FRACTAL Y DIMENSION

Juan José Montesinos

1. Introducción

El objetivo de este artículo es explicar a los lectores, no necesariamente formados en matemáticas, los aspectos más importantes de una nueva "geometría", o mejor, los hechos más relevantes que se derivan del estudio de objetos que, por su irregularidad, habían sido considerados hasta ahora poco útiles para servir como modelos matemáticos.

El autor de esta nueva "ciencia", Benoit B. Mandelbrot, en libros publicados en 1975 (Les objets fractals. Forme, hasard et dimension, París: Flammarion), 1977 (Fractals. Form, Chance and Dimension, Nueva York: W. H. Freeman & Co.) y 1982 (The Fractal Geometry of Nature, Nueva York: W. H. Freeman & Co.), parte de que la Naturaleza presenta objetos que por su fragmentación e irregularidad no pueden ser asociados con los otros bien conocidos de la Geometría euclídea.

Para suplir esa carencia, introduce una geometría que establece un tipo de clasificación de la irregularidad, usando en algunos casos estructuras matemáticas que habían sido ya estudiadas como curiosidades o dejadas de lado por su patología.

Desde hace unos años es difícil encontrar una publicación científica en la que no se encuentre alguno de los nuevos conceptos que ha producido esta disciplina. Con la sorpresa añadida de que esto sucede en campos tan diversos como Mecánica Cuántica, Dinámica, Polímeros, Biología, etc.

2. Fractal

El ente nuevo, que es el punto de partida de todas estas ideas, se denomina "fractal", término reciente que quiere sugerir la idea de fragmentado. He aquí una definición:

> "un fractal es un conjunto para el cual la dimensión de Haussdorf es mayor que su dimensión topológica".

El concepto de dimensión topológica parece bastante fácil de entender intuitivamente: una recta tiene una dimensión 1, el plano dimensión 2 y el espacio físico dimensión 3. Generalmente se admite que una configuración es n-dimensional si se necesitan al menos n parámetros para describir sus puntos.

Esta definición quedó como mínimo en entredicho cuando Cantor encontró una correspondencia uno a uno entre los puntos de una línea y los puntos de un plano, y Peano una aplicación continua entre un intervalo y un cuadrado completo. Lo primero acababa con la creencia de que un plano tiene más puntos que una línea, y lo segundo, que la dimensión fuese un invariante bajo transformaciones continuas.

Brouwer construyó una nueva definición de dimensión topológicamente invariante que, para una clase muy amplia de espacios, es equivalente a la que se usa hoy.

Menger y Urysohn llegaron independientemente a una nueva definición de dimensión (a partir de la idea de Brouwer) que básicamente se formula así:

a) "El conjunto vacío tiene dimensión -1."

b) "La dimensión de un espacio es el menor entero n para el que cualquier entorno arbitrariamente pequeño de un punto tiene una frontera de dimensión menor que n."

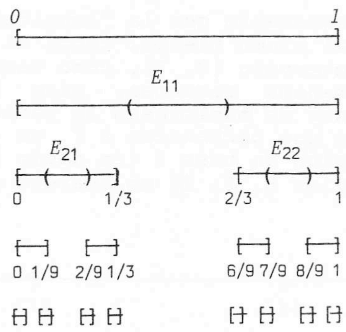
Esta nueva definición asigna a las configuraciones clásicas la misma dimensión que la esperada intuitivamente y, al mismo tiempo, es capaz de asignar a cualquier conjunto, por extraño que sea, en un espacio euclídeo, un número <u>entero</u> que tiene las características de una dimensión.

Sin embargo, considerar sólo números enteros ha resultado ser insuficiente. Vamos a estudiar ahora, con cierto detenimiento, el Conjunto Ternario de Cantor. Este conjunto, conocido ya a principios de siglo, es un buen ejemplo que sirve para apreciar la necesidad de admitir números <u>no enteros</u> como dimensión de un conjunto, si se quieren describir sus aspectos peculiares.

