WITTGENSTEIN, UN *OUTSIDER* EN LOGICA[1]

Luis Vega

En 1956, cuando aparece la primera edición póstuma de las *Observaciones sobre los fundamentos de la matemática* de Wittgenstein, Colin Wilson publica *The Outsider*[2], un ensayo sobre algunas figuras prominentes de la segunda mitad del s. XIX y la primera mitad del s. XX, desgarradas por una dolencia íntima de autodesplazamiento, extrañamiento o destierro en este mundo miserable: hay filósofos como Nietzsche, escritores como Herman Hesse, autores polifacéticos como William Blake, bailarines como Nijinski, pintores como Van Gogh, aventureros como Lawrence de Arabia, Son seres acuciados por problemas existenciales como el sentido de la propia vida, la autenticidad y la pureza personal, el filo de la navaja entre la lucidez y la locura; ni que decir tiene que estos males del espíritu no son exactamente los de la mayoría de la gente que hoy en día consideramos marginada. Wittgenstein no figura por cierto entre los personajes de C. Wilson. Su ausencia se debe seguramente a error u omisión. Según es bien sabido, Wittgenstein comparte varios síntomas de este síndrome de almas bellas y sensibles: también él es un espíritu herido por el deseo de purificación (escribía a Russell desde Noruega: "Quizá pienses que es una pérdida de tiempo para mi pensar acerca de mí mismo, pero cómo puedo ser un lógico sin ser un hombre. Antes que nada tengo que ser puro"), por el sentimiento de destierro y la necesidad de salir de la miseria del mundo a través del conocimiento (según apunta

---

1 Este artículo es la versión ampliada de una conferencia en las *Wittgenstein Ihardunalkiak* celebradas en Zorroaga a primeros de Marzo de 1989 con motivo del X aniversario de la Facultad de Filosofía del País Vasco.

2 Hay versión castellana: *El desplazado*, Madrid: Taurus, 1975. Las referencias a Wittgenstein corresponden a las obras y ediciones siguientes: *Diario filosófico (1914-1916)*, Barcelona: Ariel, 1982; *Tractatus Logico-Philosophicus*, Madrid: Alianza, 1987[5]; *Philosophical Remarks* (R. Rhees, ed.), Oxford: Blackwell, 1964; *Philosophical Grammar* (R. Rhees, ed.), Oxford: Blackwell, 1974; (1978[2]): *Observaciones sobre los fundamentos de la matemática*, Madrid: Alianza, 1987; *Investigaciones filosóficas*, México/Barcelona: UNAM/Grijalbo, 1988.

Contextos VII/13, 1989 (pp. 79-103)

en el *Diario* el 13-8-1916), por el cerco de la locura ("Si en la vida estamos rodeados por la muerte, también en la salud del entendimiento por la locura" decía un párrafo de las *Observaciones...*, V § 53, retirado después de la primera edición de 1956).

La condición de *outsider* de Wittgenstein se echa de ver igualmente en su actividad filosófica, al menos en sus consideraciones acerca de la lógica y de la matemática y sobre todo a partir de los años 30. No voy a sugerir -por más que Wittgenstein hiciera de la filosofía una pasión personal- ninguna especie de explicación psicobiográfica de sus "extravagancias" (en el sentido más cercano al étimo 'extravagari') con respecto a la lógica matemática de su entorno. Sólo quiero recordar la existencia de una automarginación pareja de la filosofía wittgensteiniana en ese respecto, y sus problemáticas secuelas.

La marginación o el aislamiento de la actividad filosófica de Wittgenstein son naturalmente relativos, pero no por ello dejan de ser deliberados. El mismo afirma: "El filósofo no es un ciudadano de ninguna comunidad de ideas. Esto es lo que hace de él un filósofo". Esto, cuando menos, hace porque el pensamiento de Wittgenstein se muestre irreducible a un "ismo" filosófico pese a los esfuerzos de muchos por llevarlo a algún huerto al atomismo, al verificacionismo, al convencionalismo, al intuicionismo, al antirrealismo, etc. Cabe entender así la automarginación de la actividad filosófica de Wittgenstein en un sentido -digamos- débil: como la negativa a dejarse encasillar entre las doctrinas o los productos de escuela. Pero habrá que tomar ese autodesplazamiento en un sentido más fuerte cuando su filosofía pretende ser además un ejercicio al margen de los cuerpos normales de conocimiento, con la decidida intención de merodear por el exterior sin entrar en ellos ni verse afectada por su desarrollo. Por ejemplo: "Mi tarea no es atacar desde dentro la lógica de Russell, sino desde fuera. O sea no es atacarla matemáticamente -entonces haría matemática- sino su posición, su oficio. Mi tarea no es hablar sobre el teorema de Gödel sino evitar hacerlo" (*Observaciones...*, VII § 19); "La filosofía no puede en modo alguno interferir con el uso efectivo del lenguaje... Deja todo como está. Deja también la matemática como está y ningún descubrimiento matemático puede hacerla avanzar". (*Investigaciones filosóficas*, I§ 124); "Se podría llamar también 'Filosofía' a lo que es posible antes de todos los nuevos descubrimientos e invenciones" (Ibd., § 126). Esta autocontención de las descripciones y elucidaciones filosóficas responde, entre otros motivos, a la temprana convicción Wittgensteiniana de que tanto la lógica como la matemática se hacen cargo de sí mismas y deben cuidar de sí mismas (véase, e.g., la anotación de 13-10-1914 en el *Diario*).

Así, pues, bien podríamos hablar del "no-lugar" de Wittgenstein en la historia de la lógica coetánea. No sólo se avendría a sus deseos expresos (sobre todo después del *Tractatus*) de no contribuir al desarrollo de la propia lógica o de la matemática, sino que éste sería un corolario práctico coherente de su actitud frente a la "nociva irrupción" de la lógica matemática (*Observaciones...*, V § 24). Pero la situación que él mismo provoca al reservarse el papel a primera vista inocuo de observador o de crítico externo del libre juego de la lógica o de la matemática, no es tan simple. Naturalmente, por seguir con esta imagen tan familiar en cualquier hogar wittgensteiniano, el observador de un juego no es un jugador ni el mirar por encima del hombro de los jugadores es una jugada. Lo cierto es, sin embargo, que esta actitud suele poner bastante nerviosos a los que están empeñados en la partida (y en ocasiones los nervios de Bernays, Kreisel, Gödel o Hao Wang, por ejemplo, ante algunas observaciones de Wittgenstein, se notan a flor de piel[3]). Para colmo, Wittgenstein es un observador temible por su ingenuidad: "Tiene el don admirable de ver siempre las cosas como si las contemplara por primera vez" -decía alguien tan próximo a él como F. Waismann. Ahora bien, un observador que se dedica a cuestionar el sentido mismo de las jugadas como si no entendiera o no quisiera entender ciertas reglas básicas del juego -y algo de esto hay en la descalificación wittgensteiniana de lo que piensan los lógicos matemáticos acerca de sus programas (e.g. Hilbert) o acerca de sus resultados (e.g. Skolem, Gödel[4])-, no es precisamente un mero espectador que se abstiene de intervenir en el desarrollo de la partida. Así pues, la automarginación y la inhibición profesadas por la actividad filosófica de Wittgenstein no son tan cabales como pudiera parecer. Ni su análisis de la lógica nace por generación espontánea y al margen de toda tradición de pensamiento -el *Tractatus* mantiene, según es bien sabido, un cordón umbilical con

---

3 Vid. P. Bernays (1959): "Comments on L. Wittgenstein's *Remarks on the Foundations of Mathematics*", en P. Benacerraf y H. Putnam, eds.: *Philosophy of Mathematics; Selected Readings*. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1964, pp. 510-29; G. Kreisel; "Wittgenstein's *Remarks on the Foundations of Mathematics*", *British Journal for the Philosophy of Science*, 9 (1959), pp. 135-58. H. Wang: "Gödel and Wittgenstein" en *Proc.* 11 *Intern. Wittgenstein Symposium*. Wien: Hölder-Pichler-Tempsky, 1987, pp. 83-90.

