CONSIDERACIONES FILOSOFICAS SOBRE LA TEORIA DE CONJUNTOS I*

Lorenzo Peña

Para algunos, la teoría de conjuntos (abreviada en adelante: tcc) es algo de lo que se ocupa el matemático y que parece no tener otro interés que el de prestar elegancia, o algún género de "cimentación", a diversas ramas del estudio matemático. Pero ¿qué cosa(s) estudia la matemática? ¿De qué se ocupa el matemático? ¿Acaso de objetos del "segundo grado de abstracción" de que hablaban los aristotélico-tomistas? Quien esté dispuesto a apencar con toda la carga teórica (metafísica y epistemológica) que conlleva esa postulación de los tres grados de "abstracción", bien: ¡que lo haga! Pero que nadie se llame a engaño. Sin esa concepción, u otra parecida, perfílanse tan sólo tres opciones: la del nominalismo, en sus variantes de formalismo u otras; la del realismo; y la del constructivismo. Que es la segunda la más satisfactoria no resulta palmario sin más, pero sí constituye una tesis plausible, que parece contar con el respaldo --pese a todo-- de la mayoría de los filósofos de la matemática. En todo caso, a ella se adhiere ardientemente el autor del presente artículo, quien ha tratado de defenderla en diversos lugares.

Si se acepta el realismo, entonces el matemático estudia entes reales. ¿Cuáles? ¿Cosas de un mundo "ideal", en el sentido de constituir un "cielo" ajeno al ámbito de lo espacio-temporal? ¿O más bien se ocupa el matemático de propiedades generales de lo real? Husserl, Frege, Russell y Gödel titubearon entre ambas alternativas --o más bien abrazaron ambas simultáneamente. La matemática sería a la vez ontología general ("formal" según Husserl) y una cierta ontología regional (n.0).

Existan o no esos mundos ideales, es lo cierto --según cualquier enfoque realista-- que la matemática se ocupa (al menos también) de lo real en general, aunque desde luego únicamente en algunos de sus rasgos. Y, haciéndolo, sólo desarrolla un estudio que, en sus grandes líneas, pertenece a la metafísica: qué géneros de entes existen; cómo y cuál es el habérselas unos con otros. Tal es el punto de vista tanto de Quine (con algunas inconsecuencias debidas a su larvado pragmatismo de sesgo idealista) cuanto del autor de estas páginas. Desde ese planteamiento, asen-

Contextos, VI/11. 1988 (pp. 33-62)

tar una tcc es a la vez brindar una base de axiomatización indispensable para cualquier teoría científica y formular una doctrina metafísica sobre la realidad. Es más: cada uno de los grandes temas de la metafísica tradicional (a diferencia, eso sí, de (muchos de) los tópicos del pensamiento eurocontinental contemporáneo) puede tratarse, ventajosamente, como un problema de (fundamentación de) tcc. La ventaja estriba en claridad y rigor.

Desde ese ángulo, examino en este artículo las razones que abonan a favor de una serie de tcc alternativas. En la Secc. 1 estudio la teoría russelliana de tipos, en sus dos variantes de ramificada y simple, mostrando la superioridad relativa de la primera de ellas; pero a la vez critico ambas. En la Secc. 2 muestro cómo, en ese transfondo, resultan las teorías de Quine fructíferas y plausibles, y, a renglón seguido, esbozo los grandes rasgos de una alternativa paraconsistente y combinatoria. No trato en este artículo de la teoría estándar de conjuntos (ZF u otras variantes) por ocuparme de ella en un próximo artículo (n.0bis). (En lo que sigue: 'R' abrevia a 'Russell'; 'F' a 'Frege'; 'Q' a 'Quine'; 'c.' ('cc.') a 'conjunto(s)'. 'PE' a 'principio de extensionalidad'; y 'PA' a principio de abstracción'.)

Secc. 1.- LA TEORIA RUSSELLIANA DE TIPOS, TRANSFONDO HISTORICO DE LA CONSTRUCCION DE LAS TEORIAS CONJUNTUALES DE QUINE

Apartado 1.- La teoría de tipos de Frege

Agrúpanse los historiadores de la tcc en dos grandes pelotones, según sean más bien matemáticas o más bien filosóficas sus inclinaciones --o su formación y su vinculación profesional. Atribuirán los primeros a Cantor casi toda la paternidad de la tcc; los segundos a F. Dejando de lado esos problemas --y sin desconocer que, cualquiera que fuese la atención con la que Cantor siguió la obra de F, F apreció mucho la labor de Cantor-- (n.1), el hecho es que a principios de siglo encontrábase ya la tcc, a poco de nacer, en plena crisis: en efecto tanto en la tcc ingenua de Cantor cuanto en la axiomatizada de F presuponíase o postulábase un <u>principio de abstracción</u> (también llamado <u>principio de concreción</u> --aquí abreviado como 'PA' según se dijo) según el cual, para cualquier descripción o matriz, "p", que contenga una variable libre, "x", al c. $\hat{x}p$ --el de las cosas que p-- pertenece un elemento cualquiera, e, ssi es verdadero el resultado de reemplazar uniformemente en "p" cada ocurrencia libre de "x" por una de "e" --e.d. por una de un término cualquiera que denote a e. Se dedujeron de ahí las célebres paradojas conjuntuales, como: la de R (el c. de cuantos cc. no se pertenecen a sí mismos se pertenece a sí mismo ssi no lo hace --de donde, a su vez, sale esta consecuencia: que se pertenece y no se pertenece a sí mismo)(n.2); las de Cantor, Burati-Forti y otras más.

Viose inmediatamente la necesidad de restringir, mediante una axiomatización adecuada, los asertos de la tcc, aunque algunos de tales asertos por sacrificar fueran muy "intuitivos", como sin duda parecía serlo el irrestricto PA. Se exploraron dos vías. Una fue la del propio F en la reelaboración de su sistema; aunque falló su intento, por ese género de sendero se ecaminó Zermelo cuya tentativa sí fue coronada por el éxito (si bien, según lo veremos más abajo, la reelaboración fregeana en un punto crucial parécese más a la tcc ML de Q). La otra vía fue abierta por R.

En la teoría de F, como en la de R, desnivélanse --siguiendo una tradición que se remonta a Aristóteles-- las entidades categorialmente. Significa eso que no existe ninguna propiedad común a todas las cosas, ni siquiera la de existir. Antes bien 'existir' deja de ser unívoco: en una acepción se predica de entes de un cierto nivel categorial, p.ej. individuos (si los hay --o sea entes del nivel más bajo); en otra acepción de propiedades de tales entes; en otra de propiedades de tales propiedades; y así sucesivamente. Complícase el asunto cuando tomamos en cuenta, además de las propiedades, las relaciones. Para entes de cualesquiera niveles, n.1,n.2,...,n.i, siendo i≧i (cada nivel n.j de ésos será ≧0), habrá entes (relacionales) de nivel <n.1,...,n.i>, de tal modo que, para cualquier nivel j, <j>=j+1. Partiendo de tales supuestos --que en el fondo son ya la teoría de tipos-- ¿cómo es que surgía en la teoría de F la apuntada contradicción? Porque, a la vez, para cada propiedad ('concepto' en la terminología de F) postulábase en esa teoría la existencia de la extensión de esa propiedad, o sea de la clase de entes que caen bajo el concepto (propiedad) en cuestión; y se reconoce una propiedad relacional de pertenencia, que, cuando liga a dos entes, son éstos del mismo nivel, a saber: individuos ("objetos" en la terminología de F) tales que el segundo ha de ser la extensión de algún concepto. Pero entonces piérdese en las "proyecciones" o "sombras" de esos entes de categorías u órdenes superiores a cero --sendas "extensiones" suyas, las clases o cc.-- aquello que se había ganado con el desnivelamiento categorial. Carecerá de sentido decir que una propiedad cae o no bajo sí misma, pero no carecerá de sentido decir que una clase se pertenece a sí misma.

Conviene, antes de seguir, entender un poco mejor el fondo de esa problemática en la concepción de F. Hay diversas razones para postular un desnivelamiento categorial (y otras para no hacerlo); pero en los argumentos de F fue decisiva ésta: que, de no hacerse tal desnivelamiento, entonces ni en la realidad podrían las cosas ligarse o relacionarse ni en nuestro lenguaje habría conexidad, estructura, un algo que haga de una ristra de signos un signo analizable. En efecto: si, p.ej., todas las palabras fueran verbos, o todas nombres, no podrían formar juntas oraciones, ni en general expresiones complejas; si la realidad fuera un conglomerado de objetos nada más, habría en ella este objeto más aquel, pero nada que hiciera de ellos _juntos_ un algo, o que hiciera que, dados uno o varios objetos, resultara de ese "darse" los mismos un _tertium quid_; puesto que, en efecto, sólo tendríamos un objeto, otro, otro; de añadirse objetos adicionales a título de aglutinantes, nada aglutinarían, sino que vendrían sólo a interponerse como más objetos. Así pues, el mismo problema se plantea en el lenguaje y en la realidad --paralelismo óntico-lingüístico. La solución es el desnivelamiento: entre categorías ontológicas (objetos vs funciones --las propiedades o conceptos son aquellas funciones que toman como valores sólo valores veritativos); y entre categorías lingüísticas (expresiones completas vs incompletas --entre éstas las locuciones predicativas o verbales). Sin embargo, hay razones para postular --y así lo hace F, según hemos visto-- también extensiones de conceptos; entre otras, el mero hecho de que a veces tenemos que nominalizar verbos, siendo así el resultado una locución nominal que --si es correcta nuestra argumentación-- no puede denotar a un concepto, sino sólo a un objeto. En 'Balduino reina', el verbo denota a una función, pero en 'El reinar es cada vez más infrecuente' el infinitivo sustantivado no puede hacerlo: denotará a la extensión de ese concepto, la cual tendrá esa propiedad de ser cada vez más infrecuente. Entre objetos no puede haber, por definición, desnivelamiento categorial. De ahí la antinomia.

Al serle comunicada ésta por R, trató F de recomponer su sistema de una manera a la que más abajo me referiré (en el primer apartado de la Secc. 2), al examinar el estudio que hace Q de la misma. No fue coronado ese intento por el éxito. F, al parecer, no volvió a intentar una reelaboración de su sistema formal. Algunos autores (p.ej. Thiel en (T1), pp.263-4) juzgan que el reo debiera ser el platonismo de F, e.d. su realismo u ontologismo, su postulación de clases o extensiones; debería haberse abstenido al menos de postular extensiones conceptuales correspondientes a expresiones nominales que sólo cobran existencia como resultado de su propia escritura conceptográfica. El problema está en que no es eso tan fácil de hacer. O bien se renuncia al realismo --pero entonces desvanécese también el recién evocado motivo para hablar de un desnivelamiento categorial ontológico, haciéndose así el sintáctico bastante enigmático e inexplicable--, o bien la restricción que sugiere Thiel resultará _ad hoc_ --aparte de que, desde luego, la antinomia de R es formulable perfectamente en román paladino.