Se verá cómo siendo una parte del intervalo [0, 1] tiene tantos puntos como él y, sin embargo, se le asocia una dimensión topológica 0, como si de un conjunto discreto se tratara. Por último, este conjunto pondrá de manifiesto la coincidencia entre los valores que se obtienen de dos definiciones de dimensión de un conjunto muy distintas entre sí, y tan separadas en el tiempo como 1919 y 1976.

<u>El Conjunto Ternario de Cantor</u>:

Se obtiene de la manera siguiente:



El intervalo $[0, 1]$ se divide en tres partes: $[0, 1/3]$, $(1/3, 2/3)$, $[2/3, 1]$, quedándonos con los dos extremos de longitud $1/3$ cada uno. Se vuelven a dividir los intervalos en tres partes y una vez más se prescinde de las terceras partes que están en el medio. Después de hacer lo mismo n veces, quedan 2^n intervalos de longitud $1/3^n$ cada uno. O de otra manera: en la primera operación hemos suprimiido un intervalo E_{11} abierto de longitud $1/3$, después dos: E_{21} y E_{22}, de longitud $1/3^2$ y en la n-sima 2^{n-1} intervalos abiertos de longitud $1/3^n$.

Llamamos

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{2^{n-1}} E_{nj}$$

a la unión de todos estos abiertos que hemos retirado después de infinitos pasos. El Conjunto de Cantor se define como la diferencia $T = [0, 1] - A$ (es decir, la unión de los segmentos que quedan cuando el proceso de ir retirando las terceras partes intermedias se hace infinitas veces).

La medida de este conjunto T es cero, porque al intervalo de longitud 1 le quitamos el conjunto A de medida 1 también.

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{2^{n-1}} 1/3^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n} = \frac{1}{2} \sum (2/3)^n$$

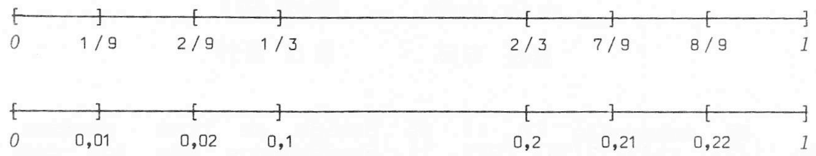
$$\mu(A) = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \dots \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2/3}{1/3} = 1 ,$$

lo que implica que

$$\mu(T) = 0.$$

No parece razonable que la "longitud" de este conjunto sea cero y, al mismo tiempo, tenga el mismo "número" de puntos que el intervalo [0, 1], como vamos a ver ahora. Se hace no de una manera rigurosa, sino intuitiva con el unico fin de poner de manifiesto la paradoja.

Los números que pertenecen a T se caracterizan por que en su expresión en base 3 (es decir $0,a_1 a_2 a_3 \dots$, donde a_i sólo puede valer 0, 1, 2) no aparece más que 0 ó 2.



Por ejemplo, al quitar el abierto (1/3, 2/3) ó lo que es igual (0,1, 0,2) en base 3, se eliminan los números de la forma $0,1\,a_2 a_3 \dots$. Al quitar (1/9, 2/9) ó (0,01, 0,02) se prescinde de todos aquellos números que tienen la forma $0,01a_3 a_4 a_5 \dots$.

Consideremos de nuevo [0, 1]:
A cada x perteneciente a [0, 1] y expresado en base 2, $x = 0,\ x_1 x_2 x_3 \dots$, donde x_i sólo puede valer 0 ó 1, se le asocia un número y perteneciente a T, así:

$$x \to y \quad \begin{cases} \text{si } x_i = 0, & y_i = 0 \\ \text{si } x_i = 1, & y_i = 2 \end{cases}$$

Por ejemplo: si $x = 0,0101110$ su correspondiente y sería:
$y = 0,0202220$.

Según esta construcción, el subconjunto T de [0, 1] tiene tantos puntos como el conjunto que lo contiene.

Se define a continuación una medida de conjunto que recoge las peculiaridades del propio conjunto.

3. Dimensión de Haussdorf

El segundo concepto que se presenta en la definición de fractal es la dimensión de Haussdorf de un conjunto.