4 Por ejemplo, *vid.* a propósito del programa de Hilbert, F. Waismann (1967): *Ludwig Wittgenstein y el Círculo de Viena*. México: F.C.E., 1973, pp. 105 ss., 121 ss., 154 y sig.; a propósito de una prueba inductiva de asociatividad de Skolem, *Philosophical Remarks*, § 163; a propósito del primer teorema de limitación de Gödel, Apéndice III (1938) de la P.I de *Observaciones...*, pp. 91-97.

el logicismo-; ni su actitud frente al problema de la fundamentación de la matemática o frente al rumbo de la investigación metamatemática desde principios de los años 30, es la de un observador impertérrito. De hecho, a veces, el *outsider* adquiere las trazas de un francotirador. Aunque Wittgenstein asegura que la filosofía no puede cambiar las prácticas lógicas y matemáticas dadas, -más aún; ni siquiera pretende examinar esas prácticas sino solamente lo que los practicantes dicen acerca de ellas (*Philosophical Grammar*, 396)-, la verdad es que sus reparos constituyen una amenaza al menos virtual para el desarrollo de la lógica matemática coetánea en la medida en que declaran que una empresa de este jaez carece de sentido. El amago no pasó de ahí: de hecho, las observaciones de Wittgenstein sobre la desgracia que supone la irrupción de la lógica en la filosofía de la matemática se han quedado en un puñado marginal de sugerencias sin influjo apreciable en el curso de la lógica contemporánea. Y este sería otro motivo, independiente de los deseos del propio Wittgenstein, para hablar de su no-lugar en la historia de la lógica desde la década de los 30.

Con esto no quiero adelantar un juicio de valor sobre el pensamiento de Wittgenstein en materia de lógica o de filosofía de la matemática. Sólo quiero apuntar su extemporaneidad. Algunas de sus observaciones, en particular a raíz de su toma de posición sobre el programa de Hilbert y sobre ciertas líneas de investigación lógica y metamatemática subsiguientes, eran intempestivas. Dicho en términos contrafácticos: si la incipiente tradición lógico-matemática las hubiera seguido al pie de la letra, se habría visto en la tesitura de estar de vuelta antes de haber llegado a algún sitio.

Por ejemplo, en el congreso de Stanford (1960), A. Heyting pasa revista al curso de los acontecimientos desde la primera confrontación oficial entre el logicismo, el formalismo y el intuicionismo en el congreso de Königsberg (1930)[5]. El informe de Heyting coincide en algunos puntos significativos con el madrugador diagnóstico de la situación que Wittgenstein había confiado a M. Schlick (e.g. en

---

5 A. Heyting: "After thirty years", en E. Nagel, P. Suppes, A. Tarski, eds.: *Logic, Methodology and Philosophy of Science (Proc. 1960 Intern. Congress)*. Stanford: Stanford University Press, 1962; pp. 194-7. Cabe hacerse una idea de la confrontación de Königsberg a través de las ponencias recogidas en P. Benacerraf y H. Putnam, eds.; *Philosophy of Mathematics. Selected Readings*. Cambridge/London/New York: Cambridge University Press, 1983^2, pp. 41 ss. No deja de ser sintomático que la reacción wittgensteiniana, recogida en la primera edición (1964) antes citada de esta compilación, haya desaparecido por completo de la segunda edición (1983) y de su reimpresión (1985) -llevándose consigo, incluso los sabrosos comentarios de Bernays referidos en la nota 3, *supra*.

la conversación de junio de 1930 en torno a lo que debería decirse en Königsberg[6]). Heyting reconoce que las posturas irreconciliables del logicismo, el intuicionismo y el formalismo, pueden convenir en un difuso construccionismo; que la lógica ideal de la matemática ha cedido el paso a una lógica más natural de las pruebas y los procedimientos matemáticos; y que, en general, la cuestión epistemológica y crucial de la fundamentación se ha visto desplazada por las cuestiones técnicas de caracterización, por el análisis del alcance y las limitaciones de los lenguajes lógicos y de los métodos matemáticos disponibles con independencia de su filiación (logicista, intuicionista, formalista). Por lo demás, a estas alturas de los tiempos, ya está claro que la prueba de consistencia no aumenta la fiabilidad de una teoría ni el rendimiento matemático de un sistema. En suma, el desenlace de la crisis parece dar la razón a los previsores reparos de Wittgenstein.

Pues bien, ¿no habrá sido todo ese proceso el fruto de un malentendido que convendría haberse ahorrado desde un principio? Tal conclusión sería simplista y precipitada. De haberse neutralizado en sus inicios los programas de fundamentos y de hacer abortar entonces las neuras derivadas, e.g. la prueba de consistencia, por carecer en absoluto de sentido, como pretendía Wittgenstein, también se habría desactivado el desarrollo metateórico que a partir de la década de los 30 abre el horizonte de las actuales teorías de la demostración y teorías de modelos. En otras palabras: se habría arrojado al niño con la placenta por el sumidero. Un punto paradójico de las prevenciones filosóficas que sobrevuelan el desarrollo de la investigación especializada reside a veces en el hecho de que la historia venga a darles la razón aunque no la haya tenido: pero cuando se trata de un azar o de un desenlace interno del curso mismo de la investigación, no cabe apropiárselo retrospectivamente como una consecuencia, y menos aún como una garantía, del acierto o de la profunda sabiduría que encerraban tales premoniciones: "Ya decía el filósofo..."

De ahí que la impresión general que produce el discurso de Wittgenstein sobre la lógica y la matemática de su entorno sea harto problemática. Por un lado, su discurso mantiene la pretensión original de observar y dictaminar desde fuera, desde sus propios supuestos conceptuales y analíticos, algo tan inmaterial como el buen sentido de la lógica y de la matemática, en vez de intentar alguna suerte de contribución efectiva a su desarrollo. En esta línea la extemporaneidad puede beneficiarse de una presunción de inocencia y cabe defender la automarginación de Wittgenstein mediante una

6 Vid. el ya citado F. Waismann: *Ludwig Wittgenstein y el circulo de Viena*, pp. 90-3 en especial.

estrategia similar a la adoptada recientemente por Stuart G. Shanker[7]; la lógica y las matemáticas están bien como están; lo único que hay que hacer como filósofos es desembarazarlas de malas filosofías (a saber: de ontologías y de epistemologías hasta el punto de librar a los propios lógicos y matemáticos de la tentación de filosofar mientras prueban o calculan. Pero, por otro lado, no hay seguridad de que esta medida preventiva un tanto radical se avenga con la heurística real del desarrollo de esas pruebas y cálculos[8]. Y por añadidura el dictamen crítico, obedeciendo a una concepción filosófica autóctona de la lógica y de la matemática antes que a sus circunstancias reales de desarrollo, cobra un sesgo peculiar en el que ciertos métodos y resultados aparecen distorsionados, lo cual no facilita la interpretación de lo que Wittgenstein entiende o quiere dar a entender cuando alude a algunos puntos técnicos, a los teoremas de limitación de Gödel por ejemplo. En todo caso, el precio a pagar por las relaciones deliberadamente ambiguas de un *outsider* con su medio es el de una indeterminación añadida a los problemas habituales de interpretación y de valoración en filosofía.

Sin embargo, consciente de los riesgos, me aventuraré a ilustrar la problemática e incierta posición de Wittgenstein en la lógica del s. XX mediante algún caso concreto. Uno podría ser el caso de las tablas veritativas: guarda relación con la evolución primera de su pensamiento hasta el *Tractatus* y puede mostrar la diferencia entre una contribución sustancialmente filosófica como la de Wittgenstein y otras contribuciones técnicas, en particular la de E. Post, al desarrollo de la lógica. Otro caso podría ser el de la idea de demostración: está relacionado con el cambio de rumbo del pensamiento wittgensteiniano a partir de 1929 -en especial, con las

7 S.G. Shanker: *Wittgenstein and the Turning-Point in the Philosophy of Mathematics.* Albany: State University of New York Press, 1987; "Wittgenstein's remarks on the significance of Gödel's theorem", en S. Shanker (ed.) *Gödel's Theorem in Focus,* London, Croom Helm, 1988; pp. 155-256.

8 Por ejemplo, en opinión de Gödel -manifestada a Hao Wang en dos cartas del 7/III/1968-, la falta de "la actitud epistemológica requerida hacia la metamatemática y hacia el razonamiento no-finitista" fue la causa de que Skolem (1922) no llegara a probar la compleción del cálculo de predicados de primer orden; por contra, su propia "concepción objetivista de la metamatemática en general y del razonamiento transfinito en particular" fue la que le permitió establecer este teorema (1930) y sus otros grandes resultados de 1931 y 1938-40. Al margen del crédito que nos merezca el diagnóstico de Gödel sobre el caso de Skolem, conviene recordar esta motivación heurística personal asumida mucho tiempo antes de ser confesada. Vid. S. Feferman: "Kurt Gödel: conviction and caution", en S.G. Shanker, ed.; *Gödel's Theorem...,* pp. 96-114.