Apartado 2.- <u>El fondo constructivista de la teoría russelliana</u>

Fracasado el intento de F, tócale el turno a R. Este se basó en la sugerencia de Poincaré (n.3). ¿QUé es lo común a las contradicciones suscitadas en tcc., y también a las semánticas como la de Richard, p.ej., u otras de esa índole? Pues, ni más ni menos, que el que de algún modo introducen en su especificación un cuantificador, un 'todos', tal, sin embargo, que la entidad especificada por la expresión global debería --si existe-- ser uno de esos "todos" a los que se alude en su especificación; debería tal entidad estar en el campo de variación de la variable del cuantificador. Ahora bien, para Poincaré (n.4) los cc. no son entidades independientes de nuestra construcción, sino "algos" que vienen constituidos o cobran realidad precisamente en el proceso mismo de ser pensados. (Su enfoque es idealista, constructivista, operacionalista --y en parte de raíz kantiana, como todo un anchuroso sector del pensamiento francés.) Conque, no existiendo de antemano, no puede cuantificarse sobre "ellos" cuando todavía no hayan cobrado realidad. El 'hay' del cuantificador existencial debe equivaler a 'ya hay', no a 'hubo, hay o habrá', si en esta última conyunción el 'hay' está en presente temporal; y desde el punto de vista idealista-constructivista no cabe un presente atemporal, pues sería un presente más allá de ser presente-para-mí-ahora, presente para mi presente capacidad cognoscitiva o constructiva-mental. Y el cuantificador universal, 'todo', equivale a 'No hay nada que no sea tal que'. Por consiguiente, hemos de entender 'hay un c. tal que' o 'todo c. es tal que' así, respectivamente: 'ya hemos construido un c. tal que' y 'todo c. que hemos ya construido es tal que'. Así pues, evidentemente, un c. por definir --o sea por construir-- no puede ser uno de esos cc. ya construidos.

Para Poincaré todas las paradojas envolvían una <u>falacia de círculo vicioso</u>, un hacer caer la entidad por construir todavía en el campo de variación de las variables utilizadas en su construcción --o sea tomarla como una de "todas las entidades" así o asá con referencia a la totalidad de las cuales venía definida la nueva entidad. Así, "la clase de cuantas clases no se abarcan a sí mismas": 'cuantas' o 'todas las' debe tener como campo de variación uno que no incluya a algo todavía no existente hasta que se haya dado la definición; y, sin embargo, para que sea posible esa definición, sí debe esa misma entidad estar en tal campo de variación. Similarmente, paradojas semánticas como la de Berry: el menor número natural no especificable en esspañol con menos de 14 palabras resulta ser (compruébelo el lector, contando el número de palabras que forman lo que acabo de escribir) un número natural, sea el que fuere, especificable en español con 13 palabras; contradic ción (aparente al menos). Similarmente, la paradoja de Richard: tomemos los sintagmas del castellano (escrito) ordenados de tal modo que uno preceda a otro siempre que tenga menos letras, mientras que cuando tengan el mismo número, cuente el orden lexicográfico; eliminemos cuantos sintagmas no denoten a decimales en el intervalo entre 0 y 1. Con esos instrumentos cabe ordenar a los decimales recién aludidos, según el orden de los sintagmas. Para cada uno de esos decimales tenemos que, en su expresión decimal completa, son de la forma ',e^1,e^2,...' y cada uno de esos e^i es un guarismo. Para un decimal d, i(d) será su iº guarismo (1≤i). Definamos ahora: 'Aquel decimal que difiere, para cada i, del iº decimal (en el orden recién brindado) en que, si el iº guarismo de éste es j<9, i(d)=j+1; y si es =9, i(d)=1'. Es fácil comprobar que ese número decimal es uno que cabe denotar en castellano con un sintagma finito; y que, no obstante, es diverso de todos y cada uno de los que cabe denotar en castellano así; diverso, pues, de sí mismo. ¡Contradicción!

El fallo para Poincaré --que se guía en esa solución por el propio Richard-- es el ya apuntado: la <u>impredicatividad</u>, el círculo vicioso. R le da la razón. Tanto más cuanto que esa restricción en la manera de entender los cuantificadores se compagina bien con el propio escrúpulo aristotélico sobre las condiciones de sentido de la predicación, e.d. la motivación filosófico-lingüística del principio de desnivelamiento categorial: sólo tiene sentido predicar una entidad de otra de nivel inferior; propiedades, de individuos; o propiedades-de-propiedades, de propiedades (de individuos); y así sucesivamente. Sólo que ese principio de desnivelamiento categorial antes de Poincaré (casi) sólo se basaba en consideraciones de filosofía del lenguaje, como las ya apuntadas, mientras que Poincaré y R aportan una motivación más honda, que mana de una visión constructivista de lo real (aunque R no fuera en eso consecuente, ni de lejos). Así pues, el 'todo', el 'hay', el 'algo', los indefinidos en general, deben venir siempre restringidos, siquiera contextualmente. 'Todo es autoidéntico' carece de sentido. ¿Todo qué? Sí, todo individuo es autoidéntico, vale. Toda propiedad es autoidéntica, pero ahora en otro sentido de 'autoidéntico', pues sería un zeugma decir, quizá a lo Platón, que tanto la rosa cuanto su fragancia son autoidénticas; o que existen (o, más a lo Platón todavía, que tanto la rosa cuanto su belleza son, ambas, bellas). Bien, éstas son ideas también de F, y se remontan a Aristóteles. Lo nuevo en R estriba, no en restringir en consecuencia el campo de variación de las variables de un cuantificador a un nivel ontológico determinado de entidades, con exclusión de los demás --habíalo hecho expresamente F--, sino en excluir de ese campo de variación de un cuantificador a cualquier entidad que venga des crita, directa o indirectamente, con ayuda de ese mismo cuantificador. Así, y con ello, se pasa de la teoría simple de tipos de F a la ramificada de R. (n.5)

Apartado 3.- La teoría ramificada de tipos

¿Cuáles son esas ramas? Las siguientes. En F --se recordará-- tenemos: objetos, entes de tipo 0; y, para entes de tipos, $t^1,\ldots,t^n$, entes de tipo $<t^1,\ldots,t^n>$; tiene sentido una fórmula $f(a^1,\ldots,a^n)$ si 'f' denota a un ente de tipo $<t(a^1),\ldots t(a^n)>$, donde t es una función que envía a cada ente sobre su tipo. No vale eso en la teoría ramificada. En ésta los entes de tipos superiores a 0 divídense en órdenes. Un ente que sea una relación n-ádica y cuyos argumentos hayan de ser, respectivamente, de los tipos t^1, $\ldots,t^n$, será de un orden m cuando en la expresión que lo denota los cuantificadores de más alto orden sean de orden m-1. Así, correspondiendo a un mismo tipo (de argumento) habrá órdenes (infinitos) diversos (que, sin embargo --y como en seguida se verá-- no están <u>dentro</u> de ese tipo sino por encima de él). Un orden (o,t) es, pues, un orden determinado de propiedades de entes del tipo t; si t es el tipo de individuos, (o,t) podrá ser, o bien el de propiedades denotables con expresiones que contengan cuantificadores de primer orden, o... Además, eso de cuantificadores de orden nº significa aquí algo diverso de lo que significaba en la teoría de F: el orden de un cuantificador, y de su variable respectiva, es el <u>orden</u> de los entes que forman su campo de variación; conque los cuantificadores de segundo orden no son todos homogéneos: haylos de tantos órdenes "segundos" cuantos órdenes hay (o,0). (El único orden que es único para un tipo de argumento que le venga dado es el de los individuos; porque, sencillamente, es un orden de propiedades 0-ádicas, o sea entes que no toman ningún argumento (si bien más abajo sugeriré una modificación o atenuación de esa identificación de los individuos con propiedades 0-ádicas). Todo ello sin entrar ya en órdenes de relaciones (poliádicos), muchísimo más complicados evidentemente. Así pues, para dar una idea más exacta, cabe proceder así: empezamos por agrupar a los entes en tipos como los fregeanos. Para cada uno de tales tipos, t, un ente es de orden (o_i,t) si es una propiedad (monádica) de entes de tipo t y la expresión que lo denota contiene cuantificadores a lo sumo cuyos campos de variación respectivos sean tipos iguales o menores que i, conteniendo al menos uno de tipo i. Así erigida esa primera jerarquía de órdenes de propiedades de entes del tipo t, erígese una segunda así: ordénanse los órdenes recién introducidos de manera obvia, y luego, para cada uno de esos órdenes, o_i, se tiene el nuevo orden (o_i,t). Seguimos todavía, sin embargo, dentro del "nivel" de entidades que en la teoría simple (la de F) era (homogéneamente) el tipo $<t>$, ahora escindido en esos infinitos órdenes. Reiterando el procedimiento constrúyese una tercera jerarquía, una cuarta, etc. ¿Es el fin? No. Porque, simultáneamente y para cada uno de los otros tipos originales (fregeanos), habremos hecho lo propio (en cada caso deben engendrarse infinitas jerarquías de órdenes de propiedades de entes del mismo tipo). Luego engéndranse nuevas infinitas jerarquías al incluirse órdenes (o,t) donde o sea cualquiera de los órdenes ya introducidos. Y así al infinito, recursivamente. Además, cada orden es también un tipo. En efecto, para cada orden (o,t) las propiedades de entes de ese orden no pueden ser propiedades de (no pueden ser ni poseídas ni dejadas de poseer por) entes de ningún otro orden. Conque decir --con formulación inexacta-- que cada tipo se divide en órdenes es decir que, dado un tipo t, hay infinitos órdenes (o,t); no es decir que todos esos órdenes son partes del mismo tipo, sino sólo que son órdenes de propiedades de entes del tipo t. Hasta aquí sólo hemos tenido en cuenta órdenes de propiedades monádicas, e.d. órdenes de la forma (o,t), órdenes que son "ámbitos" de propiedades, no ámbitos de relaciones. Para cualesquiera órdenes $o^1,\ldots,o^n$ (para cualesquiera n) hay un n-tuplo $<o^1,\ldots,o^n>$ tal que habrá una primera jerarquía de órdenes $(o,<o^1,\ldots,o^n>)$, construida por el procedimiento ya descrito pero cada vez con más ingredientes; luego una segunda, etc. Después de todas ellas, vuelta a empezar: cada nueva jerarquía introducida nos lleva a desdoblar o desglosar infinitamente cada uno de los órdenes previamente introducidos; y así infinitamente al infinito. Y luego hay que seguir multiplicando jerarquías al tomarse en consideración otras adicidades (otros n-s); p.ej., un orden (o,t) donde t es el orden o tipo de individuos y o sea el de una relación 27-ádica entre entes específicadamente de sendos órdenes el más alto de los cuales sea, digamos, el 99!º en la escala previamente construida. (n.6)

Se le ha objetado a esa teoría que nadie puede creerse que exista todo eso. Sin embargo, es un hecho que, si es correcto el principio de predicatividad (exclusión del círculo vicioso), entonces tiene que darse todo eso. Por otra parte, sin embargo, desde un punto de vista constructivista trataríase de una jerarquía "potencial". Pero ¿en qué consistiría esa potencialidad? Sería una potencialidad "en principio", no efectiva, claro. Y ¿qué es eso? Nadie podría ir muy lejos en la construcción. R , menos aristotélico que Poincaré, no se satisfizo con una "potencialidad" un tanto escurridiza e incomprensible, sino que aseveró la existencia efectiva de todo eso, alegando que una mente infinitamente poderosa podría dar todos esos pasos en la construcción. Sin embargo, los órdenes existen --según él-- no por esa construcción, sino en sí; sólo que están estructurados como los organizaría en su construcción una mente infinita, si la hubiera, en vez de ser tipos cuya entidad fuera mentalmente inconstruible --cual serían tipos que se presupusieron a sí mismos, por decirlo así.

