

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID  
DEPARTAMENTO DE SEÑALES, SISTEMAS Y RADIOCOMUNICACIÓN  
Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Telecomunicación



CONTRIBUCIÓN EN MÉTODOS  
INVERSOS PARA LA CARACTERIZACIÓN  
DE SISTEMAS RADIANTES

**TESIS DOCTORAL**

**Autor:** José María Díaz Nafría  
*Ingeniero de Telecomunicación*

**Director:** Fernando Las Heras Andrés  
*Doctor Ingeniero de Telecomunicación*

2003





*“Todas las formas, todos los colores, todas las imágenes de cada parte del universo se contraen en un punto (la pupila) ¿Qué otro punto hay tan maravilloso?”.*

Leonardo Da Vinci.  
*Cuaderno de notas.*  
*Arte §I.1.6.*

*“De un tiempo a esta parte  
el infinito  
se ha encogido  
peligrosamente  
quien iba a suponer*

*que segundo a segundo  
cada migaja  
de su pan sin límites  
iba así a despeñarse  
como canto rodado  
en el abismo”.*

Mario Benedetti.

*Las soledades de Babel— El infinito*



---

# Agradecimientos

Cuando uno se acerca a una obra y observa en su fachada el nombre del autor es fácil dejarse llevar por un grave error de interpretación. Acaso puede darnos la impresión de que fue aquel, con las únicas fuerzas de su brazo, el que levantó toda esa obra. Cuando la época es de marcado individualismo, como es –más que nunca– la que nos toca, esta tendencia se ve acentuada por el hecho de que cada uno parece terminarse en los estrechos márgenes de la piel que le circunscribe y todo lo que queda fuera de semejante perímetro se toma por cosa ajena, a no ser que esté ligada a la persona en relación de pertenencia. Naturalmente si nuestra interpretación de la persona, como quería Ortega, no terminase en tan estrechos márgenes, sino que se extendiera sobre la circunstancia que le rodea, quedaría claro que cuando éste rubrica la frente de su obra no está hablando sólo del hecho de su brazo, sino del hecho de toda su persona, incluido ese entorno que le es inseparable, o lo que es más: le es esencial. Claro está, que la voluntad del sujeto firmante (ahora sí, englobada en aquel perímetro) juega aquí un valor capital, aunque sólo a la manera que el músculo es relevante en el salto y poco más que un pedazo de carne magra si se le dejara solo. Sólo así es como se puede entender la autoría del trabajo que sigue a estas primeras palabras; y en este sentido los agradecimientos se tornan en una extensión de la autoría más allá del contorno de mi piel, que en estricto no es mi perímetro, ya que si un ideal cuchillo me seccionara siguiendo el cauce de esa superficie, lo que hacia dentro quedara, de ser tan poco, podría decirse que no es nada. La obra y el agradecimiento están pues en la misma relación que la acción y reacción ligadas a cualquier acto dinámico; y me sería tan difícil dar cuenta fiel de todas las partes involucradas en la dinámica de este trabajo como al ciempiés bailarín explicar pormenorizadamente la relación de sus movimientos. Por ello más que dar razón del por qué del agrado me limitaré a hacer un repaso escuálido de la circunstancia de la que no soy sino parte. Y como lo más importante es referir lo que comienza y lo que acaba me veo forzado a empezar por esos cambios radicales que han acontecido durante este tiempo en mi circunstancia: hace algo más de un año Rosario se marchó de nuestro lado; medio año después apareció Marcos, ensanchando con sus vastos ojos nuestro horizonte. Ella nos dejó la enorme fuerza de su amor, y en eso sigue con nosotros; él nos dio la ocasión de quererlo y eso nos dejó en las mismas puertas de un camino inagotable.

¿Qué vida puede concebirse sin la ocasión de sus padres, y aun más allá, la de sus ascendientes?, ¡Pues que conste y quede claro que en esa ocasión radican todas las demás!... Y si ese es el horizonte del que vengo, en el que sobre todo estoy es el de Cristina; ella es el fértil suelo del presente sobre el

que veo florecer las guirnaldas del futuro. Pero la farragosa espesura, que ha de penetrarse para andar los caminos que devanan la vida, sería infranqueable si no fuera por el brazo amigo que viene a desbrozar la maleza, en el mejor de los casos para caminarlos juntos. Y aquí no puedo por fuerza de concisión dar cuenta de tantas y tantas manos que han hecho los caminos andados, ya no sólo llevaderos, sino rastros formidables de memoria y mentaré sólo algunos de los más cercanos en el tiempo y el espacio, bajo un orden fortuito: Dani, Javi, Luis, Ana, Jose, Miriam, Susana, María Pilar, Rafa, Ramón, Mari Jose, Rocio, Fernando, Aína, Basil, Jorge, Lelia, Manolo, Toño, Plamen... y en fin, todos aquellos que vinieron a engrosar la familia que me dio la sangre, y esta misma.

No obstante, todo esto apenas explica el orden de circunstancia sobre el que radican los tenores científicos y técnicos de este trabajo. Al margen de todo lo que se debe a la inmensa y longevísima empresa del “conocer”, que por aproximación debiera atribuírsele todo, debo al menos remontarme a la casa en la que empecé a desarrollar un trabajo semejante, pero de la que tuve que marcharme por ocasión de las vicisitudes, aquella casa fue la Technische Universität Wien. Por fortuna para el desabrigo de mis andanzas académicas, encontré cobijo bajo un agradable techo, el del Grupo de Radiación; y en esta casa un mentor, Fernando, del que aprender inusitadas virtudes. Y digo inusitadas porque en el curso de los años he topado a menudo con moles inamovibles de convicción encastilladas de prestigio, pero muy pocas veces la franca intención y paciencia de discutir sinceramente las cosas hasta desgranarlas en asuntos claros y distintos –como dice el precepto racionalista y como afortunadamente he encontrado en Fernando-.

Pero debo aun resaltar un hecho que de acuerdo a la actual arena política resulta irónico. Hará un año Basil Mohammed Al-Hadithi presentaba una tesis bajo las tejas de esta misma Universidad que fue una auténtica lección de excelencia científica. Él llegó aquí procedente de la Universidad de Bagdad... Es un ejemplo de lo que nos llega de Irak ¿Cuál es el ejemplo que nosotros les devolvemos?

En fin, si este trabajo valiera algo, cosa que no es segura, y que sólo podría serlo en la medida que las razones que encierra fueran lo suficientemente valientes como para luchar con otras hasta que quedaran exhaustas, entonces ya ven que la firma que lo suscribe apenas dice nada de su verdadera autoría. Pero debería hacer una última advertencia: toda esa circunstancia que apenas he pincelado encierra muchas posibilidades, no realizarlas en su plena virtud sí es cosa mía. Es decir, si de algo puede arrogarse el firmante autor es de sus errores, casi todo lo demás le viene en gracia.

# Contenido

<b>I. INTRODUCCIÓN.....</b>	<b>1</b>
1.1 TRES APROXIMACIONES A NUESTRO PROBLEMA.....	3
1.1.1 <i>El problema electromagnético inverso y el del conocimiento.....</i>	<i>3</i>
1.1.2 <i>Nuestro método de investigación.....</i>	<i>4</i>
1.1.3 <i>Los límites de la observación .....</i>	<i>5</i>
1.2 PANORÁMICA DEL CAMINO DE IDA Y VUELTA.....	8
1.2.1 <i>Problema directo .....</i>	<i>8</i>
1.2.2 <i>Problema inverso .....</i>	<i>10</i>
1.2.3 <i>Sobre la observación del campo electromagnético.....</i>	<i>11</i>
<b>II. PROBLEMA ELECTRO-MAGNÉTICO DIRECTO .....</b>	<b>13</b>
2.1 ECUACIÓN DE ONDA Y CAMPOS RADIADOS.....	15
2.1.1 <i>Campos debidos a fuentes eléctricas y magnéticas .....</i>	<i>17</i>
2.2 TEOREMA DE UNICIDAD Y EQUIVALENCIA .....	20
2.3 FORMULACIONES DIRECTAS.....	22
2.3.1 <i>Fuentes reales.....</i>	<i>23</i>
2.3.2 <i>Fuentes equivalentes magnéticas.....</i>	<i>24</i>
2.3.3 <i>Fuentes electromagnéticas generalizadas .....</i>	<i>25</i>
2.3.4 <i>Campos sobre geometrías canónicas.....</i>	<i>25</i>
2.3.5 <i>Campos para un observador lejano .....</i>	<i>27</i>
2.3.6 <i>Representación modal.....</i>	<i>30</i>
a) Modos planos.....	31
b) Modos cilíndricos.....	32
c) Modos esféricos.....	33
d) Isomorfismo entre la distribución superficial de corrientes y la representación modal.....	33
2.4 DISCRETIZACIÓN DEL PROBLEMA ELECTROMAGNÉTICO.....	34
2.4.1 <i>Teorema de muestreo para el problema electromagnético .....</i>	<i>35</i>
2.4.2 <i>Muestreo del dominio de observación y del campo observado .....</i>	<i>41</i>
Funciones de distribución en los subdominios de muestreo (interpolación).....	42
2.4.3 <i>Ondas evanescentes .....</i>	<i>43</i>