Observaciones sobre los fundamentos de la matemática- y puede ilustrar la automarginación de la actividad filosófica de Wittgenstein con respecto a la lógica matemática que empieza a madurar en la fecunda década de los 30. En el primer caso también habrá que considerar el marco originario en que se gesta la filosofía de la lógica primordial de Wittgenstein, así como en el segundo caso habrá que contextualizar su idea de la demostración dentro de la evolución relativamente autónoma de su pensamiento. Pero, antes que nada, vayan por delante unas observaciones. En primer lugar, no hay por qué extrapolar a otras áreas de su pensamiento el juicio que merezca el acierto o desacierto y la influencia real de las posturas de Wittgenstein en materia de lógica o de filosofía de la matemática; claro está que tampoco es razonable la extrapolación conversa: la idea de que la importancia filosófica atribuida a su autor ya les asegura por principio un papel efectivo en la historia de la lógica. Por otra parte, la inoportunidad de algunos desplantes wittgensteinianos a la lógica matemática no implica una descalificación global de todo cuanto Wittgenstein haya dicho sobre la naturaleza de la lógica o de la matemática. No cabe negar que los análisis de Wittgenstein, siempre centelleantes, resultan en ocasiones agudos y certeros; lo son, sin ir más lejos, sus críticas de la concepción platónica de los objetos lógicos, de la creencia ingenua en cuerpos de significado, de la pretensión fundamentalista en matemática, como lo es su vindicación de los aspectos pragmáticos y paradigmáticos de la práctica real de la demostración o de la prueba matemática. En suma; creo que si bien no cabe apreciar contribuciones sustanciales y efectivas de Wittgenstein al desarrollo técnico de nuestra lógica contemporánea -e incluso algunas de sus sugerencias, de no haber sido en su momento desoídas en mayor o menor medida, habrían resultado en esa misma medida contraproducentes desde el punto de vista de la historia del desarrollo de esta lógica-, con todo no se pronunció absolutamente en vano y algún rastro hay de su pensamiento crítico en nuestra concepción de la lógica y de las matemáticas. Esto puede consolar a los *fans* de Wittgenstein y los partidarios de contemplar las virtudes de la filosofía *sub specie aeternitatis,* pero no hasta el punto de considerar que Wittgenstein ha desempeñado un papel decisivo en la conformación actual del análisis lógico o ha marcado algún "turning-point" en la filosofía de las matemáticas. Por curioso que parezca, debemos mucho más en ambos sentidos al "erróneo" programa de Hilbert sobre la teoría de la demostración, pongamos por caso, que a las certeras observaciones de Wittgenstein sobre los usos de la prueba matemática; más aún, por irónico que resulte, hoy podemos cerciorarnos del acierto de algunas de esas observaciones no a la luz de las razones wittgensteinianas -que en ocasiones son especulativas y otras veces brillan por su ausencia-, sino en la perspectiva abierta por los que se reclaman herederos, en algún sentido, de la teoría de la demostración de Hilbert (e.g.; desde Gentzen hasta Dag Prawitz).

1. El marco originario del pensamiento lógico de Wittgenstein

El legado del s. XIX en materia de lógica estaba formado, como ya es de sobra conocido, por dos líneas principales de investigación[9]. Una partía de Boole; trabajaba con un álgebra abstracta de símbolos electivos y de operaciones susceptibles de interpretación lógica al poder versar sobre clases o sobre proposiciones o sobre probabilidades. El análisis de los llamados "relativos" había propiciado, a través de Peirce, la identificación de unos cuantificadores lógicos y el estudio de su aplicación a dominios finitos o infinitos determinados; también permitía, gracias a Schroeder, la cuantificación de los subdominios de un dominio dado, e.g. de modo que una fórmula como '$\pi x(\alpha)$' podía leerse "la proposición 'α' vale para cada dominio x en una multiplicidad dada «1» (i.e. en un universo de individuos)" No voy a sugerir que este análisis distinguiera ya las dimensiones que más tarde se llamarían *sintáctica y semántica;* pero si barruntaba la idea de interpretación de un cálculo y abría la posibilidad de operar sobre dominios. La otra línea de investigación, inaugurada por Frege, consideraba la lógica como el lenguaje simbólico de los contenidos del pensamiento puro: expresamente como una conceptografía; también, tácitamente, como una objetografía. Pues la lógica venía a ser la ciencia más general sobre lo que hay, y lo que hay son objetos y conceptos. La lógica había de servir a dos objetivos, uno *analítico,* para cuya consecución había de contar con la notación adecuada, con una escritura transparente de los contenidos puros del pensamiento, y el otro *metódico*, dirigido a la fundamentación de la matemática, cuyo logro parecía exigir la unificación axiomática de las leyes lógicas del pensamiento, las leyes

---

9 Vid. acerca de estas tradiciones, booleana y fregeana, el artículo ya clásico de J. van Heijenoort: "Logic as calculus and logic as language", *Synthèse*, 17 (1967), pp. 324-30, quizás un tanto sesgado en su estimación del programa de Boole por la propia óptica fregeana. Pueden verse asimismo W.D. Goldfarb: "Logic in the twenties: the nature of quantifier", The Journal of Symbolic Logic, 44/3 (1979), pp, pp. 351-68; I Grattan-Guinnes: "Notes on the fate of Logicism from Principia Mathematica to Gödel's Incompletability Theorem", History and Philosophy of Logic, 5 (1984), pp. 67-78; G.H; Moore: "The emergence of first-order logic", en W. Aspray y Ph. Kitcher, eds.; History and Philosophy in Modern Mathematics (Minnesota Stud. in Phil. of Science, XI).Minneapolis; University of Minnesota Press, 1988, pp. 95-135.

más generales del ser verdadero. El lenguaje lógico hablaba de todo cuanto hay, de los objetos en términos nominales y de los conceptos en términos funcionales: los predicados atribuidos a un sujeto, un argumento, son funciones cuyos valores son valores veritativos; el enunciado simple expresa un sentido y designa él mismo un valor de verdad, los enunciados compuestos son a su vez funciones veritativas compuestas gobernadas por el principio de composicionalidad del significado. Los cuantificadores, en fin, denotan funciones de segundo nivel: la generalización de conceptos o funciones de primer nivel para todo argumento o para alguno al menos; por ejemplo, el cuantificador universal puede leerse "para todo ente x vale que ...". Es obvio entonces que una aserción como "Si para todo *x*: *F(x)*, *F(y)*" constituye una ley lógica -"lo que vale de todo, vale de cualquiera"- absolutamente palmaria. En esta perspectiva, la lógica es un lenguaje universal; su universo de discurso es el universo y toda aserción lógica es una verdad absolutamente general (si acaso cabe discernir un universo peligrosamente homogéneo como el de Frege y un universo precavidamente estratificado como el de la teoría de los tipos de Russell; en este último caso, algunas expresiones lógicas -e.g.; la de identidad- pueden resultar ambiguas, pero ninguna aserción lógica deja de estar interpretada pues de suyo entraña y trasluce un contenido absolutamente cierto y verdadero). En realidad, ni siquiera llega a plantearse la idea de interpretación o la idea de dominio de interpretación. La lógica es además un lenguaje sistemático y autosuficiente: nada cabe decir lógicamente fuera del sistema. En fin, tampoco hay lugar para una lógica-de o para una lógica subyacente en un cuerpo de teoría, de modo parecido a como la articulación de los niveles del lenguaje lógico vuelve cualquier acotación parcial (una lógica de enunciados, una lógica de predicados monádicos, una lógica de primer orden, etc.) en una restricción arbitraria. La lógica es una única gran lógica y todo lo que quepa decir de ella, o de sus partes articuladas, será una concesión informal a los efectos de presentación o de entendimiento de la escritura simbólica, es -como dirá a veces Wittgenstein- mera "prosa" añadida. Esta convicción y la pretensión de transparencia del lenguaje lógico en su calidad de *lingua characteristica* bloquean por principio la viabilidad de una metalógica; y dado que las teorías matemáticas han de asentarse sobre la propia lógica, también parece truncada la oportunidad de una metamatemática. en suma, no tiene sentido una metateoría formal de las ciencias deductivas puras. El descubrimiento de las propiedades y de las relaciones internas de los subsistemas deductivos será más bien una cuestión fáctica o "experimental", algo que irán mostrando el uso y el desarrollo de estos sistemas en la práctica.