No hay, pues, incoherencia en la concepción de R. Es un constructivismo "divino", un idealismo "objetivo", si se quiere, según el cual el ser (al menos el de entes que no sean de primer orden) depende del pensar, de un pensar, además, constructivo, pero acaso infinitamente potente; de un pensar que, si no existe, podría existir y, si existiera, obraría así. Claro que un teísta podría objetar que Dios tiene otros modos de pensar "no constructivos"; que su pensar se identifica con su obrar, con su causar, con el ser de las cosas, de suerte que no habría inconveniente en que un objeto del pensamiento divino se "presupusiera" a sí mismo. Pero R se resiste a ello: entendemos qué sea pensar por analogía con nuestro pensar, que es constructivo, no autopresupositivo.

La refutación más convincente de R no es la de que su teoría es pragmáticamente inaceptable (haría imposible todo rigor, en la práctica de la construcción teórica), aun siendo ésa una objeción certera (ha de haber en la realidad una razón suficiente de tal inviabilidad práctica, y lo más sensato es suponer que la razón suficiente en cuestión es que la realidad no es así ni puede ser así); la refutación más persuasiva estriba en alegar que nuestro pensamiento no es constructivo, sino autopresupositivo. (n.7). No hay, pues, razón para negar la no constructividad del pensamiento divino, o del angélico. El propio R se va a dar cuenta de ello.

En tcc defínese (desde Dedekind) un número real cualquiera, r, como el conjunto de racionales no mayores que él ($\sqrt{3}$ es el c. de números racionales x tales que $x^2 \leq 3$; luego se extienden analógica y recursivamente esas mismas relaciones, como la de ser $\leq$, a los propios reales). Para cada c. acotado (por arriba) de números reales, C, hay una mínima cota superior, e; ésta entonces sólo puede definirse como la unión conjuntual de C, e.d. el c. de racionales pertenecientes a uno u otro miembro de C. Sea C un c. (o, para R, una propiedad) de entes de orden o. ¿Cuál será el orden de la mínima cota superior de C? Será un orden más elevado que o, puesto que en la definición de tal cota entra un cuantificador de orden o precisamente. Luego ni podrá afirmarse ni negarse --contrariamente al principio de continuidad, que es la disyunción de tal afirmación y tal negación-- que esa cota venga abarcada por C. ¡Adiós matemática superior! La matemática no es constructiva. Ni, menos, son constructivas otras partes más complejas de nuestro pensamiento.

Apartado 4.- El principio de reducibilidad

Para solventar ese problema postuló R el principio o axioma de reducibilidad, AR, a cuyo tenor hay, para cualquier ente e de tipo (o,t) donde o es un orden más elevado que el tipo (=orden) t, otro ente coextensivo con él, e' de orden (t-1,t), e.d. de un orden que engloba a entes denotables con expresiones en las que no figuran cuantificadores de orden superior a t. (Cuando t=0, t-1 no será nada: se tratará entonces de entes denotables por expresiones sin cuantificadores.) Puede siempre equipararse un orden de (entes denotables por) expresiones sin cuantificadores superiores a t como un orden (t, t), pues cada expresión "la propiedad de ser un ente tal que p" equivale a "la propiedad de ser una propiedad, de entes así o asá, tal que p", donde "propiedad de entes así o asá" significa lo mismo que "propiedad f tal que hay algún ente e así o asá tal que fe". (n.8). Esto suscita una conocida dificultad: hemos hablado de "la" expresión que denota a un ente; pero puede haber varias, unas con unos cuantificadores, otras sin ellos. Para R hay un paralelismo lingüístico-ontológico. Un ente será de aquel orden al que corresponda la expresión "más baja" con que pueda ser denotado. (Pero una abreviación definicional no crea otra expresión nueva, sino que el definiendum es el mismo definiens sólo que visto éste compacta o macizamente y sin fijarse uno en su estructura interna.)

Estriba la coextensividad recién aludida entre dos entes o propiedades en que cualquier ente que caiga bajo la una cae también bajo la otra. Llévanos eso a considerar el principio de extensionalidad, PE, y la concepción russelliana de las clases. He venido hablando indiferentemente de propiedades o de clases. Siguiendo a Q no veo entre unas y otras diferencia alguna si no es ésta: preferentemente úsase el vocablo 'clase' o 'conjunto' cuando se aplica a la entidad referida un PE; 'propiedad' --si es que quiere uno diferenciar propiedades de clases--, cuando no (n.9). PE que suele definirse así: dos clases coextensivas son idénticas (son, no dos, sino una sola y misma clase). Luego veremos que hay principios menos fuertes, pero que merecen también la denominación de extensionalidad.

R no identifica a dos propiedades, del orden que sean (idéntico o diverso), porque sean coextensivas, e.d. porque cada ente que caiga bajo la una también caiga bajo la otra. AR no dice, pues, que toda propiedad sea predicativa (e.d. de un orden (o,t) tal que o no sea superior a t), sino tan sólo que cada propiedad es coextensiva con otra que sí es predicativa. (Las propiedades predicativas son marcadas por R con una admiración: 'f!x' significa que x posee la propiedad predicativa f.) Pero con ello se volatiliza en la práctica a casi todos los efectos el principio de predicatividad (la exclusión del círculo vicioso). Por eso, Ramsey y, a su zaga, casi todos los lógicos, optaron por abandonar de hecho la teoría ramificada, reemplazándola por la teoría simple de tipos.

Hay más que decir sobre las clases. R abrazó con ardor (en la 1ª edición de PP.MM., que es aquella cuya doctrina estamos ahora considerando) su "no class theory" a tenor de la cual las expresiones de clase son, cual descripciones definidas, pseudoexpresiones, símbolos incompletos. Decir que $x\varepsilon\hat{z}fz$ (x pertenece al c. de entes, z, tales que fz) sería, simplemente, decir que f!x. 'f', pues, es una expresión denotativa de una propiedad. Las propiedades no son extensionales. (Cuando, en la segunda edición, pasaron a ser reconocidas como extensionales, fueron identificadas entonces con los cc. Vide infra, Apart. 10.) No es verdad que $Ux(fx\equiv gx)C.f=g$ (si todo ente, x, es tal que fx ssi gx, entonces f=g). Pero decir que $\hat{x}fx$ (la clase de entes x tales que fx) tiene la propiedad g (o sea $g\hat{x}fx$) es decir que $Eh(Ux(fx\equiv h!x).gh)$: hay una propiedad predicativa, h, a la cual pertenece un ente cualquiera, x, ssi fx, siendo ese algo, h, tal que gh. (Pero en todas esas fórmulas las variables tienen que venir escalonadas según lo impuesto por la teoría ramificada de tipos: 'x' será de orden inferior a 'h', también inferior a 'f', siendo 'g' superior a 'h'.) Así es como si postuláramos clases extensionales: decir que el c. de guatemaltecos es numeroso es decir que hay una propiedad (predicativa) coextensiva con la de ser guatemalteco siendo numerosa esa propiedad. PE cobra en la teoría de R esta forma: $Ux(x\varepsilon\hat{x}fx\equiv x\varepsilon\hat{x}gxC.\hat{x}fx=\hat{x}gx)$. Eso significa tan sólo que, si cuanto tiene la propiedad f tiene también la propiedad g, y viceversa, entonces hay sendas propiedades coextensivas con f y con g, respectivamente f' y g', tales que para cualquier propiedad de nivel inmediatamente superior, h, h abarca a f' ssi también abarca a g'. Eso es obvio. Porque, para cada propiedad f que sea coextensiva con otra, g, hay alguna propiedad g' coextensiva con ambas, a saber la propia g, tal que, para cualquier propiedad h, g' posee h ssi g posee h (obvio, pues g'=g). *Ese* principio es, pues, tautológico. No refuerza el sistema de R de ninguna manera, ni restringe ni elimina alternativas. (En cambio, cuando, en el sistema modificado de la segunda edición, venga abandonado AR, será menester, entonces sí, postular PE que ya no será, en ese nuevo marco, tautológico, sino que reforzará el sistema. Vide infra Apart.10.) La extensionalidad es aparente, una impresión superficial debida a la notación. Sin embargo a todos los efectos es como si sí se postulara PE. ¿Por qué? Pues porque en la práctica R tiene que acudir cada vez más a hablar de clases y no de propiedades; cada vez más, en lugar de decir "hf" tiene que decir "$\hat{x}(fx)\varepsilon\hat{g}(hg)$" y cosas así. Signos incompletos, sí, pero que son los que acaparan cada vez más la atención y aquellos con los que se trabaja. No interesa qué propiedades tenga una propiedad dada, f, sino cuáles tenga, o a qué clases pertenezca, alguna propiedad predicativa, sea la que fuere, coextensiva con f.

El procedimiento funciona para evitar caer en la trampa en que caía la teoría de F, porque las clases no son todas del mismo nivel. Como las expresiones de clase son pseudoexpresiones, cada fórmula que contenga una o más expresiones de ésas será parafraseable como otra fórmula sin tales expresiones, en notación primitiva. Lo único que se postula como existentes son las propiedades ("atributos") de diversos órdenes.

El inconveniente de todo ello es que se pierde el género de motivación filosófico-lingüística que en la teoría de F llevaba en unos casos al desnivelamiento y --correspondientemente y para ser consecuentes-- en otros casos al nivelamiento categorial. Para F toda nominalización habrá de denotar a un objeto ("individuo", ente de nivel 0). Para R no. Propiamente en su teoría no hay nominalizaciones (más que aparentemente). Sin embargo ¿de dónde esa apariencia, de dónde la necesidad de recurrir a ese expediente definicional? Eso no encuentra explicación con esa teoría.

