9) HENDERSON, C. R. (1977).—Prediction of future records. Proceedings of the International Conference on Quantitative Genetics. Iowa Atate University Press, Ames, Iowa.
10) SCHAEFFER, L. R. (1975).—Disconnectedness and variance component estimation. *Biometrics*, **31**: 969-977.
11) SCHAEFFER, L. R. (1976).—Maximun likelihood estimation of variance components in dairy cattle breeding research. *J. Dairy Sci.*, **59**: 2.146-2.151.
12) SEARLE, S. R. (1971).—*Linear Models*. Ed. John Wiley & Sons, New York: pp. 226-327 y 458-470.
13) RIOS, S. (1977).—*Métodos Estadísticos*. Ediciones del Castillo. Madrid: pp. 331-334.
14) SNEDECOR, G. W., y COCHRAN, W. G. (1975).—*Métodos Estadísticos*. Ed. Compañía Editorial Continental, S. A., México: pp. 244-246.

CATEDRA DE MATEMATICAS Y ESTADISTICA
(Prof. Dr. A. ALVAREZ PRIETO)

DISTRIBUCION DE WEIBULL, CARACTERIZACION Y ALGUNAS APLICACIONES

Por A. Alvarez Prieto
M. Díaz Gabela

INTRODUCCION

La distribución Weibull es una distribución triparamétrica, definida a partir de la distribución exponencial.

Su utilización se extiende, de forma general, a los casos en que no se cumplen las condiciones de aleatoriedad suficientes para aplicar la distribución exponencial; sin embargo, no existen razonamientos matemáticos lo suficientemente claros que indiquen cuándo esta distribución deba ser usada.

Nuestro trabajo, que parte de un estudio de caracterización de la distribución Weibull, se plantea como objetivo fundamental la búsqueda de situaciones, procesos y variables aleatorias que lleven asociada la distribución Weibull, es decir, nos proponemos el estudio de circunstancias concretas, en las que dicha distribución pueda aplicarse.

MATERIAL Y METODOS

Partimos de una serie de propiedades, métodos y conocimientos necesarios para el desarrollo de este trabajo.

1. *Caracterización de la distribución Weibull*

a) Función de densidad.—Una variable aleatoria "X" se dice que sigue una distribución Weibull si existen parámetros α, δ, ξ, tal que $\alpha > 0$, $\delta > 0$, $\xi \geqslant 0$, que hacen que la variable aleatoria $Y = (\frac{X-\xi}{\alpha})^{\delta}$ siga una distribución exponencial con función de densidad: $f(y) = e^{-y}; y > 0$, por lo que la función de densidad de la v.a. "X" será:

$$f(X) = \frac{\delta}{\alpha} \left(\frac{X-\xi}{\alpha}\right)^{\delta-1} e^{-\left(\frac{X-\xi}{\alpha}\right)^{\delta}} \quad ; X-\xi \geqslant 0$$

An. Fac. Vet. León, 1982, *28*, 103-115.

El parámetro ξ es el parámetro de localización, que es llamado de «garantía» en el campo de la fiabilidad y parámetro «umbral» en los problemas de supervivencia.

El parámetro δ es el parámetro de forma. Cuando $\delta = 1$ y $\xi = 0$, la distribución Weibull se transforma en una distribución exponencial de media α.

El parámetro α es el parámetro de escala, que es llamado también «vida característica».

Representando la distribución Weibull triparámetrica por la notación W (α, δ, ξ), la distribución Weibull estándar es la representada por W $(1, \delta, 0)$.

Un estudio analítico de la función de densidad, nos determina que para valores de $\delta > 1$ la moda corresponde al punto $X = \alpha \left(\frac{\delta - 1}{\delta}\right)^{1/\delta} + \xi$ y para valores de δ tales que $0 < \delta < 1$, la moda corresponde al punto $x = 0$.

La mediana, para cualquier valor de $\delta > 0$, corresponde al punto $X = \alpha\,(\ln 2)^{1/\delta} + \xi$.

Puesto que la moda corresponde a la abscisa para la cual la función de densidad presenta un máximo relativo, las regiones de crecimiento y decrecimiento de la función corresponde a los valores de X, que hacen $X - \xi < 0$ y $X - \xi > 0$, respectivamente.