Para medir un conjunto A se propone el siguiente método: recubrir todos sus puntos mediante colecciones $\{B_i\}$ de círculos o esferas en general, con diámetros necesariamente más pequeños que un número dado ε. Después, dado un número α para cada recubrimiento, se calcula $\sum_i$(diam. $B_i)^\alpha$ y se busca dónde se alcanza el ínfimo:

$$S_{\alpha,\varepsilon}(A) = \text{infim. } \sum_i (\text{diam. } B_i)^\alpha.$$

Si se toma ε más pequeño, la medida del conjunto A no puede disminuir porque de encontrar un recubrimiento que hiciera esa suma más pequeña, con menores radios, ya habría sido tomada en cuenta. Por ello existe límite (finito o infinito) cuando $\varepsilon \to 0$:

$$S_\alpha(A) = \lim. S_{\alpha,\varepsilon}(A).$$

$S_\alpha(A)$ es la medida α-dimensional del conjunto.

Así, pues, para cada número α tenemos una medida del conjunto A. No es difícil demostrar que hay un único número α^* para cada conjunto A que satisface:

(1) $\alpha < \alpha^*$ $\quad S_\alpha(A) = \infty$

(2) $\alpha > \alpha^*$ $\quad S_\alpha(A) = 0.$

Este número α^* es llamado "dimensión de Haussdorf del conjunto A".

La propiedad primera significa que si se mide un conjunto usando cualquier exponente menor que el adecuado, siempre la medida es ∞, y la segunda, que si se utiliza un valor mayor, la medida es nula.

Este resultado no es más que la afirmación de que los conjuntos deben ser medidos según "reglas" adaptadas a las características del propio conjunto; de lo contrario se obtienen valores triviales. Esto último ocurre en conjuntos bien conocidos: así la longitud de un cuadrado será infinita (situación equivalente a (1)) y el volumen de un cuadrado, nulo (situación equivalente a (2)).

El número α no es necesariamente un entero y su importancia está en que permite apreciar en conjuntos "especiales" el grado de su irregularidad. Cuando se aplica a conjuntos normales, este número α resulta ser el número entero que se conoce como su dimensión.

Haussdorf demostró en 1919 que la dimensión del Conjunto Ternario de Cantor es

$$\log 2/\log 3 = 0{,}6309.$$

Como la dimensión topológica del mismo es cero, se concluye que este conjunto de Cantor es un ejemplo de fractal.

4. La dimensión de semejanza

Líneas de costa

El origen del estudio de la irregularidad parece ser que surgió cuando el matemático antes citado, B. Mandelbrot, se encontró con los trabajos de otro científico, Lewis F. Richardson, sobre la longitud de una línea de costa medida entre dos puntos fijos. Para ello, Richardson toma una longitud unidad fija ε y la va llevando a lo largo de la costa, con el fin de aproximar ésta por una línea quebrada.

El número de veces que se coloca la unidad, multiplicado por su tamaño, es $L(\varepsilon)$ y vendría a ser una estimación de la "verdadera" longitud de la línea de costa. Parece lógico esperar que a medida que la longitud de la unidad se hiciera menor y, por tanto, esta línea quebrada "explicara" mejor la longitud total, ésta, $L(\varepsilon)$, se mantendría en unos valores razonablemente aproximados. Lo realmente observado fue que la longitud esperada crece sin límite.

Encontró que hacía falta colocar $F\cdot\varepsilon^{-D}$ veces la unidad ε; por lo tanto, la longitud de la poligonal era:

$$L(\varepsilon) \simeq F\cdot\varepsilon^{-D}\cdot\varepsilon = F\cdot\varepsilon^{1-D}$$

que tiene límite ∞ cuando $\varepsilon \to 0$.

Esta función para representar la longitud entre dos puntos debería ser independiente de la unidad empleada. El valor D fraccionario parece que depende de la línea de costa elegida.

Veamos la interpretación que hace Mandelbrot de ese exponente D. Para medir la longitud de una línea poligonal se suman las longitudes de sus lados sin ninguna transformación; para medir la superficie de una figura se cubre ésta con cuadrados y se suman sus áreas, elevando el lado del cuadrado a 2, que es su dimensión.

