12,8373 c€,**(Precios BOE 01.10.2011)**,
13,8171 c€, 22,99 pta.**(Precios BOE 30.12.2011)**,
16,3897 c€ y 14,35 c€ **(Precios BOE 26.04.2012)**,
14,35 c€ y 14,3576 c€ **(Precios BOE 30.06.2012)**,
14,3576 c€, 15,9123 c€**(Precios BOE 26.04.2012)**,
14,338 c€, 23,85 pta. **(Precios de peajes de acceso: BOE 03.08.2013)**,
13,4195 c€ (02.05.2014-01.07.2014),**(Precios de peajes de acceso: BOE 01.02.2014)**,
13,5349 c€ (01.07.2014-24.10.2014),**(Precios de peajes de acceso: BOE 01.02.2014)**,
13,5349 c€ y 15,57113 c€ (24.10.2014-29.12.2014),**(Precios de peajes de acceso: BOE 01.02.2014)**,
15,7113 c€ y 15,954 c€ (29.12.2014-04.03.2015),**(Precios de peajes de acceso: BOE 01.02.2014)**,
04.03.2015-30.06.2015)
15,954 c€ y 15,4937 c€ (30.06.2015-28.08.2015),**(Precios de peajes de acceso: BOE 01.02.2014)**,
15,4937 c€ (28.08.2015-10.09.2015),**(Precios de peajes de acceso: BOE 01.02.2014)**,
13,2511 c€ (10.09.2015-20.12.2015),**(Precios de peajes de acceso: BOE 01.02.2014)**,

13,2511 c€ y 12,7856 c€ (20.12.2015-27.01.2016), **(Precios de peajes de acceso: BOE 01.02.2014)**,
12,7856 c€ (27.01.2016-28.08.2016), **(Precios de peajes de acceso: BOE 01.02.2014)**,
12,7856 y 13,098 c€ (28.08.2016-26.09.2016), **(Precios de peajes de acceso: BOE 01.02.2014)**.

A partir del 26 de septiembre de 2016, el distribuidor, en el caso, Iberdrola Clientes S.A.U., insertó una nota en la factura que, en lo correspondiente a la energía consumida decía:

Comprende dos conceptos: La facturación por peaje de acceso (resultado de multiplicar los kWh consumidos en el periodo de facturación por el precio del término de energía del peaje de acceso) y la facturación por coste de la energía (resultado de multiplicar los kWh consumidos por el precio del término del coste horario de PVPC).

Con la finalidad de homogeneizar el precio de la energía consumida entre los diferentes tipos de tarifación y obtener el coste por kWh consumido desde el 26 de septiembre de 2016, para deducir el coste (c€/kWh) se ha procedido a dividir la parte de la factura correspondiente a la energía consumida entre los kWh facturados, expresando el resultado final con cuatro cifras, dos de ellas decimales. Desde entonces, la referencia legal sigue siendo la misma: BOE del 1 de febrero de 2014.

11,50 c€/kWh (26.09.2016-26.10.2016)
12,06 c€/kWh (24.10.2016-22.11.2016)
12,76 c€/kWh (26.11.2016-25.12.2016)
c€/kWh (25.12.2016-25.01.2017)
12,62 c€/kWh (25.01.2017-26.02.2017), 32 días,
10,96 c€/kWh (26.02.2017-22.03.2017), 24 id.,
11,15 c€/kWh (22.03.2017-23.04.2017), 32 id.,
11,09 c€/kWh (23.04.2017-24.05.2017), 31 id.,
11,50 c€/kWh (24.05.2017-25.06.2017), 32 id.,
11,22 c€/kWh (25.06.2017-23.07.2017), 28 id.,
11,20 c€/kWh (23.07.2017-22.08.2017), 30 id.,
11,30 c€/kWh (22.08.2017-20.09.2017), 29 id.,
12,19 c€/kWh (20.09.2017-22.10.2017), 32 id.,
12,47 c€/kWh (22.10.2017-20.11.2017), 29 id.,
13,20 c€/kWh (20.11.2017-25.12.2017), 35 id.,
11,47 c€/kWh (25.12.2017-22.01.2018), 28 id.,
12,02 c€/kWh (22.01.2018-20.02.2018),
11,38 c€/kWh (20.02.2018-21.03.2018),
10,52 c€/kWh (21.03.2018-22.04.2018),
11,55 c€/kWh (22.04.2018-22.05.2018),
12,54 c€/kWh (22.05.2018-21.06.2018),