En la figura 1 queda representada la función de densidad Weibull estándar para distintos valores de δ.

b) Momentos.—Los momentos para la distribución Weibull triparamétrica se calculan fácilmente a partir de la Weibull estándar, teniendo en cuenta que si la variable aleatoria X sigue una distribución W $(1, \delta, 0)$ entonces la variable aleatoria $X' = \xi + \alpha X$ (1) sigue W (α, δ, ξ).

Si la variable aleatoria X sigue W $(1, \delta, 0)$, por la propia definición de la distribución Weibull, calcular los momentos de orden k de X será calcular los momentos de orden k/δ de la distribución exponencial, por tanto,

$$E(X^k) = E((X^\delta)^{k/\delta}) = \Gamma\left(1 + \frac{k}{\delta}\right)$$

Si la variable aleatoria X' sigue W (α, δ, ξ), el cálculo de los momentos se puede hacer a partir de los momentos de la variable aleatoria X mediante la relación (1), o bien directamente a partir de la integral eureliana de 2.ª especie:

$$\int_0^\infty X^k \frac{\delta}{\alpha}\left(\frac{X}{\alpha}\right)^{\delta - 1} e^{-\left(\frac{X}{\alpha}\right)^\delta} dx = \alpha^k \Gamma\left(1 + \frac{k}{\delta}\right) = E(X'^k)$$

El cálculo de los momentos respecto a la media son inmediatos a partir de los momentos centrales; así, por ejemplo, para la varianza se tiene:

$$V(X') = E(X'^2) - (E(X'))^2 = \alpha^2\left(\Gamma\left(1 + \frac{2}{\delta}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\delta}\right)\right)$$

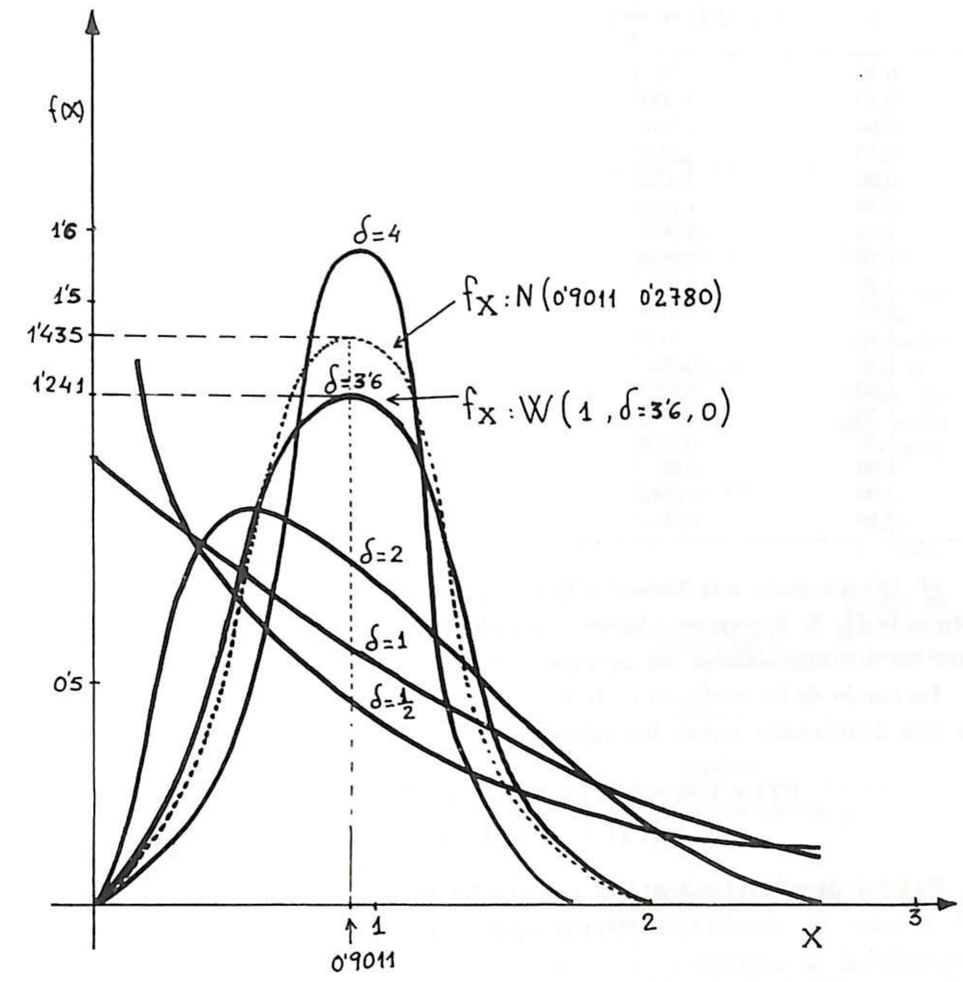

Fig. 1

Se pueden confeccionar tablas como la tabla I, que nos da el valor de la función $\Gamma\left(1 + \frac{1}{\delta}\right)$ para los distintos valores de δ, estas mismas tablas nos proporcionan los valores de la función $\Gamma\left(1 + \frac{k}{\delta}\right)$, que serán los que corresponden a los valores de "δ" $= \frac{\delta}{k}$.