Por todo ello, si se necesitan $N = F \cdot \varepsilon^{-D}$ lados en la poligonal que se ajusta a la línea de costa, elevemos la unidad a una "potencia/dimensión" adecuada D para que la longitud aproximada sea:

$$L(\varepsilon) = F \cdot \varepsilon^{-D} \cdot \varepsilon^{D} = F$$

y, por tanto, no dependa de la unidad de longitud empleada.

Si no se utiliza una D adecuada, sino $d < D$ menor, la longitud será:

$$F \cdot \varepsilon^{-D} \cdot \varepsilon^{d} = F \cdot \varepsilon^{-D+d} = F / \varepsilon^{D-d} \to \infty$$

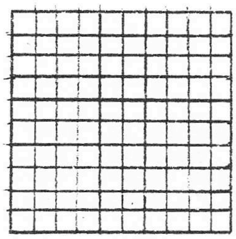
cuando $\varepsilon \to 0$ disminuye.

Por otra parte, si $d > D$, la longitud $F \cdot \varepsilon^{d-D}$ tendería a cero.

Esta idea está muy próxima a aquella propiedad que encontramos en la definición de α-medida de Haussdorf. El exponente adecuado era aquel en el que se cumplía lo siguiente: para valores menores que él, la medida que se obtiene es infinita; para los mayores que él, la medida se hace nula.

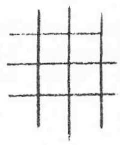
Todo lo anterior obliga a admitir números fraccionarios como dimensiones, y como los valores de D obtenidos experimentalmente superan a 1, que es la dimensión topológica de la curva, se concluye diciendo que una línea de costa es un ejemplo de fractal.

Autosemejanza

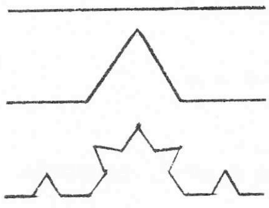


Se dice que una figura es autosemejante cuando puede ser dividida en partes, de modo que cada una sea semejante a la figura completa.

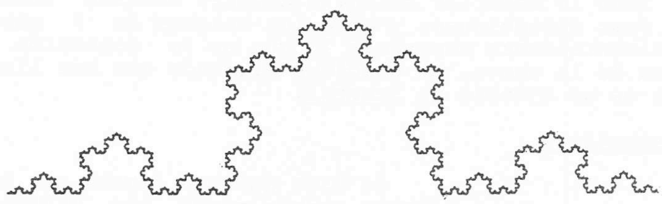
Como ejemplo de esto puede servir aquel famoso cubo de Rubik formado por pequeños cubos. Hay un método para lograr figuras semejantes: tomemos un cuadrado unidad. Si se divide cada lado en 10 partes, cada uno de los 100 cuadrados es semejante al inicial. Podemos seguir dividiendo para obtener cuadrados más pequeños y con ayuda de un microscopio seguir el proceso. Si en cada paso ajustamos convenientemente el aumento del microscopio, tendremos en el objetivo siempre el mismo dibujo, aunque en cada paso el cuadrado es cien veces menor.



Algo parecido ocurre con las escalas de los mapas cuando nos fijamos en la línea de costa. A escala $1/10^6$ un centímetro de costa vendrá dibujado por una curva muy irregular. A medida que mejoramos la escala tendremos mejor información sobre la geografía, pero sobre el mapa un centímetro de costa es una curva tan parecida a las anteriores, como los cuadrados hechos en cascada.



Por el procedimiento reiterativo de antes formaremos un modelo de línea de costa. Se toma un segmento de longitud unidad y se divide en tres partes. Se quita el segmento central y se sustituye por dos idénticos formando ángulo de 60°. La longitud es ahora 4/3 de la inicial. Si se continúa este método de cambiar cada segmento rectilíneo por la forma _/_ , la longitud resultante es 4/3 de la anterior y la curva límite, llamada curva de Koch, tendrá longitud infinita.