2.4.4	<i>Expresión del problema discretizado</i> .....	50
2.4.4.1	Dominios planos .....	51
2.4.5	<i>El espacio de los campos radiados sobre el dominio de observación: <math>\mathcal{E}</math></i> .....	52
2.5	EJEMPLOS .....	53
2.5.1	<i>Corrientes sobre los vértices de un icosaedro</i> .....	54
2.5.1.1	Formulación del problema.....	55
2.5.1.2	Distribución discontinua de corrientes interiores.....	57
2.5.1.3	Distribución continua (esférica) de corrientes interiores.....	61
2.5.2	<i>Campo radiado por una antena de agrupación de dipolos</i> .....	62
2.5.2.1	Formulación del problema .....	63
2.5.2.2	Muestreo del campo muy próximo a la antena .....	65
2.5.2.3	Proyección sobre el espacio $\mathcal{E}$ .....	69
2.5.2.4	Sobre la frecuencia espacial.....	74
2.6	SUMARIO .....	76

### III. PROBLEMA ELECTRO-MAGNÉTICO INVERSO..... 79

3.1	INTRODUCCIÓN .....	81
3.1.1	<i>Acerca del problema de sólo observar el campo eléctrico</i> .....	83
3.1.2	<i>Los problemas inversos</i> .....	84
3.2	PROBLEMA INVERSO CON FASE .....	85
3.2.1	<i>Proyección ortogonal sobre el espacio <math>\mathcal{E}</math></i> .....	86
3.2.1.1	Unicidad de solución.....	87
3.2.1.2	Solución analítica .....	89
3.2.1.3	Solución numérica .....	90
	a) Solución numérica de la ecuación lineal.....	90
	b) Reducción numérica del residuo.....	91
	c) Algoritmo iterativo basado en el Teorema Global de la Convergencia.....	93
3.2.2	<i>Observación plana cercana y observación lejana</i> .....	94
3.2.3	<i>Observación incompleta</i> .....	97
3.2.3.1	Observación incompleta sobre dominios planos o lejanos.....	100
3.3	PROBLEMA INVERSO SIN FASE .....	102
3.3.1	<i>Unicidad de solución</i> .....	104
3.3.1.1	Relación de dispersión entre el módulo y la fase .....	106
3.3.1.2	Clases de ambigüedad .....	108
3.3.1.3	Teorema de Hoenders .....	109
3.3.1.4	Crítica de algunas teorías sobre la ambigüedad de la distribución de fase .....	111
3.3.1.5	Unicidad de solución con dos distribuciones de campo.....	112
3.3.1.6	Extensión al caso discreto .....	113
	a) Extensión analítica en términos de la transformada Z.....	113
	b) Acerca de la ambigüedad.....	114
	c) Discusión de la unicidad para distribuciones de soporte finito .....	116



3.3.1.7	Extensión a dominios superficiales.....	120
3.3.1.8	Extensión a las distribuciones de campo en zona de Fresnel.....	122
	a) Multiplicidad de solución a partir de una única distribución de módulo del campo.....	122
	b) Unicidad de solución a partir de varias distribuciones de módulo del campo.....	123
3.3.2	<i>Soluciones al problema inverso sin fase.....</i>	125
3.3.2.1	Procedimientos manipuladores.....	127
	a) Manipulación de la distribución de campo mediante una radiación de referencia.....	128
	b) Manipulación de la distribución de fuentes.....	132
3.3.2.2	Procedimientos observadores.....	135
	a) Proyecciones sucesivas.....	136
	b) Métodos de optimización.....	141
	c) Solución en el espacio del cuadrado del módulo.....	146
3.4	SUMARIO.....	147

#### **IV. VALIDACIÓN EXPERIMENTAL..... 151**

4.1	PRUEBAS EXPERIMENTALES.....	153
4.2	ANTENA DE APERTURA CIRCULAR.....	154
4.2.1	<i>Frecuencia espacial sobre los dominios de observación.....</i>	155
4.2.2	<i>Problema inverso con fase.....</i>	156
4.2.3	<i>Aumento del dominio de observación.....</i>	160
4.2.4	<i>Problema inverso sin fase.....</i>	163
	4.2.4.1 No unicidad de solución a partir de una distribución de módulo.....	164
	4.2.4.2 Métodos cuasi-Gerchberg-Saxton.....	167
	4.2.4.3 Métodos generalizados de Proyecciones Sucesivas.....	171
4.3	ANTENA DE AGRUPACIÓN DE RANURAS.....	176
4.3.1	<i>Dimensión del problema electromagnético.....</i>	177
	4.3.1.1 Distribución de dipolos hercianos.....	177
	4.3.1.2 Frecuencia espacial del campo radiado.....	177
4.3.2	<i>Problema inverso con fase.....</i>	177
4.3.3	<i>Problema inverso sin fase.....</i>	180
	4.3.3.1 Acerca de la unicidad de solución.....	180
	4.3.3.2 Métodos generalizados de Proyecciones Sucesivas.....	182
4.4	ANTENA DE AGRUPACIÓN DE DIPOLOS PARA RADAR SECUNDARIO.....	186
4.4.1	<i>Síntesis de la distribución de campo.....</i>	186
	4.4.1.1 Justificación del dominio de medida.....	186
	4.4.1.2 Particularización del problema directo.....	188
	4.4.1.3 Síntesis de medidas.....	189
4.4.2	<i>Comparación de métodos inversos sin fase.....</i>	189
	4.4.2.1 Método de Proyecciones Sucesivas con formulación de corrientes Conductivas (MPS-C) ..	192
	4.4.2.2 Método de Optimización sobre el Cuadrado de la Amplitud de campo eléctrico (MOCA).....	194
	4.4.2.3 Método de Proyecciones Sucesivas con formulación de corrientes Magnéticas (MPS-M).....	197

---

<b>V. SOBRE LA OBSERVACIÓN DEL CAMPO ELECTROMAGNÉTICO .....</b>	<b>201</b>
5.1 INTRODUCCIÓN .....	203
5.2 SISTEMAS OBSERVADORES DE MEDIDA.....	204
5.3 MODELO DE SISTEMA ADAPTADO DE MEDIDA .....	206
5.3.1 <i>Arquitectura básica del sistema</i> .....	207
5.3.2 <i>Detección de señales de radiofrecuencia</i> .....	208
5.3.3 <i>Recepción óptima de las distribuciones de campo</i> .....	210
5.4 SISTEMA DE DIAGNOSIS PARA ANTENAS DE RADAR SECUNDARIO.....	214
5.4.1 <i>Arquitectura del sistema</i> .....	217
5.4.2 <i>Circuito de detección</i> .....	218
5.4.3 <i>Recepción óptima del módulo de la distribución de campo radiada por la antena SSR</i> .....	226
5.4.4 <i>Resultados del sistema de diagnosis</i> .....	231
<b>VI. CONCLUSIONES Y LÍNEAS FUTURAS.....</b>	<b>233</b>
6.1 CONCLUSIONES.....	235
6.2 LÍNEAS FUTURAS .....	236
<b>VII. BIBLIOGRAFÍA .....</b>	<b>239</b>