El uso de estas tablas proporciona un método rápido de cálculo de momentos de variables aleatorias que siguen una distribución Weibull.

TABLA I
Momentos de la distribución Weibull estándar

δ	$\Gamma(1+\frac{1}{\delta})$	δ	$\Gamma(1+\frac{1}{\delta})$
0,40	3,3234	2,20	0,8856
0,50	2,0000	2,30	0,8859
0,60	1,5046	2,40	0,8865
0,70	1,2658	2,50	0,8873
0,80	1,3130	2,60	0,8882
0,90	1,0522	2,70	0,8893
1,00	1,0000	2,80	0,8905
1,10	0,9649	2,90	0,8917
1,20	0,9407	3,00	0,8930
1,30	0,9236	3,10	0,8943
1,40	0,9114	3,20	0,8957
1,50	0,9027	3,30	0,8970
1,60	0,8966	3,40	0,8984
1,70	0,8922	3,50	0,8997
1,80	0,8893	3,60	0,9011
1,90	0,8874	3,70	0,9025
2,00	0,8862	3,80	0,9038
2,10	0,8857	3,90	0,9051

c) Aproximación a la Normal.—Consideramos la distribución Weibull estándar, esto es W (1, δ, 0) y vamos a hacer un estudio de la forma de su función de densidad para los distintos valores del parámetro δ.

Partiendo de los coeficientes de asimetría $\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$ y curtosis $\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4}$, que en esta distribución toman los valores:

$$\gamma_1 = \frac{\Gamma(1+3/\delta) - 3\,\Gamma(1+2/\delta)\,\Gamma(1+1/\delta) + 2\,\Gamma^3(1+1/\delta)}{[\Gamma(1+2/\delta) - \Gamma^2(1+1/\delta)]^{3/2}}$$

$$\gamma_2 = \frac{\Gamma(1+4/\delta) - 4\,\Gamma(1+3/\delta)\,\Gamma(1+1/\delta) + 6\,\Gamma(1+2/\delta)\,\Gamma^2(1+1/\delta) - 3\,\Gamma^4(1+1/\delta)}{[\Gamma(1+2/\delta) - \Gamma^2(1+1/\delta)]^2}$$

podemos confeccionar la tabla II, en la que queda resumida toda la información a cerca de la forma de la función de densidad f(x) para los distintos valores del parámetro de forma: δ. En esta tabla se observa la asimetría de f(x) a medida que δ se separa de 3,6 y que es simétrica alrededor de este valor.

En $\delta = 3{,}6$ el coeficiente de curtosis vale 2,72, lo que indica que la f(x) Weibull es menos apuntada que la correspondiente función de densidad de una Normal de igual medida y varianza; sin embargo, no se encuentra mejor aproximación para otros valores de δ, para los que se dispara el valor del coeficiente de curtosis.

Otro dato que nos determina la buena aproximación de Weibull a la Normal en $\delta = 3{,}6$, es que el comportamiento de la distribución Weibull se semejante al de la Normal en el sentido de que el valor de la media se aproxima al de la mediana, pues se tiene:

media para W (1, 3,6, 0) = 0,9011
mediana para W (1, 3,6, 0) = $(\ln 2)^{1/3,6}$ = 0,9020

Esta aproximación queda expresada gráficamente en la figura 1.