12,58 c€/kWh (21.06.2018-22.07.2018)

Podría hacerse, para el periodo de lecturas comprendido entre el 25.01.2016 y 22.11.2018 una estimación del precio utilizando la media ponderada, de la siguiente forma:

(12,62·32+10,96·24+11,15·32+11,09·31+11,5·32+11,22·28+11,20·30+11,30·29+12,19·32+12,47·29+13,2·35+11,47·28)/(32+24+32+31+32+28+30+29+32+29+35+28)=4248,2/362 = 11,74 c€/kWh

Así pues, 11,74 c€/kWh sería el precio medio ponderado para 2017.

DEDUCCIÓN DEL TRABAJO REALIZADO POR ALGUNAS FUERZAS

1. Fuerza elástica

Se denomina así a la que desarrolla un muelle lineal, sensible a la variación de su longitud, por oposición al muelle helicoidal que, por serlo al giro transversal, produce un momento torsor.

La fuerza que ejerce un muelle es proporcional a la variación de longitud medida respecto a la de equilibrio; sigue, por tanto, la ley de Hooke[1].

Si se denomina "l_0" a la longitud del muelle cuando está sin deformar -en equilibrio, se dice también-, y "l" a la que tiene cuando se le somete a alargamiento o acortamiento, la fuerza que ejerce un muelle es siempre proporcional a la variación de longitud respecto a la de equilibrio. Así pues, si el muelle ha sido extendido, la fuerza elástica es proporcional a "$l-l_0$", y a "l_0-l" si ha sido comprimido.

El trabajo realizado por la fuerza elástica es, por consiguiente:

$$dW = \vec{F}\cdot d\vec{r} = -kx\,\vec{i}\cdot dx\,\vec{j} \qquad (2)$$

expresión en la que "x" es la variación de longitud del muelle respecto a la de equilibrio. Integrando, resulta:

$$W_{1\to 2} = \int -Kxdx = \frac{K}{2}(x_1^2 - x_2^2) \qquad (3)$$

siendo "x_1" la variación de longitud del muelle respecto a la que tiene cuando está en equilibrio. Es decir, "x_1" sería la diferencia entre "l_1" (Longitud del muelle en la posición "1") y

"l_0" (Longitud del muelle en equilibrio o cuando está sin deformar), de forma similar se obtendría "x_2". Como "x" está elevado al cuadrado, el resultado de la ecuación (3) es independiente del orden en el que se efectúe la diferencia entre las longitudes del muelle.

Pese a la restricción impuesta a la dirección en la que se ha supuesto que se deforma el muelle, la expresión (3) tiene validez general; también sirve, por tanto, si durante la deformación, el muelle varía su orientación.

2. Deducción del trabajo del peso

En un sistema de coordenadas cartesianas bidimensional, la expresión del diferencial de trabajo realizado por el peso será:

$$dW = -mg\,\vec{j} \cdot (dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j}) \quad (4)$$

Que, integrada entre las posiciones "1" y "2", queda:

$$W = mg\,(y_1 - y_2) \qquad (5)$$

Se recuerda que el trabajo realizado contra el campo gravitatorio es negativo, lo que significa que se precisa una acción exterior para realizarlo. Todo trabajo que se realiza contra el campo genera energía potencial, que puede ser transformada en energía cinética. Es ilustrativo el caso del llenado de un embalse y por ello, se explicará seguidamente.