Curva de Koch

Mandelbrot afirma que si se mide exactamente la longitud de la curva, se encuentra que hay una relación del tipo $L(\varepsilon) = \varepsilon^{1-D}$ formalmente idéntica a la que obtuvo Richardson de forma empírica. Para esta curva $D = \log 4/\log 3$, según se comprueba a continuación.

Inicialmente $\varepsilon = 1$ y $L(\varepsilon) = 1$, y en cada paso

$$\varepsilon \to \varepsilon/3 \qquad L(\varepsilon) \to L(\varepsilon/3) = \frac{4}{3} L(\varepsilon)$$

Si se admite la forma $L(\varepsilon) = \varepsilon^{1-D}$, entonces:

$$(\varepsilon/3)^{1-D} = \frac{4}{3}\varepsilon^{1-D} \qquad 3^{D-1} = 4/3$$

$$3^{D} = 4 \qquad D = \log 4/\log 3$$

Dimensión de semejanza

Se expone a continuación la fórmula de una dimensión que es únicamente aplicable a conjuntos autosemejantes. Se deducirá de las relaciones geométricas existentes entre figuras bien conocidas, después se admitirá como válida para cualquier figura autosemejante y, por último, se aplicará a dos conjuntos ya estudiados: el Conjunto Ternario de Cantor y la Curva de Koch. Nos encontraremos con que el valor de esta dimensión de autosemejanza coincide con los valores asignados a través de la dimensión de Haussdorf.

Definición:

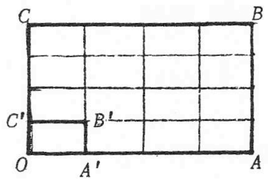
"Un conjunto S es autosemejante con relación a una razón r y a un entero N si se puede poner como unión de N subconjuntos disjuntos, cada uno de ellos congruente con $r(S)$".

El intervalo $[0, x]$ se puede descomponer en N subintervalos de longitud $1/N$ siendo cada uno de ellos congruente con el intervalo $r[0, x] = [0, x/N]$ transformando el inicial, mediante la semejanza:

$0 \qquad x/N \qquad x$

$[\!-\!-\!]\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!]$ $\qquad x \to r(x) = x/N$

De igual manera, el rectángulo $OABC$ puede ser descompues-



to en N rectángulos sin más que descomponer cada lado en $\sqrt{N} = b$ partes. Se define la semejanza $r\ (x,y) = (x/b, y/b)$ que transforma el rectángulo $OABC$ en el $OA'B'C'$.

Los N rectángulos son congruentes entre sí, es decir, idénticos salvo una translación, y semejantes al inicial.

De igual manera, un paralelepípedo se podría descomponer en N semejantes sin más que tomar como razón r: $r(N) = 1/b = 1/N^{1/3}$. En general:

$$r(N) = 1/b = 1/N^{1/D} \qquad \text{o bien: } r^D \cdot N = 1$$

Esta es la relación entre la dimensión del paralelepípedo con D lados, el número N de partes en que se divide y r la razón de semejanza entre cada una de las partes y el total. Tomando logaritmos:

$$D = \log N/\log(1/r)$$

Aplicamos esta fórmula a la curva de Koch: en cualquiera de sus pasos se puede dividir la curva en 4 partes, siendo cada una de ellas semejante a la curva completa con razón $r = 1/3$. Se obtiene:

$$D = \log 4/\log 3$$

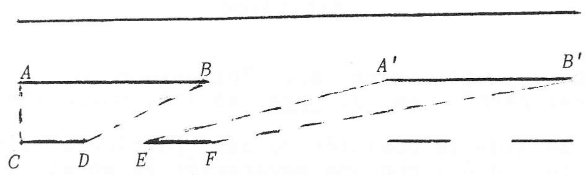
resultado que coincide con el ya obtenido.

Sería éste el momento de intentar una demostración que pusiera de manifiesto la igualdad entre la dimensión de Haussdorf y la de autosemejanza. No se conoce ningún resultado hasta el momento en ese sentido. Según Mandelbrot, lo que impide esta demostración es la dificultad de manejar la definición de α-medida. Lo que sí afirma es que, en los casos conocidos, ambos números coinciden.