TABLA II
Coeficientes de «forma» en la distribución W (1, δ, 0)

δ	Media $\Gamma(1+\frac{1}{\delta})$	Desv. típica	γ_1	γ_2	Signo de asimetría	Apuntamiento
1,2	0,9407	0,7872	1,52	6,24		Más
1,4	0,9114	0,6596	1,20	4,84		apuntada
1,6	0,8966	0,5737	0,96	4,04	Asimetría	que la
1,8	0,8893	0,5112	0,78	3,56		Normal de
2,0	0,8862	0,4633	0,63	3,25		igual media
2,2	0,8856	0,4249	0,51	3,04		y varianza
2,4	0,8865	0,3935	0,40	2,91		
2,6	0,8882	0,3670	0,32	2,82	positiva	
2,8	0,8905	0,3443	0,24	2,76		Menos
3,0	0,8930	0,3245	0,17	2,73		apuntada
3,2	0,8957	0,3072	0,11	2,71		que la
3,4	0,8984	0,2918	0,05	2,71		Normal de
3,6	0,9011	0,2780	0,00	2,72	SIMETRICA	igual media
						y varianza
3,8	0,9038	0,2656	—0,04	2,73		
4,0	0,9064	0,2543	—0,09	2,75	asimetría	
↓	↓	↓	decrece	crece		
n	1	0			negativa	

d) Estimación de parámetros.—La utilización de los métodos clásicos de estimación (max-verosímil, momentos, etc.) adquiere una enorme dificultad en las distribuciones triparamétricas, y que muchas veces sólo es salvable con la utilización de máquinas calculadoras; es por ello que aquí vamos a abordar otros métodos más sencillos y de resultados satisfactorios.

— Estimación máximo-verosímil mediante el uso de estimadores iniciales.— Tenemos la distribución W (α, δ, ξ) y queremos estimar los parámetros α, δ y ξ; vamos a utilizar un estimador inicial de ξ; este va a ser el obtenido por Dubey[3] a partir de observaciones ordenadas, esto es: $\xi = \frac{X_{(1)}\,X_{(k)} - X_{(j)}^2}{X_{(1)} + X_{(k)} - 2\,X_{(j)}}$ donde se verifica: $X_{(1)} < X_{(j)} < (X_{(1)}\,X_{(k)})^{1/2}$

de esta forma, el sistema de derivadas parciales que plantea el método del máximo-verosímil queda reducido a dos ecuaciones, a partir de las cuales es fácil obtener los valores de $\hat{\alpha}$ y $\hat{\delta}$ en función de $\hat{\xi}$, que maximizan la función de verosimilitud, obteniendo:

$$\hat{\alpha} = [\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \hat{\xi})^{\hat{\delta}}]^{1/\hat{\delta}}$$

$$\hat{\delta} = [(\sum_{i=1}^{n} (X_i - \hat{\xi})^{\hat{\delta}} \ln (X_i - \hat{\xi}) (\sum_{i=1}^{n} (X_i - \hat{\xi})^{\hat{\delta}})^{-1} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln (X_i - \hat{\xi})]$$

a partir de la ecuación: $\frac{\partial}{\partial \xi} \ln [f (X_1 ..., X_n); \alpha, \delta, \xi] = 0$, se deduce que $\hat{\xi}$ ha de verificar:

$$(\hat{\delta} - 1) \sum_{i=1}^{n} (X_i - \hat{\xi})^{-1} = \frac{\hat{\delta}}{\hat{\alpha}} \sum_{i=1}^{n} (\frac{X_i - \hat{\xi}}{\hat{\alpha}})^{\hat{\delta} - 1}$$

Si el valor $\hat{\xi}$, considerado como estimador inicial de ξ, satisface el sistema de derivadas parciales y además $\hat{\xi}$ es mayor que min $(X_1, X_2 ..., X_n)$, entonces el $\hat{\xi}$ de partida es considerado como estimador máximo-verosímil de ξ.
Si, por el contrario, $\hat{\xi}$ no es mayor que min $(X_1, X_2 ..., X_n)$, entonces el estimador máximo-verosímil de ξ es precisamente el estadístico: min $(X_1, X_2 ..., X_n)$.

Los estimadores máximo-verosímiles de α y δ no son insesgados, pero existen tablas que dan para cada tamaño muestral el factor de «insesgo» que transforma el estimador máximo-verosímil: $\hat{\lambda}$ de λ en el estimador $\lambda_i = \hat{\lambda}\, b(n)$ que es insesgado (ver tablas de Thoman)[9].