# Índice de ilustraciones

<b>Figura 1-1.</b>	Procedimiento, descrito por Descartes, para ver directamente la imagen formada en la retina del ojo .....	6
<b>Figura 1-2.</b>	Esquema de los problemas directo e inverso.....	8
<b>Figura 2-1.</b>	Modelo del sistema radiante .....	15
<b>Figura 2-2.</b>	Geometría del problema de radiación.....	18
<b>Figura 2-3.</b>	a) Problema real; b) modelo del problema equivalente; c) equivalente de Love; d) equivalente conductor eléctrico e) equivalente conductor magnético. ....	21
<b>Figura 2-4.</b>	Problema electromagnético con corrientes eléctricas. ....	23
<b>Figura 2-5.</b>	Problema electromagnético con corrientes magnéticas. ....	24
<b>Figura 2-6.</b>	Geometría del problema electromagnético para un observador lejano.....	28
<b>Figura 2-7.</b>	Interpretación geométrica de los parámetros fundamentales en una observación lejana. ....	29
<b>Figura 2-8.</b>	Superficie de las frecuencias espaciales isomorfa con el espacio de los campos radiados. ....	36
<b>Figura 2-9.</b>	Dimensión esencial del problema de radiación.....	38
<b>Figura 2-10.</b>	Interpolación mediante funciones de subdominio. a) dominio espacial b) dominio de la frecuencia espacial. El uso de funciones definidas sólo en el intervalo del subdominio producen distorsión. ....	43
<b>Figura 2-11.</b>	Exceso del ancho de banda espacial con respecto al número de onda en función de la distancia para varios errores de truncamiento.....	45
<b>Figura 2-12.</b>	Módulo de la dependencia radial de los modos esféricos, usando como argumento la distancia radial expresada en número de longitudes de onda.....	46
<b>Figura 2-13.</b>	Geometría del problema de discretización del campo generado por radiadores finitos. ....	47
<b>Figura 2-14.</b>	Variación del número de muestras necesarias sobre las esferas ampliadas de radio $a+\delta$ .....	48
<b>Figura 2-15.</b>	Dimensión esencial del problema superficial (a) y factores de sobremuestreo y de exceso del radio para los problemas tanto superficial como curvilíneos (b).....	49
<b>Figura 2-16.</b>	Dimensión esencial para dominios curvilíneos (Los parámetros $\chi$ y $\delta$ correspondientes son los de la figura 2-15.b). ....	49
<b>Figura 2-17 a 2-25</b>	Ejemplo de corrientes interiores a un icosaedro .....	54
<b>Figura 2-16 a 2-44</b>	Ejemplo de antena de agrupación de dipolos. ....	57 a 76
<b>Figura 3-1.</b>	Esquema general de proceso iterativo aplicado al problema electromagnético inverso.....	82
<b>Figura 3-2.</b>	Procedimiento iterativo para la aplicación de medidas sobre parte del dominio de interés. ....	99

<b>Figura 3-1.</b>	Esquema general de proceso iterativo aplicado al problema electromagnético inverso.....	82
<b>Figura 3-2.</b>	Procedimiento iterativo para la aplicación de medidas sobre parte del dominio de interés. ....	99
<b>Figura 3-3.</b>	Procedimiento iterativo para la aplicación de información adicional en dominios planos para una observación cercana (zona de Fresnel).....	101
<b>Figura 3-4.</b>	Procedimiento iterativo para la aplicación de información adicional para reconstrucción sobre dominios planos y observación lejana (zona de Fraunhofer).....	101
<b>Figura 3-5.</b>	Contorno de integración para la aplicación de la fórmula integral de Cauchy.....	107
<b>Figura 3-6.</b>	Ceros de la transformada Z de una distribución discreta de fuentes, que equivale a la extensión analítica de la distribución de campo lejano. ....	115
<b>Figura 3-7.</b>	Distribuciones correspondientes a dos ceros recíprocos conjugados. Su soporte es diferente.....	117
<b>Figura 3-8.</b>	Distribuciones de fuentes de orden cuatro que generan una misma distribución de módulo de campo. A la izquierda se representa la distribución original; a la derecha dos variantes afectadas por factores de Blaschke (conmutación de uno o dos ceros recíprocos). ....	118
<b>Figura 3-9.</b>	Ejemplo de polinomios irreducibles asimétrico y simétrico. ....	121
<b>Figura 3-10.</b>	Apodización usando una <i>sinc</i> en el dominio de las fuentes. Su efecto es eliminar los ceros en el dominio del campo para poder usar la transformada logarítmica de Hilbert. ....	132
<b>Figura 3-11.</b>	Algoritmo de Gerchberch-Saxton. ....	137
<b>Figura 3-12.</b>	Algoritmo de Misell. ....	138
<b>Figura 3-13.</b>	Algoritmo de Anderson generalizado.....	139
<b>Figura 3-14.</b>	Algoritmo generalizado de proyecciones sucesivas. ....	140
<b>Figura 3-15.</b>	Algoritmo generalizado de proyecciones sucesivas para múltiples dominios de medida. ....	141
<b>Figura 4-1.</b>	Geometría de la <i>antena de apertura circular</i> y de los dominios de observación (distancias expresadas en metros). ....	154
<b>Figura 4-2.</b>	Representación gráfica del filtrado óptimo para la intensidad de campo.....	156
<b>Figura 4-3 a 4-6</b>	Problema inverso con fase.....	157
<b>Figura 4-7 a 4-10</b>	Ampliación del dominio de observación. ....	160
<b>Figura 4-11 a 4-24</b>	Problema inverso sin fase. ....	165
<b>Figura 4-25.</b>	Geometría del problema inverso para la <i>antena de agrupación de ranuras</i> .....	176
<b>Figura 4-26 a 4-29.</b>	Problema inverso con fase. ....	178
<b>Figura 4-30 a 4-37.</b>	Problema inverso sin fase.....	181
<b>Figura 4-38.</b>	Vista frontal de la <i>antena de agrupación de dipolos para radar secundario</i> , principales dimensiones y detalle lateral de una columna. ....	187
<b>Figura 4-39.</b>	Dominio de medida de las antenas de Radar secundario. ....	187
<b>Figura 4-40.</b>	Formulación del problema: a) mediante corrientes conductivas –geometría detallada de la antena–; b) mediante corrientes equivalentes magnéticas –véase figura 2-28, aproximación puntual de la columna–. ....	188
<b>Figura 4-41 a 4-44.</b>	Método de Proyecciones Sucesivas con formulación de corrientes Conductivas (MPS-C).....	192
<b>Figura 4-45 a 4-48.</b>	Método de Optimización sobre el Cuadrado de la Amplitud de Campo con formulación de corrientes conductivas (MOCA).. ....	195

