UNIVERSIDAD DE LEÓN

Escuela de Ingenierías

Máster en Investigación en Cibernética [1] [2]

Números realistas Vs. Dos-tuplas

Autor: Noemí de Castro García

Asignatura: Sistemas Inteligentes de Gestión.

León - 2013

[1] ncasg@unileon.es

[2] Remitido por Miguel Carriegos Vieira

Índice

Resumen

El trabajo es un análisis comparativo desde diferentes puntos de vista de los números realistas y las 2-tuplas como modelo matemático para representar la información y el conocimiento.

Palabras clave: Números Realistas, 2-tuplas, Sociedad Informacional, Información Lingüística. MSC2010: 68T30, 91F20, 62B10

1. Introducción

En este trabajo se pretende hacer un análisis comparativo entre dos herramientas: los números realistas y las dos-tuplas.

Lo primero entonces que nos tenemos que preguntar es qué aspectos vamos a tener en cuenta para compararlos. La primera forma para entrar a valorarlos que se nos puede ocurrir, sobre todo debido a su naturaleza, es cuál de los dos es más útil.

Se dice que una ciencia o un arte son ((útiles)) si su desarrollo incrementa, aunque sea indirectamente, el bienestar material y el confort de las personas, es decir, si promueve su felicidad, empleando esta palabra en su acepción más ordinaria y común. ([1])

En este sentido, ambas herramientas sirven para modelar la información y el conocimiento, con lo que son, o serán, útiles. El problema además, si entramos a valorar su utilidad, es que no podemos hacerlo desde un punto de vista objetivo, ya que los números realistas pretenden modelar el conocimiento para poder representarlo en la pantalla de un ordenador, y en cambio, las dos-tuplas sirven para modelar información lingüística y poder desarrollar una nueva manera de toma de decisiones mediante modelos de preferencias.

Por tanto, debemos buscar otro camino para poder evaluar de una forma más rigurosa y objetiva, qué herramienta es más eficiente. Y en este punto, lo más adecuado es valorar el modelo matemático mediante el que se han construido estas herramientas. ¿Por qué? Porque *como la historia prueba, los logros en matemáticas, independientemente de su valor intrínseco, son los más perdurables.* ([1]).

Y si entramos a valorar el modelo matemático, no sólo debemos hacerlo desde el punto de vista axiomático sino que lo haremos desde la idea de que *Los modelos matemáticos, al igual que los de un pintor o un poeta deben ser hermosos*([1]).

Siguiendo la Teoría de la Belleza de Platón, $Belleza = Bondad = Verdad$, el análisis entre ambas herramientas lo haremos teniendo en cuenta tres ideas:

1. Que la herramienta sea verdadera: matemáticamente hablando, que sea correcta, rigurosa y consistente.

2. Que la herramienta sea buena: que sea útil.

3. Que la herramienta sea hermosa: es decir, matemáticamente hablando, que sea sencilla y fácil de desarrollar.

En el trabajo se desarrollan las siguientes secciones:

Para poder hacer un análisis comparativo entre los dos tipos de números, lo primero que debemos hacer es tener una visión básica de en qué consisten, la aritmética que utilizan y el uso que se les da. Para ello, en la sección II, haremos una introducción a los números realistas desde el punto de vista del autor ([2]) y con las modificaciones propuestas desde la perspectiva axiomática matemática dadas en ([3]). A continuación, en la sección III, se encuentra una introducción a las variables lingüísticas como antesala a la sección IV donde veremos la construcción y los operadores de las 2-tuplas.

Llegados a este punto, ya estamos en disposición de poder hacer un análisis comparativo en la sección V desde diferentes puntos de vista: usos, formalismos, construcción, operaciones y aplicabilidad.

En el sentido de hacer un análisis también nos interesa investigar si existe algún tipo de relación entre los números realistas y las 2-tuplas. En la sección VI, proponemos una relación, primero construyendo la 2-tupla asociada a un número realista y luego desarrollando la idea basándonos en el operador OWA. Se finaliza la sección con una propuesta de investigación.

Por último, llegan las conclusiones del trabajo, seguidas de la bibliografía y una sección de apéndices donde encontrar más información sobre alguno de los contenidos mencionados en el trabajo.

2. Números realistas

Para poder hacer un análisis comparativo entre los números realistas y las dos-tuplas, lo primero que necesitamos es saber en qué consisten. Para los realistas daremos algunas pequeñas modificaciones que nos permitirán verlos desde un punto de vista axiomático, al igual que están construidos las 2-tuplas. Esta formalización se puede encontrar en [3], junto con todos los errores, que desde el punto de vista de la axiomatización matemática se encontraron en el libro [2]

2.1. Construcción

Los números realistas se construyen como alternativa a los números reales. Son números discretos, con propiedades discretas y pensados para representar sistemas discretos ([2]).

Los números realistas nos ofrecen una representación en la que están involucradas la dispersión de características de un elemento o sistema, la borrosidad, la probabilidad y la fiabilidad, es decir, relaciones escalonadas entre variables.

Los números enteros, para la Cognomática, constituyen un conjunto acotado (particularidad)y los números realistas se construyen a partir de dichos números. Son números que pueden tener muchas aplicaciones.([2])

La primera observación que haremos, desde el punto de vista axiomático, es la siguiente: En ningún área se debe considerar que el conjunto de los números enteros es un conjunto acotado. Si no quiere tomarse el conjunto de infinitos números enteros, por el motivo que sea, se puede coger un subconjunto acotado de $U \subset \mathbf{Z}$.

Ahora bien, si queremos trabajar en este conjunto U, entonces debemos especificar:

1. La cota α superior y la cota β inferior. Más adelante, se deben entonces fijar de igual manera ciertas hipótesis para las operaciones que no contradigan el hecho de estar trabajando en este conjunto.

   Evidentemente, trabajar con un conjunto acotado implica varios problemas en las operaciones que hacen que éstas no tengan sentido.

2. Por el contrario, si la cota es variable, eso implica que se puede extender, de tal manera que siempre podremos encontrar una cota mayor (resp. menor) que la anterior, por tanto, $U = \mathbf{Z}$ y los números realistas no estarían dentro de un conjunto acotado.

En general, y de forma simbólica, un número realista puede representarse como sigue ([3]):

Definicion 2.1. *Un número realista $r \in \mathcal{R}$ es una $n+q+1$-upla*

$$r = (n_{a_1}, n+1_{a_2}, \ldots, n+q_{a_{n+q+1}}|T)$$

siendo $n, q \in \mathbb{Z}$, $a_1, \ldots, a_{n+q+1} \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{i=1}^{n+q+1} a_i = M$ con $M \leq T$, y $T, M \in \mathbb{N}$.

El conjunto de todos los número realistas los denotamos por $\mathcal{R}$.

Nota 2.2. *1. Los valores* $(n, n+1, \ldots, n+q)$ *se denominan* valores principales *y son valores consecutivos.*

2. *Los valores* $(a_1, a_2, \ldots, a_{n+q+1})$ *se denominan* valores secundarios *y representan la frecuencia absoluta del valor principal asociado en una muestra de tamaño* M*. Se pueden escribir entre corchetes al final del número, o como subíndices.*

3. *El valor* T *es el tamaño de la población o del colectivo del que se ha extraído la muestra anterior.*

4. *El valor* M *es el tamaño muestral, que coincide con la suma de las frecuencias absolutas.*

5. *Mediante las frecuencias absolutas y el tamaño muestral, podemos obtener las frecuencias relativas o probabilidades de cada valor principal del número realista.*

6. *Si queremos escribir un número realista y no tenemos frecuencias para todos los valores principales entonces pondremos frecuencia absoluta 0. Es decir, por ejemplo, si tenemos el número realista* $(2, 3, 5)$*, como necesitamos que los valores principales sean consecutivos, lo escribiríamos como* $(2, 3, 4_0, 5)$

7. *En nuestra formalización, no trabajamos con conjuntos acotados.*

La representación de T admite varias situaciones:

1. Si conocemos el valor de T, lo denotaremos como:

   a)mediante un número

   b)mediante el signo $=$, significando que $M = T$

   c)mediante un número precedido por el signo x, significando que T es igual a M multiplicado por el número expresado.

2. Si no conocemos el valor de T:

   a)mediante el signo $\geq$. En este caso se considera que $T \geq M$

Definicion 2.3. *Llamaremos rango del número realista* $r \in \mathcal{R}$ *a la diferencia entre el valor principal más alto y el más bajo.*

$rg(r) = (n + q + 1) - (n) = q + 1$

Definicion 2.4. *Llamaremos dimensión del número realista $Dim(r)$, al número de valores principales que tiene.*

Ejemplo 2.5. *Imaginamos que estamos haciendo un estudio sobre la opinión del consumidor sobre un producto determinado. Para ello, de un colectivo de 1500 personas, se ha tomado una muestra de 800, y cada uno de ellos ha opinado sobre el grado en el que el producto evaluado les ha dado una solución al problema para el que se fabricó, dándole una puntuación de 1 a 5 siendo 1= Mal, 2= Regular, 3= Suficiente, 4=Bueno y 5 =Muy bueno.*

Una vez tomados los datos, obtuvimos que 250 personas habían votado 1, 200 habían votado 2, 100 habían votado 3, 150 habían votado 5 y 100 habían votado 5.

Esta información la podemos representar mediante un número realista de la siguiente manera:

$$r = (1_{250}, 2_{200}, 3_{100}, 4_{150}, 5_{100}|1500) = (1, 2, 3, 4, 5[250, 200, 100, 150, 100])$$

El rango sería: $rg(r) = 5 - 1 = 4$, la dimensión sería $Dim(r) = 5$, el tamaño muestral es $M = 250 + 200 + 100 + 150 + 100 = 800$ y el tamaño del colectivo es $T = 1500$

2.2. Expresión en potencias de base diez de un número realista

Todo número realista se puede expresar de forma decimal. Dado $f = (n_{a_1}, n{+}1_{a_2}, \dots, n{+}q_{a_{q+1}}|T)$ decimos que la forma decimal de f es

$$f = (a_1 10^n + a_2 10^{n+1} + \ldots + a_{q+1} 10^{n+q}|T)$$

Ejemplo 2.6. $(5_1, 6_6, 7_8, 8_2) = (5; 8[1, 6, 8, 2])$

Entonces podemos verlo de la forma: $r = 1 * 10^5 + 6 * 10^6 + 8 * 10^7 + 2 * 10^8$.

2.3. Fiabilidad

Por los motivos expresados a continuación, nosotros no consideramos que la fiabilidad pueda medirse como se ha establecido por lo que no vamos a tener este concepto en cuenta a la hora de realizar este análisis. Aún así, se desarrolla a continuación la definición dada en [2] con las correcciones hechas en [3].

Los números realistas también aceptan la posibilidad de indicar la fiabilidad de una muestra. La fiabilidad se deduce comparando el tamaño de la muestra y el tamaño del *colectivo, en el que se ha tomado la muestra. El tamaño de la muestra queda indicado por la dimensión del número. El tamaño del colectivo, si se desea puede expresarse como sigue:*([2]

$(3,4,5,6[1,9,8,2] \mid 100) = (3;6[1,9,8,2] \mid 100)$ **naranjas/Kg**

Debemos dejar claro que los resultados que se han tenido en cuenta para hacer este trabajo, son los propuestos en [3], de tal manera que la dimensión representa el número de valores principales, y no el tamaño muestral. Los motivos se pueden encontrar en [3].

El número anterior indica que la información de probabilidad que se ofrece se ha obtenido comprobando, de cada 100 Kg de naranjas, veinte.

Ambos datos, permiten deducir la fiabilidad de la información ofrecida. La relación entre 'M' y 'T' determina el grado de fiabilidad *de la muestra usada. En el caso particular de que 'M' sea igual a 'T', la* fiabilidad *es la máxima posible.([2])*

A continuación daremos los motivos, por los que consideramos el concepto erróneo: la fiabilidad de una muestra se puede ver desde dos puntos de vista([3]):

1. Si lo queremos ver como la representación de la fiabilidad de los componentes de la muestra, ya existe para ello, una definición: la fiabilidad de una componente es igual a la probabilidad de que la componente no falle; es decir, que realice la función encomendada durante el intervalo de tiempo $[0,1]$. Para poder calcularla, se deben suponer componentes idéntidos sometidos a pruebas idénticas para comprobar el tiempo que tardan en fallar. Por lo tanto, no tendría nada que ver con la definición de fiabilidad dada por el autor.

