

FRACTAL Y DIMENSION (2ª PARTE):
ASPECTOS GEOMETRICOS DE LOS FRACTALES

Juan José Montesinos

INTRODUCCION.-

Este trabajo constituye la continuación de otro publicado en esta misma revista (Contextos III/6, 1.985, pp.163-176) y al que me referiré como FD I.

Quiero hacer sin embargo, dos puntualizaciones:

- En primer lugar, este artículo trata de un aspecto particular de los fractales, por lo que es indispensable tener ya alguna idea de este tema. Por eso, pensando en los lectores que se encuentren con él por primera vez, se ha colocado un apartado inicial muy descriptivo que debe servir como presentación. Este principio estaba pensado como el apéndice de FD I, para dar así soporte gráfico a las ideas allí expuestas.

-Debido a que algunos conceptos a utilizar exigirían del lector conocimientos muy específicos, ha sido preciso eliminar en este artículo los desarrollos matemáticos que podrían dificultar su comprensión. En particular, la segunda parte que trata de las autosemejanzas generalizadas ha sido despojada de toda demostración, incluyéndose sólo ejemplos. Lo importante es llegar al resultado final, que es el método de construir conjuntos fractales mediante semejanzas.

PRIMERA PARTE. LA RELACION $M(R) \propto R^D$

En los objetos físicos representados por figuras euclídeas existe una relación entre la "masa" del objeto y su tamaño lineal. Cuando existe homogeneidad, esta relación es de la forma

$$M(R) \propto \delta R^E$$

siendo δ (densidad) independiente del radio y E la dimensión del objeto 1, 2 ó 3. Así:

$$M(R) = 4/3 \pi \delta R^3$$

para el caso de una esfera.

Mandelbrot afirma que una relación de proporcionalidad:

$$M(R) \propto R^D$$

también es válida en los fractales autosemejantes. Ahora,

$$D = \ln N / \ln(1/r)$$

es la dimensión fractal y $M(R)$ es la masa contenida dentro de una bola de radio R centrada en el conjunto.

Para probar esta afirmación, se deberían tomar diversos fractales y en cada uno de ellos calcular la masa M dentro de bolas de distintos radios. Si el cociente:

$$M(R) / R^D$$

resultara ser independiente de R , se podría definir una densidad homogénea sobre fractales.

Aquí se muestran dos ejemplos sencillos en los que la relación anteriormente citada, se cumple sólo para determinados radios y centros.

Curva de V. Koch.

Construiremos esta curva de dos maneras, poniendo así de manifiesto la independencia de las figuras autosemejantes con la escala utilizada para su realización.

Construcción A: (Fig 1)

-- 1º: sustituir el generador en el iniciador.

-- 2º: - fase a): construir una figura semejante a la del primer paso y razón $r = 3$ (es decir, tres veces mayor).

- fase b): sustituir cada segmento de longitud 1 por el generador.

-- 3º: - fase a): se alarga nuevamente la figura del paso anterior

- fase b): cambiamos todos los segmentos rectilíneos (que vuelven a tener longitud 1) por el generador.

Usando este procedimiento repetidamente, se obtiene una figura que en cualquier paso contiene cuatro veces la figura del paso anterior, es decir, tiene cuatro veces más de masa y tres veces más de tamaño lineal. (En este caso, la masa es la longitud de la curva a lo largo de la línea quebrada). En fórmula:

$$M(R) = 4 M(R/3) \quad (1)$$

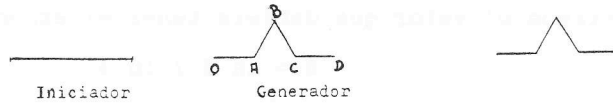
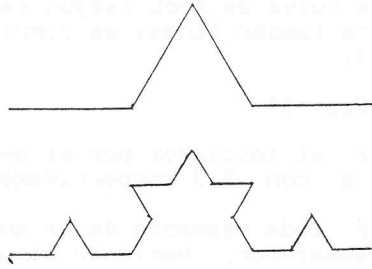


Fig. 1



En la curva límite, tomemos como centro de sucesivas circunferencias, el extremo izquierdo de la misma y como radios, potencias de 3. El punto F no necesita ser el final de la curva, puede ser el origen del arco idéntico al dibujado, que sería el segundo de los cuatro que forman la curva. (Fig 2).

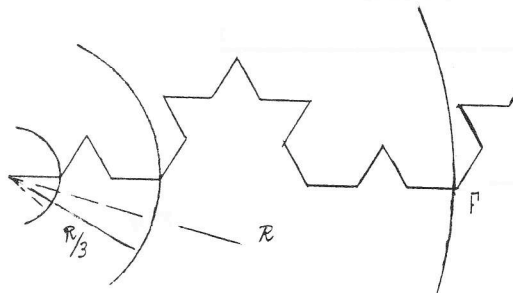


Fig. 2

Si admitimos la hipótesis de Mandelbrot sobre la dependencia entre la masa y el tamaño lineal:

$$M(R) \propto R^D$$

y usando el resultado (1):

$$M(R) / M(R/3) = (R / R/3)^D$$

$$4 = 3^d \implies \ln 4 = D \ln 3$$

encontramos el valor que debiera tener el exponente D:

$$D = \ln 4 / \ln 3$$

Pues bien, este exponente coincide con la dimensión de semejanza de la curva de Koch (según se explica en FD I) y la relación masa-tamaño lineal se cumple, si el radio es una potencia de 3.