La erección de los *Principia Mathematica* de Russell y Whitehead (1910-13) en paradigma de la lógica matemática -asumido por colectivos como la escuela polaca de entreguerras o el Círculo de Viena, y por personas independientes tan dispares como C.I. Lewis, E.L. Post o H. Scholz- instaura la hegemonía de la línea fregeana de investigación y la marginación relativa del álgebra booleana de la lógica. La conversión de los *Principia* a lo largo de la década de los 20 en una especie de matriz disciplinaria ocurre a pesar de que la ventaja inicial correspondiera a la alternativa algebraica: ésta había entrado a principios del siglo en una vía de normalización con las contribuciones de un Schroeder o de un Couturat, y más tarde siguió estudiando a su aire las condiciones de aplicación de las ecuaciones lógicas en diversos dominios prefijados. Por este camino, los resultados de Löwenheim (1915) preludian algunos temas hoy familiares: la decidibilidad del cálculo elemental de predicados monádicos, la distinción entre la validez de una fórmula elemental en cada dominio finito y su validez lógica propiamente dicha (i.e. su validez en cualquier dominio numerable); más adelante, Skolem (1920) generalizará este resultado a conjuntos de fórmulas y abrirá unas perspectivas de caracterización, como la de la lógica de primera orden o la de ciertos conjuntos de fórmulas elementales decidibles. Todo esto no significa, por cierto, la instauración de una metalógica ni la fundación de la semántica. Para alcanzar el nivel sistemático de la metateoría a la tradición logicista le faltaba el "meta", a la tradición algebraica le faltaba la "teoría". Y en relación con la semántica, también convendría distinguir diversas etapas de constitución; por ejemplo: la fase más bien filosófica fregeana, las primicias de universos de discurso o dominios de aplicación que adelanta la tradición algebraica, la semántica científica que inaugura Tarski en los años 30 con la consideración expresa de la interpretación de un lenguaje y de sus posibles dominios de referencia, y en fin la semántica hoy estándar -la teoría de modelos- que considera la variabilidad tanto de interpretaciones como de dominios de interpretación. Un claro síntoma de la ausencia de semántica propiamente dicha en la tradición logicista es, por ejemplo, el denominar "proposiciones con sentido" a las expresiones enunciativas bien formadas como hace Wittgenstein (denominación todavía corriente a principios de los años 30 incluso en medios no logicistas); otro síntoma podría ser la distinción de Ramsey (1925: "The foundations of mathematics"; 1926: "Mathematical logic") entre paradojas formales, lógicas o matemáticas, y paradojas empíricas, epistemológicas o aun psicológicas -en suma: pragmáticas (e.g.; la del mentiroso)-, pero no por cierto "*semánticas*" como mal suele decirse desde el punto de vista de la realidad histórica (no tienen ni esta calificación ni esta calidad en los textos de Ramsey)[10].

Sobre el telón de fondo de la tradición Frege-Russell, y en buena parte contra ella, empieza a desarrollarse el pensamiento de Wittgenstein. Cabría pensar incluso que sus intereses y su conocimiento técnicos e internos, en materia de lógica estrictamente dicha, apenas llegan a sobrepasar ese primer horizonte nodriza de los *Principia Mathematica,* aunque sus sugerencias críticas y filosóficas vayan adquiriendo desde el principio mayores vuelos. Por lo menos, según todos los visos y en último término, no son demandas de desarrollo de la propia lógica sino más bien motivos de orden filosófico -a veces una especie de ajuste personal de cuentas- los que determinan el accidentado curso de este pensamiento. Veamos un poco por encima la evolución de esta filosofía wittgensteiniana de la lógica[11]

2. La evolución de Wittgenstein en filosofía de la lógica

En términos sumamente esquemáticos y sin el menor deseo de entrar en la vieja guerra de subíndices (Wittgenstein$_1$, Wittgenstein$_2$, ...), voy a mencionar algunas fases evolutivas y ciertas convicciones que se mantienen constantes.

Una primera fase cubriría hasta las *Notas sobre lógica* de 1913. Wittgenstein inicia la crítica de dos puntos del simbolismo fregeano: el tratamiento de las proposiciones como nombres de lo Verdadero o de lo Falso, y de las expresiones lógicas como denominaciones de funciones; asimismo, apunta el tema de la forma general de la proposición que luego será central en el *Tractatus.* Aparte de esbozar sus preocupaciones trascendentales en torno a la lógica, el lenguaje y el mundo, Wittgenstein busca una filosofía correcta de la simbolización de las proposiciones lógicas mismas: una condición necesaria de esta corrección será declarar su estatuto singular y

10 F.P. Ramsey: *Foundations. Essays in Philosophy, Logic, Mathematics and Economics* (D.H. Mellor, ed.). London; Routledge & Kegan Paul, 1978; pp. 171-2 y 227-8 en particular.

11 Una visión general de la filosofía de la lógica del *Tractatus* puede verse en mis *Lecturas de Lógica* I. Madrid; UNED, 1986 reim.; 3, pp. 89-107. Sobre su cambio de concepción de los años 30-40, vid. G.P. Baker y P.M.S. Hacker: *Wittgenstein, Rules, Grammar and Necessity.* Blackwell, 1985, pp. 307 ss. en especial. Hay observaciones de interés en B. Stroud (1965): "Wittgenstein and logical necessity", incluido en G. Pitcher, ed.: *Wittgenstein. The Philosophical Investigations (A Collection of Critical Essays).* New York, Macmillan 1968^2; pp. 477-97. Una revisión de conjunto es la que ofrece G. Baker: *Wittgenstein, Frege & The Vienna Circle.* Oxford, Blackwell, 1988.

una condición suficiente será mostrar ese estatuto sobre la base de la constitución bipolar de su sentido. En esta perspectiva, toda proposición indica una dirección hacia la verdad o la falsedad representada por la notación «*a-b*». Con arreglo a esta notación, '*p*' se traduce por '*a-p-b*', la negación '~*p*' por'*b-a-p-b-a*', la doble negación '~~*p*' por '*a-b-a-p-b-a-b*'; pues bien, todas estas proposiciones tienen el mismo significado; es decir: la presencia de constantes lógicas no marca una diferencia de contenido porque los símbolos lógicos no denotan cosa ni objeto alguno y, en realidad, como no hay objetos lógicos tampoco hay constantes lógicas.

La segunda fase discurre desde las *Notas* dictadas a Moore en 1914 hasta el *Tractatus.* Wittgenstein enriquece su posición inicial con nuevas ideas y precisiones. Toda proposición significativa es un hecho y una pintura (o figura) lógica de un hecho. Toda proposición se deja analizar como una función veritativa de proposiciones elementales mutuamente independientes. Una proposición elemental es función veritativa de sí misma; una proposición no elemental resulta función veritativa de proposiciones elementales; toda función de verdad es resultado de la aplicación sucesiva de un número finito de operaciones de verdad a las proposiciones elementales (5.32); todas estas operaciones, a cargo de los operadores lógicos habituales, pueden reducirse a una sola, a la operación $N(\xi)$ del *Tractatus* que cabría leer como un conector de negación conjunta "ni..., ni..."; viene a ser equivalente a la "ampheck" de Peirce o la operación dual de la llamada "barra" de Sheffer (5.5 -5.52). Este planteamiento puede sugerir algo así como un proceso recursivo de generación de todas las funciones de verdad posibles -de toda posible proposición- a partir de las proposiciones elementales. Para Wittgenstein representa algo de mayor trascendencia aún; muestra la forma general de la proposición (5.47). Según esto, los símbolos lógicos sólo marcan diferencias notacionales reducibles dentro de esa formación lógica general. Un avance significativo de esta fase es la idea de que las proposiciones lógicas son tautologías. En la tradición Frege-Russell, la generalidad absoluta de las verdades lógicas se podía expresar mediante variables libres, mediante "funciones proposicionales" como decían los *Principia.* Wittgenstein había observado que esta formulación no depara proposiciones, por lo que hay que desterrar las variables libres o reales; además objetaba que este modo de expresión no permite distinguir entre una generalidad accidentalmente verdadera y la validez esencial que distingue a las proposiciones de la lógica; así pues, las proposiciones lógicas se han de formular más bien como generalizaciones de tautologías. Este punto a primera vista notacional supone una nueva concepción de las proposiciones lógicas: su peculiaridad ya no reside tanto en su generalidad omnímoda como en su forma esquemática. Desde la conferencia II de *Nuestro conocimiento del mundo exterior* (1914) hasta el c. XVIII de la *Introducción a la filosofía de la matemática* (1919), vemos a Russell vacilar entre una y otra concepción, entre la suma generalidad y la validez formal, esquemática, de las verdades lógicas, seguramente bajo el influjo de Wittgenstein. El *Tractatus* sienta definitivamente la condición esquemática de las proposiciones lógicas: 'α' es una proposición lógica ssi cualquier proposición de la misma forma que 'α' es una tautología, es asimismo lógicamente válida. Por otra parte, las tautologías no dicen nada, no son temáticamente neutrales por mor de su generalidad sino sustantivamente vacuas; se limitan a mostrar su validez en un simbolismo perfectamente unívoco como el del *Tractatus.* Al margen de las repercusiones filosóficas generales de esta demarcación crucial entre decir y mostrar, creo que la distinción representa una culminación de los ideales de transparencia y autosuficiencia del simbolismo lógico acariciados por el logicismo, y por ello pretende efectuar un rasurado radical de su primitiva barba platónica. En fin, Wittgenstein mantiene la universalidad y unicidad de la gran lógica, pero a su manera; como una manifestación de la índole trascendental de la lógica, cuyos límites son irrebasables y coinciden con los del lenguaje, pues no cabe un lenguaje ilógico, y con los del universo mundo, pues la lógica presenta a través del lenguaje el orden *a priori* del mundo, el orden de posibilidades que debe ser común a pensamiento y mundo (*Investigaciones filosóficas,* I § 97).