Así, para el parámetro δ se tiene confeccionada la tabla III, donde puede observarse cómo el factor b(n) va aproximándose a la unidad a medida que crece n, lo que quiere decir que $|\hat{\delta} - \delta_i| < \epsilon$ a partir de un término en adelante, lo que, en definitiva, implica que $E(\hat{\delta}) - \delta \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ y puesto que $\hat{\alpha}$ es función directa de $\hat{\delta}$, le ocurre lo mismo, esto es que los estimadores $\hat{\alpha}$ y $\hat{\delta}$ son estimadores máximo-verosímiles asintóticamente insesgados; son además asintóticamente eficientes, como se podrá observar a partir de la matriz de información:

$$I(\alpha, \delta) = \begin{bmatrix} -E(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \alpha \partial \alpha}), & -E(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \alpha \partial \delta}) \\ -E(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \alpha \partial \alpha}), & -E(\frac{\partial^2 \ln L}{: \delta \partial \delta}) \end{bmatrix} = I\,i\,j$$

Resolviendo I_{11}, I_{12}, I_{21} e I_{22} nos queda:

$$I_{11} = \frac{n\,\delta^2}{\alpha^2}, I_{12} = I_{21} = 0{,}4227 \frac{n}{\alpha}$$

para el cálculo de la expresión I_{22} debe tenerse en cuenta el resultado obtenido por Breiman[1]:

$$\int_0^\infty (1 + \ln u - u \ln u)^2 e^u\, du \simeq 1{,}8236$$

por lo que $I_{22} = 1{,}8236 \frac{n}{\delta^2}$; resultando la matriz de información:

$$I(\alpha, \delta) = \begin{bmatrix} \frac{\delta^2 n}{\alpha^2} & \frac{0{,}4227\, n}{\alpha} \\ \frac{0{,}4227\, n}{\alpha} & \frac{1{,}8236\, n}{\delta^2} \end{bmatrix}$$

la matriz de varianzas-covarianzas será:

$$Vij = (I(\alpha, \delta))^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1{,}1086\, \alpha^2}{n\, \delta^2} & \frac{0{,}2570\, \alpha}{n} \\ \frac{0{,}2570\, \alpha}{n} & \frac{0{,}6079\, \delta^2}{n} \end{bmatrix}$$

Se observa como la varianza asintótica de un estimador insesgado de α es $1{,}1086 \frac{\alpha^2}{n\,\delta^2}$, que tiende a cero cuando tiende n a infinito; de aquí que α sea asintóticamente eficiente.

Lo mismo para $\hat{\delta}$, ya que los estimadores insesgados de δ tienen por varianza asintótica la expresión: $0{,}6079 \frac{\delta^2}{n}$, que tiende a cero cuando n lo hace hacia infinito.

TABLA III
Factores de insesgo para el estimador $\hat{\delta}$ de W (α, δ, ξ)

n	b (n)	n	b (n)	n	b (n)	n	b (n)
5	0,669	18	0,923	42	0,968	66	0,980
6	0,752	20	0,931	44	0,970	68	0,981
7	0,792	22	0,938	46	0,971	70	0,981
8	0,820	24	0,943	48	0,972	72	0,982
9	0,842	26	0,947	50	0,973	74	0,982
10	0,859	28	0,951	52	0,974	76	0,983
11	0,872	30	0,955	54	0,975	78	0,983
12	0,883	32	0,958	56	0,976	80	0,984
13	0,893	34	0,960	58	0,977	85	0,985
14	0,901	36	0,962	60	0,978	90	0,986
15	0,908	38	0,964	62	0,979	100	0,987
16	0,914	40	0,966	64	0,980	120	0,990

— **Estimación por método de los momentos utilizando el coeficiente de asimetría.**—A partir del coeficiente de asimetría:

$$\gamma_1 = \frac{\Gamma(1 + 3/\delta) - 3\,\Gamma(1 + 2/\delta)\,\Gamma(1 + 1/\delta) + 2\,\Gamma^3(1 + 1/\delta)}{[\Gamma(1 + 2/\delta) - \Gamma^2(1 + 1/\delta)]^{3/2}}$$

γ_1 depende solamente de δ, luego δ queda determinada numéricamente, y este número será su estimador.

La estimación de α la podemos hacer a partir de la desviación muestral y mediante la sustitución de δ por su estimador calculado arriba.

La estimación de ξ se hace fácilmente a partir de la estimación de los otros dos parámetros, igualando la media muestral y poblacional como en los casos comunes de estimación por este método.

— Otras técnicas de estimación han sido tratadas por Gumbel[5] y Miller and Freund[7], utilizando estadísticos ordenados. Menon[6] plantea la estimación de los parámetros de la distribución Weibull a partir de la distribución de log X.

Un interés importante desde el punto de vista práctico tiene la estimación gráfica realizada por A. Fz. de Trocóniz[10], mediante el uso de papel probabilístico.