Apartado 6.- El sino de los cuantificadores

Peor es un defecto común a toda teoría de tipos, la de F lo mismo que la de R. Un cuantificador es un signo compuesto de un prefijo --'E' para el existencial, 'U' para el universal-- más una variable. ¿Qué cosa viene significada por el prefijo? Los russellianos responderán: nada, es un signo incompleto; "contribuye" de cierto modo al significado del todo, pero no aporta nada, salvo la manera de tal contribución. No creo que esa respuesta sea satisfactoria. Si el signo de marras contribuye de cierto modo a la significación o denotación de la expresión total, ¿de qué modo lo hace? Dígase. Y será algo como esto: para una expresión "fx" que, cuando se da como valor a la variable 'x' el ente e, significa algo (un valor de verdad según F, un estado de cosas según R), el resultado de prefijarle 'Ux' significará algo, pongamos la Verdad, ssi 'fx' significa la verdad para cada valor e dado a 'x'. Bien, está claro que hay una cierta relación entre lo significado por f, lo significado por 'x' bajo una cierta asignación de un valor (ese mismo valor) y, por último, lo significado por 'Ux(fx)'. Esa es la relación de universalidad, si se quiere: la que guarda, p.ej., Argelia con la autoidentidad porque lo mismo que es autoidéntica Argelia lo es cualquier otro ente (por lo menos del mismo "orden" o nivel ontológico que Argelia). El papel de 'U' es, pues, el de, vinculándose o combinándose de cierta manera con las otras expresiones, hacer que el todo así formado denote a la Verdad --o a un estado de cosas verdadero, o acaso existente-- ssi se da entre los entes significados por esas expresiones esa relación de universalidad. Luego es perfectamente razonable decir que 'U' significa (o denota, o expresa, o representa, o hace las veces de, o...) a esa relación. O, como mínimo, que su papel es el ya apuntado. Ahora bien, según la teoría de tipos no puede haber ninguna relación de universalidad en general, sino una universalidad de primer nivel (relación entre objetos y propiedades de primer orden), otra de segundo etc. (Eso en teoría simple de tipos y sin tomar en cuenta a las relaciones, sino sólo a las propiedades. Cómo sea la jungla resultante en teoría ramificada adivínelo el lector.) Pero ¿hay algo en común entre esas diversas relaciones? Aparentemente sí, ¿no? Aparentemente son "análogas" con analogía, acaso, de proporcionalidad, propia seguramente. Pero (dejando de lado las enormes dificultades lógicas de la teoría de la analogía, que desde luego no haría suya ninguno de los autores ahora sacados a la palestra), resulta que cuanto hubiera en común sería <u>algo</u>, un "rasgo" o lo que fuera, una propiedad de tal o cual orden; mas resulta que entes de diversos órdenes no pueden tener <u>nada</u>, nada de nada, en común.

Entonces, ¿qué nos autoriza a usar el mismo prefijo para cuantificadores de diversos niveles? ¿O a llamar 'variables' a las de órdenes diferentes? ¿O a hablar de una relación similar entre la variable y el objeto que se le "dé" como valor en uno u otro caso? No: el 'hay' y el 'todo', el 'algo' y el 'cualquiera' deben desterrarse. En cada caso debe acuñarse una nueva expresión <u>primitiva</u>. Infinitas, sí, para los infinitos tipos (y órdenes), pero --además y sobre todo-- tales que carece de sentido dar una explicación de una de ellas por analogía con otra previamente introducida. En suma, el sistema es impresentable, informulable, inefable. (Y, si pudiera formularse, nadie podría aprenderlo.)

Por último, hay <u>otra</u> dificultad en la lectura en lengua natural de los cuantificadores de orden superior al primero, dificultad que viene a sobreañadirse a la de plurivocidad de 'hay' y 'todo': es imposible tal lectura sin nominalización. Mas, si vale el argumento de F a favor del desnivelamiento categorial (el único convincente que abone en tal sentido --como no se opte por el constructivismo que anima a la teoría ramificada pero <u>sin</u> AR), entonces ninguna nominalización puede denotar a algo denotable por un verbo. Para R esa dificultad es pragmática y revela cuán mal hecho está el lenguaje natural. Lo malo es que él nunca pudo (porque es imposible) elaborar un lenguaje ideal exento de ese defecto; su notación incurre en la ambigüedad sistemática que, sin embargo, viene (o, más bien, debería venir) proscrita por su (meta)teoría. Además, puestos a aceptar soluciones así, cabría alegar que cualquier necesidad de desnivelamiento categorial entre diversas "partes de la oración" es resultado de algún género de limitación inherente a los lenguajes, sea en general, sea en particular los humanos; no teniendo eso nada que ver con cómo es la realidad. Que algo queda así sin explicar es verdad;

pero ni más que lo que deja sin explicar la teoría de tipos ni, sobre todo, algo tan inquietante, pues por lo menos con esa salida no estaremos abocados ni a inefabilidad ni a las desmesuras ontológicas de órdenes o tipos.

Y conste que la principal dificultad con esas desorbitadas postulaciones no es ya que conculquen un principio de economía ontológica, sino algo más grave. Creer que existe algo es una "situación", un "estado" --o lo que sea-- que ha de involucrar, directa o indirectamento, una relación (de "creencia") entre uno (el creyente) y ese algo, al menos cuando la creencia sea verdadera. Pero entre un ente y todo el ámbito de entes de un tipo o nivel no puede nunca darse una relación que tenga algo en común con otra relación que se dé entre dicho ente y <u>otro</u> ámbito así. (Entre paréntesis: esto mismo que se acaba de decir sería verdad según la teoría de tipos, pero no podría decirse; más exactamente: no sería ni verdadero ni falso, pero en algún sentido enigmático sí sería "como verdadero", pues sería un aserto de la propia teoría de tipos, toda la cual es inefable, empezando por la afirmación de que nada es común a entes de diversos tipos, o el que éstos sean tipos; porque, si nada es común, no es común tampoco el no tener nada en común el uno con el otro, que sin embargo se les está atribuyendo a ambos por igual.)

Apartado 7.- <u>Cómo se evita la paradoja de Cantor en la teoría ramificada</u>

En el sistema russelliano de los PP.MM. explotábase el AR para definir la identidad así: x=y significa que x posee las mismas propiedades predicativas que y. Como cada propiedad es coextensiva con una predicativa, dedúcese de ahí que, si son idénticos, tienen todas sus propiedades en común. Así pues, con AR las únicas propiedades que interesa tomar en consideración, a cualquier efecto, son las predicativas. (Para evitar confusiones conviene puntualizar que hay dos sentidos, uno fuerte, el otro débil, de 'impredicativo' en R. En sentido fuerte, sería impredicativa una clase o propiedad cuya existencia viniera de algún modo presupuesta por su propia especificación, e.d. tal que ella, o algo cuya especificación presupusiera su existencia, caería en el campo de variación de una variable cuantificada que figure en la especificación del algo en cuestión. (La teoría ramificada afirma que no existen propiedades o clases impredicativas en ese sentido fuerte.) En sentido débil es impredicativa una clase o propiedad cuya especificación contenga una variable cuantificada que tenga por campo de variación un orden de entes superior al de los argumentos de tal clase o propiedad, e.d. las cosas de las que puede decirse con sentido que poseen o dejan de poseer tal propiedad --e.d. que vienen o dejan de venir abarcadas por tal clase.) Con AR, las propiedades o clases impredicativas (en sentido débil), si bien existen, son, en verdad, redundantes. Fue eso lo que llevó, en 1926, a Ramsey, y con él a la mayoría de los lógicos, a acabar prefiriendo la teoría simple de tipos. (Los dos autores de PP.MM., R y Whithead, siguieron otro camino, más razonable, pero que no por ello es inocuo (vide infra, Apart. 10.))

Se ha argüído que cualquier paradoja evitable con la teoría ramificada viene también frustrada con la teoría simple de tipos. Tal es la opinión de Q (n.10), como asimismo de la gran mayoría de los autores: la eficacia de la solución permanecería incólume, pues bastara para evitar las paradojas un principio de estratificación según el cual sólo tiene sentido "hf" (o, en otro modo de decirlo, "fεh") si "h" es de un tipo inmediatamente superior al de "f". El único fallo en la teoría de F sería, pues, el de desestratificar las clases o extensiones. (Aunque ya hemos visto los hondos motivos filosóficos que movían a F a hacer eso.) A coro se ha repetido que la complicación que conlleva la teoría ramificada es superflua para soslayar las paradojas lógicas, o teórico-conjuntuales propiamente dichas, e impotente para obviar las semánticas (la del mentiroso, la de Richard, la de Berry etc., o sea las que involucran esencialmente relaciones semánticas como las de 'denotar', 'ser verdad' etc.; vide infra, Ap.9 y (n.10)). No es ése mi parecer. Desde luego es cierto que se esquivan las paradojas conjuntuales con la teoría simple de tipos <u>sin clases</u> (o sea, según el procedimiento de la "no class theory" de (la 1ª edición de) PP.MM.: reducción definicional de clases a propiedades o atributos --aunque ya vimos que eso no deja de suscitar dificultades filosóficas serias). Pero no del mismo modo que como se evitan en la teoría ramificada <u>sin</u> AR (o sea: la de la 2ª edición). En ésta encuentran un obstáculo de principio, motivado filosóficamente por consideraciones que no dependen de un postulado de filosofía lingüística, cual es el único fuerte motivo independiente para la teoría simple (fregeana) de tipos (la ya mencionada cuestión de cómo se engarzan dos segmentos de una expresión compleja para constituir a ésta, y cómo es la realidad para fundar, por adecuadas relaciones semánticas, ese comportamiento de las expresiones lingüísticas, que parece forzosamente entrañar heterogeneidad radical entre signos "saturados" e "insaturados" según el vocabulario de F). Veámoslo con un ejemplo. El <u>teorema de Cantor</u> es la tesis de que cualquier c. es más pequeño que su respectivo <u>potencial</u> (e.d. el c. de sus subcc.). Pruébase así: supongamos lo contrario, o sea que hay una sobreyección s del c. C sobre su potencial, PC; para cada miembro de PC, S, habrá, pues, un miembro de C, m, tal que smS, mientras que no habrá ningún otro miembro de PC, S', tal que smS'; para cada m llamemos 's:m' al S correspondiente; o bien cada m viene abarcado por el respectivo m:s o bien algunos no; sea f el c. de éstos últimos (no se presupone que no sea vacío); vacío o no, f será un subc. de C, y por lo tanto un miembro de PC; habrá pues un (miembro de C) tal que f=s:m; problema: ¿pertenece m (ese m) a f? Si sí, entonces cumplirá la condición de pertenencia, o sea la de no venir abarcado por el subc. de C con el que lo correlaciona s; y ese subc. es, ni más ni menos, f(=s:m); o sea: si sí pertenece, no pertenece; luego no pertenece; pero entonces cumple la condición; y --en virtud de PA-- cuanto cumpla la condición de pertenencia a un c. viene abarcado por ese c.; luego, si no pertenece, sí pertenece; por tanto pertenece; ergo: contradicción: sí y no.