2. La otra manera de ver la fiabilidad, más acorde con la interpretación dada en el libro, es la determinación de si la muestra que hemos obtenido es representativa. Es decir, si los datos están tomados de una manera confiable y con sentido.

   Ahora bien, si la interpretación de la fiabilidad es ésta última, se deben imponer varias condiciones con respecto a esta definición:

   a)para que los resultados que aporta el número realista sean fiables, se debe imponer,lo primero, que la muestra sea representativa.

   b)Además, para que la muestra sea representativa del colectivo, sus elementos deben estar idénticamente distribuidos y haber sido seleccionados bajo las mismas condiciones.

c)Si queremos que la razón entre el tamaño muestral y el tamaño del colectivo o tamaño poblacional sea un indicador de la fiabilidad del número realista, lo primero que debemos determinar es qué límites o valores hacen que consideremos fiable un número realista.

Es decir, no podemos decir que un elemento es largo si no tenemos una referencia de la unidad o magnitud que determina que un objeto es largo.

Para ilustrar lo anterior pondremos un contraejemplo que deja clara que la falta de hipótesis supone la incosistencia de la definición, no sabemos lo que significa ser fiable.

En el ejemplo de las naranjas, vamos a valorar 80 kilos (muestra) siendo 100 kilos el tamaño del colectivo. Como no tengo ninguna hipótesis sobre cómo elegir la muestra, voy a coger los 80 kilos que tienen las naranjas más grandes. Según la definición, mi muestra es fiable al (80/100 = 0,8) 80 %. Este porcentaje podríamos considerarlo como una alta fiabilidad, aunque tampoco se deja clara en la definición los límites entre los que deberíamos considerar una muesra fiable, y en cambio, no es en absoluto representativa del objetivo que queremos entrar a valorar con nuestro número realista, ya que si cogemos los kilos con las naranjas más grandes, tendremos menos naranjas en cada kilo.

2.4. Las operaciones

Con respecto a las operaciones definidas en [2] se han encontrado algunas inconsistencias que hacen surgir diferentes dudas.

1. Se supone que trabajamos en un conjunto acotado. Tanto para los valores principales como para los subíndices. Pero, ¿qué ocurre si al hacer operaciones de suma y producto, el resultado se sale de nuestro conjunto acotado? Aquí llegamos a un conflicto; por un lado, si las cotas se pueden extender para no tener este problema, entonces no estaríamos trabajando en un conjunto acotado. Pero, si ponemos cotas, evidentemente las operaciones no cumplirán la propiedad asociativa y las operaciones dejarían de ser leyes de operación interna, habría que estudiar qué supone este hecho en la interpretación de los resultados.

2. Un problema, parecido al anterior, lo tenemos con los tamaños poblacionales. En el libro se definen las operaciones sin que el tamaño del colectivo se vea afectado. Pero eso no es posible, ya que si sumamos dos números realistas pertenecientes a

diferentes muestras de distintos colectivos, los tamaños poblaciones y muestrales también varían.

Por otra, parte, ¿Qué ocurre al operar si M y T se salen de las cotas?

La única condición que implicaría que los tamaños poblacionales no varían, es el caso en el que sólo se pueden operar muestras disjuntas del mismo colectivo. Pero hay que tener en cuenta la problemática de la interpretación que se ha dado de los números realistas con respecto a la probabilidad.

3. Cuando definimos una operación, debemos definir una ley, de forma genérica para luego poder aplicarla a casos particulares. En el libro se habla de una generalización que nunca llega a aparecer. Además, se deben especificar, y demostrar las propiedades de cada operación.

4. De la misma manera, es necesario demostrar el concepto de que una operación es inversa de otra.

5. Tanto la sustracción como la división no se pueden definir hasta que no estén formalizadas la adición y el producto. Además, con respecto a la sustracción debemos tener cuidado, ya que para la suma secundaria sólo tiene sentido en el caso de que el minuendo sea mayor que el sustraendo.

6. Por otra parte, existen operaciones sólo definidas cuando los subíndices son unos. Se aconseja buscar una formalización más general.

7. La división se define con un algortimo. Un algoritmo es un procedimiento con principio y fin y con una sucesión finita de pasos que ejecutados ordenadamente del primero al último nos permiten resolver un determinado tipo de operaciones. Los algoritmos operacionales surgen una vez se ha definido una operación y se han utilizado las propiedades de ésta. Entonces la forma de hacer la operación es cada vez más rápida y se va buscando un procedimiento. Pero el algoritmo sin concepto ni propiedades no tiene sentido.

Por los motivos anteriormente expuestos, y con el fin de poder comparar los números realistas con las dos-tuplas de una manera más rigurosa se hace una introducción a la formalización de algunas de las operaciones propuestas en el libro.

Las propiedades de las operaciones así como la demostración de la existencia de o-peraciones inversas no se desarrollarán ya que, hacerlo, formaría parte de un trabajo de investigación mucho más global. Ahora bien, con la propuesta hecha, esperamos que sea más sencillo lograr una axiomatización de los conceptos ya que hemos conseguido que los números realistas no sean más que operaciones con potencias, por tanto, las propiedades de los realistas se heredan de las propiedades de suma, producto y potencia de los números naturales y enteros.

Los ejemplos, están tomados del libro [2], para asi poder comprobar que nuestra formalización nos ofrece los mismos resultados que el autor quiere.

2.5. Formalización: Las operaciones

En nuestro caso, no tendremos en cuenta las T en el sentido de que nuestro conjunto no estará acotado, ya que en ese caso, si al sumar nos pasamos de los límietes pueden ocurrir varias cosas:

- Que al pasarse le demos el valor o la cota máxima, entonces no tendríamos la propiedad asociativa.

-Que al pasarse la operación no tenga sentido, entonces no existiría la definición.

-Además, también deberíamos saber si podemos operar números realistas de diferentes muestras, o por el contrario, sólo debemos operar números realistas que pertenezcan a muestras disjuntas de la misma población. Elegir uno u otro camino, determina completamente la definición e interpretación de número realista y sus operaciones.

Por tanto, a partir de ahora trabajaremos con el conjunto de los enteros y de los naturales sin acotarlos.

Sólo definiremos las sumas y los productos, ya que como he dicho anteriormente, consideramos que hasta que estas operaciones no estén debidamente formalizadas, no debería entrarse a definir sustracción y división.

Definicion 2.7. *Definimos la suma secundaria de dos números realistas como*

$$(\alpha|T) + (\beta|Q) = (\alpha + \beta|T + Q)$$

siedo $\alpha + \beta$ la suma natural de las partes principales en su forma decimal

Ejemplo 2.8. *Consideremos los números realistas $f_1 = (5_1, 6_6, 7_8, 8_2)$ y $f_2 = (6_3, 7_2, 8_4, 9_2)$. Las representaciones decimales de las partes principales son $10^5 + 6 * 10^6 + 8 * 10^7 + 2 * 10^8$*

y $3*10^6+2*10^7+4*10^8+2*10^9$. *Si sumamos queda*

$$10^5+6*10^6+8*10^7+2*10^8$$

$$3*10^6+2*10^7+4*10^8+2*10^9$$

$$-------------------$$

$$10^5+9*10^6+10*10^7+6*10^8+2*10^9$$

cuya representación realista es $(5_1, 6_9, 7_{10}, 8_6, 9_2)$. *De manera que* $f_1+f_2=(5_1, 6_9, 7_{10}, 8_6, 9_2|35)$

Proposicion 2.9. *El conjunto de los números realistas junto con la suma secundaria,* $(\mathcal{R},+)$*, es un monoide abeliano, es decir,* $+$ *es una operación interna asociativa, con elemento neutro y conmutativa.*

Demostración. Se deduce de la representación decimal de los números realistas y por ser la suma de números naturales una operación interna asociativa y conmutativa con elemento neutro. El elemento neutro para los números realistas es $(0|0)$. □

Definicion 2.10. *Definimos la suma principal de dos números realistas como*

$$(\alpha)\oplus(\beta)=(\alpha*\beta)$$

siedo $\alpha*\beta$ *el producto natural de las partes principales en su forma decimal*

Ejemplo 2.11. *Consideremos los números realistas* $f_1=(6_1, 7_1, 8_1|3)$ *y* $f_2=(3_1, 4_1|2)$. *Las representaciones decimales de las partes principales son* $10^6+10^7+10^8$ *y* 10^3+10^4. *Si operamos queda.*

$$(10^6+10^7+10^8)*(10^3+10^4)=(10^6+10^7+10^8)*10^3+$$

$$(10^6+10^7+10^8)*10^4=(10^9+10^{10}+10^{11})+$$

$$(10^{10}+10^{11}+10^{12})=10^9+2*10^{10}+2*10^{11}+10^{12}$$

y su representación realista es $(9_1, 10_2, 11_2, 12_1|6)$

Nota 2.12. *Podemos observar que la suma principal, de la manera definida, es válida para operaciones de números realistas con uno o varios valores principales.*

Ejemplo 2.13. $(5)\oplus(7)=10^5*10^7=10^{12}$

$(6_3, 7_2, 8_4, 9_2)\oplus(8)=(3*10^6+2*10^7+4*10^8+2*109)*(10^8)=3*10^{14}+2*10^{15}+4*10^{16}+2*10^{17}=(14_3, 15_2, 16_4, 17_2)$

Proposicion 2.14. *El conjunto de los números realistas junto con la suma principal, $(\mathcal{R}, \oplus)$, es un monoide abeliano, es decir, $\oplus$ es una operación interna asociativa, con elemento neutro y conmutativa.*

Demostración. Para la demostración de la propiedad asociativa, suponemos que no partimos de conjuntos acotados.

Se deduce de la representación decimal de los números realistas y por ser la suma de números enteros una operación interna asociativa con elemento neutro. El elemento neutro para los números realistas es $(m_0, m + 1_0, ..., m + q + 1_0)$. □

Definicion 2.15. *Definimos la suma parcial entre dos números realistas de la siguiente manera:*

$(n_{a_1}, n+1_{a_2}, \ldots, n+q_{a_{n+q+1}}) <+> (m_{b_1}, m+1_{b_2}, \ldots, m+q_{b_{m+q+1}}) = [(n_{a_1}) \oplus (m_{b_1})] + [(n+1_{a_2}) \oplus (m+1_{b_2})] + ... + [(n+q_{a_{n+q+1}}) \oplus (m+q_{b_{m+q+1}})]$ *siendo los números realistas de la misma dimensión*

Ejemplo 2.16. $(2,3) <+> (1,2) = [(2) \oplus (1)] + [(3) \oplus (2)] = 10^2 * 10^1 + 10^3 * 10^2 = 10^3 + 10^5 = (3, 4_0, 5)$

Nota 2.17. *En el caso de no tener números realistas de la misma dimensión, podemos descomponerlos como suma secundaria de valores principales consecutivos para asi hacer los grupos necesarios para tener la misma dimensión.*

Esta descomposición no es única.

Ejemplo 2.18. $(6,7,8) <+> (3,4) = [(6,7) + (8)] <+> (3,4) = [(6,7) \oplus (3)] + [(8) \oplus (4)] = [(10^6 + 10^7) * 10^3] + [10^3 * 10^4] = 10^9 + 10^{10} + 10^{12} = (9, 10, 11_0, 12)$

Si ahora elegimos otra descomposición:

$(6,7,8) <+> (3,4) = [(6) + (7,8)] <+> (3,4) = [(6) \oplus (3)] + [(7,8) \oplus (4)] = [(10^6) * 10^3] + [(10^7 + 10^8) * 10^4] = 10^9 + 10^{11} + 10^{12} = (9, 10_0, 11, 12)$

Las propiedades de esta operación deben estudiarse en profundidad debido a que la descomposición de un número realista no es única.