2. *Método Crámer[2] en el cálculo de la distribución asintótica del estadístico min $(X_1, X_2..., X_n)$*

Cuando una variable aleatoria X sigue una distribución cuya función viene representada por potencias de una distribución Normal o similares, la búsqueda de la distribución del estadístico min $(X_1, X_2..., X_n)$ presenta grandes dificultades, sin embargo, es superable usando técnicas como la utilizada por Crámer, que alcanza mejores resultados cuanto mayor es el tamaño de la muestra. Define Crámer una sucesión de variable aleatorias $\eta_n = n\,F_X(X_{(1)})$, llamando $\tau_n(u) = P(\eta_n \leqslant u)$ con $0 \leqslant u \leqslant n$ queda: $\tau_n(u) = F_{X(1)}[F_X^{-1}(\frac{u}{n})]$ y puesto que $F_{X(1)}(x) = 1-(1-F_X(x))^n$, tenemos que:

$$\tau_n(u) = 1-(1-F_X F_X^{-1}(\frac{u}{n}))^n$$

y esto es cierto para toda distribución $F_X(x)$

Sea $\tau(u) = \lim(1-(1-\frac{u}{n}))^n = 1-e^u;\ u \geqslant 0$

por tanto, la sucesión de distribuciones $\tau_n(u)$ converge a $1 - e^{-u}$, luego la sucesión de variables aleatorias $\eta_n = n\,F_X(X_{(1)})$ converge en distribución a una variable aleatoria η, cuya función de distribución es: $1-e^u;\ u \geqslant 0$

Puesto que $\eta_n = n\,F_X(X_{(1)})$ converge en distribución a η, se tiene que $X(1)$ converge en distribución a la variable aleatoria $Y = F_X^{-1}(\eta/n)$ siendo η la v. a. definida anteriormente por su función de distribución, de este modo la distribución límite del estadístico $X(1)$ está dada por la de la variable Y.

3. *Proceso estocástico Weibull*

Considero un proceso representado por N (t,w) cumpliendo las siguientes hipótesis:

a) Que $N(t, w) \geqslant 0$, toma valores enteros.

b) Que N (t,w) crece mediante saltos de valor la unidad y que el número de saltos es finito, pero no tiene por qué estar acotado.

c) Que el comportamiento de N (t,w) en un determinado instante no viene determinado por lo ocurrido anteriormente.

d) Que el número de saltos de N (t,w) no está igualmente distribuido para intervalos de tiempo de la misma amplitud, sino que depende, además, de los valores inferior y superior del intervalo, y que además dicha dependencia viene expresada por una función de t de la forma:

Probabilidad de salto en $(t, t+\Delta t) = (\delta t^{\delta-1}\theta)\Delta t + O\Delta t$ donde δ y θ son características de cada proceso.

Este tipo de procesos es claramente diferente del de Poisson, como puede verse en Parzen[8], y por sus características obedece a los procesos cuyos saltos (fallos) depende estrechamente de t (tiempo en funcionamiento).

A este tipo de procesos estocásticos les llamamos de Weibull por el resultado que veremos en el apartado siguiente, y se presenta en determinados sistemas o máquinas en funcionamiento, constituidos por unidades susceptibles de fallo por deterioro u otras causas relacionadas con el transcurso del tiempo.

DISCUSION Y RESULTADOS

1. *La distribución Weibull es aplicable como distribución asintótica del estadístico min $(X_1, X_2..., X_n)$*

Es conocido el carácter reproductivo de la distribución Weibull, pero ahora afirmamos más: que la distribución Weibull puede aparecer como distribución asintónica del estadístico $X_{(1)} = \min(X_1, X_2..., X_n)$ aun cuando las variables X_i no sigan una distribución Weibull.

En efecto, aplicando el método Crámer, y teniendo en cuenta las variables aleatorias cuya función de densidad difiere de la Weibull solamente en el término exponencial:

$e-(\frac{X-\xi}{\alpha})^\delta$, esto es, que tiene función de densidad:

$$f(x) = \frac{\delta}{\alpha}\left(\frac{X-\xi}{\alpha}\right)^{\delta-1};\ \xi \leqslant X \leqslant \alpha+\xi;\ \alpha, \delta > 0$$

tenemos la sucesión $\eta_n = n\left(\frac{X_{(1)}-\xi}{\alpha}\right)^\delta$, sabemos que $\eta_n \xrightarrow{dist} \eta$ que su función de distribución es $F\eta(x) = 1 - e^{-x}$; $x \geqslant 0$, por tanto la distribución límite de min $(X_1, X_2..., X_n)$ será la distribución de la variable aleatoria:

$$Y = F^{-1}_X(\eta/n) = \alpha(\eta/n)^{1/\delta} + \xi$$

por tanto, se tiene: $F_{X(1)}(x) = 1 - e^{-n(\frac{X-\xi}{\alpha})^{\delta}}$ función de distribución que corresponde a la distribución Weibull de parámetros $(\alpha n^{-1/\delta}, \delta, \xi)$