Construcción B (Fig. 3)

-- 1º: sustituir el iniciador por el generador haciendo coincidir O y D con I, J respectivamente.

-- 2º: sustituir cada segmento de la quebrada del paso anterior por el generador, haciendo coincidir los finales de cada segmento con O y D.

--- 3º: repetir el procedimiento de sustitución de segmentos por el generador.

La curva límite obtenida tiene el mismo tamaño lineal que el iniciador.

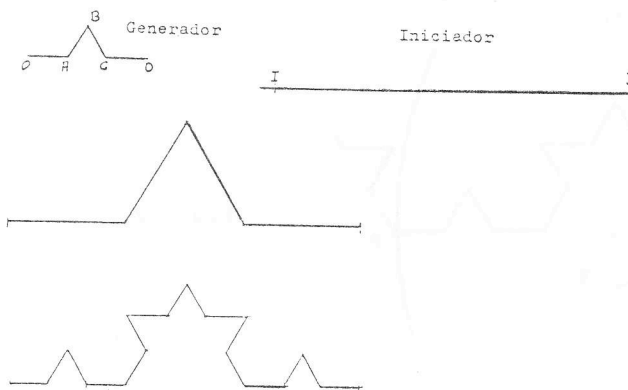


Fig. 3

Salvo escalas, las curvas límites obtenidas por los dos métodos, son idénticas. De hecho, si en cada paso de la primera construcción se añade una tercera fase c que consistiera en reducir a la tercera parte la curva resultante de la fase b), entonces al final de cada paso obtendríamos una línea quebrada de idéntico tamaño lineal

que la del paso anterior pero con más detalles y al final del proceso, una curva exactamente igual que la obtenida por el segundo método.

En este caso se tomarán radios:

$$R = 1/3^k$$

potencias de $(1/3)$, pero el razonamiento es el mismo: en círculos consecutivos de radios:

$$1/3^k \quad \text{y} \quad 1/3^{k+1}$$

están contenidas dos partes de la curva de Koch, de tal manera que en el círculo mayor hay cuatro arcos idénticos entre sí e idénticos al arco contenido en el círculo interior.

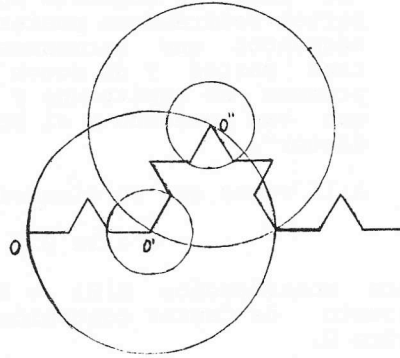


Fig. 4

Nuevamente tenemos: (Fig. 4)

$$M(R) = 4 M(R/3)$$

por lo que si se supone

$$M(R) \propto R^D$$

entonces D es:

$$D = \ln 4 / \ln 3$$

En la curva de Koch, vemos que la hipótesis se cumple sólo para los radios de la forma

$$R = 3^n \quad \text{ó} \quad r = (1/3)^n$$

Cuando $k \rightarrow \infty$ (es decir, si el proceso se repite indefinidamente) la relación

$$M(R) \propto R^n$$

se verá satisfecha con radios cada vez más pequeños, pero siempre el conjunto de ellos será numerable.

En cuanto al centro, puede ser elegido entre aquellos puntos que en la construcción sean los transformados de los puntos extremos del generador. Por ello, el número de centros será infinito numerable, ya que son infinitos los pasos precisos para construir la curva.

EL CONJUNTO DE CANTOR

Como se recordará, FD I, el Conjunto de Cantor era definido de la siguiente manera:

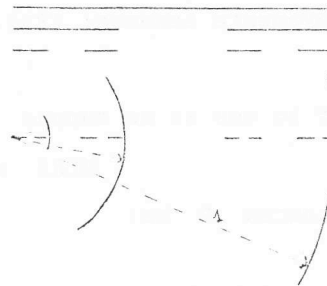
"Se toma un segmento unidad y se le divide en tres partes retirándose posteriormente la central. Los dos segmentos que permanecen son divididos a su vez en tres partes y de nuevo se retira la interior. El proceso se repite una y otra vez con los segmentos que van quedando y al conjunto final se le llama de Cantor".

Allí vimos que su dimensión fractal era:

$$D = \ln 2 / \ln 3$$

Ahora consideremos $M(R) =$ longitud de la parte del conjunto de Cantor contenido en un círculo de radio R y centro O .

Fig. 5



1, $1/3$, $1/9$ radios posibles.