Definicion 2.19. *Definimos la multiplicación principal entre dos números realistas sobre otro número realista k:*

$(\alpha) \otimes_{(k)} (\beta) = (k) \oplus (\alpha * \beta)$ *siendo:*

(α) *y* (β)= *números realistas con un único valor principal, y por tanto, su valor secundario asociado es uno, α es el multiplicando y β el multiplicador.*

$*$ *el producto habitual y* (k) *un número realista que debe cumplir la condición de que el módulo de cualquiera de sus valores prioncipales debe ser menor que el valor principal del multiplicando.*

Ejemplo 2.20. $(3) \otimes_{(k)} (5) = (0,1,2) \oplus (3*5) = (0,1,2) \oplus (15) = (10^0+10^1+10^2)*(10^{15}) = 10^{15}+10^{16}+10^{17} = (15,16,17)$ *siendo* $(k) = (0,1,2)$

$(3) \otimes_{(k)} (5) = (2) \oplus (3*5) = (2) \oplus (15) = (10^2)*(10^{15}) = 10^{17} = (17)$ *siendo* $(k) = (2)$

Nota 2.21. *La multiplicación está definida sólo cuando el multiplicando y el multiplicador son números realistas con un único valor principal, por tanto, sólo está definida en el caso que las frecuencias absolutas sean uno.*

En ese caso, habría que estudiar las propiedades en profundidad debido a que, en el libro, el autor, no fija ningún (k)*, ni siquiera cuando operamos números realistas con más de un valor principal, como vemos a continuación.*

Nota 2.22. *Si queremos multiplicar de forma principal dos números realistas con más de un valor principal, aplicaremos la propiedad distributiva para dejarlo como multiplicaciones principales uno a uno.*

Ejemplo 2.23. $(2) \otimes_{(k)} (3,4) = [(2) \otimes_{(k)} (3)] + [(2) \otimes_{(k)} (4)] = [(k) \oplus (2*3)] + [(k) \oplus (2*4)] = [(0,1) \oplus (6)] + [(0,1) \oplus (8)] = [(10^0+10^1)*(10^6)] + [(10^0+10_1)*(10^8)] = 10^6+10^7+10^8+10^9 = (6,7,8,9)$ *siendo* $k = (0,1)$

Ejemplo 2.24. $(2,3) \otimes_{(k)} (3,4) = [(2) \otimes_{(k_1)} (3)] + [(2) \otimes_{(k_1)} (4)] + [(3) \otimes_{(k_2)} (3)] + [(3) \otimes_{(k_2)} (4)] = [(k_1) \oplus (2*3)] + [(k_1) \oplus (2*4)] + [(k_2) \oplus (3*3)] + [(k_2) \oplus (3*4)] = [(k_1) \oplus (6)] + [(k_1) \oplus (8)] + [(k_2) \oplus (9)] + [(k_2) \oplus (12)] = [(0,1) \oplus (6)] + [(0,1) \oplus (8)] + [(0,1,2) \oplus (9)] + [(0,1,2) \oplus (12)] = [(10^0+10^1)*(10^6)] + [(10^0+10^1)*(10^8)] + [(10^0+10^1+10^2)*(10^9)] + [(10^0+10^1+10^2)*(10^{12})] = 10^6+10^7+10^8+10^9+10^9+10^{10}+10^{11}+10^{12}+10^{13}+10^{14} = 10^6+10^7+10^8+2*10^9+10^{10}+10^{11}+10^{12}+10^{13}+10^{14} = (6,7,8,9_2,10,11,12,13,14)$

Definicion 2.25. *Se define la multiplicación parcial entre dos números realistas como:*

$(n_{a_1}, n+1_{a_2}, \ldots, n+q_{a_{n+q+1}}) < x > (m_{b_1}, m+1_{b_2}, \ldots, m+q_{b_{m+q+1}}) = [(n_{a_1}) \otimes_{k_1} (m_{b_1})] + [(n+1_{a_2}) \otimes_{k_2} (m+1_{b_2})] + ... + [(n+q_{a_{n+q+1}}) \otimes_{k_{n+q+1}} (m+q_{b_{m+q+1}})]$ *siendo los números realistas de la misma dimensión*

Nota 2.26. *Nótese que al intervenir en la operación la multiplicación principal, sólo podremos operar números realistas cuyos subíndices sean unos.*

Este tipo de restricciones, la descomposición y la dependencia de los números realistas k_i que pueden ser diferentes dentro de la misma operación, hacen que sea bastante díficil formalizar las propiedades. Además, las condiciones mencionadas nos van a ocasionar problemas a la hora de demostrar que las operaciones se pueden invertir*, obteniendo así las sustracciones y las divisiones.*

Ejemplo 2.27. $(3,4) < x > (7,8) = [(3) \otimes_{k_1} (7)] + [(4) \otimes_{k_2} (8)] = [(k_1 \oplus (21)] + [(k_2 \oplus (32)] = [(0,1,2) \oplus (21)] + [(0,1,2,3) \oplus (32)] = [(10^0 + 10^1 + 10^2) * 10^{21}] + [(10^0 + 10^1 + 10^2 + 10^3) * 10^{32}] = [10^{21} + 10^{22} + 10^{23}] + [10^{32} + 10^{33} + 10^{34} + 10^{35}] = (21,22,23) + (32,33,34,35)$

2.6. Geometría discreta

Los números realistas se utilizan para representar las figuras geométricas en un plano que será la pantalla del ordenador y que está formado por un conjunto de elementos discretos, píxeles.

Debido a que el análisis del plano lo hacemos con una capacidad de resolución espacial inferior a las dimensiones de sus elementos constitutivos, obtenemos lo que el autor de [2] denomina, la percepción de continuidad. En la Geometría Discreta, una serie de elementos discretos se representan mediante números realistas.

Ahora bien, como hemos propuesto en [3], Geometría se define generalmente como el estudio de las figuras en el espacio.

La construcción del espacio debe comenzar, como paso previo para poder abordar posteriormente una construcción seria de la geometría. Consecuencia inmediata de esa construcción, es la introducción de una geometría que deja de estar centrada en los aspectos métricos, para diversificarse en otros aspectos (topológicos, proyectivos y por supuesto métricos) que darán lugar a considerar los diversos tipos de geometrías inducidas por Klein.

F. Klein en 1872 definió la geometría como el estudio de las nociones y de las propiedades del espacio que resultan *invariantes* para un grupo de *transformaciones* es decir para hablar de una geometría tenemos que considerar:

- Un conjunto (objetos)
- Y un grupo de transformaciones actuando sobre los elementos del conjunto

Pero es posible definir numerosos grupos de transformaciones distintas actuando sobre el mismo conjunto lo que dará lugar a definir diferentes geometrías sobre un mismo conjunto.

Por lo tanto, como se ha comentado antes, la definición de geometría se basa esencialmente en dos construcciones:

- el espacio donde se va a hacer geometría
- un grupo de transformaciones

Ahora bien, la geometria discreta no tiene en cuenta la definición axiomática de Geometria, y no hemos podido proponer una formalización debido a que existen demasiadas lagunas matemáticas en algunos de los conceptos, y tampoco sabemos con certeza si los conceptos que aparecen en [2] son contenidos que se consideran acabados, o es una introducción a un tema que se irá desarrollando y completando.

Aun así, daremos en este trabajo las nociones básicas de la geometria discreta dada en [2] con las correcciones propuestas en [3].

2.6.1. El plano de representación

El plano de representación (pantalla electrónica) está subdividido en píxeles sobre los que se establecen los ejes de coordenadas. Las marcas de división de los ejes son números enteros.

Para poder referirnos a un pixel en concreto, indicamos la posición que ocupa el píxel en la fila o la columna correspondiente. Cada pixel queda referenciado por un par de números enteros correspondientes al valor en cada eje, con la intersección de la fila y columna que pasan por el píxel en cuestión. La referencia '19,4' se corresponde con el píxel marcada en negro en la figura 1.

Uno de los problemas más graves que podemos encontrar en el capítulo sobre Geometría, es que en ningún momento, se determina cómo representar una cadena de píxeles (supuesto número realista) que no esté a la altura del cero. Es decir, sabemos cómo representar un único pixel mediante dos coordendas, '19,4', pero esta representación no tiene absolutamente nada que ver con los números realistas.

De tal manera, que se crea una geometría discreta en la que se trabajan con números realistas, pero éstos, sólo nos valen para estudiar conjuntos de píxeles continuos, y a altura uno, ya que en ningún momento se determina cómo representar, mediante notación, otra

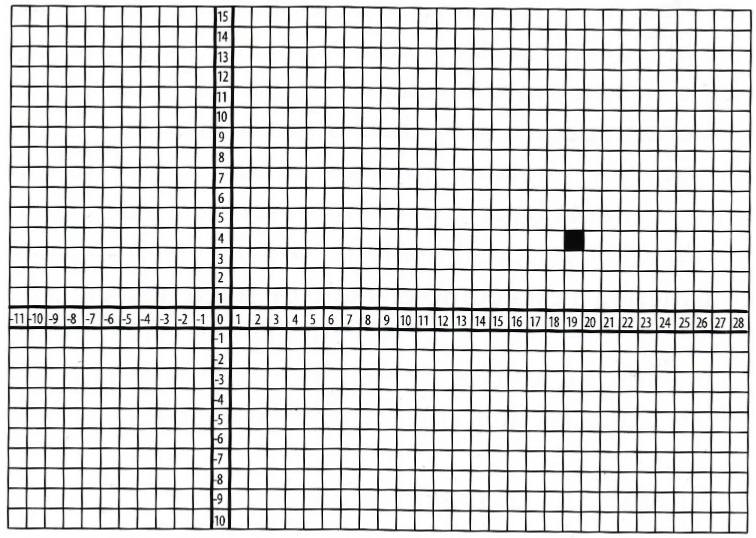

Figura 1: Plano de representación en píxeles([2])

altura diferente. Por lo tanto, aunque tengamos un espacio, no tenemos ni un conjunto de objetos definido sobre los que hacer las transformaciones.

En la geometría discreta los puntos representan a los elementos discretos que tienen la dimensión mínima posible del plano donde se está haciendo la representación. Entonces, cada uno de estos elementos tiene superficie y volumen.

Puesto que la noción de plano corresponde con la noción de dimensión dos (algo que tiene largo y ancho) es natural definir plano (independientemente del conjunto de números que estemos usando) como *parejas de números*, uno de ellos indicando la cantidad de *largo* y otro de ellos indicando la cantidad de *ancho*.

Con un lenguaje más formal, si el conjunto de números que estamos usando lo denotamos por $\mathcal{B}$, entonces el plano se define como el conjunto $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$. Los elementos de este conjunto son parejas (b, b') siendo $b, b' \in \mathcal{B}$.

Siendo consecuentes con esta idea natural de plano, la definición más coherente de plano realista sería:

Definicion 2.28. *El plano realista es el conjunto* $\mathcal{R} \times \mathcal{R}$

Nota 2.29. *Observar que si no ponemos cotas en* $\mathcal{R}$ *el resultado es un plano discreto, pero no finito. En caso de restringir* $\mathcal{R}$ *a una cota, la definición debe seguir siendo la misma, obteniendo así un* plano finito.

Para profundizar en la representación de figuras geométricas como líneas rectas, líneas con curvatura o la circunferencia, veáse Apéndice B.

En la geometría moderna, la descripción de las figuras immersas en un espacio se realiza a través del estudio de las funciones que se pueden definir sobre ese espacio. Así, dada una función $f(x)$, la ecuación, $f(x) = 0$, determina una figura (curva, superficie,...). Por ello se hace la siguiente propuesta de investigación:

Propuesta: Reinterpretar los números realistas como funciones sobre la pantalla del ordenador

Para ello será conveniente, como dijimos al principio, dar una definición formal de plano (o espacio) que pueda ser representada por la pantalla pixelada de un ordenador.

En este punto es conveniente recordar que, desde hace decenas de años, se estudian geometrías finitas. Estas geometrías están definidas sobre cuerpos de números finitos y, habitualmente, se estudian aquellas figuras que quedan determiandas por funciones polinómicas sobre dicho espacio. Es importante decir también que el plano definido, por ejemplo, sobre el cuerpo finito de 8 elementos ($\mathbb{F}_8$, en la literatura) es perfectamente representable por la pantalla de un ordenador dividida en 64 píxeles. De todas estas observaciones surge la pregunta, ¿Es posible definir sobre un plano definido sobre un cuerpo finito de números, $\mathbb{F}_n$, funciones no polinómicas que determinen los objetos correspondientes a los números realistas?. La respuesta afirmativa a esta pregunta permitiría una axiomatización de la *geometría realista* basada en los conceptos e ideas que le son naturales a cualquier humano, pudiendo, así, hacerla tratable y computable, y abriendo una nueva línea de investigación en la rama de las matemáticas.

3. Variables lingüísticas

Podemos ver en el apéndice A, los conceptos básicos sobre conjuntos y números borrosos, que son la base de las variables lingüísticas. Éstas, a su vez, son las predecesoras de las 2-tuplas, por lo que se considera necesario hacer una breve descripción de ellas.