Cuando Wittgenstein vuelve a ocuparse de lógica y de matemáticas a partir de 1929, renuncia a algunas creencias básicas anteriores, por ejemplo a la suposición de unos elementos del análisis últimos, atómicos e independientes, y a la equiparación de los cuantificadores con sumas o con productos lógicos finitos. Pero sobre todo reacciona críticamente contra la motivación filosófica general del *Tractatus,* en especial contra la idea de que la lógica está dada en la naturaleza esencial del lenguaje y representa la estructura lógica del mundo. Su punto de partida es ahora la existencia de sistemas proposicionales, *Satzsysteme,* noción que abre la perspectiva ulterior de los juegos de lenguaje. Este punto de vista no sólo reniega de la independencia mutua entre las proposiciones elementales (ante todo, para resolver problemas de análisis como los suscitados por el sistema de las proposiciones sobre colores, donde "esto es rojo" implica "esto no es azul" o es incompatible con "esto es verde"). También descarta obviamente la universalidad y la unicidad de la gran lógica contemplada en el *Tractatus.* Wittgenstein madura su nueva concepción durante los últimos años 30 y la primera mitad de los 40, cuando aborda las *Investigaciones filosóficas* y escribe las *Observaciones sobre los fundamentos de la* *matemática.* Ahora las reglas lógicas de inferencia se encuentran entre las reglas gramaticales de un sistema o un juego de lenguaje y las tautologías olvidan su anterior constitución veritativo-funcional: 'α' es una tautología de S ssi es una proposición lógica de S en el sentido de ser el correlato de una regla de inferencia de S cuya suspensión o violación trae consigo el cambio de sistema o de juego de lenguaje. Por ende, la comprensión del funcionamiento de un operador lógico es inseparable del reconocimiento de una regla. Es curioso que este cambio de concepción discurra en paralelo a ciertos desplazamientos que tienen lugar en la propia lógica, e.g. a la disolución de las grandes lógicas unitarias y la consideración de diversos lenguajes lógicos habilitados para distintos niveles y ámbitos de análisis, -incluidas las lógicas "alternativas" que parecen tomarse en serio a partir de los años 30-: e incluso parece coincidir con el nuevo trato de los operadores lógicos en los sistemas de deducción natural que también aparecen en esa década. Ahora bien, la evolución del pensamiento de Wittgenstein tiene todos los visos de ser una autocrítica autóctona, un ajuste personal de cuentas con la filosofía de la lógica del *Tractatus,* al margen de lo que ha ido aconteciendo en lógica. Esta impresión no sólo obedece a su ritmo peculiar: cuando Hao Wang comunica a Gödel que Wittgenstein ha renunciado en las *Notas* de 1932 al atomismo y al finitismo del *Tractatus,* Gödel se limita a preguntar: "¿Y qué ha estado haciendo Wittgenstein todos estos años?". También se debe a la peculiar atmósfera que rodea este cambio y a la recurrencia de antiguas claves de su pensamiento. Por esa atmósfera entiendo la ambigüedad sustancial que impregna los usos wittgensteinianos del término "lógica", una ambigüedad creciente con los años hasta alcanzar la polisemia informal de *Zettel* (1950) (ésta sí es una contribución popular del "último" Wittgenstein: la proliferación de usos del sustantivo y del calificativo 'lógica', cuya clasificación hoy en día podría asemejarse a la clasificación de los animales según una venerable enciclopedia china que han exhumado el doctor Kans Kuhn y Jorge L. Borges). Es obvio el contraste entre esa ambigüedad e informalidad wittgensteiniana y la progresiva tendencia a la caracterización técnica de lenguaje y métodos entre los lógicos y los metamatemáticos desde los años 30. Por lo que se refiere, en fin a los motivos recurrentes y las convicciones constantes a lo largo de la evolución de su pensamiento, baste mencionar dos. El primero es la convicción de que las pautas lógicas muestran o regulan un uso pero no lo justifican y, en general, tanto la lógica como las matemáticas eluden cualquier justificación pues saben cuidarse de sí mismas: si el secreto podía residir al principio en una estructura simbólica transparente, como pretendía ser la notación del *Tractatus,* luego será la práctica misma de las reglas inferenciales lógicas y de las ecuaciones matemáticas la que venga a garantizar su autonomía y su transparencia. El segundo motivo recurrente es la convicción de que las proposiciones lógicas tienen un estatuto peculiar, son radicalmente distintas de otras proposiciones cualesquiera; por ejemplo, no hay detrás de ellas nada que descubrir: ni objetos de referencia, ni significados previos a su uso, ni en general puede haber algo así como una verdad lógica o matemática dada antes, o al margen, de una prueba. Por eso estas proposiciones no sólo son decidibles: están decididas.

3. El caso de las tablas veritativas

Con estos antecedentes sobre el marco originario y la evolución del pensamiento de Wittgenstein, podemos pasar a considerar los casos concretos que antes había anunciado. En primer lugar, el caso de las tablas veritativas del *Tractatus*.

El hallazgo de este procedimiento de decisión para determinar el valor de verdad de un enunciado fue un descubrimiento múltiple a finales de la segunda década del presente siglo. Peirce ya había sentado un precedente en 1885 al sugerir algo parecido para dilucidar la validez lógica de una fórmula construida con la negación y el condicional, en la línea de lo que Quine ha venido a llamar mucho después "análisis veritativo-funcional"[12]. Bernays, en su *Habilitationschrift* de 1918, utiliza matrices de asignación de valores veritativos para estudiar la consistencia y la independencia de los axiomas del cálculo de enunciados; Lukasiewicz también conocía antes de 1920 un método de asignación de valores veritativos en términos de cero y uno, que luego desarrolla en la presentación de un sistema de lógica trivalente. Con todo, el uso más notable de este procedimiento es el que tiene lugar en la "Introducción a una teoría general de las proposiciones elementales" de E.L. Post (1921)[13]. Merece la pena detenerse en él no sólo por sus méritos propios sino por su valor como marca de contraste para apreciar la posible diferencia entre una contribución interna al desarrollo de la lógica y una contribución más bien filosófica a la discusión en torno a su naturaleza (como la del *Tractatus*). Post establece, para empezar, que las funciones de negación y disyunción son adecuadas para el conjunto de las funciones veritativas del subsistema proposicional de *Principia Mathematica* porque son capaces de expresar

---

12 Ch.S. Peirce (1885): "Sobre el álgebra de la lógica. Una contribución a la filosofía de una notación", en sus *Escritos lógicos,* Madrid: Alianza, 1988, pág. 181 en particular.