Cuando una presa cierra el valle por el que discurre un río y empieza a embalsar, se realiza un trabajo contra las fuerzas del campo gravitatorio, por lo que la energía asociada a la ganancia de cota por el agua está en condiciones de ser transformada en energía cinética de rotación de las turbinas situadas en la central de la presa, y después, en energía eléctrica, mediante el giro de los alternadores en un campo magnético. Se ve, por tanto, que para poder disponer de la capacidad de producir cualquier tipo de trabajo, como es lo que sucede cuando se genera energía eléctrica en los alternadores, es condición previa realizar una "inversión" que, en el presente ejemplo, es el trabajo realizado contra el campo gravitatorio.

3. Trabajo de una fuerza gravitatoria

El trabajo realizado por la fuerza gravitatoria será:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\frac{GMm}{r^2}\,\overrightarrow{r_0} \cdot dr\,\overrightarrow{r_0}$$

expresión en la que "$\overrightarrow{r_0}$" es un vector unitario en la dirección del parámetro posicional "r".

La integral de la expresión anterior será:

$$W = \int_1^2 -\frac{GMm}{r^2}\,dr = (-GMm\frac{r^{-2+1}}{-2+1})_1^2 = (\frac{GMm}{r})_1^2 = GMm\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$

TEOREMA DE LAS FUERZAS VIVAS

Al proyectar la 2ª ley de Newton según la tangente al movimiento, resulta:

$$R_t = m\,a_t \qquad (6)$$

y como:

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} \qquad (7)$$

sustituyendo la expresión (7) en (6), y teniendo en cuenta que:

$$v = \frac{ds}{dt} \qquad (8)$$

se tendrá:

$$R_t = m\,\frac{dv}{ds}\,v$$

y agrupando las variables e integrando, resulta:

$$\int_1^2 R_t\,ds = \int_1^2 m\,v\,dv \qquad (9)$$

El primer miembro de la expresión (9) es el trabajo de las fuerzas actuantes sobre la partícula. En efecto:

$$R_t\,ds = \left(R_t\vec{t} + R_n\,\vec{n}\right)ds\,\vec{t} \qquad (10)$$

ya que la expresión (8) indica que "ds" es proporcional al módulo de la velocidad y, por consiguiente, tiene la dirección del vector tangente a la trayectoria.

El paréntesis del segundo miembro de (10) es la expresión en coordenadas intrínsecas, de la resultante "R" de las fuerzas que actúan sobre la partícula. Teniendo en cuenta la definición de velocidad:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

así como la expresión del vector velocidad en coordenadas intrínsecas:

$$\vec{v} = v\,\vec{t}$$

Y de nuevo, conteniendo en cuenta la expresión (8) se tiene:

$$d\vec{r} = \vec{v}\,dt = v\,dt\,\vec{t} = ds\,\vec{t}$$

En consecuencia, la ecuación (10) se escribe también en la forma:

$$R_t\,ds = \left(R_t\vec{t} + R_n\,\vec{n}\right)\cdot\overrightarrow{dr} = \vec{R}\cdot d\vec{r} \qquad (11)$$

Con lo que la integración de la ecuación (9) lleva a:

$$\int_1^2 \vec{R}\,d\vec{r} = \frac{1}{2}\,m\,v_2^2 - \frac{1}{2}\,m\,v_1^2 \qquad (12)$$

El primer miembro es el trabajo de la resultante de las fuerzas aplicadas a la partícula que es, por tanto, la suma del trabajo de cada una de las fuerzas. Se suele representar por "$W_{1\to 2}$". El segundo miembro de la ecuación (12) es la diferencia de energía cinética de la partícula en los instantes indicados y se representa por "$E_2 - E_1$". Así pues, la ecuación (12) se escribe, abreviadamente, como:

$$W_{1\to 2} = E_2 - E_1 \qquad (13)$$

Y se denomina teorema de las fuerzas vivas.