<b>Figura 5-1.</b>	Arquitectura básica del sistema adaptado de medida.....	208
<b>Figura 5-2.</b>	Detección adaptada de la amplitud de las señalización para la adquisición de distribuciones de módulo.....	209
<b>Figura 5-3.</b>	Detección adaptada de las señalización para la adquisición de distribuciones de campo complejo.....	210
<b>Figura 5-4.</b>	Recepción adaptada del nivel de las señalización para la adquisición de distribuciones de módulo. ....	212
<b>Figura 5-5.</b>	Recepción adaptada del nivel de las señalización para la adquisición de distribuciones de módulo. ....	213
<b>Figura 5-6.</b>	Observación del campo radiado por la antena SSR mientras se encuentra operativa, colocando el sistema adaptado de medida en sus inmediaciones.....	215
<b>Figura 5-7.</b>	Características temporales de las señales de interrogación SSR.....	216
<b>Figura 5-8.</b>	Arquitectura básica del sistema de diagnóstico para antenas de radar secundario.....	217
<b>Figura 5-9.</b>	Operación del sistema de diagnóstico.....	218
<b>Figura 5-10.</b>	Circuito de detección de las señales de interrogación.....	218
<b>Figura 5-11.</b>	Configuración biplaca sobre fibra de vidrio del circuito de detección. ....	219
<b>Figura 5-12.</b>	Características mecánicas del circuito de detección. ....	219
<b>Figura 5-13.</b>	Estructura de la antena e integración con el resto del circuito .....	220
<b>Figura 5-14.</b>	Filtro de líneas acopladas en microtira.....	220
<b>Figura 5-15.</b>	Características experimentales del filtro de la fig. 5-14.....	221
<b>Figura 5-16.</b>	Características experimentales de la antena-filtro de las fig. 5-13 y 5-14.....	221
<b>Figura 5-17.</b>	Características técnicas del Amplificador Logarítmico AD-8313.....	222
<b>Figura 5-18.</b>	Circuito de polarización del amplificador logarítmico.....	222
<b>Figura 5-19.</b>	Vista en planta del circuito completo de detección.....	223
<b>Figura 5-20.</b>	Medidas a la salida del circuito de detección: a) barrido de potencia, característica logarítmica de transferencia; b) barrido en frecuencia, selectividad.....	224
<b>Figura 5-21.</b>	Medidas a la salida del circuito de detección. Conjunto: Transmisor (simulación de pulsos SSR) – Bocina – Circuito de detección. Para varias potencias de transmisión.....	225
<b>Figura 5-22.</b>	Característica de respuesta del circuito de detección para la amplitud del rizado y para la amplitud estabilizada tras el rizado.....	225
<b>Figura 5-23.</b>	Estructura de adquisición óptima.....	226
<b>Figura 5-24.</b>	a) Constelación para la decisión de señales válidas. b) Problema equivalente.....	228
<b>Figura 5-25.</b>	Constelación para la decisión del nivel de los pulsos $P_1$ .....	228
<b>Figura 5-26.</b>	Circuito de recepción óptima y adquisición de datos. ....	229
<b>Figura 5-27.</b>	Dispositivos empleados para la realización del receptor óptimo y esquema de conexiones. ....	230
<b>Figura 5-28.</b>	Organización de la memoria para la realización de las operaciones del receptor óptimo.....	231



# Símbolos

$\mathcal{D}$	Dominio superficial de observación (§2.1)
$S$	Superficie que engloba las fuentes de campo electromagnético (§2.1)
$\xi, \eta, \lambda$	Se emplean para designar coordenadas curvilíneas generalizadas. En algunos casos de dominios superficiales se emplea también la pareja $(u, v)$ .
$h_\xi$	Factor de escala (o de Lamé) de la coordenada curvilínea $\xi$ .
$\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{J}, \mathbf{M} \dots$	Vectores de campo eléctrico, magnético, corriente eléctrica, corriente magnética... En general, se simbolizan con negrita las magnitudes vectoriales.
$\mathbf{f}$	Vector que representa, de forma genérica, las fuentes de campo electromagnético, ya sean estas: corrientes eléctricas, magnéticas, o una combinación de ambas según la definición (2-37).
$\underline{\mathbf{G}}, \underline{\mathbf{T}}_{CL}, \underline{\mathbf{H}}_\ell \dots$	Funciones diádica de Green, de campo lejano, modales... Al multiplicarse por un vector el resultado es otro vector (2-29, 2-23, 2-37, 2-43, 2-50, 2-57, 2-60).
$\underline{\mathbf{A}}, \underline{\mathbf{A}}$	Columna de vectores y escalares respectivamente
$\underline{\mathbf{B}}, \underline{\mathbf{B}}$	Operador diádico y matriz de escalares respectivamente
$\underline{\mathbf{B}}^T$	Matriz traspuesta. $b_{n,m} = b_{m,n}$
$\underline{\mathbf{B}}^*$	Matriz conjugada. $b_{n,m} = b_{n,m}^*$
$\underline{\mathbf{B}}^+$	Matriz adjunta. Traspuesta de la conjugada. $b_{n,m} = b_{m,n}^*$
$\mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$	Conjunto de los números enteros, reales y complejos respectivamente.
$\mathcal{F}\{\circ\}, \mathcal{F}_m\{\circ\}$	Transformada de Fourier unidimensional, bidimensional... Cuando el argumento sea una distribución discreta, entonces la transformada es discreta.
$\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{A}}$	Transformada del campo vectorial $\mathbf{A}$ o del campo escalar $\mathbf{A}$ . Dependiendo del caso la transformada será unidimensional, bidimensional o tridimensional; y según sea el campo $\mathbf{A}$ , continuo o discreto, así será la transformada.
$\underline{\mathcal{M}}$	Columna de dos elementos que agrupa los dos modos del mismo orden (2-51, 2-57, 2-60).
$H_n^{(2)}, h_n^{(2)}$	Funciones cilíndricas y esféricas de Hankel de segunda especie y orden $n$ .
$\chi$	Factor en exceso de ancho de banda espacial, sobre un determinado dominio superficial, respecto a $2\pi/\lambda$ (§2.4.1, fig. 2-9; ec. 2-68, 2-72).
$\underline{\mathbf{E}}, \underline{\mathbf{H}}, \underline{\mathbf{f}} \dots$	Representa una distribución discretizada de campo vectorial (ordenada en una columna).
$\underline{\mathcal{T}}$	Operador diádico lineal de transformación del espacio discretizado de las fuentes al espacio del campo eléctrico, definido en (2-91)

---

$\underline{\Psi}_n$	Función de campo que corresponde al campo eléctrico sobre el dominio $\mathcal{D}$ (discretizado) por el dipolo $n$ -ésimo de Hertz unitario de la retícula de fuentes (§2.4.4)
$\mathfrak{E}$	Espacio vectorial definido por las funciones de campo $\{\underline{\Psi}_n\}$ sobre un cuerpo de escalares complejos y por un producto interno como el (2-96) o el (3-3). Su dimensión corresponde con la esencial. Ver §2.4.5.
$\mathfrak{E}^\circ$	Complemento ortogonal del espacio $\mathfrak{E}$ .
$\langle \underline{E}_1, \underline{E}_2 \rangle$	Producto interno entre dos distribuciones del espacio $\mathfrak{E}$ . Definido en (2-96) y de forma más general, usando la matriz de factores de ponderación $\underline{z}$ , en (3-3).
$\ \underline{E}\ $	Norma de una distribución $\underline{E} \in \mathfrak{E}$ . Definido en (2-97) y (3-4).
$d(\underline{E}_1, \underline{E}_2)$	Distancia entre dos distribuciones de campo $\underline{E}_1$ y $\underline{E}_2$ del espacio $\mathfrak{E}$ . Definida en (2-98) y (3-4).
$d(\underline{f})$	Distancia entre la distribución de campo observada $\underline{E}_m$ y la debida a una distribución de fuentes $\underline{f}$ , $\underline{E}_f$ . Definido en (3-7): $d(\underline{f}) = d(\underline{E}_m, \underline{E}_f(\underline{f}))$ .
$\underline{\zeta}$	Matriz hermética positiva que caracteriza la distancia cuadrática entre distribuciones en el espacio $\mathfrak{E}$ . Definido en (3-8) y (3-9).
$\underline{b}$	Vector columna en el que cada elemento corresponde al producto interno con cada una de las funciones base $\underline{\Psi}_n$ del espacio $\mathfrak{E}$ . Ver (3-8): $\underline{b} = \underline{\tau}^+ \cdot \underline{\pi} \cdot \underline{E}$
$\underline{p}$	Designa una dirección de cambio en el espacio de las distribuciones de fuente. Empleada en los procedimientos iterativos de reducción de residuo. (§3.2.1)
$\mathfrak{S}\{\circ\}$	Operador de iteración que representa las operaciones realizadas sobre una secuencia de datos en un ciclo completo de un proceso iterativo. Ver §3-1.
$\mathcal{M}\{\circ\}$	Operador que sustituye sobre una distribución de campo cualquiera las medidas que se hayan realizado sobre el dominio de observación (por ejemplo, campo complejo sobre una parte del dominio completo, módulo del campo, etc.)
$\mathcal{R}_f\{\circ\}$	Operador que aplica a una distribución cualquiera de fuentes un conjunto de restricciones conocidas a priori o por observación (por ejemplo, subdominios con nullos de corriente; igualdad de fase, etc.)
$\mathcal{R}_E\{\circ\}$	Operador que aplica a una distribución cualquiera de campo un conjunto de restricciones conocidas a priori (típicamente el ancho de banda espacial)
$\mathcal{P}_i\{\circ\}$	Operador de proyección del campo sobre el dominio $\mathcal{D}$ ; al campo sobre $\mathcal{D}$
$\mathcal{H}\{\circ\}$	Transformada de Hilbert (3-38).
$\mathcal{O}\{\circ\}$	Representa el comportamiento asintótico de la función argumento.
$E(u), E(z)$	$u \in \mathfrak{R}$ , se utiliza para designar la coordenada del dominio de observación lejano; $z \in \mathfrak{C}$ , equivale a la extensión compleja de $u$ . Así, $E(u)$ es la distribución de campo lejano y $E(z)$ su extensión analítica.
$z_k$	Uno de los ceros de la extensión analítica de la distribución de campo, $E(z)$ .
$B_k(z)$	Factor de Blaschke sobre el cero $k$ -ésimo, $z_k$ , de la extensión analítica de la distribución de fuentes. Ver §3.3 y ec. (3-42).
SPS, SPS	<i>Semiplano complejo Superior y Semiplano complejo Inferior</i>