13 E.L. Post (1921): "Introducción a una teoría general de las proposiciones elementales", en mis *Lecturas de Lógica* I ya citadas, 10, pp. 317-51.

la función correspondiente a cualquier tabla de verdad compuesta por dos valores, positivo y negativo. En segundo lugar, prueba la consistencia y la compleción o suficiencia de este subsistema: una condición necesaria y suficiente para la aserción de una función de este género como consecuencia de sus postulados en *PM* es la condición de que todos sus valores veritativos sean positivos. Hay tres aspectos de esta contribución de Post dignos de especial mención: a) Si el marco de referencia son las funciones veritativas que sugiere *PM,* la raíz operativa de su procedimiento de tabulación reside en el método de expansión de Boole, i.e. en ecuaciones del tipo de "$F(x) = f(1)x + f(0)(1-x)$". b) Post aprecia perfectamente la distinción entre la "teoría", las pruebas dentro del sistema, y la "metateoría", las pruebas acerca de las propiedades del sistema, al tiempo que sabe acotar el subsistema proposicional de *PM* como un sistema deductivo cerrado, para cualquier proposición α del lenguaje del sistema, o bien α es derivable en el sistema y constituye una función positiva o bien la adición de α como otra aserción más torna el sistema inconsistente. Por otro lado, si la prueba de consistencia de Post sigue la pauta marcada por Hilbert (1904) de atenerse a una característica hereditaria dentro del sistema -característica de las aserciones primitivas que, través de las reglas de deducción, se trasmite a todas las aserciones derivables y sólo a ellas-, el mismo Post alude expresamente al abordar la prueba a unas primicias adelantadas por Schroeder (1981). c) La tabulación de los valores positivo y negativo no depara en realidad una semántica; representa más bien una asignación operacional de valores con miras a la obtención de una característica efectiva de las aserciones del sistema. Por lo demás, un proceder análogo puede extenderse a la consideración de sistemas m-valorados siendo m un número natural cualquiera mayor que 2. En suma, una contribución como la de Post se integra en las líneas de investigación abiertas por la evolución interna de la lógica y, por otra parte, contribuye a la apertura de nuevas perspectivas de desarrollo, e.g.; al reconocimiento de subsistemas lógicos y de análisis metalógicos, a la experimentación formal con sistemas de evaluación no bivalentes.

Las tablas veritativas de Wittgenstein tienen a su vez una motivación original: son un avance decisivo en la línea abierta por la notación «a-b», i.e. en el logro de una determinación precisa de la forma general de la proposición y en la autoexposición efectiva del estatuto tautológico de las proposiciones lógicas. Por eso alcanzan a tener un doble sentido, técnico en parte pero sobre todo filosófico. En su sentido técnico, Wittgenstein las considera un procedimiento efectivo no sólo de decisión y de construcción de toda función veritativa del *Tractatus,* sino de demarcación de las tautologías o esquemas tautológicos (siempre será posible calcular si una proposición pertenece a la lógica calculando las propiedades lógicas del símbolo (6.122, 6.126). Además, tanto en la versión tabular de 4.31-4.45, 5.101, como en la versión diagramática de 6.1203, revelan la extensionalidad del punto de vista veritativo-funcional; todos los resultados de operaciones veritativas con funciones veritativas que sean una y la misma función veritativa de proposiciones elementales, son idénticos (4.46). Estas dos virtudes del *Tractatus,* la identificación justa de las proposiciones lógicas y la extensionalidad del análisis lógico fueron sumamente encarecidas por Ramsey. Pero en estos puntos mismos que podríamos calificar en principio de contribuciones a la lógica ya late la trascendencia peculiar de toda una filosofía simbólica. Por ejemplo, el sentido primordial de la extensionalidad estriba en dar lugar a un programa notacional y analítico reductivo; a la exclusión del régimen intensional (5.541), a la reducción finitista de la cuantificación (5.52), a la eliminación de la identidad (5.53-5.5303). Y el significado básico de la decidibilidad formal de la validez de los esquemas tautológicos (el que a la sola luz del símbolo pueda reconocerse su validez, hecho que encierra en sí toda la filosofía de la lógica (6.113), o el que en lógica proceso y resultado sean lo mismo de modo que no caben las sorpresas (6.1251, 6.1261)), descansa en las pretensiones especulativas de transparencia y de autosuficiencia de la lógica. En realidad, la lógica no sólo sabe cuidarse de sí misma, sino que no le queda más remedio que mostrarse a sí misma. Entonces ¿qué podemos hacer en lógica una vez alcanzado este estado de manifestación beatífica? No cabe plantearse las relaciones entre los cuantificadores y los operadores veritativos funcionales en diversos dominios finitos o infinitos, como harán los brotes tardíos de la rama algebraica. También es desafortunada la constitución teórica, axiomática, del cuerpo de las proposiciones lógicas, que propone el logicismo (6.127) y está de más la prosa de las reglas y de los supuestos deductivos informales explayada en *PM*, Pero igualmente sobra cualquier tratamiento metateórico de la lógica (6.113), pues toda tautología muestra por sí misma que lo es (6.127), la demostración aquí no es sino un medio mecánico auxiliar para facilitar su reconocimiento cuando se trata de una tautología complicada (6.1262) y, para colmo, es obvio que las leyes lógicas no pueden estar sometidas a su vez a unas leyes lógicas (6.123). En general, nada se puede decir sobre la forma lógica de cualquier proposición dada, ni tiene sentido hablar sobre las propiedades lógicas de las proposiciones: son algo que toca mostrar a la notación adecuada. Lo que sí podemos es aclarar la relación entre las proposiciones lógicas y el mundo cuyo armazón representan, o la relación entre lógica y matemáticas (la matemática es, por cierto, un método de la lógica que trabaja con ecuaciones y a través de ellas también resulta capaz de cuidarse y entenderse por sí misma (6.234, 6.2341). Podemos, en suma, hacer filosofía de la necesidad, pues la investigación en lógica es la investigación de toda legaliformidad (6.3). Pero si seguimos insistiendo: ¿qué podemos hacer dentro de la lógica y, en particular, dentro de ese análisis de sistemas o subsistemas -como, sin ir más lejos el de Post- que está dando unos primeros pasos decisivos en este primer tercio de s. XX?, la respuesta del *Tractatus* sería -creo-: "Lo que cabe hacer es dedicarse a otra cosa".

4. De las tablas veritativas a la idea de demostración: la cuestión de la determinación del significado de los operadores lógicos.

Después de 1929 -y tras haberse dedicado en efecto durante varios años a otras cosas- Wittgenstein empezó a entender las tablas veritativas como una especie de explicación del significado de los conectores proposicionales, explicación que además contribuía a purificar la autonomía de las proposiciones lógicas -descargadas de la tarea transcedental anterior de reflejar las propiedades lógicas del lenguaje y del mundo. Esto no implica, desde luego, la adopción de unos puntos de vista hoy corrientes en semántica estándar: por ejemplo, la idea de que las proposiciones lógicas pueden derivarse como consecuencias de los significados de sus operadores lógicos (e.g.; de modo que el carácter tautológico del esquema de equivalencia de la doble negación '$\sim\sim p \equiv p$' se funda en el significado de la negación veritativo-funcional), o la idea de que la validez semántica de unas proposiciones de S puede servir como marca o guía independiente de contraste para las reglas pertinentes de su derivación formal en S (e.g.; de modo que la regla R sólo es aceptable en S si preserva el valor designado de las premisas y lo transmite a la conclusión). Tales consideraciones carecen de sentido: evidencian una mitología del significado, la creencia en un presunto *Bedeutungskörper*. Según Wittgenstein, lo que ocurre es más bien que las tablas veritativas, al igual que otras explicaciones del significado, son reglas gramaticales. Cuando reconocemos '$\sim\sim p \equiv p$' como una proposición lógica necesaria, nuestro reconocimiento no dimana del significado de '$\sim$' sino que lo constituye: ésta es precisamente una de las reglas del uso pertinente de '$\sim$' en el sistema considerado. Por ejemplo, el movimiento diagonal del alfil no se funda en un atributo previo de esta pieza, sino que, por el contrario, es la regla del ajedrez que establece ese movimiento una de las que confieren a esta pieza el papel de alfil en el juego. Dicho en los términos de las *Observaciones...* (VII § 30); las reglas de inferencia dan significado a los signos lógicos porque son reglas de uso de esos signos, forman parte de determinación de su significado y, en este sentido, las reglas de inferencia no pueden ser falsas como tampoco pueden ser correctas. Son más bien instancias paradigmáticas de pensamiento y discurso aprendidas con el aprendizaje y el uso del lenguaje.