En general, si se toman radios de la forma:

$$R_0 = (1/3)^k,$$

entonces entre la masa de las dos bolas concéntricas de radios:

$$R_0 \text{ y } R_0/3$$

se dá la relación:

$$M(R_0) = 2 M(R_0/3)$$

por lo que admitiendo $M(R) \propto R^D$ se obtiene:

$$M(R_0) / M(R_0/3) = R^D / (R_0/3)^D$$

$$\Rightarrow 2 = 3^D \quad D = \ln 2 / \ln 3$$

Para comprobar el cumplimiento de la relación:

$$M(R) \propto R^D$$

en los ejemplos, hemos usado la propiedad característica de las estructuras autosemejantes: la figura completa puede descomponerse en N partes idénticas y cada una es semejante al total según la razón R .

Entonces, tomando un punto conveniente del fractal y radios que sean potencias de la razón de semejanza en dos bolas concéntricas, tiene que darse la siguiente relación:

"La bola exterior contiene N veces una copia de la parte del fractal contenida en la bola menor", por lo que:

$$M(R) = N M(R.r) \quad r < 1$$

Si suponemos:

$$M(R) \propto R^D$$

$$\frac{M(R)}{M(R.r)} = N = \frac{R^D}{(R.r)^D}$$

$$D = \frac{\ln N}{\ln(1/r)}$$

Concluyendo: en las figuras autosemejantes, la hipótesis:

$$M(R) \propto R^D$$

exige que D sea precisamente la dimensión de semejanza:

$$D = \log N / \log(1/r)$$

Recíprocamente, ¿ si

$$M(R) \propto R^D$$

se cumple para un UNICO exponente D y en un rango suficientemente grande de R , se puede decir que la estructura es un fractal ?. Tomemos una D' cualquiera:

$$\frac{M(R)}{R^{D'}} = \frac{M(R)}{R^D R^{D'-D}} = C \frac{1}{R^{D'-D}}$$

Cuando $R \rightarrow \infty$ (el tamaño se hace muy grande)

$$\frac{1}{R^{D'-D}} = \begin{cases} \infty & \text{si } D' < D \\ 1 & \text{si } D' = D \\ 0 & \text{si } D' > D \end{cases}$$

RESUMIENDO

D : es la potencia adecuada a la que hay que elevar el tamaño lineal para obtener un resultado no trivial y por ello, es el único número que recoge la irregularidad del sistema al asociar a la "masa" un número finito no nulo. Esta afinidad con la idea de dimensión de Hausdorff, es la que permite afirmar que se trata de un fractal siempre que D cumpla $D_T < D$.

SEGUNDA PARTE: AUTOSEMEJANZAS GENERALIZADAS.

Los fractales más utilizados en Física son los auto-semejantes. Esto se debe a que al ser propuestos como modelos (por ej. en Mecánica Estadística), pueden resolverse al tener cierta regularidad, que es su invarianza respecto de la escala.

Pero no todos los fractales son auto-semejantes y por ello no son equivalentes esos dos términos. Fractales no auto-semejantes son los grafos $(x, f(x))$ de algunas funciones que debido a su irregularidad tienen dimensión

de Hausdorff mayor que 1. De esta clase, son las curvas continuas pero no diferenciables en ningún punto, como la de Weirstrass:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} k^{(s-2)i} \text{sen}(k^i x) \quad i = 1 \dots \infty$$

con $1 < s < 2$ y su variante:

$$f(x) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} k^{(s-2)i} (1 - \cos k^i x) \quad i = -\infty \dots \infty$$

debida a Mandelbrot.

Se caracterizan porque en cada punto de ellas, confluyen dos segmentos infinitesimales, lo que impide que se pueda definir la tangente. Si se ampliara la gráfica se podría observar que cada uno de esos segmentos está a su vez formado por una sucesión de picos.

Según la definición que se dió en la primera parte, es preciso demostrar que la dimensión de Hausdorff de un conjunto es estrictamente mayor que su dimensión topológica $D_T < D_H$ para poder afirmar que se trata de un fractal.

Sin embargo la dificultad de hallar la dimensión de Hausdorff hace poco operativa esa definición. En el caso de los conjuntos autosemejantes, se puede calcular dicho número de manera directa. El método es el siguiente:

Se toma un conjunto finito de semejanzas:

$$S_1, S_2 \dots S_m$$

todas ellas de razón $r_i < 1$.

Se puede demostrar que, bajo ciertas condiciones, existe un único conjunto E que es invariante respecto de esas semejanzas. Este conjunto tan especial resulta ser un fractal cuya dimensión se puede calcular directamente.

Aquí daremos el teorema sin demostración, aplicándose el método a ejemplos que ya conocemos.

TEOREMA FUNDAMENTAL

Si la condición de conjunto abierto se cumple para un conjunto finito de semejanzas :

$$S_1, S_2 \dots S_m,$$

de razones :

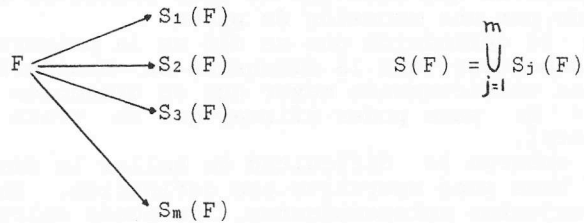
$$r_j < 1, \quad (i < j < m),$$

entonces el conjunto invariante asociado E , es "autosemejante" y su dimensión de Hausdorff s , se determina por la ecuación:

$$r_1^s + r_2^s + \dots + r_m^s = 1$$

EXPLICACION.-

Una semejanza transforma una figura en otra similar siendo en este caso más pequeña que la original, ya que todas tienen la razón menor que la unidad. Con cada una de estas semejanzas, al actuar sobre un conjunto F , se obtiene su imagen $S_j(F)$ denominando $S(F)$, a la unión conjuntista de todas ellas.