$f[n]$	Distribución discreta de fuentes (esencialmente idéntica a $\underline{f}$ ).
$\mathcal{F}(z)$	Transformada Z de $f[n]$ : extensión analítica de la distribución discreta de campo lejano.
$f[\mathbf{n}], \mathcal{F}(\mathbf{z})$	En el caso superficial, §3.3.1.7: $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2$ y $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^2$ . Particularizando $\mathbf{z} = (e^{j\theta_1}, e^{j\theta_2}) = (u, v)$ , se obtienen las coordenadas del dominio de observación lejano (§2.3.5).
$\mathcal{F}_k(\mathbf{z})$	Cada uno de los polinomios irreducibles que constituyen $\mathcal{F}(\mathbf{z})$ . Ver §3.3.1.7.
$\tilde{\mathcal{F}}_k(\mathbf{z})$	Polinomio simétrico del $\mathcal{F}_k(\mathbf{z})$ . $\tilde{\mathcal{F}}_k(\mathbf{z}) = \mathbf{z}^{-N} \mathcal{F}_k^*(1/\mathbf{z}^*)$
$\xi(\underline{f})$	Funcional definido para la minimización del error entre las medidas de campo y los valores correspondientes a una distribución de fuentes $\underline{f}$ . §3.3.2.1.b
$\xi(t)$	Señal básica que por recurrencia constituye la señalización del sistema radiante bajo estudio. Así la señalización será: $\sum_k \xi(t - kT)$

## Referencias

Para referenciar partes del texto o bibliografía externa se ha utilizado una simbología que, de acuerdo a los hábitos arraigados en la documentación científica, serán fácilmente descifrables. No obstante, puesto que no hay un único modo consensuado de referencia, y ciertos detalles pudieran llevar a confusión, la tabla siguiente recoge unos ejemplos que clarificarán la simbología utilizada. Tanto las ecuaciones, como las figuras y tablas se han numerado en cada capítulo y, en consecuencia, para designarlas se antecede el número del capítulo. La bibliografía se ha optado por ordenarla alfabéticamente, de modo que sean más fácilmente identificables los autores, por esta razón los números que designan la literatura no seguirán en el texto un orden creciente. Obsérvese además que en las referencias bibliográficas se utilizan dos signos de puntuación: ‘coma’ y ‘punto y coma’. La *coma* se emplea para separar el número que identifica su posición en la lista bibliográfica de algún tipo de designación interna (p.ej. ecuación, capítulo, línea) fácilmente identificable cuando se tiene delante la pieza literaria en cuestión. Por otra parte, el *punto y coma* se emplea para separar diferentes referencias bibliográficas.

(2-3)	Hace alusión a la ecuación 3 del tema 2, designada así en su margen derecha.
§2.3.4.1	Hace alusión al apartado “2.3.4.1 Corrientes sobre los vértices de un icosaedro”
fig. 3-1	Hace alusión a la figura 1 del tema 3.
[5-7; 20; 60]	Referencias bibliográficas: 5, 6, 7, 20 y 60.
[34, p.20]	Referencia bibliográfica n° 34, página 20.
[6, §2; 3; ec.2]	Referencia bibliográfica n° 6 (apartado 2) y referencia n° 3 (ecuación 2).



# Resumen

El objeto esencial de la tesis consiste en investigar las posibilidades de identificación de fuentes electromagnéticas a partir de la observación del campo que estas generan. Para ello la investigación se divide en tres grandes partes: en primer lugar *el problema directo*, es decir, la descripción del campo a partir de unas fuentes supuestamente conocidas buscando una formulación que facilite su inversión; en segundo lugar *el problema inverso*, o la búsqueda de las posibilidades y limitaciones en la identificación de las distribuciones de fuentes que han generado un campo supuestamente conocido, a veces sobre un dominio no cerrado y a veces sin información de fase; y finalmente una indagación sobre las posibilidades de la *observación del campo*, donde se propone una técnica aplicable a los sistemas de radiocomunicación.

En el capítulo de *introducción* se empieza haciendo tres aproximaciones a nuestro problema: poniéndolo en relación con el “problema del conocimiento”; poniendo luego en perspectiva nuestro método intelectual; y por último, buscando por vía intuitiva en el “problema de la visión humana” los resultados a los que luego se llega con rigor. Hechas estas aproximaciones, se resume en una segunda parte el contenido de toda la investigación.

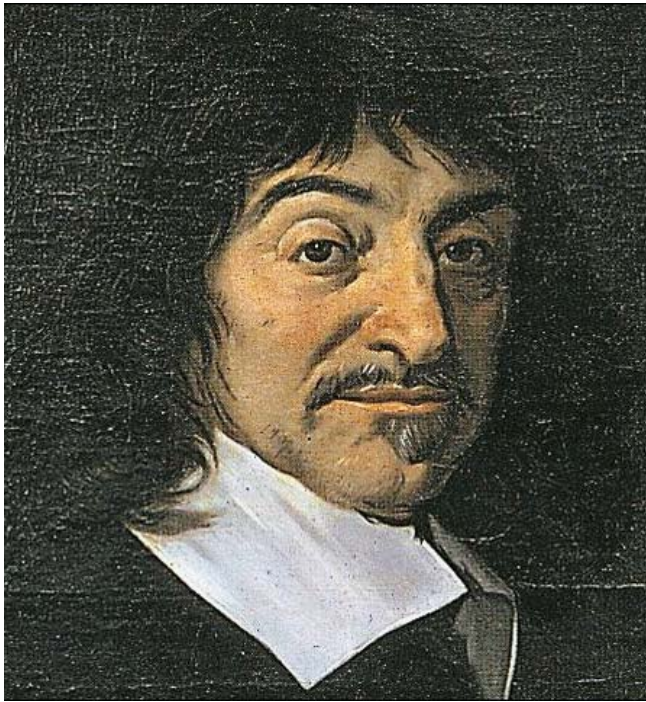
En el capítulo del *problema electromagnético directo* se busca primero una formulación diádica del campo en función de las distribuciones de fuentes, cuya relación con la formulación modal se investiga. A continuación se indaga la dimensión esencial del problema electromagnético encontrándose un conjunto de teoremas que da pie a su discretización en términos de un espacio vectorial cuyas características facilitarán la inversión del problema. Se termina presentando un par de ejemplos que ilustran alguno de los resultados alcanzados.

En el capítulo del *problema electromagnético inverso* una vez establecidas las limitaciones esenciales del problema inverso, es decir, lo máximo que podemos llegar a conocer, se investigan las posibilidades de identificación de las distribuciones de corriente: 1º) cuando se conoce el campo sobre dominios que engloban completamente las fuentes; 2º) cuando los dominios no llegan a englobarlas; y 3º) el caso más delicado de carecer de información de fase. Es a este problema al que se dedica mayor extensión y se llega a resultados que contradicen ciertas teorías que, aunque durante muchos años se han tomado por válidas, la práctica no les da la razón. Se concluye comparando, traduciendo y generalizando dentro de la gramática de nuestro problema un amplio abanico de soluciones que han aflorado en distintas disciplinas.

En el capítulo de *validación experimental* se consideran tres casos de estudio sobre los que se ensayan los métodos inversos propuestos y se ilustra alguno de los resultados teóricos alcanzados en los capítulos anteriores.