En la teoría simple de tipos demuéstrase el teorema de Cantor que viene a sonar así: para todo x(1,0), si x(1,0) es una función, entonces no es verdad que el c. de los z(1) tales que z(1) venga incluido en u(1) esté incluido en la imagen de u(1) por la relación x(1,0). (Los números entre paréntesis son índices del tipo de las respectivas variables; venir incluido en es ser un subc. de; la imagen de un c. C por una relación r es el c. de entes para cada uno de los cuales, x, hay un miembro de C, m, tal que rmx; si C es la tiranía y r la relación de oprimir, la imagen en cuestión es la propiedad de ser oprimido por un tirano). Ahora bien, aun probado ese teorema, evítase en la teoría simple de tipos la paradoja de Cantor, a saber que el c. de todos los cc. sea más pequeño que sí mismo. Esa paradoja se probaba en la teoría ingenua así: sea C tal c.; abarca a todo; por tanto a cada subc. de C también; sea i la relación de identidad; obviamente es una sobreyección de C sobre PC, contrariamente al teorema de Cantor. En la teoría (simple) de tipos no se sigue eso, pues i ha de ser un x(n,n), para algún n: una relación homogénea, que no heterogénea (es heterogénea una relación diádica r(n,m) si n≠m); en tanto que la sobreyección cuya inexistencia se demostró había de ser heterogénea, ya que por hipótesis sería una relación entre miembros y subconjuntos de un c. dado, fuera el que fuese.

Pues bien, la gran ventaja de la teoría ramificada es que bloquea la demostración del teorema de Cantor. En efecto: 'el c. de miembros m de C tales que m no pertenece a s:m' es una abreviación de 'el conjunto de miembros m de C tales que hay un miembro S de PC y m no es abarcado por S'; esta especificación es la de un c. de un orden superior al de cualquier cuantificador en la especificación, y por tanto al de cualquier ente que esté en el campo de variación de la variable de ese cuantificador; por lo tanto, un c. de orden superior al de aquellos subcc. de C que vengan abarcados por PC; PC no puede ser el c. de todos los subcc. de C, sino tan sólo el de todos los subcc. de determinado orden --p.ej. de los predicativos.

Importantísima es la precedente observación, puesto que revela que en la teoría ramificada se evita la paradoja de Cantor de la misma manera que se evita la de R: en efecto, supongamos el c. de R, o sea el c. de cuantos cc. no se abarcan a sí mismos ($\hat{x}$N(xx)); si existe, habrá --en virtud de PA-- de abarcarse a sí mismo ssi no se abarca. En la teoría simple de tipos proscríbese sin más "xx" como mal formado, porque carece de sentido decir que x(j) abarca o no abarca a z(j) (sólo tiene sentido decir esto de x(j+1)). Pero en la teoría ramificada se da una solución más honda. El c. de R ha de ser, si existe, de un orden superior al del cuantificador que figura en su especificación; y, por ende, al de los cc. --si los hay-- que forman el ámbito o campo de variación de la variable de tal cuantificador; luego, aunque hubiera cc. que abarcaran o dejaran de abarcar a entes de orden idéntico al de ellos mismos, el c. de R no podría ser ninguno de esos cc.; es más: el argumento se generaliza y concluye (aunque vide infra Ap.9, <u>sub fine</u>) que no puede haber cc. así (pues un c. C que abarcara o dejara de abarcar a entes del mismo orden que C sería especificable sólo con una cláusula impredicativa --una que violara las restricciones impuestas por la teoría ramificada; cf. sin embargo el final del Ap.9, infra, sobre una posible excepción a esa regla).

$\hat{x}$N(xx) es = $\hat{x}$N((i:x)x) o sea: el c. de entes que no vienen abarcados por aquel subc. del c. universal con el cual los correlacione la relación de identidad; o sea sería aquel ente cuya especificación conduciría a la paradoja de Cantor. Por eso en la teoría ramificada hay una única solución a las dos paradojas; no así en la teoría simple de tipos. Y, desde luego, la motivación de la solución es muchísimo más honda y seria en la teoría ramificada, mientras que la de la teoría simple resulta un tanto <u>ad hoc</u>, cuando se abandona la noción fregeana de extensiones desestratificadas entre sí, por ser --todas-- objetos o entes de nivel 0 (n.11). Pero --eso sí-- con una genuina y no aguada teoría ramificada --como la brindada en la 2ª edición de PP.MM.-- no cabe ningún AR. Ni cabe, por ende, una teoría suficientemente interesante de números reales.

Apartado 8.- <u>AR y la existencia de clases impredicativas en sentido fuerte</u>

AR entraña que Ux,y(x≠yCEz(z!x.N(z!y)) --donde z es una variable de un orden predicativo (o,o) si es que x,y son, ambas, variables de orden o--; por esa razón sostuvo R que AR es una versión generalizada del principio leibniziano de identidad de los indiscernibles (n.12). Es dudoso que sea correcto tal aserto salvo en el sentido muy banal de que cualquier condición suficiente de identidad entre entes de determinada índole (o sea, cualquier condición necesaria de diferencia) es una generalización de ese principio leibniziano. En cualquier caso, eso (por sí solo) no suministra a AR mayor plausibilidad que, pongamos por caso, al principio de que, si dos hombres son diversos, llevan diferente apellido (un principio que, lo mismo que AR, entraña que, si dos hombres son diversos, uno de ellos posee una propiedad de la cual carece el otro). R y Whitehead trataron de probar que, si existen clases, es verdadero AR; como lo muestra Chihara, el supuesto es, no la (mera) existencia de clases, sino el principio de abstracción; mas, comoquiera que sea, R sostuvo (en el sistema de la 1ª edición de PP.MM.) que no existen clases, e.d. que no existen extensiones de abributos o propiedades, sino sólo esos entes, y que éstos no son extensionales (de serlo, serían clases). Luego el argumento vale de poco en su teoría. Lo que sí es verdad es que la (pseudo) tcc desarro-llada dentro del sistema de PP.MM. (1ª edición) necesita AR; sin él no sería posible probar ni siquiera la versión russelliana del principio de abstracción (o sea de "Ux(fx≡xεŷfy)"; de hecho, cuando se pone en notación primitiva, ese principio es equivalente a AR: entráñalo y viene entra-ñado por él; vide (C2) p.48). Ahora bien, ello revela --a mi entender-- que, si es uno consecuente en adherirse a la teoría ramificada deben arrojarse por la borda, con AR, toda la tcc y toda la teoría de los números reales (n.13). Porque AR sí engendra la existencia de propiedades impredicativas <u>en el sentido fuerte</u>, o sea en el de que caen en el ámbito de cuantificadores --y, por lo tanto, de variables cuantificadoras-- que se emplean en su especificación (n.14). Veámoslo con el mismo ejemplo examinado en esta Sección, más arriba: el del teorema de Cantor. Con AR prué-base que, aunque no pertenezca a PC ese atributo impredicativo que sería x̂(Cx.Ef(sxf.N(fx)) --abreviadamente 'h'-- (o, más exactamente, aunque ni siquiera tenga sentido decir que pertenece o deja de pertenecer a PC dicho atributo o propiedad o "conjunto no extensional") --supuesta la pre-misa de que s es una relación funcional--, sí habrá una propiedad coextensiva con h y que sea predicativa, siendo, por lo tanto, abarcada por PC. Sea g una propiedad (o "cla-se no extensional") predicativa y coextensiva con h, e.d. con la propiedad (impredicativa) de ser un miembro m de C no abarcado por aquella propiedad incluida en C con la que m venga correlacionado por s (n.15). Por AR sabemos que hay alguna propiedad g así; cuya especificación es a través de la propiedad impredicativa h; h es impredicativa porque se especifica en términos de propiedades de un orden superior a los argumentos que puede tomar; por lo mismo será impredicativa g; si se objeta que g no está especificada, definida, sino sólo indefinidamente descrita como <u>una</u> propiedad así o asá, respondo que también eso es una especificación; de no, cada paradoja se reproducirá en PP.MM. sin más que reemplazar 'el' por 'un', con ajustes apropiados (el embustero pasaría a ser 'estoy diciendo algo falso' y podría decirse que no hay especificación alguna de "aquello" que digo, sino descripción indefinida de "algo" dicho). Sobre esta cuestión, vide también las interesantísimas consideraciones de Gödel al respecto en (G2), pp.311ss (n.16).

Apartado 9.- La teoría ramificada y las paradojas semánticas y el tratamiento de las descripciones definidas

Voy ahora a probar que --contra todo lo que se ha repetido atronadoramente-- la teoría ramificada (sin AR) sí es capaz de evitar las paradojas semánticas. En efecto: para no remitirme a otras cuyas especificaciones respectivas claramente contienen cuantificadores que habrían de ser del mismo orden que el ente especificado (las de Richard etc.), limitándome a la más simple, la del embustero, es esto lo que puede hacer la teoría ramificada: 'Es falso lo que estoy diciendo' contiene una descripción definida; la manera más eficaz de tratar tales descripciones en tcc es la de identificar "el ente que p" con "la unión del c. que abarca a cualquier ente que sea el único que p" (donde la unión de C es el c. de entes pertenecientes a uno u otro miembro de C). Eso es así porque ese c. sólo abarcará a un ente o a ninguno; si abarca a uno, la unión del c. será el c. de miembros de ese único miembro --y, siendo cada ente el c. de sus propios miembros, esa unión será, pues, el único miembro del c.--; si no abarca a ninguno, esa unión será la clase vacía o nula. Bien, según eso 'Es falso lo que estoy diciendo' contiene la especificación 'lo que estoy diciendo' que sólo impredicativamente puede verse atribuir la falsedad si ésta ha de atribuirse con sentido (con verdad o falsedad) a algo que esté yo diciendo; pues la oración significa: 'Es falso el c. de entes e tales que hay un único miembro, m, del c. de cosas que estoy diciendo tal que me (m abarca a e)'; y eso no puede ser falso en el mismo sentido de 'falso' en que pueda serlo algo perteneciente al conjunto de cosas que yo diga; luego el predicado 'falso' viene empleado en esa paradoja impredicativamente --y, por ende, infringe las estipulaciones de la teoría ramificada (n.15). Así pues, la tcc misma (si se ajusta al principio de predicatividad) demuestra la inexistencia de una propiedad de falsedad compartida por todo ente especificable como una prolación. Y, por ello mismo, de rebote, demuestra que no existe ninguna prolación así, cuya existencia venga presupuesta por su propia especificación. (Sólo que, acaso más bien, todo eso pone de manifiesto la falsedad del principio de círculo vicioso: 'One man's modus ponens is another man's modus tollens').