Se utilizan cuando queremos evaluar una información y no podemos hacerlo, de forma exacta, con valores cuantitiavos pero sí con valores cualitativos. Como por ejemplo: caro, normal, barato.

Sobre todo cuando valoramos fenómenos realcionados con la percepción subjetiva. Para ello usamos, el enfoque lingüístico difuso, en el que se utilizan variables lingüísticas[[9]].

Definicion 3.1. *Una variable lingüística está caracterizada por una quintúpla* $(H, T(H), U, G, M)$*[[9]]*

donde:

- *H es el nombre de la variable, es un conjunto difuso de U.*
- *$T(H) \sim T$ es el conjunto de términos de H o conjunto de nombres lingüísticos de H donde cada valor es una variable difusa ($\equiv X$) y que varía a lo largo de U.*
- *U es el universo del discurso que está asociado a una variable base llamada u.*
- *G es una regla sintáctica que genera los nombres de H.*
- *M es una regla sintáctica que asocia significado M(x) a cada elemento de H.*

Ejemplo 3.2. *H= precio de un vestido,T(H)= $\{$barato, normal, caro$\}$, $U =$ valor numérico = [10, 200] euros,G genera los nombres, y M asocia a cada precio una categoría de T.*

3.1. Elección de descriptores del lenguaje

La finalidad de esta elección es asignar a una base de información un número con el que podamos representar la información.

Podemos hacerlo de dos formas diferentes ([4]):

1. La gramática libre de contexto y la semántica mediante números difusos.
2. Mediante una estructura ordenada de etiquetas y la semántica se deriva de esa estructura.

Definicion 3.3. *Se define la* granularidad de la incertidumbre *[[10]], como la cardinalidad del conjunto de términos lingüísticos utilizados para representar la información. Ésta debe ser suficientemente pequeña y suficientemente grande para permitir hacer distintos grados de valores que nos ofrezcan diferentes valoraciones. Normalmente se usan valores impares y se propone como límite máximo 11 o 13.*

Una vez llegados a este punto, debemos crear un procedimiento que genere términos lingüísticos y para ello podemos utilizar:

1. Gramática libre de contexto
2. Términos Primarios con una estructura ordenada.

Para crear la semántica del conjunto de términos lingüísticos tenemos tres opciones para poder definirla:

1. Una estructura ordenada del conjunto de términos lingüísticos.

2. Funciones de pertenencia

3. Intervalos basados en la función de negación.

Si se quiere más información sobre estos dos últimos puntos, consultar [4]. En este trabajo, para crear términos lingüísticos utilizaremos los términos primarios con una estructura ordenada para la gramática y para la semántica la estructura ordenada del conjunto.

Ejemplo 3.4. *Por ejemplo, vamos a crear los términos lingüísticos asociados a los resultados de una encuesta sobre la calidad del servicio recibido en la sección de atención al cliente de una empresa de telefonía.*

Lo primero que hacemos es crear las etiquetas: NS= Nada Satisfecho, PS= Poco Satisfecho, S= Satisfecho, BS= Bastante satisfecho, y MS= Muy Satisfecho.

De tal manera que el conjunto de términos lingüísticos es una estructura de etiquetas ordenadas:

$S = \{s_0 = NS, s_1 = PS, s_2 = S, s_3 = BS, s_4 = MS\}$ *con* $s_i < s_j$ *para* $i < j$

3.2. Uso de las variables lingüísticas

Se utilizan para representar información lingüística cuando estamos trabajando con los siguientes temas:

1. Sistemas basados en reglas difusas con variables lingüísticas:

   a)Representar el conocimiento sobre el problema.

   b)Modelar las relaciones entre variables.

   c)Aplicación principal: modelado difuso de sistemas [[11]].

2. Modelado lingüístico de preferencias:

   a)Evaluar preferencias con respecto a las diferentes opciones que tenemos ante un problema.

   b)Utiliza etiquetas lingüísticas [[12],[9]].

4. Las 2-tuplas lingüísticas

Las 2-tuplas lingüísticas surgen de la necesidad de modelar información lingüística y que no haya, o al menos, en el menor grado posible, una pérdida de información en las operaciones y una falta de exactitud.

El modelado lingüístico que representa la información basándose en el Enfoque Lingüístico Difuso pierde información porque parte de valores discretos en un universo continuo ([4]).

Para hacer un análisis de los modelos computacionales existentes para representar información lingüística, se puede hacer desde dos puntos de vista:

1. Basándonos en el principio de extensión (ver Apéndice A).
2. Basándonos en modelos computaciones simbólicos.

4.1. Modelos computacionales lingüísticos simbólicos

Los operadores de agregación asociados al modelo simbólico no usan el principio de extensión porque no hacen operaciones sobre las funciones de pertenencia de los conjuntos difusos (veáse Apéndice A), lo que utilizan es el orden de la etiqueta dentro de su conjunto de términos, S, y otras propiedades. ([4]).

Sea $S = \{S_0, ...S_g\}$ con $s_i < s_j$ con i, j una estructura ordenada de los conjuntos de términos lingüísticos.

Los resultados intermedios de estas operaciones son valores numéricos $\beta \in [0, g]$ que son aproximados mediante una función de aproximación $app_2(\cdot)$ que obtiene un valor $app_2(\beta) \in \{0, 1, ..g\}$ y que indica el índice del término lingüístico asociado, $S_{app_2(\beta)} \in S$.

Podemos verlo ilustrado en la figura 2

$S^n \overset{C}{\to} [0, g] \overset{app_2(.)}{\to} \{0, ...g\} \to S$

4.2. Modelo de representación lingüística

Los resultados es esta subsección podemos encontrarlos en [4], lo que se busca en este caso es un nuevo moedelo de representación linüística.

Sea $S = \{S_0, ..., S_g\}$ un conjunto de términos lingüísticos, y $\beta \in [0, g]$ un valor obtenido por un método simbólico operando con información lingüística.

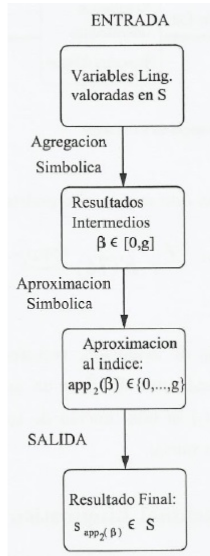

Figura 2: Agregación simbólica([4])

Definicion 4.1. *La traslación simbólica de un término lingüístico* S_i *es un número valorado en el intervalo* $[-0{,}5, 0{,}5]$ *que expresa la* diferencia de información *entre una cantidad de información expresada por el valor* $\beta \in [0, g]$ *obtenido en una operación simbólica y el valor entero más próximo,* $i \in 0, , , g$*, que indica el índice de la etiqueta lingüística* (s_i) *más cercana en S.*

Entonces, obtenemos un nuevo modelo de representación para la información lingüística, el cual usa como base de representación 2-tuplas, (r_i, α_i) *con* $r_i \in S$ *y* $\alpha_i \in [-0{,}5, 0{,}5]$ *donde :*

- r_i *es la etiqueta lingüística.*
- α_i *es el número que expresa el valor de la distancia desde el resultado original* β *al índice de la etiqueta lingüística más cercana*(r_i) *en el conjunto de términos lingüísticos S, es decir, su traslación simbólica.*

4.3. Construcción de una dos-tupla

Definicion 4.2. *Sea $s_i \in S$ un término lingüístico, su representación mediante una 2-tupla equivalente se construye mediante la función θ:*

$$\begin{aligned} \theta :& S \rightarrow (S \times [-0{,}5, 0{,}5]) \\ & s_i \mapsto \theta(s_i) = (s_i, 0)/s_i \in S \end{aligned}$$

Definicion 4.3. *Sea $S = \{s_0, ..., s_g\}$ un conjunto de términos lingüísticos y $\beta \in [0, g]$ un valor que representa el resultado de una operación simbólica, entonces la 2-tupla lingüística que expresa la información equivalente a β se obtiene usando la siguiente función:*

$$\begin{aligned} \triangle :& [0, g] \rightarrow (S \times [-0{,}5, 0{,}5]) \\ (\beta) \mapsto & \triangle(\beta) = (s_i, \alpha) = \begin{cases} s_i & si \quad i = round(\beta) \\ \alpha = \beta - i & si \quad \alpha \in [-0{,}5, 0{,}5] \end{cases} \end{aligned}$$

donde:

- $i = round(\beta) =$*operador usual de redondeo*
- $s_i =$ *es la etiqueta con índice más cercano a β.*
- $\alpha = \beta - i =$ *es el valor de traslación simbólica y $\alpha \in [-0{,}5, +0{,}5]$*

Ejemplo 4.4. *Vamos a suponer el siguiente conjunto de términos lingüísticos que nos permiten representar el expediente académico de un estudiante universitario:*

$S = \{s_0 = SUSPENSO, s_1 = APROBADO, s_2 = NOTABLE, s_3 = SOBRESALIENTE, s_4 = MATRICULA\}$ con cardinalidad $g + 1 = 5$.

Pongamos que un alumno tiene una media de $\beta = 2{,}2$. Entonces su 2-tupla asociada será: $\triangle(\beta) = \triangle(2{,}2) = (s_2, +0{,}2)$, es decir, buscar el índice del término lingüístico más cercano(por redondeo) y calcular la diferencia desde nuestro β a ese término lingüístico. Esa diferencia es lo que representa α.

Podemos ver la representación en la figura 3

Definicion 4.5. *Sea $S = \{s_0, ...s_g\}$ un conjunto de términos lingüísticos y (s_i, α) una 2-tupla lingüística. Existe la función $\triangle^{-1}$, tal que, dada una 2-tupla (s_i, α) esta función*

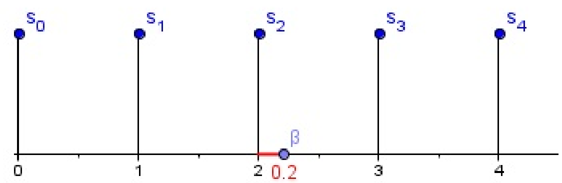

Figura 3: Ejemplo de 2-tupla

devuelve su valor numérico equivalente $\beta \in [0, g]$

$$\begin{aligned} \triangle^{-1} :& S \times [-0{,}5, 0{,}5] \to [0, g] \\ & (s_i, \alpha) \mapsto \triangle^{-1}(s_i, \alpha) = i + \alpha = \beta \end{aligned}$$

4.4. Modelo computacional lingüístico para la representación con 2-tuplas

Vamos ahora a definir las operaciones del modelo de representación de información dado por las 2-tuplas. Para ello, necesitamos un modelo computacional asociado, y unos operadores.

Los operadores que vamos a ver son: la comparación, la agregación y el operador de negación.

4.4.1. Comparación de 2-tuplas

Sean (s_k, α_1) y (s_l, α_2) 2-tuplas que representan cantidades de información. Para poder compararlas utilizamos los siguientes criterios([4]):

- Si $k < l$ entonces (s_k, α_1) es menor que (s_l, α_2).
- Si $k = l$, entonces:

  a)Si $\alpha_1 = \alpha_2$, entonces $(s_k, \alpha_1) = (s_l, \alpha_2)$, lo que se interpreta como que ambas tuplas representan la misma información.

  b)Si $\alpha_1 < \alpha_2$, entonces $(s_k, \alpha_1) < (s_l, \alpha_2)$, por lo que la primera tupla nos aporta menos información que la segunda.

  c)Si $\alpha_1 > \alpha_2$, entonces $(s_k, \alpha_1) > (s_l, \alpha_2)$, lo que quiere decir que la primera tupla nos ofrece más información que la segunda.

- Si $k > l$ entonces (s_k, α_1) es mayor que (s_l, α_2)

Ejemplo 4.6.