Un conjunto E es invariante respecto a una aplicación S si coincide con la imagen debida a ella:

$$E = S(E)$$

Como consecuencia de un resultado muy conocido en Matemáticas, Teorema del Punto Fijo, existe un

UNICO CONJUNTO INVARIANTE

para esa determinada colección de semejanzas. Que además sea autosemejante, como indica el teorema, quiere decir que cada una de las partes $S_j(E)$ en que puede dividirse E es semejante al propio E .

La dimensión de Hausdorff de un conjunto fué definida ya anteriormente, por lo que sólo queda por explicar la condición de conjunto abierto.

CONDICION DE CONJUNTO ABIERTO

Un conjunto de semejanzas

$$S_1, S_2 \dots S_m$$

satisface la condición de conjunto abierto cuando existe un conjunto V abierto tal que :

$$S(V) = \bigcup_{i=1}^m S_i(V) \quad V$$

$$S_j(V) \cap S_i(V) = \emptyset \quad i \neq j$$

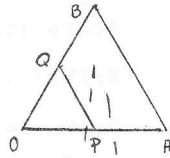
La primera exige que el transformado de V por S_i sea una parte del propio V , mientras la segunda obliga a las imágenes de V por cada homotecia, a ser disjuntas (sin partes comunes).

Haremos un ejemplo que nos llevará a formar uno de los fractales más conocidos actualmente, sirviendo de paso para aclarar las definiciones recientemente introducidas.

SIERPINSKI GASKET

Sobre los vértices de un triángulo equilátero de lado uno, se sitúan los centros de tres homotecias de igual razón: $1/2$. Como conjunto abierto tomaremos el interior V de ese triángulo (es decir, sin el borde).

La homotecia de centro O , transforma OBA en otro semejante a él, reducido a la mitad ($r = 1/2$) y dejando el punto O invariante ya que es el centro de ella.

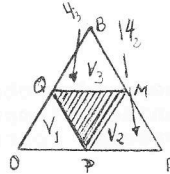


$$B \text{-----} \rightarrow S(B) = Q$$

$$A \text{-----} \rightarrow S(A) = P$$

$$O \text{-----} \rightarrow S(O) = O$$

Fig. 6



La imagen de V por S_1 es OPQ .

De idéntica manera transforma V en PMA , y S_3 lo lleva a BQM . Llamamos:

$$S_1(V) = V_1; \quad S_2(V) = V_2; \quad S_3(V) = V_3$$

Según fué definido, $S(V)$ está formado por la unión de los triángulos V_1, V_2, V_3 , y contenido en el inicial.

$$S(V) = V_1 \cup V_2 \cup V_3 \subset V$$

También se cumple que esos mismos

$$V_1, V_2, V_3$$

no tienen puntos comunes ya que sólo estamos considerando el interior de esos triángulos y no sus bordes.

Veamos ahora, cómo la aplicación reiterada de estas homotecias al conjunto resultante $S(V)$, nos lleva a perfilar el fractal buscado. Por ejemplo, actuando con S_2 :

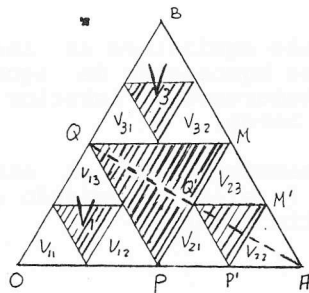


Fig. 7

S_2

$$Q \text{-----} \rightarrow Q'$$

$$P \text{-----} \rightarrow P'$$

$$O \text{-----} \rightarrow P$$

$$S_2(V_1) = V_{21} = PP'Q$$

Sobre los otros:

$$S_2(V_2) = V_{22} = P'AM'$$

$$S_2(V_3) = V_{23} = Q'MM'$$

Después de este paso se pueden observar ya que los nuevos triángulos están contenidos siempre en aquellos de los que proceden por las homotecias correspondientes :

$$V_2 \supset V_{21}; \quad V_2 \supset V_{22}; \quad V_2 \supset V_{23};$$

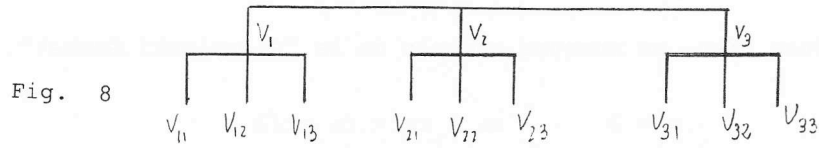
y que no hay solapamientos entre ellos. Así,

$$S^2(V)$$

es la unión de los nueve triángulos pequeños, desde

V_{11} hasta V_{33} ;

resulta inmediato ver ahora las relaciones de inclusión entre todos los definidos hasta ahora y los que se obtendrían si repitiéramos S :