2. *La distribución Weibull es aplicable como distribución de la v. a. «tiempo de fallo» en un proceso Weibull*

Si denominamos por N_t la v. a. que expresa el número de fallos en el intervalo (0, t) y denominamos $P_k(t + \Delta t)$ a la probabilidad de k fallos en el intervalo $(0, t + \Delta t)$ $P_k(t + \Delta t)$ será la probabilidad de que $N_{t+\Delta t}$ sea = k, ahora bien:

$P_k(t + \Delta t) = P$ (k fallos en (0, t) ninguno en $(t, t + \Delta t)$ + P (k − 1 fallos en (0, t) un fallo en $(t, t + \Delta t)$)

teniendo en cuenta la función que define la probabilidad de fallo en $(t, t + \Delta t)$ y despreciando los términos superiores de Δt, nos queda:

$$P_k(t + \Delta t) = P_k(t)\,[1 - (\delta t^{\delta-1}\theta);\ \Delta t] + P_{k-1}(t)\,[(\delta t^{\delta-1}\theta)\ \Delta t)]$$

pasando $P_k(t)$ al primer miembro, dividiendo por Δt y tomando límites cuando $\Delta t \to 0$ tenemos que

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_k(t + \Delta t) - P_k(t)}{\Delta t} = P_{k-1}(t) - P_k(t)\,\delta\,\theta\, t^{\delta-1} = P'_k(t)$$

resolviendo esta ecuación diferencial resulta:

$$P_k(t) = e^{-\theta t\delta}\ \frac{(\theta t^{\delta})^k}{k!} = P(N_t = k)$$

la función de distribución de la v. a. «tiempo de fallo»: T será: $P(T \leqslant t) = 1 - P(N_t = 0) = 1 - e^{\theta t^{\delta}}$

función de distribución que corresponde a una distribución Weibull de parámetros $(\alpha = \theta^{-1/\delta}, \delta, \xi = 0)$

3. *La distribución Weibull es aplicable en teoría de la fiabilidad*

Es interesante observar la importancia que el estadístico min $(X_1, X_2..., X_n)$ tiene en los procesos en cadena, en los que la robustez de dicha cadena se reduce a la robustez del eslabón más débil.

En el punto 1 de este apartado encontramos la distribución Weibull como distribución límite de min $(X_1, X_2..., X_n)$ cuando la función de densidad de las v. a. X_i eran de una forma determinada, cabe, por tanto, esperar que la distribución Weibull aparezca asociada, en problemas de fiabilidad, al tiempo de fallo que corresponde a una razón de riesgo representada por una función del tipo de la función de densidad de las v. a. arriba indicadas. En efecto, si tenemos un sistema cuya razón de riesgo es del tipo:

$$h(t) = \frac{\delta}{\alpha}\left(\frac{t-\xi}{\alpha}\right)^{\delta-1};\ \alpha, \delta > 0;\ \xi \geqslant 0;\ t \geqslant \xi$$

busquemos la distribución de la v. a. «tiempo de fallo».

Por definición de razón de riego se tiene:

$$h(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)} = \frac{\frac{\partial}{\partial t} F(t)}{1 - F(t)}$$

integrando entre cero y x resulta que:

$$\ln(1 - F(x)) = -\int_0^x h(t)\,dt$$

por tanto: $f(x) = h(x)\, e^{-(\frac{X-\xi}{\alpha})^{\delta}} = \frac{\delta}{\alpha}\left(\frac{X-\xi}{\alpha}\right)^{\delta-1} e^{-(\frac{X-\xi}{\alpha})^{\delta}}$

función de densidad de la v. a. «tiempo de fallo», que corresponde a una distribución $W(\alpha, \delta, \xi)$, como esperábamos.