- *Si tenemos por ejemplo* $(s_3, +0{,}5)$ *y* $(s_4, +0{,}2)$*, entonces:* $(s_3, +0{,}5) < (s_4, +0{,}2)$
- *Si tenemos las mismas dos-tuplas anteriores, entonces* $(s_4, +0{,}2) > (s_3, +0{,}5)$
- *Si tenemos ahora:* $(s_3, +0{,}5)$ *y* $(s_3, +0{,}2)$*, entonces* $(s_3, +0{,}2) < (s_3, +0{,}5)$*.*
- *Si tenemos:* $(s_3, +0{,}5)$ *y* $(s_3, +0{,}2)$*, entonces* $(s_3, +0{,}5) > (s_3, +0{,}2)$ *.*
- *Por último, si tenemos :* $(s_3, +0{,}2)$ *y* $(s_3, +0{,}2)$*, entonces:* $(s_3, +0{,}2) = (s_3, +0{,}2)$

4.4.2. Operador de negación sobre una 2-tupla

Vamos a definir el operador de negación sobre una 2-tupla([4]):

Definicion 4.7. $Neg((s_i, \alpha)) = \triangle(g - (\triangle^{-1}(s_i, \alpha)))$ *siendo* $g + 1$ *la cardinalidad de* S*, el conjunto de términos lingüísticos.*

Ejemplo 4.8. *Vamos a suponer el siguiente conjunto de términos lingüísticos dados en el ejemplo 4.4:*

$S = \{s_0 = S, s_1 = A, s_2 = N, s_3 = SS, s_4 = MH\}$ *con cardinalidad* $g + 1 = 5$*.*

Pongamos $\beta = 2{,}2$ *cuya 2-tupla asociada es:* $\triangle(\beta) = \triangle(2{,}2) = (s_2, +0{,}2)$*. Le vamos a aplicar el operador negación a la 2-tupla:*

$Neg((s_2, +0{,}2)) = \triangle(4 - (\triangle^{-1}(s_2, +0{,}2))) = \triangle(4 - (2 + 0{,}2)) = \triangle(1{,}8) = (s_2, -0{,}2)$

4.4.3. Agregación de 2-tuplas

Lo que queremos conseguir con la agregación es un valor, una 2-tupla, que represente la cantidad de información relativa a un colectivo cuando lo que nosotros tenemos es la cantidad de información (representada mediante 2-tuplas) de diferentes estratos de ese colectivo.

Para conseguirlo, tenemos dos opciones:

1. Utilizar operadores de agregación numéricos y luego extenderlos para trabajar con 2-tuplas.
2. Utilizar operadores de agregación simbólicos.

En nuestro caso y debido al objetivo principal del trabajo, que es comparar las 2-tuplas con los números realistas, nos vamos a centrar sólo en los primeros.

4.5. Operadores de agregación para 2-tuplas basados en operadores de agregación numéricos

Para poder utilizar estos operadores numéricos, tendremos en cuenta la definición de $\triangle^{-1}$ que transforma una 2-tupla en un número del intervalo $[0, g]$.

4.5.1. Media aritmética

Definicion 4.9. *Sea $x = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ un conjunto de valores numéricos para una variable x. La media aritmética $\overline{x}$ se obtiene dividiendo la suma de todos los valores por su cardinalidad[[13]]:*

$\overline{x}(x_1, ..., x_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

A continuación, vamos a calcular la media artimética de 2-tuplas([4]):

Definicion 4.10. *Sea $x = \{(r_1, \alpha_1), ..., (r_n, \alpha_n)\}$ un conjunto de 2-tuplas, su media aritmética se calcula con el operador $\overline{x}^e$ que es la media artimética extendida y se define como:*

$\overline{x}^e((r_1, \alpha_1), ..., (r_m, \alpha_m)) = \triangle(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \triangle^{-1}(r_i, \alpha_i)) = \triangle(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \beta_i)$

4.5.2. Operador media ponderada

Éste operador será uno de los que más nos interesan debido a que los números realistas trabajan con frecuencias absolutas que podemos entender como diferentes pesos w_i.

Definicion 4.11. *Sea $x = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ un conjunto de valores numéricos para una variable x y $W = \{w_1, ..., w_n\}$ un vector numérico con los pesos asociados a los x_i respectivamente. La media ponderada $\overline{x}$ se obtiene de la siguiente manera ([13]):*

$\overline{x}) = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i w_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i}$

Este operador se puede extender para trabajar con dos-tuplas ([4]):

Definicion 4.12. *Sea $x = \{(r_1, \alpha_1), ..., (r_m, \alpha_m)\}$ un conjunto de 2-tuplas,y $W = \{w_1, ...w_m\}$ los pesos asociados a cada tupla respectivamente. La media ponderada extendida se calcula con el operador $\overline{x}^e$ y se define como :*

$\overline{x}^e((r_1, \alpha_1), ..., (r_m, \alpha_m)) = \triangle(\frac{\sum_{i=1}^{m} \triangle^{-1}(r_i, \alpha_i) w_i}{\sum_{i=1}^{m} w_i}) = \triangle(\frac{\sum_{i=1}^{m} \beta_i w_i}{\sum_{i=1}^{m} w_i})$

En [4] podemos encontrar una modificación de la definición anterior en la que los pesos también son 2-tuplas.

4.5.3. Operador OWA (Ordered Weighted Aggregation)

Este operador fue introducido en [[14]] y en este caso, los pesos no están asociados a un valor sino que están asociados a una posición.

Definicion 4.13. *Sea* $A = \{a_1, ...a_n\}$ *un vector de valores numéricos y* $W = \{w_1, ..., w_n\}$ *un vector de pesos asociado, tal que:*

- $w_i \in [0, 1]$
- $\sum w_i = 1$

El operador OWA, F*, se define como:*

$F(a_1, ..., a_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j$ *siendo* b_j *el j-ésimo mayor valor del conjunto A.*

Vamos ahora a extenderlo para las 2-tuplas ([4]):

Definicion 4.14. *Sea* $A = \{(r_1, \alpha_1), ..., (r_m, \alpha_m)\}$ *un conjunto de 2-tuplas, y* $W = \{w_1, ...w_m\}$ *los pesos asociados a cada tupla respectivamente que cumple:*

- $w_i \in [0, 1]$
- $\sum w_i = 1$

El operador OWA extendido, F^e *para dos-tuplas se define como:*

$F^e((r_1, \alpha_1), ..., (r_m, \alpha_m)) = \triangle(\sum_{j=1}^{m} w_j \beta_j^*)$ *siendo* β_j^* *el j-ésimo mayor valor de los* $\triangle^{-1}((r_i, \alpha_i))$.

El operador OWA nos permite determinar el vector de ponderaciones que vamos a utilizar. En [4] podemos encontrar dos familias de operadores OWA, llamados S-OWA, donde podemos encontrar diferentes maneras de elegir el vector W.

Podemos encontrar varios ejemplos de cómo aplicar el operador OWA en la sección: *Relación entre las 2-tuplas y los números realistas.*

5. Análisis comparativo

El análisis comparativo entre ambos números lo vamos a hacer con respecto a diferentes puntos de vista: los usos, formalismos, la construcción de los números, las operaciones y la aplicabilidad.

5.1. Usos

Con respecto a los usos de los números realistas y las 2-tuplas, podemos decir que ambos pretenden ser herramientas para representar conocimiento, pero el tipo de información a modelar es muy diferente en ambos.

Las dos-tuplas surgen por la necesidad de modelar **lingüísticamente** las preferencias de tal manera, que nos sea mucho más sencillo establecer una teoría de toma de decisiones. Los modelos anteriores a las 2-tuplas no funcionan debido a que con ellos se produce pérdida de información, existe la dificultad de agregar información lingüística multigranular y además también es muy complicado combinar e integrar la información lingüística y numérica. Por tanto, fue necesario desarrollar un nuevo modelo de representación de la información lingüística, un modelo computacional asociado que nos permita operar y procesos de agregación que nos proporcionen soluciones a la integración de información numérica e información lingüística multigranular.

Los números realistas, por otra parte, se construyen como alternativa a los números reales y nos permiten representar la dispersión de características de un elemento o sistema, la borrosidad, la probabilidad y la fiabilidad, es decir, relaciones escalonadas entre variables. Su principal objetivo es poder representar sistemas de información y elementos geométricos en la pantalla del ordenador.

Por lo que, con respecto a los usos, no tenemos a priori más relación que la de que sean una herramienta para representar información.

5.2. Formalismos

Para hacer el trabajo partimos de la formalización hecha en [3] debido a que los números realistas no están creados con rigor ni formalismo matemático debido a que su autor considera que no es necesario. En ese sentido, las 2- tuplas, aunque en [4] no haya una formalización completa con respecto a las operaciones y a la definición, se trata más bien de una variante de un concepto, las variables lingüísticas, que ya están validadas y formalizadas en diferentes puntos de la bibliografía.

Por lo tanto, en lo que se refiere al formalismo, la balanza cae a favor de las 2-tuplas sin lugar a duda, y sobre todo, con respecto a poder utilizar una herramienta validada.

5.3. Construcción

La construcción de los números realistas parte de la nada, ya que lo que se pretende es crear una alternativa a los números reales. De ahí, que se le de tanta importancia al rigor y al formalismo en su construcción.

Por otra parte, las 2-tuplas, se construyen a raíz de las variables lingüísticas que vienen a su vez de la teoría de números difusos, heredando sus operaciones. Esta teoría está claramente formalizada y validada.

Además, las 2-tuplas son una forma matemática de representar la información y que se basa en la existencia de los números reales, partiendo además de que buscar modelar conocimiento lingüístico de un Universo Continuo. Sin embargo, los números realistas se construyen como alternativa a los números reales debido a que su autor ([2]) rechaza las ideas de continuidad, infinito, y procedimientos que puedan contener procesos iterativos, tan habituales en la axiomática de las matemáticas. Lo que buscan es representar información discreta suponiendo que todo el conocimiento que quieren modelar está en un conjunto acotado discreto.

En resumen, la construcción de las 2-tuplas es válida desde el punto de vista axiomático matemático, y sin embargo, la de los números realistas creados en [2], no lo es.

5.4. Las operaciones

Con respecto a las operaciones, las diferencias son bastante claras:

1. La primera diferencia es que no son las mismas.

   Los números realistas tienen definidas múltiples operaciones, que en [3] se han reducido a suma secundaria, suma principal, suma parcial, producto principal y producto parcial. Ya hemos comentado en la sección de los *Números realistas* parte de los problemas que tienen las operaciones definidas en [2].

   Para las 2-tuplas, sin embargo, operaciones como tal tenemos la comparación y la negación, el resto son operadores que aplicamos a la 2-tupla y que vienen heredados de otros operadores. Estos operadores nos sirven para agregar 2-tuplas, que sería lo más parecido a la suma de los números realistas.

2. La segunda diferencia tiene que ver con la anterior y es la cantidad de operaciones

diferentes que tenemos, existiendo en los realistas bastantes más.

3. En las operaciones de los números realistas, se definen unas operaciones como inversas de otras, al menos en [2]. Debido a que no está demostrado ni formalizado, no contaremos con ellas. Pero para las dos-tuplas, no existen operadores que supongan deshacer lo que otro operador produce, por lo tanto, no tendríamos operadores inversos.

4. Los operadores de las dos-tuplas no dependen del representante elegido, sin embargo, en el producto principal de los números realistas la operación está definida dependiendo de un número realista k, que puede elegirse libremente, e incluso varios dentro de la misma operación.

5. Una de las diferencias fundamentales, y que marcan la diferencia desde el punto de vista axiomático, es que las operaciones con los números realistas no tienen solución única, es decir, la misma operación puede dar varios resultados diferentes. Sin embargo, los operadores con lo que contamos para las 2-tuplas están bien definidos y tienen solución única, lo que tiene mucha más validez desde el punto de vista matemático.

Entre las operaciones de los números realistas y las 2-tuplas no sólo hay diferencias, sino que también podemos encontrar semejanzas. Entre ellas, que no tenemos propiedades demostradas de ninguna, lo que sería fundamental. Aunque sí hemos de decir, que al ser los operadores de las 2-tuplas heredados de otros operadores, sí que es posible que resulte más sencillo demostrar que poseen las mismas propiedades que los operadores primarios.

5.5. Aplicabilidad

Si nos referimos a aplicabilidad, inevitablemente debemos pensar en modelos que podamos trabajar de forma computacional. En el caso de las 2-tuplas no sólo los tenemos, sino que se crean específicamente para poder estudiar modelado de preferencias en [4].

Los números realistas, sin embargo, aunque tienen como finalidad evitar los problemas que pueden surgir al representar información en la pantalla de un ordenador, no están aún suficientemente desarrollados, por lo que todavía no tenemos modelos computacionales validados.

6. Relación entre las 2- tuplas y los números realistas

Aunque no sea sencillo encontrar una relación clara entre las 2-tuplas y los números realistas, sí que podemos ver éstos últimos de tal manera que podamos obtener un conjunto de 2-tuplas y un conjunto de pesos asociados.