Llamamos \bar{V} al triángulo V incluyendo su borde. Cuando la condición de conjunto abierto se satisface, el conjunto E al que se refería el teorema inicial, es el resultado de la aplicación reiterada de S sobre \bar{V} .

$$E = \bigcap_k S^k(V) \quad k = 1.. \infty$$

Veamos qué es $S^2(\bar{V})$:

$$\begin{aligned} S^2(\bar{V}) &= S [S_1(\bar{V}) \cup S_2(\bar{V}) \cup S_3(\bar{V})] = \\ &= S_1 [(S_1(\bar{V}))] \cup S_2 [(S_1(\bar{V}))] \dots S_3 [S_3(\bar{V})] = \\ &= \bar{V}_{11} \cup \bar{V}_{21} \cup \bar{V}_{31} \dots \bar{V}_{13} \cup \bar{V}_{23} \cup \bar{V}_{33} \end{aligned}$$

Al tener igual número de transformaciones, son todos los subconjuntos ó disjuntos ó a lo más tienen un punto en común. Reorganizando:

$$S^2(\bar{V}) = \bigcup_{ij} V_{ij} \subset S(\bar{V}) \subset \bar{V}$$

y finalmente:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S^k(\bar{V}) = \bigcap_k S^k(\bar{V}) = E \implies E \subset \bar{V}$$

Segun el teorema de las aplicaciones contractivas, el límite de esta sucesión, es el conjunto invariante buscado E .

En el caso de las homotecias antes definidas, se llama a este conjunto límite, SIERPINSKI GASKET.

La dimensión de semejanza, es el único número positivo s para el que se cumple:

$$r_1^s + r_2^s + \dots + r_m^s = 1$$

Pues bien, en nuestro ejemplo de la "Sierpinski Gasket":

$$m = 3 \quad r_1 = r_2 = r_3 = 1/2$$

$$3 \cdot (1/2)^s = 1 \quad s = \ln 3 / \ln 2$$

COMENTARIO

En la bibliografía (Mandelbrot), este número se encuentra así: sobre un triángulo equilátero de lado 1, se toman los puntos medios y se unen formando cuatro triángulos más pequeños. Se retira el triángulo interior y se vuelve a descomponer cada triángulo nuevo en otros cuatro. Se retiran de nuevo los interiores y el proceso se repite indefinidamente. Al final de este capítulo, se verá el procedimiento utilizado para realizar estos dibujos mediante ordenador.

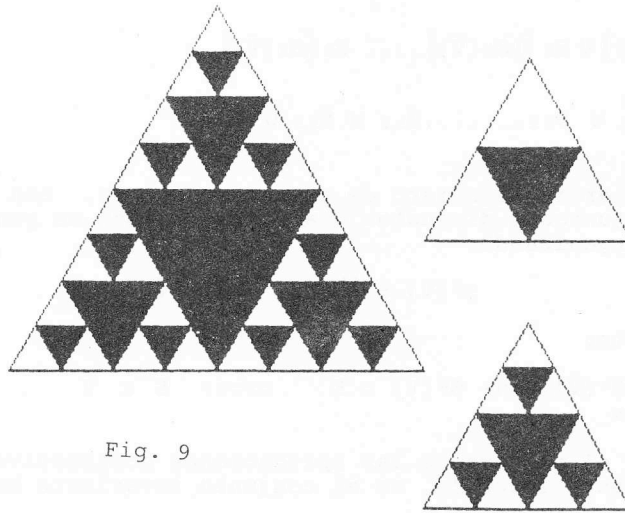


Fig. 9

En cualquier momento de la construcción y en el límite, la figura se puede descomponer en $N=3$ semejantes al total y de razón $r=1/2$.

Aplicando la fórmula de Mandelbrot:

$$d = \frac{\ln N}{\ln 1/r} = \frac{\ln 3}{\ln 2}$$

Se obtiene así el mismo resultado.

NUMERO DE NODOS SOBRE LA SIERPINSKI GASKET.-

La dimensión fractal de la Sierpinski Gasket puede ser calculada a partir de la relación entre la "masa" y su tamaño lineal:

$$M \approx L^d$$

Según se probó en la primera parte, cuando esta relación se ve cumplida para un gran número de valores de L y con un mismo exponente "d" fraccionario, se podía afirmar que el sistema era fractal. Siguiendo el procedimiento allí expuesto, es fácil ver que la anterior relación se cumple para:

$$d = \ln 3 / \ln 2$$

En este caso, M es la longitud de todas las líneas comprendidas dentro de una circunferencia de centro un extremo de la figura y de radio L .