RESUMEN

1. La distribución Weibull es la distribución asintótica del min $(X_1, X_2..., X_n)$, cuando las v. a. X_i siguen una distribución con función de densidad:

$$f(x) = \frac{\delta}{\alpha}\left(\frac{X-\xi}{\alpha}\right)^{\delta-1};\ \xi \leqslant X \leqslant \alpha + \xi;\ \alpha, \delta \geqslant 0$$

por tanto, es aplicable en el cálculo de la vida de un sistema de componentes en cadena, donde la vida de cada componente obedece al tipo de distribución indicada.

2. La distribución Weibull es utilizada en fiabilidad como distribución de la v. a. «tiempo de fallo», para funciones de riesgo del tipo:

$$h(t) = \frac{\delta}{\alpha}\left(\frac{t-\xi}{\alpha}\right)^{\delta-1};\ \alpha, \delta > 0;\ \xi \geqslant 0;\ t \geqslant \xi$$

que puede ser creciente, decreciente o constante en $(t - \xi)$, según que $\delta > 1$, $\delta < 1$ o $\delta = 1$, por tanto, la distribución Weibull amplía el campo de utilización de la distribución exponencial, sólo reducida a los casos de razón de riesgo constante. Lo expuesto para teoría de fiabilidad, puede trasladarse a problemas de supervivencia, ver Cross[4].

3. La distribución Weibull va asociada a la v. a., que indica el instante de salto en un proceso Weibull, por tanto, es utilizable en todo proceso real y concreto que cumple las hipótesis de proceso estocástico Weibull.

WEIBULL DISTRIBUTION. CHARACTERIZATION AND SOME APPLICATIONS

SUMMARY

1. The Weibull distribution is the asyntotic distribution of the min ($X_1, X_2 ..., X_n$). When the random variables Xi follow a distribution with function of density:

$$f(x) = \frac{\delta}{\alpha}\left(\frac{X-\xi}{\alpha}\right)^{\delta-1} \quad ; \xi \leqslant x \leqslant \alpha + \xi; \alpha, \delta \geqslant 0$$

In this way is applicable to the calculation of the life of a structure of components in chain, where life of each of the components responde to the type of distribution above mencioned.

2. The Weibull distribution is used in reability as distribution of the «time of failure» in functions of risk of the type:

$$h(t) = \frac{\delta}{\alpha}\left(\frac{t-\xi}{\alpha}\right)^{\delta-1} \quad ; \alpha, \delta > 0; \xi \geqslant 0; t \geqslant \xi$$

wich can be increasing, decreasing or unchanging in $(t-\xi)$ depending on $\delta > 1$, $\delta < 1$ or $\delta = 1$, so we could say that the Weibull distribution enlarges the scope of use of the exponential distribution only reduced to the cases of a constant rate of risk. What has been said for the theory of the reability can be transferred to the problems of survival, see Gross[4].

3. The Weibull distribution goes associated to the aleatory variable which shows the instant of jump to a Weibull process, in this way is used in any real and concrete process which fulfils the hypothesis of Weibull stocastic process.

BIBLIOGRAFIA

1) BREIMAN, L. (1969).—*Statistics whit a view toward applications.* Houghton Miffliu company. Boston: 93-94.

2) CRAMER, H. (1953).—*Métodos matemáticos de la Estadística.* Aguilar: 424-433.

3) DUBEY, S. D. (1967).—On Some Permisible Estimators of the location Parameter of the Weibull and Certain Other Distributions. Technometrics, **9:** 293-307.

4) GROSS, A. J. (1975).—*Survival Distributions: Reliability Aplications in the Biomedical Sciences.* John Wiley and Sons. London: 10-13.

5) GUMBEL, E. J. (1958).—*Statistics of Extremes.* Columbia University Press. New York.

6) MENON, M. V. (1963).—Estimation of the Shape and Scale Parameters of the Weibull Distribution. *Technometrics,* **5:** 175-182.

7) MILLER, I., and FREUND, J. E. (1965).—*Probability and Statistics for Engineers.* Prentice-Hall Inc. Englewood Cliffs, New Jerssy.

8) PARZEN, E. (1972).—*Procesos estocásticos.* Paraninfo. Madrid: 143-148.

9) THOMAN, D. R.; BAIN, L. J., and ANTLE, C. E. (1969).—Inference on the Parameters of the Weibull Distribution. *Technometrics.* **II:** 445-460.

10) TROCONIZ FERNÁNDEZ, A. (1971).—*Introducción a las teorías de las probabilidades. Estadística clásica y bayesiana.* Imprenta Bona. Bilbao: C23,1-C23,5.