6.1. Definición de la 2-tupla asociada a un número realista

Recordamos que un número realista está determinado por un vector de componentes que son los valores principales y un conjunto de subíndices que representan las frecuencias absolutas de cada valor principal.

Lo que haremos será definir un conjunto de términos lingüísticos mediante el enfoque de la estructura ordenada de etiquetas, que englobe a todos los valores princpales del número realista.

En este caso, si realmente buscamos una relación entre 2-tuplas y número realista y queremos además respetar la granularidad de la incertidumbre y no excedernos en la cardinalidad del conjunto de términos lingüísticos a más de 13, entonces quizá sería necesario redefinir la 2-tupla proporcionando un rango a α que sea mayor que $[-0{,}5, 0{,}5]$.

Una vez hecho, escribiremos cada valor principal del número realista como una 2-tupla, obteniendo al final un conjunto de 2-tuplas. Ahora bien, para poder hacerlo, vamos a quedarnos sólo con el subonjunto de $\mathcal{R}$ en el que los valores principales son siempre enteros positivos.

A este conjunto,le asociaremos un conjunto de pesos. Para poder cumplir con este conjunto las condiciones de los operadores de las 2-tuplas, lo que haremos será utilizar las frecuencias relativas, es decir, los subíndices o frecuencias absolutas de los valores principales, entre el tamaño muestral que hayamos elegido.

Elegimos el siguiente ejemplo para número realista, y calculemos su 2-tupla asociada y el vector de pesos correspondiente a la tupla:

Ejemplo 6.1. *Imaginamos que estamos haciendo un estudio sobre la opinión del consumidor sobre un producto determinado. Para ello, de un colectivo de 1500 personas, se ha tomado una muestra de 800, y cada uno de ellos ha opinado sobre el grado en el qué el producto evaluado les ha dado una solución al problema para el que se fabricó, dándole una puntuación de 0 a 6 siendo 0 = No lo resolvió (N), 1= Mal (M), 2= Regular (R), 3=*

Suficiente (S) , 4 = Bien (B), 5 = Muy bien (MB), 6= Excelente (E).

Una vez tomados los datos, obtuvimos que 250 personas habían votado 1, 150 habían votado 2, 100 habían votado 3, 150 habían votado 5 , 100 habían votado 5 y 50 que habían votado 6.

Esta información la podemos representar mediante un número realista de la siguiente manera:

$r = (1_{250}, 2_{150}, 3_{100}, 4_{150}, 5_{100}, 6_{50}|1500) = (1, 2, 3, 4, 5, 6[250, 150, 100, 150, 100, 50])$

Los valores principales son (1,2,3,4,5,6), vamos a elegir el conjunto de los términos lingüísticos:

$S = \{s_0 = N, s_1 = M, s_2 = R, s_3 = S, s_4 = B, s_5 = MB, s_6 = E\}$

Hemos elegido estos términos lingüísticos con la cardinalidad del conjunto 7, dentro de los límites establecidos.

Entonces, el primer valor principal del número realista es la 2-tupla: $1 = (s_1, 0)$*, el segundo valor principal es:* $2 = (s_2, 0)$*, y si seguimos así sucesivamente obtenemos que la 2-tupla asociada a mi número realista es:*

$r = (1, 2, 3, 4, 5, 6) \rightsquigarrow ((s_1, 0), (s_2, 0), (s_3, 0), (s_4, 0), (s_5, 0), (s_6, 0))$

Nota 6.2. *Debemos dejar claro que los números realistas originales se mueven en conjuntos acotados de los enteros y los naturales, sin embargo, para poder hacer una comparación con las 2-tuplas hemos preferido elegir la propuesta de investigación dada en [3] en la que no tenemos conjuntos acotados.*

Una vez asignada la 2-tupla, vamos a calcular el vector de pesos asociado: $W = \{w_1, ...w_n\}$. Como hemos mencionado anteriormente, lo que haremos será utilizar los subíndices del número realista partidos del tamaño muestral, esto es, las frecuencias relativas, para poder cumplir las restricciones que más adelante se suponen en las operacioes de agregación.

Por tanto, nuestro vector de pesos asociado a la 2-tupla generada por el número realista será de la forma: $W = \{\frac{a_1}{M}, ..., \frac{a_n}{M}\}$.

Ejemplo 6.3. *Teníamos el número realista:*

$r = (1_{250}, 2_{150}, 3_{100}, 4_{150}, 5_{100}, 6_{50}|1500) = (1, 2, 3, 4, 5, 6[250, 150, 100, 150, 100, 50])$*, entonces:*

$W = \{w_1 = \frac{250}{800}, w_2 = \frac{150}{800}, w_3 = \frac{100}{800}, w_4 = \frac{150}{800}, w_5 = \frac{100}{800}, w_6 = \frac{50}{800}\}$.

Por tanto, podemos encontrar una 2-tupla con un vector de pesos asociados que representa un número realista dado.

$r = (1_{250}, 2_{150}, 3_{100}, 4_{150}, 5_{100}, 6_{50}|1500) = (1, 2, 3, 4, 5, 6[250, 150, 100, 150, 100, 50]) \longrightarrow$

$((s_1, -0{,}4), (s_2, -0{,}4), (s_3, -0{,}4), (s_4, 0{,}4), (s_5, -0{,}4), (s_6, -0{,}4))$ con vector de pesos asociado: $W = \{w_1 = \frac{250}{800}, w_2 = \frac{150}{800}, w_3 = \frac{100}{800}, w_4 = \frac{150}{800}, w_5 = \frac{100}{800}, w_6 = \frac{50}{800}\}$

Nota 6.4. *Lo que estamos haciendo es dar una función que asigna a cada número realista un vector cuyas componentes son las 2-tuplas asociadas a cada valor principal del número realista, y un vector de pesos asociados.*

Es una función que va de un universo discreto a un universo continuo.

6.2. Operador OWA de un número realista

Para poder comprobar que la nueva definición de número realista como dos-tupla es válida, debemos poder operar de ambas formas obteniendo así la misma solución.

Debido a que los subíndices de los números realistas son una parte importante de este tipo de números, sólo vamos a basarnos en operaciones de las 2-tuplas que tienen definido el vector de pesos asociados. Las dos operaciones que lo poseen son de agregación numérica y son la media ponderada y el operador OWA.

Ahora bien, la media ponderada parte de hacer una división, con lo que tendríamos que dividir dentro de los números realistas. Como hemos visto en la subsección de las operaciones de los números realistas, una de las grandes críticas que tenemos implica a la operación de división. Por tanto, vamos a quedarnos con el operador OWA.

Lo primero que vamos a hacer es definir en qué consiste aplicarle el operador OWA a un número realista. Para ello, usaremos la siguiente definición dada en [4]:

Definicion 6.5. *Sea* $A = \{a_1, ...a_n\}$ *un vector de valores numéricos y* $W = \{w_1, ..., w_n\}$ *un vector de pesos asociado, tal que:*

- $w_i \in [0, 1]$
- $\sum w_i = 1$

El operador OWA,F*, se define como:*

$F(a_1, ..., a_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j$ *siendo* b_j *el j-ésimo mayor valor del conjunto A.*

En nuestro caso, el vector de valores numéricos es el vector de valores principales de nuestro número realista, y el vector de pesos asociados es el calculado mediante las frecuencias absolutas. También debemos tener en cuenta que se ha respetado la notación propuesta en [3] para el vector de valores numéricos, aunque coincida con la notación propuesta para los subíndices en los números realistas.

Nota 6.6. *En los ejemplos dados se han elegido números realistas cuyo rango no sea demasiado elevado para luego poder definir las 2-tuplas asociadas sin necesidad de redefinir el α asociado.*

Ejemplo 6.7. *Sea el número realista:* $r = (3_3, 4_2, 5_6)$*, entonces* $A = \{3, 4, 5\}$ *y* $W = \{w_1 = \frac{3}{11}, w_2 = \frac{2}{11}, w_3 = \frac{6}{11}\}$ *cumpliendo las condiciones. Aplicamos ahora el operador* OWA*:*

$F(3, 4, 5) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j = \frac{3}{11} * 5 + \frac{2}{11} * 4 + \frac{6}{11} * 3 = \frac{41}{11} = 3.\widehat{72}$

Si calculamos la 2-tupla asociada al resultado, con los términos lingüísticos:

$S = \{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6\}$ *con cardinalidad impar, nuestro resultado sería* $(s_3, +0.\widehat{27})$

Nota 6.8. *El operador OWA nos permite poder definir con cierta flexibilidad el vector de pesos asociado al conjunto A. Si nosotros definimos el vector de pesos de forma inversa a como lo hemos elegido en el ejemplo 3.7, es decir, cogemos las frecuencas relativas en orden contrario, entonces el operador OWA aplicado al número realista, nos daría como resultado la media artimética del número realista.*

Ejemplo 6.9. *Sea el número realista:* $r = (3_3, 4_2, 5_6)$*, entonces* $A = \{3, 4, 5\}$ *y* $W = \{w_1 = \frac{6}{11}, w_2 = \frac{2}{11}, w_3 = \frac{3}{11}\}$ *cumpliendo las condiciones. Aplicamos ahora el operador* OWA*:*

$F(3, 4, 5) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j = \frac{6}{11} * 5 + \frac{2}{11} * 4 + \frac{3}{11} * 3 = \frac{47}{11} = 3.\widehat{27}$

Si nos fijamos en la resolución del operador lo que nos queda precisamente es la definición de la media aritmética de un conjunto de datos.

6.3. Operador OWA a una 2-tupla y a un número realista

Para poder ahora aplicar el operador OWA al número realista del ejemplo anterior, pero mediante la definición del operador OWA a una 2-tupla necesitamos calcular la 2-tupla asociada al número realista:

El número realista es $(3_3, 4_2, 5_6)$, los valores principales son (3,4,5), vamos a elegir el conjunto de los términos lingüísticos:

$S = \{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6\}$ con cardinalidad impar.

Entonces $r = (3,4,5) \rightsquigarrow ((s_3,+0),(s_4,+0),(s_5,+0))$ con vector de pesos asociado: $W = \{w_1 = \frac{3}{11}, w_2 = \frac{2}{11}, w_3 = \frac{6}{11}\}$.

Recordamos la operación OWA de 2-tuplas dada en [4]:

Definicion 6.10. *Sea $A = \{(r_1,\alpha_1),...,(r_m,\alpha_m)\}$ un conjunto de 2-tuplas,y $W = \{w_1,...w_m\}$ los pesos asociados a cada tupla respectivamente que cumple:*

- $w_i \in [0,1]$
- $\sum w_i = 1$

El operador OWA extendido, F^e para dos-tuplas se define como:

$F^e((r_1,\alpha_1),...,(r_m,\alpha_m)) = \triangle(\sum_{j=1}^m w_j\beta_j^*)$ *siendo β_j^* el j-ésimo mayor valor de los $\triangle^{-1}((r_i,\alpha_i))$.*

Vamos ahora a aplicarla a nuestra 2-tupla aplicada a nuestro número realista:

Ejemplo 6.11. *Sea $A = \{(s_3,+0),(s_4,+0),(s_5,+0)\}$ un conjunto de 2-tuplas,y $W = \{w_1 = \frac{3}{11}, w_2 = \frac{2}{11}, w_3 = \frac{6}{11}\}$ los pesos asociados a cada tupla respectivamente cumpliendo las condiciones de la definición. El operador OWA extendido, F^e para dos-tuplas se define como:*

$F^e((s_3,+0),(s_4,+0),(s_5,+0)) = \triangle(\sum_{j=1}^m w_j\beta_j^*) = \triangle(\frac{3}{11}*\triangle^{-1}((s_5,+0))+\frac{2}{11}*\triangle^{-1}((s_4,+0))+\frac{6}{11}*\triangle^{-1}((s_3,+0))=$

$\triangle(\frac{3}{11}*(5+0)+\frac{2}{11}*(4+0)+\frac{6}{11}*(3+0)) = \triangle(3,\widehat{27}) = (s_3,+0{,}27)$

Como hemos visto en el ejemplo 6.9 y el ejemplo 6.11 aplicar el operador OWA a un número realista y aplicarlo a la 2-tupla asociada, nos da el mismo resultado, tanto numérico como 2-tupla. Por lo tanto, podemos enunciar el siguiente lema:

Lema 6.12. *Aplicar el operado OWA a un número realista es lo mismo que aplicarlo al conjunto de dos-tuplas asociado al número realista.*

6.4. Propuesta de investigación

Mediante las definiciones y las relaciones anteriores, se propone desarrollar la idea, al igual que la formalización de los números realistas, para poder demostrar el siguiente teorema:

Teorema 6.13. *Relacionar números realistas a conjuntos de 2-tuplas equivale a interpretar la geometría discreta de pixeles en términos lingüísticos.*

7. Conclusiones

El objetivo principal del trabajo es comparar los números realistas con las 2-tuplas. Como son instrumentos y herramientas que sirven para modelar la información, podríamos compararlos en el sentido de cuál de los dos es más eficiente. Sin embargo, el conocimiento que se pretende modelar es completamente distinto en ambos casos.