Apliquemos la fórmula al otro ejemplo. Tomemos el conjunto de Cantor sobre el intervalo $[0, 1]$ y con semejanza de razón 3 lo extendemos para que sus extremos coincidan con el intervalo $[0, 3]$.

Tal como ha sido formado, obtendríamos de nuevo el conjunto de Cantor sobre $[0, 1]$ y otra copia del mismo en $[2, 3]$, quedando el abierto $(1, 2)$ vacío.

Esto se comprende al analizar un paso cualquiera de la formación del conjunto.



De AB se deducen CD y EF, pero si se hace una semejanza de razón 3, se obtiene:

$$CD \rightarrow AB$$

$$DE \rightarrow BA'$$

$$EF \rightarrow A'B'$$

es decir, la misma figura de la que partíamos, un espacio de separación de igual tamaño y la repetición de la inicial.

En este caso $N = 2$ y $r = 1/3$, por lo que $D = \log 2/\log 3$, igual al resultado obtenido por Haussdorf.

5. Consideraciones finales

Es imposible desarrollar con todo detalle ejemplos en los que el concepto de fractal haya sido explorado, porque se necesitaría una preparación específica en temas muy distintos. Como muestra de esta variedad se dan a continuación las referencias de los artículos o libros a los que pueden acudir los interesados.

La principal referencia es, desde luego, un libro citado en la introducción:

MANDELBROT, Benoit B., The Fractal Geometry of Nature, Nueva York: W. H. Freeman & Co., 1982.

Además de tener una bibliografía muy extensa, el libro presenta ilustraciones notables de fractales, aplicadas a muchas ramas de ciencias.

Artículos

ABBOT, L.F. y WISE, Mark B., "Dimension of a quantum-mechanical path", Am. J. Phys, 49 (1), Enero 1981.

Si se mide la posición de una partícula libre (con una resolución Δx, con una separación Δt en el tiempo) y se unen esos puntos con líneas rectas, se obtiene un "camino" (en el sentido estadístico) al que clásicamente se le daría una dimensión 1. Los autores demuestran que la dimensión de Haussdorf es 2, por lo que se trata de una curva fractal.

FARMER, J.D, OTT, E. y YORKE, J.A., "The dimension of chaotic attractors", Physica, 7D (1983), pp. 153-180.

Un artículo muy completo en el que se comparan diferentes definiciones de dimensión que se pueden aplicar al concepto de "atractor". (Atractor: zona del espacio de fases en el que se sitúa un sistema dinámico después de un tiempo suficientemente grande, e independiente de las condiciones iniciales).

MEAKIN, P. y STANLEY, E., "Spectral dimension for the diffusion-limited aggregation model of colloid growth", Physical Review Letters, Vol. 51, 16 (Octubre 1983).

NITTMAN, J., DACCORD, G. y STANLEY E., "Fractal growth of viscous fingers", Nature, vol. 314 (14 Marzo de 1985).

NOTTALE, L. y SCHNEIDER, J. "Fractals and non-standard analysis", J. Math. Phys., 25 (5), Mayo 1984.

RAMMAL, R. y TOULOUSE, G., "Spectrum of the Schrödinger equation on a self-similar structure", Physical Review Letters, vol. 49, 16 (Octubre 1982).

. . .

Próximamente, en mayo de 1986, se celebrará en Canadá una reunión sobre la Geometría Fractal. La importancia de los participantes, entre los que se encuentra su creador, hace suponer que las conclusiones serán muy valiosas.

Puede quedar pendiente para otro artículo, además de una reseña acerca de ese seminario, la exposición del modelo fractal cuando se introduce la probabilidad.

Agradezco al Departamento de Física Teórica de la Universidad de Valladolid, y en especial a Mariano Santander Navarro, la ayuda prestada en la elaboración de este artículo, así como a Juan Ramón Alvarez del Departamento de Filosofía de la Universidad de León por haberme invitado a escribirlo.