Cierto es que el tratamiento recién sugerido no es el que el propio R brindó a paradojas como la del embustero (Cf. (C2) p.8). Sin embargo, hay motivos para preferir el tratamiento que acabo de presentar. SAbido es que, si pasó

R de la solución provisional que había brindado en sus Principles de 1903 a las paradojas conjuntuales (una versión de la teoría simple de tipos, e.d. la fregeana) a la solución de los PP.MM. (la teoría ramificada) fue principalmente porque la primera no solucionaba las paradojas semánticas y no aportaba ninguna motivación o fundamentación lo bastante profunda de las restricciones tipales (n. 17). Pues bien, si centramos el principio (de exclusión) del círculo vicioso, o de predicatividad --que es el meollo de la teoría ramificada-- en la inexistencia de una (clase o) propiedad cualquiera, $\hat{x}p$, tal que p contenga un cuantificador de un orden tal que, si existiera $\hat{x}p$, sería un ente de ese mismo orden (no pudiendo $\hat{x}p$ especificarse de ningún modo que obvie tal dificultad), entonces no cabe solución general a las paradojas semánticas que no haga de cada descripción definida un término abstractivo de la forma "$\hat{x}p$". La teoría de descripciones que hace eso es la de F para lenguajes formales; teoría desarrollada, o modificada en parte, por autores como Carnap y, sobre todo, Q (n.18). Con la teoría russelliana de descripciones no salen a flote esas conexiones entre paradojas de uno y otro género, ni puede centrarse toda la exclusión del círculo vicioso en esa restricción del principio de comprensión o existencia de (clases o) propiedades. Nótese, en fin, que tanto la teoría de descripciones definidas aquí utilizada cuanto la formulación brindada más arriba de AR presuponen --contrariamente a la formulación oficial de la teoría russelliana de tipos-- que los individuos, si los hay, son (coextensivos con) (clases o) propiedades, a saber cada uno es (coextensivo con) la (clase o) propiedad de lo por él abarcado; sin embargo, no puede lo por él abarcado ser otro individuo o ente del mismo orden. Conque no puede haber ningún orden mínimo, sino que habría órdenes negativos: un individuo, p.ej. la Giralda, sería --supongamos-- la clase de sus partes macroscópicas; si la primera es una "sustancia", esas partes no serían sustancias, sino "partes de sustancias"; cada una de ellas sería, a su vez, una clase o propiedad, a saber --supongamos-- la de sus partes microscópicas; resulta difícil seguir imaginando cómo se continuaría hacia abajo en la escala infinitamente descendente. Alternativamente, y siguiendo a Q (n. 19), podrían amortiguarse las restricciones de la teoría de tipos sólo para individuos, de suerte que cada individuo $x=\{x\}$ (o sea $\hat{z}(z=x)$). Que la Giralda es la Giralda sería lo mismo tanto si 'es' significa identidad cuanto si significa abarcamiento (o su conversa: pertenencia). (A quienes, contra esa identificación quineana, alegan que es un mero expediente, cabe replicar que no sería tan implausible suponer que lo artificial resultara diferenciar en un caso así los dos "es". Sin embargo, mi propio parecer no coincide con el quineano; aunque no es éste el lugar de decir en qué y por qué.) Si definimos la identidad x=z como el que x abarque sólo todo lo abarcado por z (tal es la definición de Q), entonces lo único que haría impredicativa (en el sentido fuerte) la especificación del síngulo $\hat{z}(z=x)$ es el hecho de que, en tal caso y según la hipótesis, $\hat{z}(z=x)$ (o sea, el propio x) sería uno de esos "todos" los entes abarcados por x (en verdad lo único). Mas ¿por qué no autorizar (sólo) esa impredicatividad (fuerte), la de individuos no más? Sería inocua, pues los individuos ya están "dados", en la concepción constructivista de los cc. Ningún daño resultará de reespecificarlos de manera impredicativa, puesto que ya estaban especificados de antemano, al venir "dados". Lo único malo sería especificar impredicativamente lo que no se supiera previamente si existe o no.

Apartado 10.- La existencia de clases y la segunda edición de PP.MM.

Cuando, en 1927, publicaron R y Whitehead la 2ª edición de PP.MM., había corrido mucha agua bajo los puentes. En un artículo publicado en polaco en 1921 --pero luego también en alemán (aunque la versión completa fue facilitada a R en forma de manuscrito)-- L. Chwistek proponía reemplazar la teoría ramificada de tipos por la simple. Por esa misma desramificación había abogado Ramsey en 1925 ¿Cuál fue la reacción de R? No la de abrazar él la teoría simple, sino la de reelaborar su propia teoría ramificada. Y para mejor. Precisemos, no obstante, que (el cuerpo principal de) PP.MM. apareció inalterado; añadiéndole empero una nueva Introducción en la que venía propuesta la modificación del sistema ((W3), pp.xxxix ss.). Se abandona, con buen juicio, AR --pues es incompatible con el propósito y la motivación filosófica del sistema. Pero, a raíz de ello, es menester cambiar la definición de identidad, pues ahora ya nada garantiza que dos entes con las mismas propiedades predicativas sean idénticos (o sea, nada garantiza que tengan todas sus propiedades en común). Pero, para evitar el debilitamiento excesivo del sistema que ello acarrearía --y su impotencia para fundar la matemática, aun la elemental--, compensa R esa pérdida postulando PE: si algo (de cierto nivel) carece de una propiedad de un nivel determinado poseída por otro algo (del mismo nivel), es que son entes diversos --y, por ende, si son propiedades de algún nivel, algún ente de nivel inferior posee sólo a una de las dos. (No obstante, en el sistema de R, bajo cualquiera de sus versiones, eso sólo puede decirse con sentido para propiedades de un nivel dado, no para cualesquiera propiedades, en general, de uno u otro nivel.) Ese reforzamiento lleva a R a reconocer que no existen diferencias entre cc. y propiedades. (Vide supra (n.9).) Con la teoría así reelaborada se pueden seguir probando resultados fuertes, como el teorema de Schöder-Bernstein, p.ej.

(n.20); y se gana la gran ventaja de bloquear el teorema de Cantor. Se volatiliza así la llamada matemática de los transfinitos (n.21). Poca es la monta de tal pérdida, ya que no existen pruebas, independientes del teorema de Cantor, de la existencia de transfinitos inenumerables. Como lo señalan Whitehead y R (p.xliii) normalmente se desea probar que dos cc. son del mismo tamaño, y esas pruebas siguen siendo correctas según el nuevo sistema; lo único que, al respecto, se pierde es la demostración, muy raramente deseada (por motivos independientes) de que dos cc. dados no son del mismo tamaño --salvo si son finitos, pues entonces siguen valiendo las demostraciones. Más grave que ésa es la pérdida de versiones fuertes de la inducción matemática, pues las mismas sólo podían probarse con AR (dentro del sistema de PP.MM.). Los autores concluyen conjeturando que hay alguna manera de reforzar su sistema --sin volver a incurrir en la postulación indeseable de AR-- que permita compensar suficientemente esas pérdidas y obtener como resultado una matemática, al menos de lo finito, lo bastante fuerte. Aparentemente eso quedó en esperanza (aunque el sistema Σ de Wang podría verse como un paso interesante en tal dirección (n.22)).

Por último conviene notar que, si bien no se prueba en el nuevo sistema de R que sea inenumerable el continuo (el cardinal del c. de los números reales), ello de por sí no entraña que se pruebe el llamado axioma de elección (sobre el cual se dirán unas palabras en la sección siguiente); porque tampoco se demuestra en ese sistema que el continuo sea numerable.

Instituto de Filosofía del CSIC

* Publicamos aquí la Primera Parte del presente artículo. La Segunda (y última) aparecerá publicada en el próximo número de CONTEXTOS.

N O T A S

(n.0). Aunque este debate versa sobre la naturaleza y objeto de la matemática, en la medida en que se reconozca alguna versión --por tenue que sea-- del "logicismo" a cuyo tenor la matemática se reduce a "lógica" --en un sentido desde luego amplio de 'lógica', que incluye la tcc--, lo que está en discusión es la naturaleza misma de la lógica. Es curioso que Rescher, en el cap. 3 de (R1) (pp.213ss) sitúa como únicas alternativas en este punto al absolutismo platónico entendido como la tesis de que la lógica es una ontología regional; el absolutismo psicologista; y diversas variantes del relativismo, todas las cuales rechazarían la naturaleza ontológica de la lógica. Sin embargo, F. Gonseth defendió la tesis de que la logique est la physique de l'objet quelconque; tesis que, además de hallar mucho apoyo en textos y argumentos de Frege, Russell, Husserl, Gödel y Quine, goza de los más hondos y sólidos motivos para solicitar nuestra aquiescencia; a favor de ella he argüido ya en diversos trabajos; conque no deseo aquí repetirme.

(n.0bis). Va a titularse "¿Lógica combinatoria o Teoría estándar de conjuntos?" y aparecerá en ARBOR, próximamente. Sin embargo, ya de entrada, he de puntualizar que no comparto el entusiasmo por ZF --la tcc de Zermelo-Fraenkel--, tan ampliamente mayoritario entre los matemáticos y creciente --aunque espero que todavía minoritario-- entre los filósofos de la matemática. No sólo hay que constatar (lamentar diría yo, para ser sincero) que hasta exdiscípulos de Q, como Hao Wang, manifiesten preferencias hacia ZF, al menos por sobre las tcc de Q (aunque vide infra (n.22)), sino que el propio Q parece en sus últimos trabajos filosóficos retirar su aquiescencia a sus propias tcc para inclinarse hacia la teoría estándar. Es equivocado, a mi entender, adjudicar a la teoría estándar una motivación filosófica más genuina o defendible que a las teorías de Q. De hecho sucede lo contrario: la teoría estándar sólo parece justificarse con una concepción de los cc. como la llamada iterativa. Pero ésta es un híbrido, o un engendro bastardo: un equilibrio inestable entre la concepción constructivista, articulada en la teoría ramificada de tipos, y la meramente enumerativa, finitista. Lejos de constituir esa concepción iterativa un enfoque filosófico "intuitivo", previo a la axiomatización de ZF, paréceme a mí un apaño artificial, ex post facto, forjado ad hoc para aureolar a ZF con los oropeles de una supuesta motivación independiente del mero constituir una manera taimada de obviar las paradojas. Algo más se dirá sobre ZF, en contraste y confrontación con las tcc de Q, en la Secc. 2 de este artículo.