Por lo tanto, la mejor opción para hacer el análisis es buscar qué herramienta de las dos es mejor desde el punto de vista de la validez matemática.

En ese sentido, se considera que la teoría de las 2-tuplas está mucho más asentada y formalizada, por lo que se considera mejor. Uno de los puntos fuertes de las 2-tuplas, es que se basa en conceptos matemáticos establecidos, y los toma como referencia para la construcción de un nuevo contenido. Además, los operadores no son nuevos, sino que son operadores conocidos aplicados a este nuevo objeto.

Los números realistas han partido de cero, y tienen una pretensión elevada, sustituir a los números reales para poder trabajar sobre la pantalla del ordenador. Se considera que quizá sería más sencillo modificar herramientas matemáticas conocidas para poder adecuarlas a las necesidades de modelar sistemas discretos.

Por tanto, si tenemos que elegir una herramienta, desde la perspectiva matemática, que nos permita de una forma adecuada, rigurosa y correcta modelar la información lingüística, serían las dos-tuplas.

Referencias

[1] Hardy, G.H., *Apología de un matemático*, 1940.

[2] Alonso Álvarez, A., *Idolatría en las matemáticas: De las Matemáticas inconsistentes a la Cognomática*, Instituto de Automática y Fabricación (Cognomática), Septiembre de 2012, Universidad de León.

[3] De Castro García, N, *Idolatría a las matemáticas*, Recuperado de: `http://hdl.handle.net/10612/2793`

[4] Martínez López, L., *Un nuevo modelo de representación de información lingüística basado en 2-tuplas para la agregación de preferencias lingüísticas*, Tesis doctoral, Universidad de Granada , 1999. Recuperado de `http://sinbad2.ujaen.es/cod/archivosPublicos/tesis/pdf/TesisLuisMartinez.`

[5] L.A. Zadeh, Fuzzy Sets, *Information and Control* (1965) 338-353.

[6] G.J. Klir, B. Yuan, *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications*, (PrenticeHall, 1995).

[7] H.J. Zimmermann, *Fuzzy Sets: Theory and its Applications*, (Kluwer Academic,1996).

[8] R. Jain, *Tolerance Analysis Using Fuzzy Sets*, Int. J. Syst. Sci. 7 (12) (1976) 1393-1401.

[9] L.A. Zadeh, *The Concept of a Linguistic Variable and Its Applications to Approximate Reasoning.* Part I, Information Sciences 8 (1975) 199-249, Part II, Information Sciences 8 (1975) 301-357, Part III, Information Sciences 9 (1975) 43-80.

[10] P.P. Bonissone, K.S. Decker, *Selecting Uncertainty Calculi and Granularity: An Experiment in Trading-off Precision and Complexity*, en: L.H. Kanal and J.F. Lemmer, Eds., Uncertainty in Artificial Intelligence (North-Holland, 1986) 217-247

[11] W. Pedrycz, *Fuzzy Modeling: Paradigms and Practice*, (Kluwer Academic, 1996).

[12] M. Tong, P. P. Bonissone, *A Linguistic Approach to Decision Making with Fuzzy Sets*, IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics 10 (1980) 716-723.

[13] J. Aczél, *OnWeighted Synthesis of Judgements*, Aequationes Math. 27 (1984) 288-307

[14] R.R. Yager, *On Ordered Weighted Averaging Aggregation Operators in Multicriteria Decision Making*, IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics 18 (1988) 183-190.

8. Apéndices

8.1. Apéndice A: Conjuntos difusos

La teoría de conjuntos difusos surge en los años sesenta [[5]]. Se trata de una generalización de la teoría de conjuntos, ya que ésta es insuficiente para modelar ciertos problemas relacionados con la toma de decisiones. Los conjuntos difusos son una representación de la imprecisión y la incertidumbre [[6], [7]]

Se puede utilizar como una herramienta muy valiosa para modelar el lenguaje o situaciones de la vida cotidiana en las que tenemos incertidumbre. Por este motivo, se aplica tanto a modelar sistemas,como bases de datos o modelos de toma de decisiones.

8.2. Conceptos básicos

Definicion 8.1. *Sea A un conjunto en el universo X (finito o infinito),* ***la función característica*** *asociada a A, $A(x)$, con $x \in X$ se define como :*

$$\begin{aligned} A : & X \to \{0,1\} \\ x \mapsto A(x) &= \begin{cases} 1 & si \quad x \in A \\ 0 & si \quad x \notin A \end{cases} \end{aligned}$$

El problema de esta función característica cuando queremos modelar el lenguaje, por ejemplo, es que no podemos decidir con claridad si un objeto del mundo real pertenece o no a un conjunto determinado mediante una decisión binaria de sí o no, ya que tenemos adjetivos que inducen imprecisión.

Es decir, informalmente hablando el problema trata de que no siempre todo podemos clasificarlo en blanco o negro, sino que tenemos una gran escala de grises que también necesitamos modelar.

Si un objeto pertenece a una categoría es con un grado, éste puede ser expresado por un número real en el intervalo [0,1] ([4]). Cuanto más cercano a uno, mayor grado de pertenencia.

Definicion 8.2. *Un conjunto difuso* $\underset{\sim}{A}$ *sobre* X *está caracterizado por una función de pertenencia que transforma los elementos de un dominio, espacio, o universo del discurso* X *en el intervalo [0,1]:* $\mu_{\underset{\sim}{A}} : X \to [0,1]$

Nota 8.3. *Un conjunto difuso* $\underset{\sim}{A}$ *de* X *(los valores entre los que se mueve) se puede representar como un conjunto de pares ordenados de la siguiente manera:*

$(X, \mu_{\underset{\sim}{A}}(x))$ *=(elemento, su grado de pertenencia) con* $x \in X$.

Es decir, $\underset{\sim}{A} = \{(x, \mu_{\underset{\sim}{A}})$ *tal que* $x \in X, \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \in [0,1]\}$

Nota 8.4. *Si X es dicreto y finito, con cardinalidad n, entonces el conjuno difuso es un vector n-dimensional cuyos valores son los grados de pertenencia de los correspondientes elementos de X.[[6]]*

Ejemplo 8.5. $X = \{x_1, ..., x_n\}$, *entonces* $\underset{\sim}{A} = \{(\frac{a_i}{x_i}$ *tal que* $x_i \in X$ *y donde* $a_i = \mu_{\underset{\sim}{A}}(x_i)$ *con* $i = 1, ...n\}$ *entonces:*

$\underset{\sim}{A} = \frac{a_1}{x_1} + \frac{a_2}{x_2} + ... + \frac{a_n}{x_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{x_i}$

Si X es continuo, entonces $\underset{\sim}{A} = \int_x \frac{a}{x}$ con $a = \mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$

Definicion 8.6. *El soporte de un conjunto difuso* $\underset{\sim}{A}$*, y denotado por* $Support(\underset{\sim}{A})$*, es el conjunto de todos los elementos de* $x \in X$*, tales que, el grado de pertenencia sea mayor que cero:*

$Support(\underset{\sim}{A}) = \{x \in X, \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) > 0\}$

Recordamos que si la función es cero significa exclusión de pertenencia.

Definicion 8.7. *Sea* $\underset{\sim}{A}$ *un conjunto difuso sobre X, dado un* $\alpha \in [0,1]$.

Se define el α*-corte sobre* $\underset{\sim}{A}$*,* ${}^{\alpha}A$*, como un conjunto clásico que contiene todos los valores del universo X cuya función de pertenencia en* $\underset{\sim}{A}$ *sea mayor o igual al valor de* α*:*

${}^{\alpha}A = \{x \in X$ *tal que* $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \geq \alpha\}$

8.3. Tipos de funciones de pertenencia

Cualquier función de la forma: $\mu_{\underset{\sim}{A}} : X \to [0,1]$ describe una función de pertenencia asociada a un conjunto difuso $\underset{\sim}{A}$ que depende del concepto y del contexto en el que se usa.

En la mayoría de los casos prácticos, los conjuntos difusos pueden representarse con familias de funciones paramétricas. Las más comunes son la función triangular, la función trapezoidal y la función gaussiana. Veamos cada una de ellas ([4]):

8.3.1. Función triangular

Se define de la siguiente forma:

$$\mu_{\underset{\sim}{A}} : X \to [0,1]$$

$$x \mapsto \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & si \quad x \in [a,b] \\ \frac{c-x}{c-b} & si \quad x \in [b,c] \\ 0 & si \quad x \geq c \end{cases}$$

donde b es el punto modal de la función y a y c los límites inferior y superior para los valores no nulos de $\mu_{\underset{\sim}{A}}$.

8.3.2. Función trapezoidal

Se define de la siguiente forma ([4]):

$$\mu_{\underset{\sim}{A}} : X \to [0,1]$$

$$x \mapsto \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & si \quad x \in [a,b] \\ 1 & si \quad x \in [b,d] \\ \frac{c-x}{c-b} & si \quad x \in [d,c] \\ 0 & si \quad x \geq c \end{cases}$$

donde b y d representan los límites del intervalo dónde la función vale uno.

8.3.3. Función Gaussiana

Se define de la forma ([4]): $A(x) = e^{-k(x-m)^2}$ con $k > 0$.

Las funciones triangulares y trapezoidales son las más habituales para representar números borrosos.

8.4. Números difusos

Los números o intervalos difusos son de la forma: $\mu_{\underset{\sim}{A}} : \mathbf{R} \to [0,1]$

Para poder denominar un conjunto difuso sobre $\mathbf{R}$ como un número difuso, deben cumplirse tres propiedades:

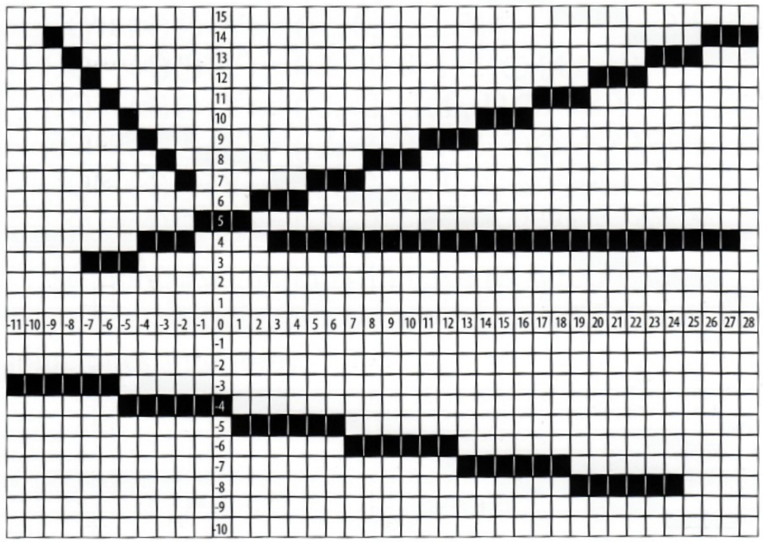

Figura 4: Líneas rectas([2])

1. $\widetilde{A}$ debe ser un conjunto difuso convexo normalizado.

2. Para cualquier $\alpha \in [0,1]$ el $^{\alpha}A$ debe ser un intervalo cerrado.

3. El soporte de $\widetilde{A}$ debe ser finito.

8.5. El principio de extensión

Se usa para transformar cojunto matemáticos no difusos a conjuntos difusos [[8],[6],[9]]

Definicion 8.8. *Si X es el producto cartesiano de los universos $X_1, X_2, ..., X_r$ y $\widetilde{A}_1, \widetilde{A}_2, ..., \widetilde{A}_r$ conjuntos difusos respectivamente con f una función definida de $X \to Y$ con $y = f(x_1, x_2, ..., x_r)$.*

El principio de extensión nos permite definir un conjunto difuso $\widetilde{B}$ en Y a partir de $\widetilde{A}_1, \widetilde{A}_2, ..., \widetilde{A}_r$.