Comentarios al teorema de las fuerzas vivas

1° La ecuación (13) es escalar; no obstante, dado que se precisa calcular el trabajo de cada una de las fuerzas que actúan sobre la partícula, **es preciso dibujar el diagrama del sólido libre –partícula, en este caso-**, y hacerlo en una posición genérica, ya que el trabajo, en general, no tiene por qué ser una función de punto, como sería si la fuerza fuera conservativa.

2º El primer miembro del teorema representa la suma del trabajo de cada una de las fuerzas actuantes, magnitud que, como se ha dicho, puede ser >0, =0 ó <0.

3º En el segundo miembro aparece el módulo de la velocidad medido por un observador inercial en instantes concretos (Véase, en la lección MSR9, -disponible en el repositorio institucional "BULERIA"- el apartado "Fuerzas de inercia").

No obstante, en algún caso de aplicación de este teorema, el instante a considerar pudiera ser un instante genérico, tal es el caso si lo que se desea calcular es la expresión general de la velocidad. En tal caso, es decir, si el teorema de las fuerzas vivas se aplica entre un instante concreto y otro genérico, el trabajo debe calcularse también entre el instante de referencia y el genérico.

Por consiguiente, cuando los datos o incógnitas sean módulos de velocidad, el teorema de las fuerzas vivas debería ser la primera opción a considerar y será la mejor si, además, en el caso del movimiento de la partícula, hay rozamiento.

4º Interesará pensar en aplicar el teorema de las fuerzas vivas si se precisa determinar ciertos parámetros, tales como el coeficiente de rozamiento (μ) o la constante elástica de un muelle (K). Tales magnitudes no aparecen -directamente-, en el teorema de las fuerzas vivas, pero sí en el trabajo de la fuerza de rozamiento, o en el de la fuerza elástica.

5º Este teorema ha sido aplicado, p.e., en la deducción del tercer enunciado del teorema de Bernoulli, Lecciones de Mecánica de Fluidos, pp. 92-94.

6º Newton[3] llamó "fuerza viva" a "$\frac{1}{2} m v^2$".

POTENCIA

En la elección de una máquina no sólo interesa el trabajo que puede realizar, sino también el tiempo que invierte en hacerlo. Surge así el concepto de potencia y las siguientes definiciones:

Potencia media:

$$P_m = \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

Potencia instantánea:

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

en la que el vector velocidad ("v") es la del punto de aplicación de la fuerza de la que se quiere hallar el trabajo.

Unidades:
S.I. nombre: watt, vatio o watio; símbolo: "W"; equivale a J/s.
S.T. kgm/s. Muy importante recordar el factor de conversión 1 CV= 75 kgm/s ó 735 W.
C.G.S. ergio/s

RENDIMIENTO

El 2° Principio de la Termodinámica establece que no es posible convertir toda la energía suministrada en trabajo útil, surge así el concepto de rendimiento termodinámico y de él, el concepto mecánico de rendimiento.

η es el símbolo del rendimiento y siempre es menor que 1.

$$\eta = \frac{W_{útil}}{W_{sum.}}$$

y dividiendo por "dt", se obtendrá:

$$\eta = \frac{P_{útil}}{P_{sum.}}$$

Como aplicación de este concepto se propone determinar la potencia (en CV) que deberá tener el motor que accione el mecanismo de elevación de un puente grúa que debe elevar una carga máxima de 40 t a la velocidad v= 2 m/s, suponiendo que el rendimiento del mecanismo es de 0.36. Solución: 30 CV.

FUERZA CONSERVATIVA

Este concepto encuentra aplicación no sólo en Mecánica, sino también en electromagnetismo.