Una tradición del análisis lógico que se remonta a las investigaciones de Gentzen (1935) y hoy tiene diversas ramificaciones, ha venido trabajando en una línea en parte parecida: en el intento de determinar constructivamente el sentido de los operadores lógicos mediante sus reglas de introducción y de eliminación en un sistema de deducibilidad definido o, si se quiere, en una teoría de la deducción. Gentzen había apuntado (1935): "Untersuchungen über das logische Schliessen", ii § 5.13): "Las introducciones representan -por así decir- las 'definiciones' de los símbolos correspondientes, y las eliminaciones no son en último análisis sino las consecuencias de estas definiciones. Cabe expresar este hecho como sigue: al eliminar un símbolo, podemos emplear la fórmula, de cuyo símbolo principal nos ocupamos, solamente en el 'sentido conferido por la introducción de tal símbolo'". Así pues, la regla de introducción de un operador lógico determina el "significado" o el cometido de este operador en el marco deductivo considerado (un sistema intuicionista, NJ, o un sistema clásico, NK) y la regla de eliminación correspondiente no hace sino confirmar este sentido: se supone entonces que las reglas de introducción se justifican por sí mismas al constituir el "significado" de los operadores admisibles en ese contexto deductivo y las reglas de eliminación se justifican a su vez por su congruencia con las reglas de introducción. Los teoremas de inversión y de normalización de Prawitz (1965, 1971) son resultados técnicos de este programa concernientes, primordialmente, a los operadores estándar de la lógica de primer orden[14]. Un tratamiento similar del "significado" de los operadores lógicos también ha caracterizado a la tradición intuicionista y, por lo demás, en una perspectiva análoga se mueven asimismo diversos enfoques antirrealistas como el de Dummett o el de Tennant[15]. Estos planteamientos que abogan por una codeterminación semántica y deductiva del sentido de los operadores lógicos -con arreglo a su uso canónico en la construcción de pruebas- han alcanzado la madurez suficiente para evitar ciertos tropiezos ingenuos y para afrontar diversas críticas procedentes del bando de quienes propugnan la prioridad ab-

---

14 D. Prawitz: *Natural Deduction.* Stockholm, Almqvist & Wiksell, 1965; "Ideas and results in Proof Theory", en J.E. Fenstad, ed.; *Proc. of. 2nd. Scandinavian Logic Symposium* (Oslo, 1970). Amsterdam: North Holland, 1971, pp. 135-307.

15 M.A.E. Dummett: *Elements of Intuitionism*, Oxford: Clarendon Press, 1977; N Tennant: *Anti-Realism and Logic*, Oxford: Clarendon Press, 1987.

soluta de la asignación puramente semántica de significado[16], Pero no han culminado uno de sus propósitos, el de lograr una determinación cabal y constructiva del concepto de operador lógico en general (i.e. más allá de los conectadores y cuantificadores habituales de la lógica de primer orden). La cuestión general de precisar la "logicidad" que distingue a cualquier operador susceptible de la calificación de "lógico" en algún contexto determinado, es una cuestión que -según es bien sabido- se mantiene abierta. No obstante, su consideración reviste suma importancia (por ejemplo, guarda estrecha relación con la explicación de la noción misma de consecuencia lógica) y, de hecho, ha tenido que ver con el nuevo rumbo que han tomado algunas teorías de la demostración en los años 60 y 70. Casi no es preciso puntualizar que la postura de Wittgenstein, pese a algún punto notable de coincidencia, responde a otros motivos puramente filosóficos y contempla otros aspectos de la identificación de las proposiciones lógicas. Más aún: da la impresión de que tras aclarar su estatuto de reglas gramaticales, el sinsentido de buscarles justificación en algo más allá de índole ontológica o epistemológica, y la necesidad de contar con ellas en el ejercicio de la inferencia y del pensamiento -pues a su empleo es a lo que justamente llamamos "inferir" y "pensar"-, ya está dicho todo. Así, pues, tampoco debe extrañar que Wittgenstein sea en principio ajeno a estas tradiciones y programas de investigación que se han ido centrando en un tratamiento lógico sistemático de la relación de deducibilidad y de la idea de demostración aunque luego, en ocasiones, no falte quien invoque algún texto wittegensteiniano como bendición o como pretexto (en particular, el inevitable § 43 de las *Investigaciones filosóficas: "Para una gran* clase de casos de utilización de la palabra 'significado'... puede explicarse esta palabra así: el significado de una palabra es su uso en el lenguaje").

5. El caso de la idea de demostración

Sin embargo, la idea de demostración es un tema central de la filosofía wittgensteiniana de la matemática. Veamos su automarginación en este caso.

---

16 Como ilustración de esos tropiezos, *vid.* K.R. Popper: "Logic without assumptions" (*Proc. Aristotelian Society,* 47 (1947), pp. 251-92; "New Foundations for Logic", *Mind,* 56 (1947), pp. 193-255; "On the theory of deduction", *Indagationes mathematicae,*10 (1948), pp. 44-54, 111-120. Por otra parte, una viva muestra de ironía crítica es la maquinada por A.N. Prior (1960): "El bono de tránsito inferencial", en las ya citadas *Lecturas de Lógica* I, 7, pp. 237-9; cfr. una réplica en la nota siguiente a esta lectura, *l.c.*, pp. 239-46.

Según Wittgenstein, lo que necesitan las proposiciones matemáticas es una clarificación de su gramática, no una fundamentación (*Observaciones...*, VII §16). Esto quiere decir que, por un lado, hemos de apreciar la abigarrada mezcla de técnicas demostrativas en que consiste la matemática (III §46), y por otro lado hemos de elucidar los rasgos distintivos de todo eso que los matemáticos presentan y aceptan como pruebas. Un punto de partida es reconocer que se trata de una práctica común de seguir una regla ("Decir que 'esta proposición se sigue de aquélla' es aceptar una regla. La aceptación se produce sobre la base de una demostración. Es decir, considero aceptable esta cadena (esta figura) como demostración", I §33). Dicha práctica es a su vez un hecho de nuestra historia natural (I §§63, 142). Nosotros y nuestra matemática podríamos haber sido distintos, pero, salvada esa contingencia, el caso es que somos como somos y el modo de probar y calcular que comportan nuestros usos matemáticos constituye el modo de inferir y el modo de pensar acerca del mundo natural. Esta constatación no sólo obvia el convencionalismo, sino que torna carente de sentido cualquier duda escéptica sobre las proposiciones matemáticas. Precisamente su empleo como reglas gramaticales las sustrae de toda posible incertidumbre. Así pues, tampoco tendrán sentido los programas que buscan dar respuesta a las dudas del escéptico sobre las proposiciones matemáticas. Precisamente su empleo como reglas gramaticales las sustrae de toda posible incertidumbre. Así pues, tampoco tendrán sentido los programas que buscan dar respuesta a las dudas del escéptico planteándose la cuestión de qué tipo de demostración nos asegura la verdad y la necesidad matemáticas, e.g. el programa de Hilbert. Todas las demostraciones matemáticas acreditan la necesidad de las proposiciones matemáticas. He ahí el primer rasgo característico de este tipo de prueba; la normatividad de la demostración y la necesidad de su conclusión ("Recorro la demostración y digo: 'Sí, así tiene que ser; así he de establecer el uso de mi lenguaje'", III §30). Esto requiere, desde luego, que la demostración sea perfectamente abarcable y estemos dispuestos a tomarla como una pauta paradigmática ("'La demostración ha de ser abarcable de una ojeada' significa: hemos de estar dispuestos a usarla como pauta de juicio... La demostración ha de ser modélica", III §22). He ahí un segundo rasgo. Ambos se acompañan de una peculiaridad más sustancial; la existencia de una conexión interna entre la prueba y la proposición probada. La prueba forma parte de la gramaticalidad misma de la proposición probada (III §31). De ahí que, por un lado, cuando una demostración introduce un nuevo concepto o construye una proposición añade un nuevo paradigma a los paradigmas del lenguaje (III §30) y, por otro lado, una proposición matemática completamente analizada es su propia prueba (*Philosophi-*

cal Remarks, §162). Pues en la matemática, como en lógica, se da una equivalencia entre proceso y resultado que evita cualquier indecisión y cualquier sorpresa (I §82).