El penúltimo capítulo, dedicado a la *observación del campo*, se comparan primero, de acuerdo a sus limitaciones, los métodos disponibles para la medición de los sistemas radiantes y se propone una solución tecnológica que saca partido de la señalización para conocer el campo que el sistema radiante engendra en sus inmediaciones. La arquitectura general propuesta se ejemplifica para el caso de un medidor de antenas de Radar Secundario cuyas características, virtudes y limitaciones se discuten.

Un último capítulo de *conclusiones* hace recuento de los principales resultados obtenidos y se sugiere una serie de líneas de investigación cuya profundización pudiera aportar interesantes resultados.



*“Todo el método consiste en el orden y disposición de aquellas cosas a las que se ha de dirigir la mirada de la mente a fin de que descubramos alguna verdad. Y la observaremos exactamente si reducimos gradualmente las proposiciones complicadas y oscuras a otras simples, y si después intentamos ascender por los mismos grados desde la intuición de las más simples hasta el conocimiento de todas las demás.”*

René Descartes. *Regla V* de “*Reglas para la dirección del espíritu*”

# I. INTRODUCCIÓN



## 1.1 TRES APROXIMACIONES A NUESTRO PROBLEMA

### 1.1.1 El problema electromagnético inverso y el del conocimiento

En realidad el problema que nos ocupa mucho tiene que ver con la perpetua dificultad del hombre de descubrir la realidad que hay detrás de nuestras sensaciones, es decir, de hacernos ideas de las cosas a partir de los fenómenos. En la historia se han vivido momentos de exceso en los que se ha pretendido que toda la realidad se encuentra anclada en la costa de las sensaciones; esa fue la actitud de los sofistas de la Grecia clásica; el naturalismo de Campanella en el renacimiento, o bien el de Hobbes y Condillac en plena modernidad, por no hablar de los abusos del presente. Pero también se ha dado el exceso contrario, y a menudo coetáneo, de suponer la realidad en la costa contraria, o sea, la afirmación de que las sensaciones son mero engaño y que no habiendo más realidad que la de las ideas, éstas se las han de apañar solas para descubrirla. Acaso la posición más radical haya sido la de Parménides para el que “lo que cabe concebir y lo que cabe que sea son una y la misma cosa” [15], pero esta es también la actitud de Platón y la de los modernos Descartes, Spinoza o Hegel. Sin embargo, en el racionalismo moderno, como es el de estos últimos y sobre el que se sigue sustentando el andamiaje casi entero de las ciencias, en realidad se admite la validez de ambas costas y el problema que se suscita es, más bien, el de la navegación entre ambas.

Obsérvese que en el problema del conocimiento, ya sea éste el particular de descubrir las fuentes de un campo electromagnético observado, o el más general de delatar las realidades que originaron los fenómenos, hay tres actores fundamentales: las ideas de las cosas, las sensaciones procedentes de éstas y las cosas mismas. La modernidad supone que si de algo puede tenerse radical seguridad es de que las ideas, con independencia de su calidad, están ahí. Por tanto, si además damos crédito a las cosas, dada la contingencia de las sensaciones, lo mejor que podemos hacer es organizar con cuidado las ideas que nos hagamos sobre éstas, de modo que no pudiendo estar ordenadas de otra forma podamos emplear los fenómenos para así conocer la realidad que hay detrás.

Sin embargo, superado el racionalismo en la década de 1930 sabemos ahora que no está en nuestras manos tener absoluto control de todos nuestros constructos científicos (y si pretendemos quedarnos con los que sí son evidentes, entonces a penas podremos dar cuenta del mundo<sup>1</sup>). Y sabemos además, en parte gracias a Heissenberg, que por muy perfeccionados que estén nuestros instrumentos de observación estos sólo podrán proveernos una idea aproximada de las cosas, y lo que es más, las habremos modificado con muestra meticulosa mirada. No obstante, a pesar de estas objeciones, que podemos llamar postmodernas, también tomamos por cierto que no son sino las cosas las responsables de los fenómenos y asentimos con Spinoza que “la idea de un modo

---

<sup>1</sup> Esto es lo que en sus últimas consecuencias viene a decir nos el Teorema de Gödel [57; 51].

cualquiera con que el cuerpo humano es afectado por los cuerpos exteriores, debe implicar la naturaleza del cuerpo humano y, a la vez, la naturaleza del cuerpo exterior” [150, 2/16]. En consecuencia, es menester ante todo que conozcamos en detalle la naturaleza de nuestros instrumentos de observación para así distinguir lo que se debe al instrumento y lo que se debe al objeto. Es decir, aunque ya no podamos arropar la misma pretensión con que Wittgenstein aseguraba que “las proposiciones lógicas describen (o representan) el armazón del mundo” [164, 6.124], al menos podremos aspirar a un cierto conocimiento de la realidad aunque sepamos que éste no sea definitivo y que, en última instancia, la realidad sea irreductible a sus noticias.

En suma, sabemos que nuestras observaciones son debidas a la realidad; que además por nuestra calidad de observadores pertenecemos también a la realidad observada; que la observación depende de cómo sean nuestros órganos de observación y que, finalmente, habrá ciertas noticias de aquella que, o bien, no llegarán hasta nosotros, o bien, no sepamos representarlas. Pero aun así las ideas que nos hagamos de las cosas, a partir de las observaciones, tendrán bastante en común con éstas y dependerán estrictamente de nuestra capacidad de prefiguración. Es decir, –siguiendo a Ortega– debemos “formarnos ideas de las cosas”, éstas nos servirán de andamiaje para ordenar la observación. Pero al fin, “para de verdad conocer, es preciso restar todo eso que se ha pensado, cayendo en la cuenta que la realidad es siempre más o menos distinta de lo pensado” [127].

### 1.1.2 Nuestro método de investigación

*“Indiferente me es por donde comenzar, ya que de nuevo allí de vuelta llegaré”* Parménides.

Atendiendo al sentido original de fenómeno (*faínoméne*) que para el griego significaba: aparecer, revelarse, darse a conocer... resulta pues que las mañas que empleemos para conocer las fuentes electromagnéticas responsables de un cierto campo observado podrán considerarse como una suerte de fenomenología. Sin embargo, ésta tendrá que fundarse en la prefiguración que podamos hacernos de las causas. Es decir, bien a partir de los fenómenos o bien a partir de otra certidumbre debemos figurarnos el mecanismo de causación, y una vez conseguido éste podrán interpretarse los fenómenos observados. Dicho en otros términos, debemos entender el lenguaje en el que se expresan los fenómenos para saber lo que éstos nos dicen (lenguaje que Galileo o Newton no dudarían en asegurar que es matemático). En nuestro caso no vamos a poner en tela de juicio el mecanismo de causación y daremos por válida la teoría maxweliana, que siguiendo nuestro símil constituirá la gramática de los fenómenos electromagnéticos.

En consecuencia, teniendo en cuenta ese punto de partida, la solución a nuestro problema requerirá primero considerar el camino directo, empleando naturalmente la gramática maxweliana e investigando las relaciones de biunivocidad entre fuentes y campo, así como una expresión acorde a la naturaleza finita de la observación, tanto en el orden geométrico como en el de la precisión (§2). Una vez recorrido el camino que de las fuentes va al campo, el opuesto será una consecuencia de



aquel, siempre que las características de la observación sean suficientes para garantizar su invertibilidad. Así pues nuestra indagación se centrará aquí en las condiciones de unicidad y, a tenor de las dificultades que puedan aparecer, en las estrategias para evitarlas (§3). Recorridos los caminos teóricos, la prueba de su validez consistirá en aplicarlos a casos concretos, ya que como advertía Aristóteles “las acciones y las producciones todas se refieren a lo individual: el médico no cura al hombre sino a Calias, a Sócrates o a cualquier otro de los que de este modo se nombran” [10, 981a]. Probada la capacidad de las soluciones teóricas y teniendo en cuenta que nuestras pretensiones de conocimiento de las fuentes no son absolutas sino que, en general, están supeditadas a algún fin práctico, que a su vez determina los objetivos de conocimiento de aquellas, entonces la observación del campo tendrá, en consecuencia, un cierto objetivo de precisión. Será atendiendo a éste como se aborde, finalmente, el problema de la observación del campo electromagnético, donde principalmente se describirá un método original consistente en el aprovechamiento de las señales determinísticas emitidas bajo operación de los sistemas de radiocomunicación.