(n.1). El libro de Cantor sobre tcc, Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre apareció en 1883. Al año siguiente venía publicado el de F, Grundlagen der Arithmetik --evidentemente escrito a lo largo de una serie de años anteriores. En su libro desarrolla F, ya claramente, los principios básicos de su tcc, que luego ampliará y desmenuzará en los Grundgesetze der Arithmetik (2 vols, 1893 y 1903 respectivamente). Ya en una reseña --aparecida en 1892-- de otro libro anterior de Cantor, referíase F a la concepción cantoriana de c., aunque la criticaba por oscura, si bien veía en ella un anticipo de la suya propia. (Vide (Pl), p.266, n.4 --y passim sobre la concepción fregeana de extensión.) En los Grundlagen expresa F su cálido aprecio de la obra de Cantor, manifestando que las divergencias entre ambos en torno a la naturaleza de los números son meramente terminolgicas. Sobre eso cf. (Kl), pp.443ss. Acerca de las paradojas de la tcc vide ibid., pp.652ss. Cantor fue quien descubrió la primera paradoja, la de Burati-Forti, así llamada porque fue expuesta al público por vez primera en un trabajo de 1897 de ese autor italiano: es la de que el número ordinal correspondiente al c. de todos los ordinales habría de ser más pequeño que sí mismo. En 1899 descubrió Cantor la paradoja (de Cantor) la del c. de todos los cc., el cual, a tenor del teorema de Cantor según el cual cualquier c. es menor que la clase de sus subcc., habría de ser menor que sí mismo. La noción fregeana de extensión de un "concepto" --que, en la acepción que F le da a la palabra, es una propiedad objetivamente existente-- es, en verdad, la de c. o clase; llámala también F curso o recorrido de valores (aunque algunos intérpretes prefieren entender el curso de valores como un c. de pares ordenados, cada uno de los cuales tendría como segundo miembro a la Verdad o a la Falsedad según que el primer miembro perteneciera o no a la clase dada; e.d. una función característica de esa clase; pero esa diferencia es desdeñable en el contexto extensionalista fregeano). Sucede, empero, que --según lo señala T. Parsons en (Pl), pp.266ss-- llevó a cabo F una denodada lucha contra una concepción de los cc., a saber aquella que los ve como "agregados", entes cuya entidad estribaría en la de sus miembros, viniendo éstos "dados" con prioridad respecto a ellos; sin duda cabe ver en esa concepción --representada por Dedekind-- un precedente de la teoría iterativa de cc., o sea una como la ZF. Frente a tal punto de vista, el de F es que los cc. son secundarios respecto a las propiedades de las cuales son respectivas extensiones. En la crisis de su pensamiento que siguió al descubrimiento de la paradoja russelliana llegó paulatinamente F al convencimiento de que no cabe siempre postular extensiones de conceptos, o no en el sentido originariamente supuesto, pues a dos propiedades diversas puede corresponderles una sola extensión que sea el c. de objetos que caigan bajo una sola de las dos y no bajo la otra --a pesar de lo cual puede lícitamente llamarse a ese c. también 'la extensión' de la otra propiedad; de donde poco a poco resultó un cierto abandono de los cc. o extensiones. (Vide (Pl), loc. cit.). Vide infra, Ap. 1 de la Secc. 2 de este artículo.

(n.2) R descubrió su famosa paradoja en junio de 1901, cuando estaba acabando de escribir sus Principles of Mathematics. Esforzóse por entonces en vano por resolverla. En junio de 1902 escribió a F comunicándole su descubrimiento; a vuelta de correo contestó el gran lógico y filósofo alemán, reconociendo que con el descubrimiento de R se tambaleaba desde sus cimientos la obra de toda su vida. F amañó apresuradamente unas reparaciones tentativas a su sistema para obviar la contradicción (vide infra, Ap. 1 de la Secc. 2); con tales reparaciones apareció el 2º volumen de los Grundgesetze der Arithmetics fregeanos, en 1903. Por su parte, R pergeñó una solución, también tentativa, en sus Principles, publicados el mismo año. Siguieron intentos por parte de R quien consagró largos meses, de abril de 1904 a enero de 1905, a forcejear o "fuñar" con papel y lápiz. En la primavera de 1905 se le ocurrió a R su teoría de descripciones, por la cual el artículo determinado 'el' venía eliminado, al parafrasearse convenientemente una oración que lo contuviera; de suerte que una descripción definida, "el tal o cual", venía a ser considerada como un símbolo incompleto. Con ese instrumento conceptual más una sugerencia de Poincaré, en 1905, elaboró R su solución, la teoría ramificada de tipos, en 1907. Vino expuesta en los Principia Mathematica, que escribió con Whitehead, en 1910. El cap. II de la Introducción (pp.37ss de (W3)) sigue constituyendo una lectura fundamental para una comprensión de la teoría de tipos y de sus motivaciones filosóficas, muy aristotélicas por cierto. Un examen de tales motivaciones y su articulación técnica de lo más interesante es éste de Nino Cocchiarella: "The Development of the Theory of Logical Types and the Notion of a Logical Subject in Russell's Early Philosophy", Synthese 45/1 (sept. 1980), pp.71-115. (No puedo entrar a discutir aquí las ideas expuestas en ese trabajo.) Una bella exposición de la solución russelliana, la teoría ramificada de tipos, hállase en Alonzo Church, Introduction to Mathematical Logic, Princeton U.P., 1956, pp. 346ss.

(n.3). Vide (K1), pp. 654ss. En sus Principles of Mathematics (1903; vide reimpr. (1979), de la 2ª ed., de 1937: Londres: Allen & Unwin, pp. 522ss), tras comentar escueta pero aprobatoriamente la solución de F, desarrolla R, en el Apéndice B, el primer esbozo de su teoría de tipos; pero --según lo reconoce la Introducción de la 2ª edición-- falta ahí todavía la idea central de la solución definitiva, e.e. de la teoría ramificada de tipos: el principio (de exclusión) del círculo vicioso.

(n.4). Ya se aludió en la n.2 a la determinante influencia, al respecto, de Poincaré en el pensamiento de R. Una exposición bien detallada (y, precisamente, en un marco idóneo para la presente discusión) de la filosofía matemática de Poincaré es el cap. IV (pp.138ss) de (C2). Otras dos exposiciones de útil consulta: J.J.A. Mooij, La philosophie des mathématiques de Henri Poincaré (París: Gauthier-Villars, 1966); y Javier de Lorenzo, La filosofía de la matemática de Poincaré (Madrid: Tecnos, 1974, pp.107ss, 332ss).

(n.5). En (W1), pp. 123ss, expone Hao Wang una serie de consideraciones sobre el principio del círculo vicioso y las definiciones predicativas que, aunque un tanto deslavazadas, resultan hasta sugerentes -- y algunas atinadas. P.ej., apunta una importante dificultad (p.127): ¿qué sucede en el caso de especificaciones que se den, no mediante una formulación o "fijación" aislada, sino un haz de formulaciones o definiciones? Respuesta: 'if a definition A contains bound variables with a range including things to be defined in B, then the classification determined by A has to be adjusted by that determined by B, and, in general, there are complicated questions of satisfying simultaneously a group of conditions'.

(n.6). También podría uno --acaso debería, para ser consecuente-- introducir tipos transfinitos; la idea fue de Neumann; y los sistemas "predicativos" (pero con reservas) de Hao Wang $\Sigma\omega$ articulan esa idea dentro de una teoría ramificada flexibilizada. (Vide infra (n.22).)

(n.7). Que buena parte del pensamiento humano es impredicativo o tal que involucra forzosamente un "círculo vicioso" en la especificación del objeto sobre el que verse fue uno de los argumentos que, con razón, se esgrimieron contra la filosofía matemática de Poincaré; Gödel halló en eso un argumento que le pareció decisivo contra el principio del círculo vicioso. Como un caso extremo de impredicatividad estarían los operadores combinatorios --por los que Gödel mostró gran interés-- que se especifican en términos que involucran a cualesquiera entes, incluyendo ellos mismos, que son también argumentos de sí mismos. (Vide infra, Ap. 4 de la Secc. 2 --donde, sin embargo, diré cómo una teoría combinatoria de cc. puede sacar cierto partido del principio de predicatividad.) Pero juzgo yo que los ejemplos extramatemáticos más palmarios de pensamiento impredicativo los ofrecen paradojas (o no paradojas, según los casos) semánticas como las estudiadas por A.N. Prior --y ya por J. Buridán, en parte--: vide "On a Family of Paradoxes", Notre Dame JFL 2 (1961 , pp.16-32; N. Rescher, NDJFL 5/3 (1964), pp. 218-20. Consideraciones como las de Prior han suscitado la teoría de la verdad de Kripke, muchísimo más prometedora que la de Tarski: "Outline of a Theory of Truth", Journal of Philosophy 72/19 (nov. 1975), pp. 690ss. Kripke llega al punto de sostener que una prolación puede engendrar un enunciado --en ella proferido por primera vez--, haciéndolo verdadero, o falso, o neutro, o indefinido; sea ello así o no, es lo cierto que situaciones como las que evoca Prior suceden a menudo y conllevan impredicatividad: Leoncio, que aprecia mucho a Andrés, cree que todo lo que esté ahora pensando será verdad, porque Andrés está examinándose de matemáticas; pero en ese momento lo que piensa Andrés es que Leoncio no da una en el clavo.

(n.8). La identificación de los "individuos" con sus respectivas clases unitarias o síngulos es una constante en Q --salvo quizá en trabajos recientes en los que parece claudicar ante los adeptos de la teoría estándar de cc., ZF o alguna otra afín como NB. Vide, p.ej., (Q3), p.276; (Q2), pp.122-3 & 135. Pero es interesante ver que F, quien precisamente fue el primero en criticar la confusión en que, antes de él, se solía incurrir entre un ente y su síngulo (mostrando que el c. de los reyes magos abarca a tres, mas su síngulo sólo a uno), propuso no obstante identificar a ciertos entes con sendos síngulos, a saber: a la Verdad y a la Falsedad. Resultan de tales identificaciones consecuencias muy interesantes. Vide (T2) p.287, p.297. Podríamos traducir a nuestra notación la ecuación fregeana así: $\hat{x}(x)=\hat{x}(x=\mathrm{U}x(x=x))$; de donde se deduciría $\hat{x}(x)=\hat{x}(x=\hat{x}(x))$. Sólo la Verdad sería verdadera --y sólo la Falsedad falsa, aunque esto último, dicho sea de paso, no es probablemente compatible con otras cosas que dice F. Claro que resulta más plausible un enfoque, en eso, como el de R: la Verdad sería la existencia (de estados de cosas). Ese enfoque russelliano es el que subyace al enfoque propuesto en el Ap. 4 de la Secc. 2 de este artículo. (Sobre la identificación de cada individuo con su síngulo, vide infra, el final del Ap. 9 de esta misma Sección.)

(n.9). Cf. (Q3), p. 2 y passim; (Q2), pp.120-1. Pero también R en la

2ª edición de PP.MM. (vide infra, Ap. 10) afirma (p. xxxix de (W3)): 'Consequently there is no longer any reason to distinguish between functions and classes'. ¿Como consecuencia de qué? De haber abrazado PE.

(n.10). Dice Q en (Q3), p.255: 'The notion that Russell's orders were relevant to such paradoxes is not one that I know how to make plausible while maintaining a distinction between attributes and open sentences, which he confused under the head of propositional functions. It seems clear in any event that by rights the semantic paradoxes should be blamed on special concepts foreign to the theory of classes ... But the semantic paradoxes are of no concern to the theory of classes'. Paréceme que Q está equivocado en ese punto. Cualquier predicado es "of concern to the theory of classes" al menos de una que postule un PA suficientemente vigoroso (en vez del raquítico de ZF, que sólo tolera subcc. de algún c. ya "dado"). Porque una tcc. con un PA fuerte y brioso puede probar que determinados predicados tienen que venir excluidos del lenguaje; o, que, si se dan, tienen condiciones de aplicación diferentes de las que se habían supuesto. (Vide infra, Ap. 9.)