Francamente no creo que sean motivos técnicos los que sustentan esta caracterización, aunque Wittgenstein suele tener la precaución de remitirse a ejemplos combinatorios de la aritmética elemental -efectivamente decidibles-, y aunque la idea de una especie de *Beweissysteme,* sistemas de demostraciones, que late en su caracterización guarda, como ya he dicho, notables analogías con ciertos desarrollos actuales de la demostración en el campo de la deducción natural. Son más bien presunciones filosóficas las que obran en esa elucidación de la idea de demostración. Por ejemplo, la presunción de que una proposición lógica o matemática es una regla gramatical de un sistema o de un juego de proposiciones y, por ende, no sólo es incuestionable sino que tampoco puede consistir en una especie de hipótesis susceptible o no de verificación: esto la reduciría a la condición de una proposición empírica o de un mero estímulo intelectual, sería a lo sumo una conjetura en busca de un sistema de prueba y decisión. O, por ejemplo, la presunción de que una proposición matemática, al margen de su demostración -al margen de su efectiva constitución gramatical dentro de un sistema-, carece de contenido y atributos significativos. A esta luz, parece plausible la influencia de ciertas ideas de Wittgenstein en el creciente auge de la pragmática de la demostración dentro del campo que hoy suele conocerse como teoría de la argumentación, en especial la idea de que una condición para que un argumento constituya una prueba es la de ser reconocido como tal en un determinado contexto, la de ser visto y empleado así en este contexto. Pero, por otro lado, no habremos de extrañarnos de que Wittgenstein, llevado por su propia dinámica conceptual, discurra un tanto a contrapelo de las teorías de la demostración lógico-matemáticas y, más aún, fuerce el sentido de algunos resultados básicos en este terreno. El caso más popular es, sin duda, la suerte que corre el primer teorema de limitación de Gödel (especialmente en el Apéndice III (1938) de la parte I de las *Observaciones sobre los fundamentos de la matemática*). Este resultado, al establecer la existencia de una proposición verdadera pero indemostrable en cualquier sistema de la capacidad expresiva de *PM,* desmiente las expectativas del programa amplio de Hilbert (la posibilidad de una formalización consistente y completa de la aritmética, la suficiencia de su aparato formal para decidir cualquier cuestión formulable en los términos del sistema), y tiene asimismo una repercusión negativa sobre el programa restringido a la prueba de la consistencia del propio sistema. No está de más recordar que estos resultados fueron mejor asumidos en principio por los círculos que abrigaban ideales formalistas que por otros círculos lógicos y matemáticos[17]; una razón es, a mi juicio, la incipiente familiaridad de esos medios con el punto de vista metamatemático. Por contraposición, las reservas y la incomprensión -al menos aparente- de Wittgenstein obedecen en parte a su negativa a aceptar este punto de vista. Según Wittgenstein, "proposición verdadera en el sistema de Russell" no puede significar otra cosa que "proposición demostrada en el sistema de Russell", por consiguiente no puede darse algo así como una proposición verdadera e indemostrable dentro del sistema. Más aún: no puede haber ninguna especie de metasistema; sólo caben sistemas distintos de modo que una proposición demostrada en uno resulte falsa en el otro: "Lo que en el ajedrez significa 'perder', puede ser en otro juego ganar" (*Observaciones...*, Apéndice III §8). El punto de vista de los *Satzsysteme* y de los juegos de lenguaje, cada uno de ellos autónomo e irreducible a una articulación metalingüística o una jerarquía sistemática (sólo media entre ellos un aire de familia), choca frontalmente con el punto de vista metateórico. Parejamente, la gramática (y, uno añadiría, la pragmática) autosuficiente de los sistemas lógicos y matemáticos priva de sentido a cuestiones tales como su consistencia, su compleción o su decidibilidad y, en general, a cualquier consideración de la prueba y de la verdad como dos dimensiones que abren vías de análisis independiente. Plantearse cuestiones de ese tipo, como hizo Hilbert, o desarrollarlas técnicamente en la línea de Gödel no es sino jugar el insensato juego del escéptico -hacerse cargo de preguntas como: "¿cabe asegurarse de la verdad de una proposición o de un conjunto de proposiciones matemáticas?"-, y abordar empresas que filosóficamente no llevan a ninguna parte salvo a recaídas en viejas crisis epistemológicas o en renovadas ilusiones ontológicas. Para un Wittgenstein anclado en la filosofía del significado y en la filosofía de la matemática de las últimas décadas del s. XIX y las primeras décadas del XX, Tarski no llegará a existir nunca[18]. Lo que representarían entonces los resultados de Gödel, si algo de interés filosófico representan, sería la reducción al absurdo del programa de Hilbert. Tal vez sea una ironía de la historia el que hoy, lejos de

17 Vid. J.W. Dawson (1984): "The reception of Gödel's incompleteness theorems", en S. Shanker, ed.; *Gödel's Theorem...*, *pp.* 74-95.

18 En la medida en que nace con Tarski la metodología formal de la ciencia deductiva (e.g.; el tratamiento sistemático de la metateoría -con el concurso de un aparato conjuntista-, la elaboración efectiva de la sintaxis de los lenguajes lógicos por medio de gramáticas recursivas -"generativas"-, el desarrollo de su semántica y de la teoría de modelos), vid. la introducción de J. Corcoran a la segunda edición de Tarski: *Logic, semantics, metamathematics.* Philadelphia: Hackett, 1983; pp. xv-xvii en particular.

reconocer absurdos filosóficos de este tipo, asistamos a un renacimiento de las teorías lógico-matemáticas de la demostración en el que fructifica la siembra iniciada por gente como Hilbert, Gödel, Tarski o Gentzen, todos ellos culpables de tratar con métodos lógico-matemáticos el análisis lógico y las teorías matemáticas. También parece ser otra ironía de la historia el hecho de que las sugerencias lógicas y matemáticas del Wittgenstein de los años 30 y 40 no sólo no encuentren un lugar en la lógica y en la matemática de su entorno sino que tampoco lleguen a ser cabalmente congruentes con su tiempo: las hay extemporáneas por anticipación (según he indicado al principio) y las hay extemporáneas por retraso (es curioso, por ejemplo, que el punto de vista crítico de los *Satzsysteme* o de los *Beweissysteme* cobre su mayor interés al aplicarlo a situaciones pretéritas como la de las geometrías euclidianas y no euclidianas hasta los *Grundlagen der Geometrie de* Hilbert (1899), según muestran -involuntariamente quizás- las vindicaciones wittgensteinianas del estilo de la ya citada de S. Shanker (1987).

En conclusión, la contribución de Wittgenstein a la lógica contemporánea ha tomado deliberadamente el rumbo de una elucidación filosófica más pendiente de su propia evolución conceptual que del desarrollo mismo de la lógica. De ahí que esta contribución haya resultado más virtual que efectiva, más notable si acaso como objeto de mención -alusión o cita- que como objeto de uso. La idea de tautología del *Tractatus* todavía alcanzó a tener cierto influjo sobre la concepción esquemática y extensionalista del análisis lógico, aunque no tanto como el que llegó a ejercer en el ámbito más general de la filosofía del lenguaje. (Pero no deja de ser sintomático que alguien tan celoso de confesar sus deudas con Wittgenstein como Carnap, las haya adquirido en realidad reinterpretando el *Tractatus* a la luz de otros, de Hilbert y de Gödel por ejemplo). Las ideas posteriores sobre los *Satzsysteme* y sobre la pragmática de la demostración se mueve en la línea de la demolición de la gran lógica única y universal del logicismo, en una dirección análoga a la tomada por ciertas investigaciones de sistemas lógicos alternativos y de sistemas de deducción natural; así como la renuncia de Wittgenstein a reconocer las neuróticas secuelas de una crisis de "fundamentación" de la matemática parece coincidir hasta cierto punto con el curso posterior de los acontecimientos. Pero, a mi juicio, en ninguno de estos casos hay comunicación, comprensión y menos aún una influencia mutua entre Wittgenstein y los responsables reales de ese curso de la investigación lógico-matemática. Según todos los visos, Wittgenstein no sólo se mueve por razones filosóficas propias, sino que además no entiende o no quiere entender algunos supuestos básicos del rumbo decidido en la prodigiosa década de los años 30. Recíprocamente, en los trabajos que alumbran y empiezan a explorar los nuevos horizontes tampoco cabe esperar algún eco real de las sugerencias wittgensteinianas. Por lo demás, ni siquiera más tarde -cuando casi parece obligada su mención protocolaria- e incluso en el ámbito o primera vista más afín del análisis lógico de la demostración y cuestiones conexas, han dejado huella[19].

UNED (Madrid)

19 Ninguna de las actuales variantes de la teoría de la demostración (la reductiva, la general, la estructural; el análisis modal o el confiado a la deducción automática) toma en consideración las observaciones de Wittgenstein. Más aún: Wittgenstein ni siquiera es mencionado en los informes panorámicos de Prawitz o de otros (e.g. G. Sundholm) sobre el desarrollo de esta temática.