Supongamos ahora que estamos interesados en conocer cómo varía el número N de puntos o posiciones en el fractal en función de su longitud. Esta cuestión es importante porque actualmente se proponen fractales como modelos físicos, suponiendo que hay partículas colocadas en los puntos de corte. Vamos a ver que si admitimos un comportamiento del tipo:

$$N \approx L^d$$

entonces d es nuevamente la dimensión ya conocida

$$d = \ln 3 / \ln 2$$

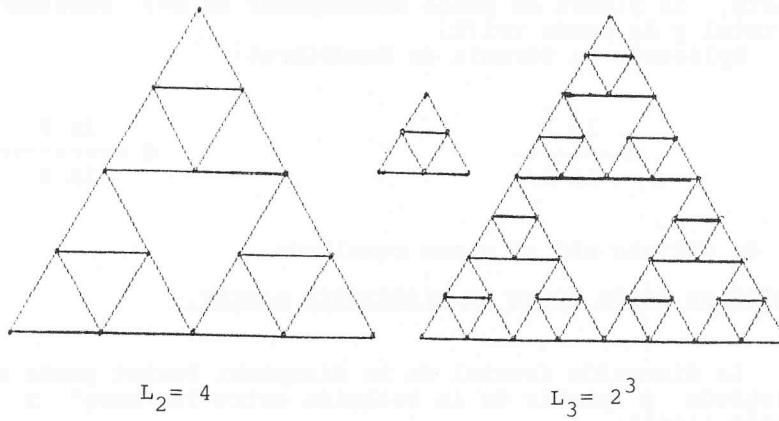


Fig. 10

$$N_4 = 6 \cdot 3 - 3 = 3 (6 - 1)$$

$$N_8 = 3 [3 (6 - 1)] - 3$$

$$N_8 = 3^2 [6 - 1 - 1/3]$$

y al cabo de n pasos :

$$N_{2^{n+1}} = 3^n [6 - (1 + 1/3 + \dots + 1/3^{n+1})]$$

En cada paso del proceso, el número de puntos resultantes es tres veces el del anterior, menos los tres puntos comunes.

$$\text{Si } L = 2^{n+1}$$

$$\implies N_L = 3^n [6 - 3/2 (1 - (1/3)^n)]$$

Suponiendo :

$$N_L \approx L^d$$

De esta ecuación, después de tomar el límite cuando n se hace infinito, se deduce:

$$\ln 3 = d \ln 2$$

$$d = \frac{\ln 3}{\ln 2}$$

LAS SEMEJANZAS ASOCIADAS A LA CURVA DE KOCH.-

Según vimos en la primera parte, la curva de Koch es un fractal de dimensión $d = \ln 4 / \ln 3$, para cuya formación se empleaba el proceso de sustituir cada segmento rectilíneo por el generador.

Ahora no vamos a buscar esta curva a través del método sugerido por el Teorema Fundamental, sino que conocida ya la curva, K , se definirán las semejanzas a partir de las cuales se construye la transformación S que deja este fractal invariante. Suponemos que A está sobre el origen de coordenadas y que la distancia entre A y B es la unidad.

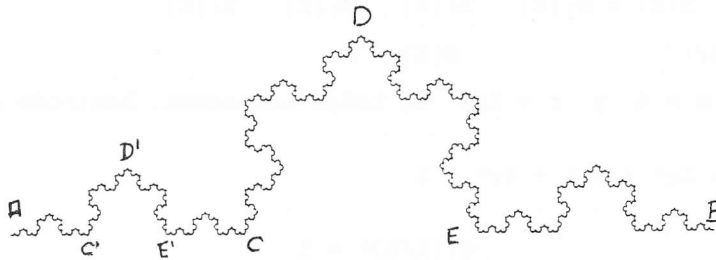


Fig. 11

S_1 = será la homotecia de centro $A(0,0)$ y razón $1/3$.

$$S_1(B) = C \quad S_1(D) = D'$$

$$S_1(E) = E' \quad S_1(C) = C'$$

y todo el fractal es llevado a la parte de él mismo, comprendida entre A y C .

Esquemáticamente:

$$S_1(K) = AC$$

S_4 = homotecia también de razón $1/3$ con centro ahora en B .

S_2 = es una aplicación difícil de visualizar porque está compuesta de dos:

1º Una homotecia de razón $1/3$

2º Una rotación de 60° , que lleva a colocar la figura resultante de la homotecia sobre CD.

$$S_2(K) = CD$$

El centro de la homotecia y el giro es el punto de coordenadas :

$$(5/14, 3/14)$$

S_3 = equivalente a la S_2 ahora con centro $(9/14, 3/14)$ y giro de -60° . Es la responsable de transformar la K en la parte de ella comprendida entre D y E.

Si se define $S = S_i ; i = 1 \dots 4$ entonces encontramos :

$$S(K) = S_1(K) \quad S_2(K) \quad S_3(K) \quad S_4(K)$$

es decir: $S(K) = K$

Como $m = 4$ y $r = 1/3$ en todos los casos, haciendo uso de:

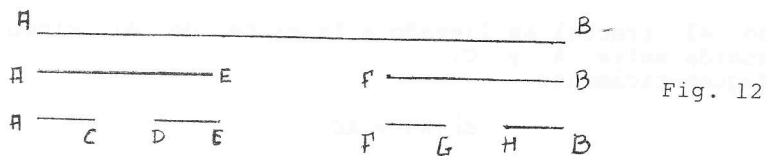
$$r_1^s + r_2^s + r_3^s + r_4^s = 1$$

$$4 \cdot (1/3)^s = 1$$

$$s = \ln 4 / \ln 3$$

LAS SEMEJANZAS ASOCIADAS AL CONJUNTO DE CANTOR.-

Por último, vamos a repetir el proceso anterior, para encontrar la dimensión del conjunto de Cantor a través de las semejanzas.