Definición:

$$\vec{F}; conservativa\ \exists\ función\ potencial\ escalar\ V = V(x,y,z)\ /\ \vec{F} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, V$$

Cálculo del potencial de algunas fuerzas:

Potencial del peso

La expresión vectorial del peso "W" en coordenadas cartesianas es:

$$\vec{W} = -m\, g\, \vec{j}$$

Para buscar el potencial se impondrá la condición de fuerza conservativa, es decir, si el peso es conservativo, deberá cumplir:

$$-m\, g\, \vec{j} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\,\vec{\imath} + \frac{\partial V}{\partial y}\,\vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\,\vec{z}\,\right)$$

Dado que:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial z} = 0$$

Se deduce que el potencial "V" no puede depender de "x" ni de "z", por lo que sólo puede ser función de "y" y en tal caso, la igualdad de componentes en "$\vec{j}$" se escribe como diferencial, y no como derivada parcial, es decir:

$$-\, m\, g = -\,\frac{dV}{dy}$$

De donde resulta, suponiendo que para "y=0", el potencial es nulo, que la función potencial del peso es:

$$V = m\, g\, y$$

Se propone como ejercicio demostrar que el potencial de una fuerza elástica es "$Kx^2/2$" y el de la fuerza gravitatoria, "GMm/r".

Propiedades de las fuerzas conservativas:

Si una fuerza "$\vec{F}$" es conservativa, "$\vec{F}\cdot d\vec{r}$" es una diferencial exacta, es decir, que:

$$-\left(\frac{\partial V}{\partial x}\,\vec{\imath}+\frac{\partial V}{\partial y}\,\vec{\jmath}+\frac{\partial V}{\partial z}\,\vec{k}\right)\cdot\left(dx\,\vec{\imath}+dy\,\vec{\jmath}+dz\,\vec{k}\right)=-dV$$

Como consecuencia, el cálculo de la integral definida de la fuerza "$\vec{F}$", queda en la forma:

$$\int_1^2 \vec{F}\cdot d\vec{r}=-\int_1^2 dV=V_1-V_2$$

con lo que resulta ser independiente del camino recorrido. Si el camino de integración es una curva cerrada, la citada integral es nula.

TEOREMA DE CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA MECÁNICA

Si en un fenómeno físico que afecta a una partícula sucede que todas las fuerzas que dan trabajo son conservativas se tendrá que:

$$\forall\,\vec{F},\ \int_1^2 \vec{F}\cdot d\vec{r}=V_1-V_2$$

y consecuentemente, el teorema de las fuerzas vivas quedaría en la forma:

$$E_2-E_1=\sum_{F_i}\left(V_1^{F_i}-V_2^{F_i}\right)$$

Se denomina energía mecánica a la suma de la energía cinética con las potenciales; resulta así el teorema de conservación de la energía mecánica:

$$E_1+V_1^{F_1}+V_1^{F_2}+\ldots=E_2+V_2^{F_1}+V_2^{F_2}+\ldots$$

Las fuerzas resistivas no son conservativas, por consiguiente, cuando en un problema de dinámica de la partícula intervenga la fuerza de rozamiento, este teorema no puede aplicarse, aunque sí podría serlo en dinámica del sólido rígido, si se tratara de un movimiento de rodadura sin deslizamiento. En efecto, en tal caso, al no haber desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza de rozamiento, su trabajo es, evidentemente, nulo.

La energía potencial es aquélla que tiene su origen en la realización de un trabajo contra las fuerzas del campo. Al ser esto así, es posible obtener energía del campo.

BIBLIOGRAFÍA

[1] Hooke, R, Lectures *de potentia restitutiva*, printed for John Martyn, Printer to the Royal Society, at the Bell in St Paul´s Church-Yard, 1678.

[2] Celemín Matachana, Miguel, "Lecciones de Mecánica de Fluidos", Servicio de Publicaciones de la Universidad de León, 1996.

[3]Newton, Isaac, "Principios Matemáticos de la Filosofía Natural", Tomos 1 y 2, Alianza Editorial, Madrid, 1987.

[4]Beer, Ferdinand P. y Johnston, E. Russell, "Mecánica Vectorial para Ingenieros, Estática y Dinámica", McGraw-Hill, 5ª ed. revisada, Madrid, 1990.