A partir de este bosquejo general del método para la resolución del problema inverso puede percibirse un cierto componente cartesiano, pues parte de la certidumbre de la teoría maxweliana e intentará avanzar de modo que los pasos sean lo suficientemente claros y evidentes. Sin embargo, también supone la seguridad de que la comprensión de la realidad es parcial, y que incluso la voluntad de conocimiento tampoco es absoluta. Y puesto que estas incertidumbres son incorporadas en los problemas así directo como inverso, el método seguido podrá también considerarse postmoderno.

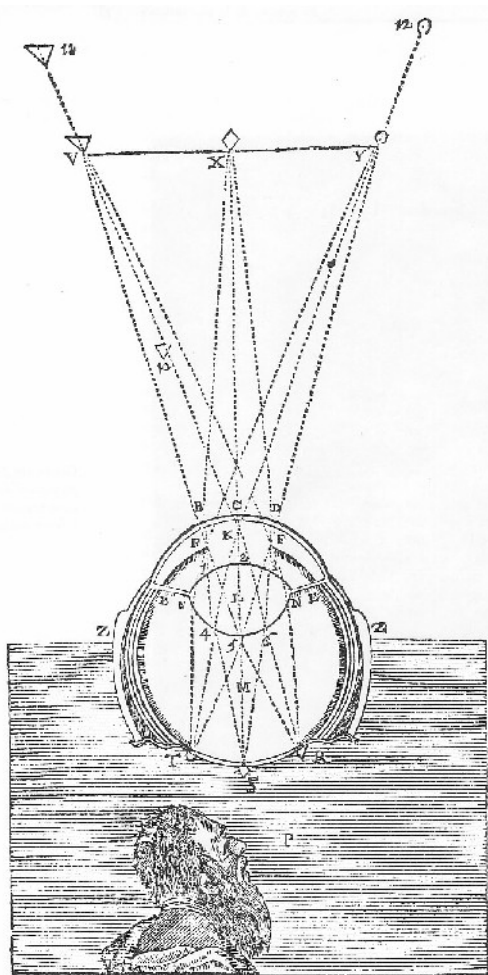
### 1.1.3 Los límites de la observación

*“Preferimos la visión a todas las demás sensaciones. La razón estriba en que ésta es la que mejor nos da a conocer los objetos, y nos descubre entre ellos gran número de diferencias”*  
Aristóteles, Metafísica, 980a

Ya se ha señalado antes el parentesco entre el problema electromagnético inverso y el más general del conocimiento, pero más estrecho aun es su relación con el problema de la visión en relación con los objetos observados. Estrictamente se trata del mismo problema, aunque este último sea un caso más restringido y aparezca de forma natural, sin necesidad de mediación. Su consideración nos permitirá vislumbrar ciertas cuestiones que luego se verán en detalle y que, en consecuencia nos proveerán una primera intuición de las dificultades del problema inverso, dejándonos así en mejores condiciones para su ulterior estudio.

En el problema de identificar los objetos a partir de la mirada los objetos reflejan la luz, a tenor de sus peculiaridades superficiales, formándose frente de ondas a su alrededor en los que está implícita la forma de los objetos. Procedente de unas partes del objeto llega más intensidad que de otras y su fase también varía. Además para cada frecuencia las relaciones pueden ser diferentes, lo cual

confiere a nuestras imágenes sus cualidades cromáticas, cuestión en la que no entraremos ya que, como se verá más adelante, el planteamiento de nuestro problema será esencialmente monocromático. Podríamos decir que el ojo al remedar el mecanismo de la propagación desde éste hasta el objeto pero proyectando el resultado sobre la esfera retiniana realiza parte del problema inverso. Sin embargo varias son las dificultades con que esta operación se topa para identificar correctamente los objetos mirados.



**Figura 1.1.** Procedimiento, descrito por Descartes en *Dióptrica*, para representar la imagen formada en la retina del ojo.

La primera limitación que se presenta en el problema de la visión es que de las cualidades de los objetos sólo nos llegan sus caracteres superficiales. Esto hace que nuestra visión del mundo esté constituida por objetos compactos limitados por nítidas superficies, a pesar de que como demostrara Rutherford lo que predomine, incluso sobre lo más sólido, sea el vacío. Como se verá más adelante esto se debe a una limitación esencial del problema de radiación: si nos preguntamos cómo será el campo electromagnético sobre todo el espacio que circunda unas fuentes, la primera impresión es que se trata de un problema tridimensional; sin embargo, una consideración más detallada delata que una de las dimensiones no es libre y que por tanto el problema es en esencia superficial. Es decir, nos bastará con describir el campo sobre una superficie que englobe a las fuentes. Sobre el resto del espacio la distribución de campo podrá expresarse en función de la primera. La ecuación de Helmholtz nos muestra que las frecuencias espaciales no pueden distribuirse de cualquier

manera y, dejando de lado las ondas evanescentes se verá que éstas tienen una distribución esférica (en el espacio de las frecuencias espaciales). El principio de Huygens nos dice la misma cosa: si conocemos un frente de ondas el campo sobre el resto del espacio estará implícito en la combinación de ondas esféricas a partir de dicho frente. En el caso óptico esta peculiaridad es también evidente pues no nos importa donde encontrarnos para que la imagen que finalmente se forma en la retina sea una reconstrucción fiel de la luz reflejada por el propio objeto. Basta con que la óptica se reajuste a cada distancia para que al fin la imagen sea nítida; del mismo modo que en el

problema matemático habrá que reajustar las funciones para que éstas relacionen las distribuciones superficiales que nos interesen. Los teoremas de unicidad y equivalencia reflejan esta constitución superficial del problema electromagnético espacial.

Resignados pues a adquirir mediante la observación las cualidades superficiales de los objetos topamos aun con otra limitación: si deseamos saber cómo se observarán los objetos desde cualquier punto no podemos quedarnos quietos (aunque el ojo implique en sí una adquisición superficial) y que habremos de circunscribir completamente el objeto para poder dar por resuelto el problema. El escorzo depende tanto del objeto como de la posición del observador, pero si consiguiéramos obtener tantos escorzos como orientaciones posibles el conocimiento que éstas nos aportan acabará siendo objetivo. Esto es lo que nos dice el teorema de unicidad, según el cual, cuando sólo contemos con un cierto ángulo de observación la solución al problema electromagnético no será única. No obstante si para las frecuencias en uso la difracción no es demasiado importante, la observación parcial podrá proveernos un conocimiento parcial de las fuentes, en lo que puede llamarse sus superficies visibles.

Una nueva dificultad reside en que la retina es incapaz de diferenciar las fases de la distribución de luz, con lo que habrá parte del contenido informacional de la radiación que la retina no podrá reproducir por sí sola. El efecto es evidente, si miramos el mundo con un solo ojo y no nos movemos, esta visión no diferirá mucho de la que nos proporciona una fotografía. Cómo se las apaña nuestra fisiología para recuperar esa información que contenía la fase y que conferiría a la imagen un aspecto volumétrico, es algo bien conocido. Nos basta mirar con los dos ojos. Esto que se verá vía matemática es la solución al problema inverso sin fase cuando sólo se recurre a lo que denominaremos métodos observadores.

En lo que respecta a los detalles que puedan llegar a adquirirse del objeto surge una última dificultad. Sabemos que estos dependen de la longitud de onda, que en el caso de la visión es extremadamente pequeña en lo que se refiere a las necesidades de nuestra observación cotidiana. Sin embargo, cuando pretenden descubrirse detalles microscópicos (por debajo del micrómetro) la experiencia nos demuestra que debemos recurrir a longitudes de onda más pequeñas. Estrictamente puede probarse que incluso geometrías pequeñas, respecto a la longitud de onda, tienen influencia en la distribución de campo que circunda el objeto; no obstante, puede decirse que el proceso de radiación va eliminando esas variaciones menudas, de modo que a una cierta distancia éstas son indistinguibles.