9. Apéndice B: Figuras en la Geometria Discreta

9.1. Las líneas rectas

Una línea es una secuencia de píxeles contiguos. Una línea recta es una secuencia de píxeles contiguos con estructura de cambio regularmente constante.([2])

En la figura 4 se muestran varios ejemplos de líneas rectas.

Por motivos análogos a los anteriormente dados, la definición más coherente de recta realista sería ([3]):

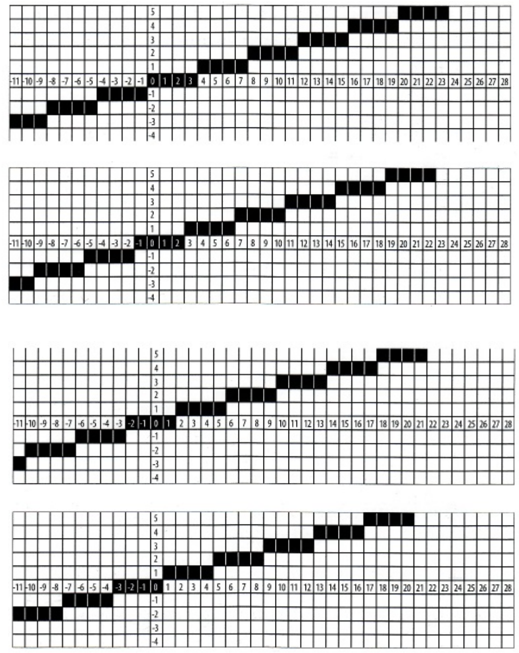

Figura 5: Rectas que pasan por el origen, con la misma pendiente ([2])

Definicion 9.1. *La recta realista es el conjunto* $\mathcal{R}$

Para poder entonces representar figuras geometrícas en este plano de la geometría discreta, debemos buscar una función que nos permite relacionar los pares de coordenadas que representan los pixeles que forman la figura.

Ejemplo 9.2. *Para ello, se empieza con la búsqueda de las funciones más básicas, rectas que pasen por el origen de coordenadas. Necesitamos la pendiente, y se propone que la coordenada Y aumenta una unidad por cada cuatro unidades que lo hace la coordenada X ([2]).*

Uno de los problemas *que conlleva el estudio de esta geometria, es que por ejemplo, en este caso, tenemos varias soluciones con las características citadas.*

Podemos verlo en la figura **??**.

Debido a que en la construcción de las operaciones de los números realistas, una misma operación podía darnos resultados diferentes, todas estas rectas pueden expresarse mediante una *función* dentro del ámbito de los números realistas. Pero en un plano de dos dimensiones, una línea recta debe quedar completamente determinada conocido un punto por el que pasa y la pendiente. No es posible, que haya múltiples líneas rectas con la misma pendiente y el mismo punto por el que pasa, siendo indiferente estar en un plano dentro

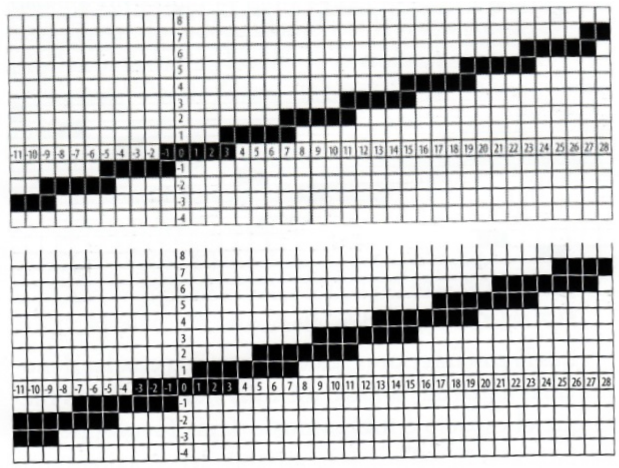

Figura 6: Líneas rectas reforzadas([2])

de la pantalla del ordenador, que estar en un plano real. La *función* propuesta en [2] es la siguiente:

$(X) = (4) \otimes (Y)$

$(X) = (4) \otimes (Y) = (0, 1, 2, 3) \oplus (4 \text{ x } Y)$

$(X) = (4) \otimes (Y) = (-1, 0, 1, 2) \oplus (4 \text{ x } Y)$

$(X) = (4) \otimes (Y) = (-2, -1, 0, 1) \oplus (4 \text{ x } Y)$

$(X) = (4) \otimes (Y) = (-3, -2, -1, 0) \oplus (4 \text{ x } Y)$

Además, esta función,tiene otras soluciones, cuya representación podemos ver en la figura 5.

Ahora bien, éstas últimas soluciones nos hacen afirmar que no podemos decir que la ecuación de la recta es una *función*, ya que asigna varios valores de (Y)(o ninguno) a (X), y precisamente en la definición (formalizada y consistente) de función se específica que es un ley que asigna a cada valor de (X) un y sólo un valor de (Y).

Esta característica, que hace que una línea recta no tenga una *función* asociada, ofrece, entre otras, las siguientes soluciones (ver figura 6).

$(X) = (4) \otimes (Y) = (0) \oplus (4 \text{ x } Y)$

$(X) = (4) \otimes (Y) = (0, 1) \oplus (4 \text{ x } Y)$

La representación anterior se corresponde con lo que el autor denomina *líneas de puntos o rayas*, pero según el propio autor, **una línea es una secuencia de píxeles contiguos**, por lo que es evidente que NO podemos decir que ésta sea una definición consistente.

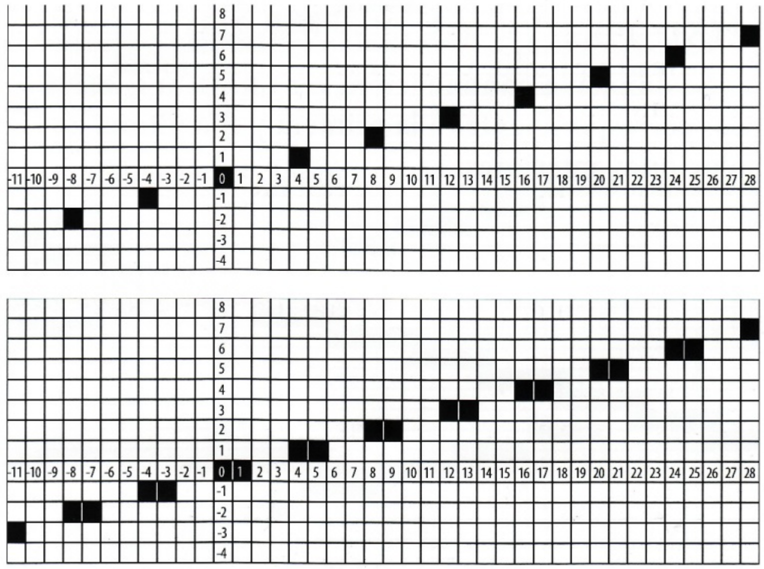

Figura 7: Líneas de puntos y rayas([2])

9.2. Aliasing

Las diferentes soluciones que nos aparecen en las operaciones anteriores, se pueden combinar para corregir lo que se denomina el aliasing de una línea recta en su representación geométrica.

Para profundizar en el tema, se remite a [2].

9.3. Líneas curvas

Para poder estudiar las líneas curvas, se comienza con las parábolas. Ahora bien, la idea es que, al estar la parábola representada matemáticamente mediante una potencia, y al ser la potencia una operación que admite varias soluciones, lo que el autor propone en [2] es que nos quedemos con la que se corresponde con aquel resultado que al representarlo tiene forma de parábola. Evidentemente, este resultado se debe formalizar para que la representación de la parábola no sea una elección del lector.

Ejemplo 9.3. $(X) = (Y)^2$

Una de esas soluciones se corresponde con la siguiente secuencia de operaciones:

$(0)^2 = (0) \oplus (0 \ x \ 0) = (0)$

$(1)^2 = (0, 1, 2) \oplus (1 \ x \ 1) = (1, 2, 3)$

$(2)^2 = (0, 1, 2, 3, 4) \oplus (2 \ x \ 2) = (4, 5, 6, 7, 8)$

$(3)^2 = (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6) \oplus (3 \ x \ 3) = (9, 10, 11, 12, 13, 14, 15)$

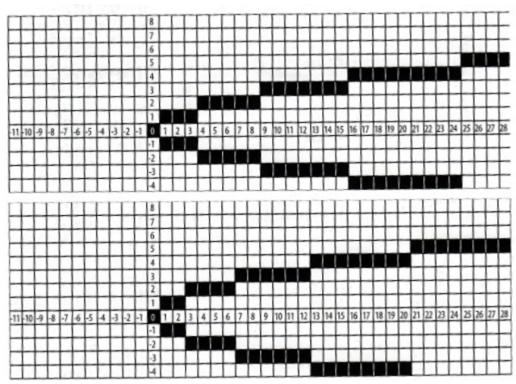

Figura 8: Soluciones de la parábola([2])

En la figura 7, se aprecia la representación gráfica (dos soluciones) de la función expuesta.

9.4. La circunferencia

La circunferencia se caracteriza por tener una curvatura constante. La función matemática que representa una circunferencia es la siguiente:

$(R-1)^2 = (X)^2 + (Y)^2$

Es preciso restarle una unidad al radio en la ecuación de la circunferencia ya que en el plano discreto, el pixel que representa el centro de la circunferencia tiene área igual a uno. Para dibujar una circunferencia se van dando valores a una de las variables y mediante la función anterior se calcula el valor de otra variable.

$(Y) = \sqrt{(R-1)^2 - (X)^2}$

Ejemplo 9.4. *Supongamos que $R = 5$. Los valores de la variable Y para cada valor de la variable X en el primer cuadrante son los siguientes:([2])*

$(X) = 0 \longrightarrow (Y) = \sqrt{(16) - (0)} = \sqrt{(16)} = (4)$

$(X) = 1 \longrightarrow (Y) = \sqrt{(16) - (1;2)} = \sqrt{(15;14)} = (4)$

$(X) = 2 \longrightarrow (Y) = \sqrt{(16) - (3;6)} = \sqrt{(13;10)} = (4,3)$

$(X) = 3 \longrightarrow (Y) = \sqrt{(16) - (7;12)} = \sqrt{(9;4)} = (3,2)$

$(X) = 4 \longrightarrow (Y) = \sqrt{(16) - (13;20)} = \sqrt{(3;-4)} = (2,1,0)$

No es necesario calcular los valores de los otros tres cuadrantes. Es mucho más sencillo obtenerlos por simetría. Podemos ver este caso en la figura 8.

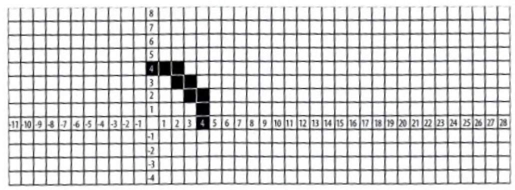

Figura 9: Representación cuadrante con R=5([2])

9.5. El área de un círculo

En la geometria discreta, el área de un círculo viene dada por la suma de todos los píxeles que contiene. Dicha suma puede representarse mediante la siguiente expresión ([2]):

$Área = (\sum_{x=0}^{x=r-1} \sqrt{(r-1)^2 - x^2}) * 4 + 1$

En todo caso, vendría representada por la suma de las áreas de dichos píxeles, con lo que previamente a demostrar una fórmula para el área de círculo, deberia comprobarse el área del cuadrado. Y una vez determinado, demostrar que la suma de las áreas de los cuadrados es igual a la fórmula dada para calcular el área del círculo ([3]).

En el libro [2] se propone una solución más concreta para no tener la necesidad de tener que sumar el área de todos los píxeles, procedimiento que no es práctico en absoluto. El problema es que, para ello, se utiliza un número pero que no sabemos ni cuánto vale ni cómo obtenerlo.

$Área = (r-1)^2 * N_R + 1$

Siendo N_R un número realista que es preciso calcular. Conceptualmente no plantea ninguna dificultad. Basta con realizar varios miles o millones de pruebas para determinar si conviene tener uno general o es mejor varios, dependiente de las dimensiones del radio.([2])

Evidentemente, podemos encontrar cualquier fórmula para determinar el área de un círculo si dejamos letras o parámetros sin calcular.Además, si un número no representa ninguna dificultad conceptual, no es necesario hacer miles de pruebas para poder determinarlo.