Este conjunto se puede poner como la unión de los transformados de él mismo, según las dos homotecias siguientes:

S_1 = homotecia de centro A y razón 1/3; lleva el conjunto C a su parte izquierda.

$$S_1(A) = A \qquad S_1(E) = C$$

$$S_1(B) = E \qquad S_1(F) = D$$

S_2 = homotecia de centro B y razón 1/3; en este caso lo transporta a su parte derecha.

$$S_2(A) = F \qquad S_2(E) = G$$

$$S_2(B) = B \qquad S_2(F) = H$$

$$S_1(C) \qquad S_2(C) = C$$

$$(1/3)^s + (1/3)^s = 1$$

$$s = \frac{\ln 2}{\ln 3}$$

RESUMEN.-

El teorema anunciado anteriormente, ofrece la posibilidad de construir fractales de la siguiente manera. Se toma un conjunto de semejanzas

$$S_j \qquad (j = 1 \dots m)$$

de razones menores que 1, y se busca un conjunto V, (en nuestro caso fué un triángulo equilátero), que cumpla la condición de conjunto abierto para esas semejanzas. La aplicación reiterada de

$$S = S_j$$

es decir

$$S^2 = S(S), S^3 \dots$$

sobre ese V, lleva al fractal buscado (la Sierpinski Gasket en el ejemplo).

La ventaja del método, es que el conjunto encontrado tiene una dimensión de semejanza s , que se puede conocer

previamente; sólo hay que resolver la ecuación:

$$r_1^s + r_2^s + \dots + r_m^s = 1$$

FRACTALES E INFORMÁTICA

Desde hace algún tiempo, las revistas especializadas de Informática ofrecen a sus lectores programas completos para dibujar fractales con el ordenador.

Presentamos a continuación dos, el primero corresponde a un fractal ya visto: la "Sierpinski Gasket" y el segundo es el programa de una figura nueva: la "Alfombra Sierpinski".

Alfombra Sierpinski.

Se toma un cuadrado y se divide en nueve más pequeños. Retirando el central a los ocho restantes se les vuelve a dividir. El proceso continúa indefinidamente y el conjunto límite tiene por dimensión:

$$D = \ln 8 / \ln 3$$

El algoritmo utilizado intenta reflejar el método de construcción aplicado anteriormente: partiendo de una figura base, realizamos con ella una serie de movimientos dando como resultado una nueva figura. Se toma ahora ésta como base y haciendo los mismos movimientos, se obtiene una segunda figura. Con este método recurrente, del que aquí sólo ofrecemos algunos pasos, se obtendría la figura fractal buscada.

PROCEDIMIENTOS PARA DIBUJAR LA ALFOMBRA. LENGUAJE "LOGO"

PARA BARRAS :L :N
REPITE :N+1 (AV :L RE :L SL GD 90
AV :L / N GI 90 BL)
SL GI AV :L + (:L / :N) GD 90 BL
FIN

PARA PARRILLA :L :N
BARRAS :L :N
AV :L GD 90
BARRAS :L :N
GI 90 RE :L OT
FIN
PARA ALFOMBRA1 :L
PARRILLA :L 3
SL AV :L / 2 GD 90 AV :L / 2 BL
RELLENA SL RE :L / 2 GI 90 RE :L / 2
BL OT
FIN

PARA ALFOMBRA2 :L
ALFOMBRA1 :L
REPITE 4 (REPITE 3 (ALFOMBRA1 :L / 3 AV :L / 3) GD 90)
FIN

PARA ALFOMBRA3 :L
ALFOMBRA2 :L
REPITE 4 (REPITE 3 (ALFOMBRA2 :L / 3 AV :L / 3) GD 90)
FIN

PARA LADOS :L
REPITE 4 (AV :L RE :L SL GD 90 AV :L / 3)
GI 90 BL
SL GI 90 AV :L + (:L / 3) GD 90 BL
FIN

(Cambie los paréntesis por corchetes)

REPRODUCTION OF THE ORIGINAL DOCUMENT IS PROHIBITED

DATE: 10/10/2000
TIME: 10:10:10
PAGE: 10/10

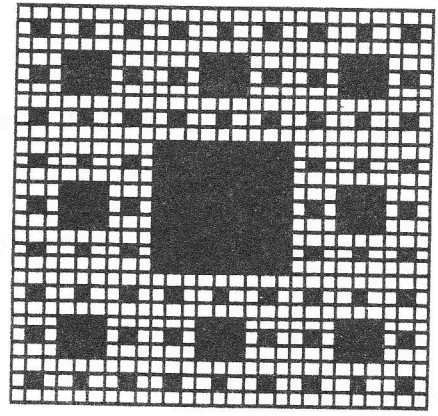
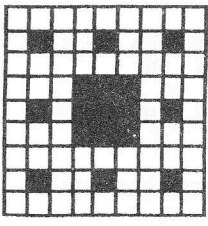
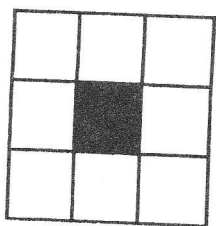