(n.11). Chihara, en (C2), pp.5ss, brinda una explicación un poco diferente de cómo se evita la paradoja de Cantor en la teoría ramificada de tipos. Pero en el fondo no hay desacuerdo entre mi planteamiento y la lectura ofrecida por Chihara. Cabe señalar que la presentación que hace Chihara (pp.20ss) de la teoría ramificada de tipos difiere de la que aquí figura, pero —me parece-- más en terminología que en cuestión de fondo. Es sólo de lamentar que Chihara desatienda un tantico la importancia central que, para la jerarquización de órdenes, juega la presencia de cuantificadores de determinado orden. Quizá, lo mismo que Cocchiarella (en el trabajo citado supra, n.2), está preocupado por el hecho de que los órdenes son ontológicos mientras que la presencia o ausencia de cuantificadores es algo lingüístico, algo de las expresiones que denotan a sendos entes, no algo de los mismos. Ahora bien, está de por medio el principio del paralelismo óntico-lingüístico --tan bien analizado por Vuillemin en su grandiosa interpretación de las primeras fases de la filosofía russelliana, Leçons sur la première philosophie de Russell, París: Armand Colin, 1968. Y, si bien la teoría (russelliana) de descripciones parece una infracción a tal principio, y a lo mejor lo es, esa teoría no es indispensable para el conjunto de la ontología russelliana de la fase de los PP.MM. (Vide infra, n.14.) Y, en cualquier caso, el constructivismo que anima a la teoría ramificada pone límites a todo realismo excesivo sobre las propiedades: existirán, sí; en sí mismas, de acuerdo; pero sólo de aquella manera como hubiera podido construirlas mentalmente una mente infinitamente poderosa, sí, pero que sólo operase constructivamente, escalón por escalón.

(n.12). Sobre ésta y otras cuestiones afines ofrece Chihara, op. cit. ((C2), pp.44ss) interesantes comentarios en torno a AR.

(n.13). A menos que se abrace el PE, que es lo mejor que cabe hacer dentro de una teoría ramificada consecuente --o sea: sin AR. Eso es lo que hizo R en la 2ª edición. (Vide infra, Ap.10.) Con ello, sin embargo, no se evitan todos los males, pues sigue, lamentablemente, perdién dose hasta el mero sentido de buena parte del análisis numérico --teoría de números reales-- y también cualquier formulación fuerte del principio de inducción matemática. Así y todo, que es lo mejor que cabe lo revela el hecho de que, mediante ese recurso, sálvase el PA (en la versión, eso sí, atenuada que puede brindarle una teoría de tipos u órdenes) y buena parte de los teoremas generales de tcc.

(n.14). Contrariamente a lo que dice Chihara, op. cit., p.51 sub fine.

(n.15). Nótese que no es menester que sea "la" única propiedad así: Chihara critica --equivocadamente, a mi juicio-- un certero análisis de Copi (que muestra cómo con AR se reproducen en el sistema de PP.MM. paradojas semánticas como la de Grelling, a saber la de si es autoaplicable o no la expresión 'autoaplicable': vide (C2), pp.53-4) alegando que nada garantiza la unicidad de la propiedad predicativa, coextensiva con una propiedad impredicativa dada, cuya existencia venga impuesta por AR. Pero en la prueba de Copi es perfectamente dispensable ese supuesto de unicidad, aplicando una regla como la de instanciación existencial, que, en ese contexto --el de una reducción al absurdo--, es cabalmente correcta. Lo propio sucede aquí.

(n.16). Aunque no discuto en este artículo las ideas de Gödel, resultará obvio a quienes las conozcan que estoy casi totalmente de acuerdo con la mayoría de ellas --aunque rechazo la existencia de "intuiciones" matemáticas en cualquier sentido un poco fuerte, o sea que vaya más allá del de meras conjeturas u opiniones.

(n.17). Cf. de nuevo (C2), p.14; y también, del propio R, "Mathematical Logic as Based on the Theory of Types", ap. Logic and Knowledge, ed. por R. Marsh, Londres: Allen & Unwin, 1956, pp.39-56: publicado por vez primera en 1908.

(n.18). Vide (Q2), pp.146ss; (Q3), pp.56-8; y mis propias discusiones al respecto en el cap. VI de Fundamentos de ontología dialéctica (Editorial Siglo XXI, Madrid, 1987, pp.167-200) y en el cap. 14º de la Secc. II de El ente y su ser (Universidad de León, 1985, pp.527-57).

(n.19). Vide supra (n.8).

(n.20) El teorema de Schröder-Bernstein es la tesis de que, cuando exista una sobreyección de un c. x sobre otro, z, existiendo a la vez una sobreyección de z sobre x, entonces hay una biyección de x sobre z. (Una presentación diferente, pero en el fondo equivalente, la brinda elegantemente Javier de Lorenzo en Iniciación a la teoría intuitiva de conjuntos, Madrid: Tecnos, 1972, pp.116-7; alternativamente puede verse otra presentación --con el término de 'teorema de Cantor-Bernstein-- en Lía Oubiña, Introducción a la teoría de conjuntos, Buenos Aires: Eudeba, 1971, p.127.) Un análisis interesantísimo de los presupuestos existenciales de las demostraciones usuales de ese teorema hállase en (Q3), pp.203ss. Recordemos que una sobreyección de x sobre z es una relación funcional r (o sea tal que, para cualesquiera entes u,v, u≠v sólo si no existe ningún ente e tal que no sólo reu sino también rev) tal que no existe miembro alguno u de z sin que miembro alguno v de x sea tal que rvu (no existe ningún ente abarcado por z que no sea el valor de la relación r para algún argumento perteneciente a r). Biyección es una sobreyección cuya conversa es también una sobreyección.

(n.21). ¿Es eso deplorable? Quizá un tanto descreído, F. Fitch --uno de cuyos sistemas combinatorios altamente impredicativos también bloquea el teorema de Cantor (sobre alguno de ellos hablaré algo en el Ap.4 de la Secc.2)-- ve en ello una ganancia y comenta sarcásticamente que los matemáticos que se alborozan tanto con los transfinitos son como dizque es Dios, tan aficionado a escarabajos que ha creado numerosísimas subespecies de ellos. A favor de los escarabajos y en contra de los transfinitos habría, empero, mucho que decir. Hasta Cantor, ¿a quién se le hubiera ocurrido suponer que haya varios infinitos --y menos, que haya transfinitos inaccesibles, hiperinaccesibles etc. etc.?

(n.22). Sobre el sistema Σ de Wang, vide en particular (C2), pp.174-240; (W2), pp.147ss; Hao Wang, A Survey of Mathematical Logic (Amsterdam: North Holland, 1963), última parte. Otros sistemas de sesgo predicativo fueron propuestos en los años 20 por L. Chwistek; tales sistemas revelan interesantes rasgos en teoría de pruebas. Vide A. Fraenkel & Y. Bar-Hillel, Foundations of Set Theory. (North Holland, 1959), pp.150-60, 196-264. Podría articularse --siguiendo en parte los pasos de Hao Wang con su sistema Σ-- una tcc predicativa que acudiera a un principio converso de reducibilidad, a saber: para cada c. de un orden hay otro idéntico a él de orden inmediatamente superior; mas restringir PA de modo que --por decirlo así-- no cuente sólo de qué orden "sea" un c. para que satisfaga una instancia de PA, sino también a título de ente de qué orden esté "actuando"; y añadiríanse axiomas como el de la unión, que postularía que la unión de una familia de cc. "actúa" (¿siempre?) a título de ente del mismo orden que esos cc. (si bien con ello se arruinaría el bloqueo del embustero propuesto más arriba). En algún trabajo futuro pienso explorar tales opciones, que guardan conexión parcial con parte del procedimiento de construcción de mi sistema CD: vide Ap. 4 de la Secc. 2 de este artículo. Para cerrar esta nota vale la pena señalar que, en "What is Logic?", Journal of Philosophy 76/6 (jun. 1979), pp.285-319, Ian Hacking defiende una concepción de la lógica que ha sido muy discutida en estos años, pero que, comoquiera que sea, constituye un planteamiento interesante; pues bien, en ese trabajo muestra Hacking que la teoría subyacente a esa concepción suya de la lógica es la ramificada, precisamente. El que la teoría ramificada no pueda fundar ni el análisis numérico ni siquiera la aritmética recursiva es visto por Hacking, no como un fallo, sino como una virtud, ya que, a su juicio, la matemática no es lógica. Aunque mi propia concepción está más bien en las antípodas de la de Hacking en casi todo, comparto con él el interés por la teoría ramificada. En la articulación de un PA (no el único) vigente en el sistema CD que propongo (vide Ap.4 de la Secc.2) restríngese precisamente la aceptación de las instancias de tal principio a fórmulas que sean traducibles a la teoría ramificada. No porque todo en la realidad obedezca los constreñimientos de la ramificación (y, por lo tanto la jerarquía de tipos), sino únicamente porque cuanto se atenga a tales constreñimientos tiene asegurada una conducta "normal", entrando así en la órbita de aplicabilidad del PA, aunque sin acaparar tal órbita como equivocadamente lo pensó R.

BIBLIOGRAPHIE

(C1) James van Cleve, "Why a Set Contains its Members Essentially", Noûs 19/4 (dic. 1985), pp. 585-602.

(C2) Charles S. Chihara, Ontology and the Vicious Circle Principle. Ithaca: Cornell U.P., 1973.

(G1) P.T. Geach, Logic Matters. Oxford: Blackwell, 1972.

(G2) Kurt Gödel, "La lógica matemática de Russell" ap. Obras Completas Trad. J. Mosterín et al. Madrid: Alianza, 1981.

(K1) William Kneale & Martha Kneale, The Development of Logic. Oxford: Clarendon, 1962. (Hay traducción castellana).

(P1) Charles Parsons, "Some Remarks on Frege's Conception of Extension", ap. Studien zu Frege I: Logik und Philosophie der Mathematik, ed. por M. Schirn. Stuttgart: Fromman V., 1976, pp. 265-78.

(Q1) W.v. Quine, "New Foundations for Mathematical Logic", ap. From a Logical Point of View. Harvard U.P., 1961 (2ª ed.).

(Q2) W.v. Quine, Mathematical Logic. Harvard U.P., 1951 (2ª ed.).

(Q3) W.v. Quine, Set Theory and Its Logic. Harvard U.P., 1969 (2ª ed.)

(Q4) W.v. Quine "Frege's Way Out", ap. Essays on Frege, ed. por E.D. Klemke. Urbana: University of Illinois P., 1968, pp. 485-501.

(R1) Nicholas Rescher, Many-Valued Logic. New York: McGraw Hill, 1969.

(R2) J. Barkley Rosser, Logic for Mathematicians (2ª ed.). New York: Chelsea, 1978.

(T1) Christian Thiel, "Gottlob Frege: Die Abstracktion", ap. Schirn (vide (P1)), pp. 243-64.

(T2) Christian Thiel, "Wahrheitswert und Wertverlauf". Ibid., pp. 287-300.

(W1) Hao Wang, From Mathematics to Philosophy. Londres: Routledge & K.P., 1974.

(W2) Hao Wang, Beyond Analytic Philosophy. Cambridge (Mass.): MIT P., 1986.

(W3) A.N. Whitehead & Bertrand Russell, Principia Mathematica. Cambridge U.P., 1962. (Ed. abreviada según la 2ª ed. de 1927).