Fig. 13

PROCEDIMIENTOS PARA EL "GASKET"

```
para trie :l
gd 90 repite 3(av :l gi 120) gi 90 ot
fin
para gasket1 :l
trie :l gd 90 av :1/2 gi 150
trie :1/2 gd 60 sl av :1/4 bl
rellena sl re :1/4 gi 90 av :1/2 gd 90 bl ot
fin
para gasket2 :l
gasket1 :1/2 sl gd 30 av :1/2 bl
gi 30 gasket1 :1/2 sl gd 150
av :1/2 bl gi 150 gasket1 :1/2 sl
av :1/4 bl rellena sl re :1/4
gi 90 av :1/2 gd 90 bl ot
fin
para gasket3 :l
gasket2 :1/2 sl gd 30 av :1/2 bl
gi 30 gasket2 :1/2 sl gd 150
av :1/2 bl gi 150 gasket2 :1/2 sl
av :1/4 bl rellena sl re :1/4
gi 90 av :1/2 gd 90 bl ot
fin
para gasket4 :l
gasket3 :1/2 sl gd 30 av :1/2 bl
gi 30 gasket3 :1/2 sl gd 150
av :1/2 bl gi 150 gasket3 :1/2 sl
av :1/4 bl rellena sl re :1/4
gi 90 av :1/2 gd 90 bl ot
fin
para gasket5 :l
gasket4 :1/2 sl gd 30 av :1/2 bl
gi 30 gasket4 :1/2 sl gd 150
av :1/2 bl gi 150 gasket4 :1/2 sl
av :1/4 bl rellena sl re :1/4
gi 90 av :1/2 gd 90 bl ot
fin
```

(Cambie los paréntesis por corchetes)

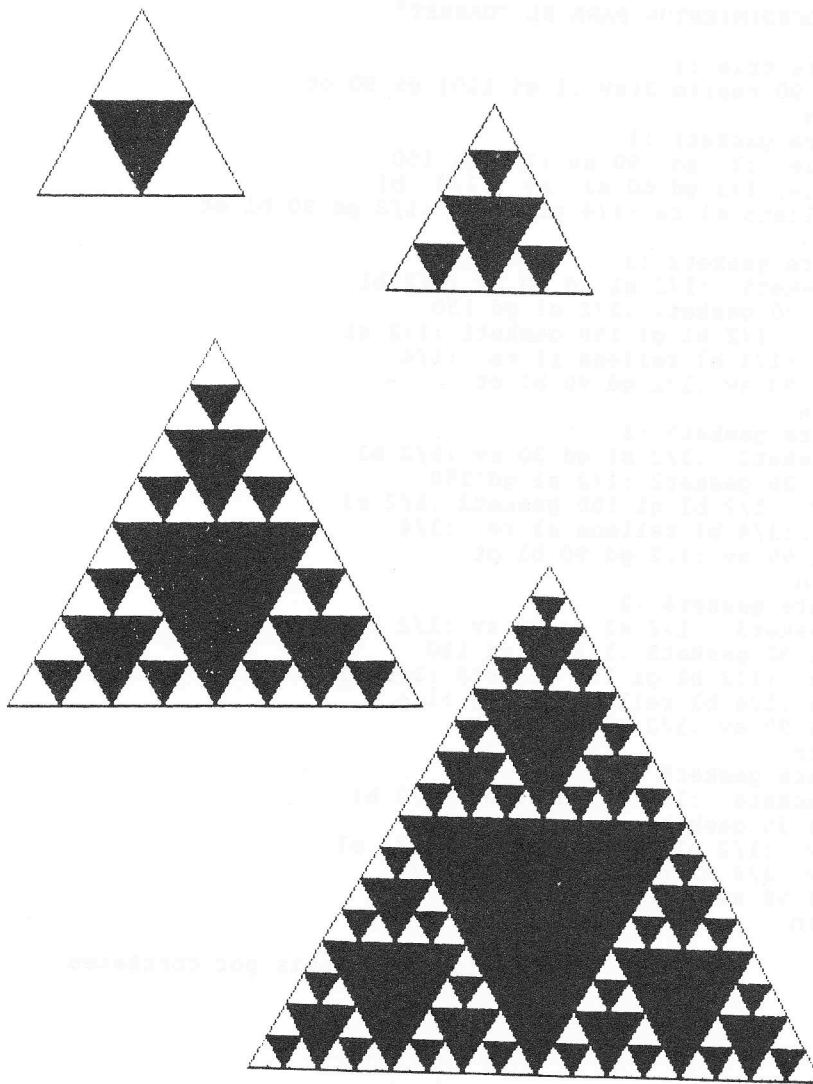


Fig. 14

BIBLIOGRAFIA

- Falconer K.J. Física y Geometría del desorden. (Mir, Moscu)
- Mandelbrot B., (1.975). Les Objets Fractals. Forme, Hasard et Dimension. (Flammarion, Paris)
- Mandelbrot B., (1.977). Fractals: Form, Chance, and Dimension. (Freeman, S.Francisco)
- Mandelbrot B., (1.982). The Fractal Geometry of Nature. (Freeman)
- Montesinos, J.J., (1.987). Introducción a aspectos geométricos y físicos de los fractales. Memoria de Licenciatura. Universidad de Valladolid.

NOTAS Y COMENTARIOS