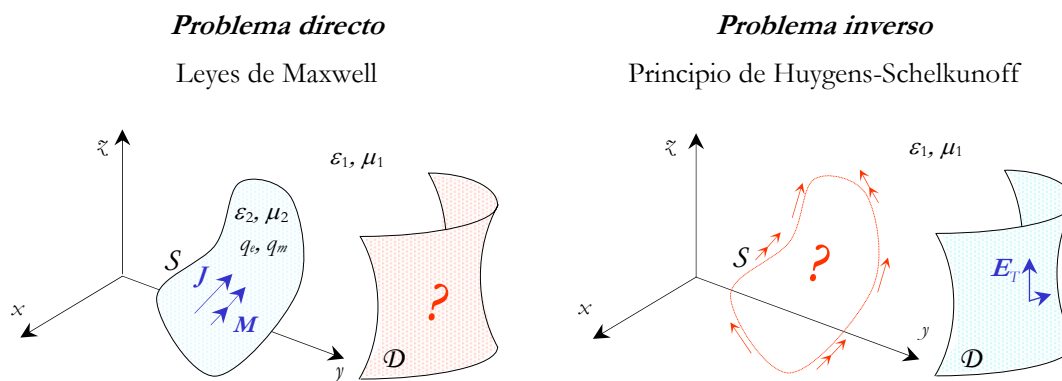
En suma, se han visto por vía analógica cuáles son las cuatro limitaciones esenciales a la identificación de las fuentes que originaron una distribución de campo observada:

- 1º) Sólo podrán asegurarse sus cualidades superficiales.
- 2º) Un conocimiento completo de sus características superficiales requiere una observación sobre todos los posibles ángulos de visión (es decir, sobre una superficie que englobe las fuentes).

- 3º) Los detalles que puedan llegar a conocerse están en función de la longitud de onda. La naturaleza de la propagación impide que los detalles por debajo de un cierto umbral lleguen hasta el observador.
- 4º) La reconstrucción de las funciones completas de onda, cuando se carezca de sensibilidad respecto a la fase de la radiación, puede lograrse mediante la observación sobre dos superficies.

## 1.2 PANORÁMICA DEL CAMINO DE IDA Y VUELTA

Según se argumentó al principio (§1.1.2) nuestro procedimiento, a grandes rasgos, consistirá primero en la prefiguración del camino directo, seguido de la resolución del problema inverso y terminando en el problema técnico de la observación para que ésta satisfaga los objetivos de identificación de las fuentes. Pero adelantemos en primera aproximación lo que después veremos en detalle.



**Figura 1-2.** Esquema de los problemas directo e inverso.

En la figura 1-2 se esquematizan los dos problemas. Si se conoce con suficiente detalle las corrientes y cargas sobre un determinado volumen, tenemos la certeza de que las leyes de Maxwell nos permitirán determinar las distribuciones de campo electromagnético allí donde queramos. Cuando podemos admitir la linealidad del medio entonces las relaciones que vinculan las distribuciones de corriente y de campo serán lineales. Esto constituye una garantía fundamental de unicidad para el problema inverso, que no obstante y en virtud del principio de Huygens (o el de equivalencia de Schelkunoff) asegura una relación única entre distribuciones superficiales de corriente y campo (limitación ya señalada en §1.1.3). Un problema más espinoso será el de cuánta información es menester cuando no se dispone de las distribuciones de fase.

### 1.2.1 Problema directo

En el caso de poder caracterizar en detalle un sistema radiante tanto eléctrica como geoméricamente, incluyendo el entorno electromagnético, las leyes de Maxwell nos permiten

predecir con exactitud los campos electromagnéticos generados en cualquier punto de ese entorno. Las discrepancias con respecto a la realidad (haciendo caso omiso de las discontinuidades cuánticas) se deben por una parte a nuestra incapacidad para caracterizar exactamente el entorno, que por su naturaleza dinámica e impredecible es para el observador una variable estocástica; y por otra parte a las dificultades de resolución analítica de las leyes de Maxwell en entornos no homogéneos o geometrías complejas. Por fortuna para cada problema se pueden recurrir a aproximaciones que reduzcan este error hasta límites razonables para que las predicciones acerca de la radiación (que en esencia nunca dejará de ser estocástica) sean lo suficientemente exactas sin perder su practicidad. A esto llamamos *problema electromagnético directo*.

Partiendo de las relaciones de Maxwell se llega a las bien conocidas ecuaciones de onda que dependiendo de si consideramos o no el espacio ocupado por las fuentes, éstas tomarán la forma de la ecuación de D'Alambert o la de Helmholtz. Si se considera la primera, las soluciones podrán expresarse en términos de las famosas funciones de Green, que particularizado al problema electromagnético corresponderán a unas *funciones diádicas*. Esta formulación facilitará la ulterior expresión matricial de las distribuciones de campo. En caso de considerar la ecuación de Helmholtz sus soluciones pueden expresarse en términos de funciones modales<sup>2</sup>. Ambas expresiones, la de funciones de Green y modales, son muy utilizadas y teniendo en cuenta su núcleo común parece claro que podrán expresar lo mismo; no obstante, se probará que estas dos formulaciones son matemáticamente isomorfas (en el espacio exterior a las fuentes), pudiendo expresarse de una forma muy similar en términos de funciones diádicas entre las que se determinarán los oportunos operadores de proyección.

Una vez acometida la dificultad de la formulación del campo en términos de funciones diádicas, se considerará el problema de la frecuencia espacial de las distribuciones de campo observables y de las distribuciones de corriente reconstruibles. Una consecuencia directa de este estudio será la *discretización óptima* del problema electromagnético que finalmente nos permitirá llegar a una formulación de la radiación procedente de un volumen dado en términos de un *espacio vectorial de dimensión mínima*, que hemos convenido en llamar espacio  $\mathfrak{E}$ . Este espacio tiene la peculiaridad de poder expresar (hasta una precisión prefijada) todas las distribuciones de campo generadas sobre un dominio de observación por cualquier distribución de corrientes englobada por una determinada superficie. Cada una de las coordenadas de este espacio representa una componente de corriente de unos dipolos ideales de Hertz estratégicamente situados sobre la superficie que engloba las verdaderas fuentes.

---

<sup>2</sup> Aunque éstas a menudo se derivan, por comodidad, de las funciones de Green.

### 1.2.2 Problema inverso

Mientras que podría parecer que en la formulación del problema directo en términos de un espacio vectorial  $\mathfrak{E}$  se suelten amarras respecto a la realidad electromagnética, en verdad lo que se hace no es sino facilitar el camino de vuelta; ya que en el fondo se intenta que este espacio englobe de la forma más ajustada posible el conjunto de las distribuciones de campo pertenecientes a cualquier conjunto de corrientes acotado por una superficie. Ajustar al máximo la dimensión matemática del problema directo equivale a un intento extremo de quitar el máximo de paja en la descripción del campo, y así poder encontrar la relación biunívoca que liga las distribuciones de campo y de fuentes, el grano de nuestro problema.

Como se observará en su momento siempre que se defina sobre el espacio  $\mathfrak{E}$  un producto interno compatible con la desigualdad triangular la solución es única, aunque su solución directa a veces pueda ser compleja y sea menester recurrir a métodos numéricos. Esta solución corresponderá con la única del teorema de unicidad si la observación cumple con sus condiciones. De lo contrario también podremos aproximarnos a esa solución aunque, en general, agregando información adicional. Se expondrá un procedimiento general para incorporar esta información extra mediante un proceso iterativo, y en virtud del teorema global de la convergencia se observará que ésta tiende a la solución siempre que las aplicaciones de iteración cumplan ciertas propiedades. Uno de los casos de incompletitud del teorema de unicidad que se contemplará es el de un ángulo de observación insuficiente, pero al que se dedicará principal énfasis es al de ausencia de las distribuciones de fase. Para la solución del *problema sin fase* hay una propiedad esencial de las distribuciones de campo sobre la cual se sustenta toda su discusión: se trata de la extensibilidad analítica de las distribuciones. Esta peculiaridad hace que exista una consistencia entre las distribuciones de módulo y fase, de manera que en algunos casos el conocimiento de una de ellas es sólo compatible con una de las otras, y que a su vez puede determinarse. No obstante, en general existe una ambigüedad que impide reconstruir la distribución compleja a partir de sólo valores de módulo.

En 1975 Hoenders llegó a un teorema del cual parece desprenderse que la solución al problema sin fase es único si se añade una mínima información de las fuentes (o del objeto). Las principales revisiones al problema de la reconstrucción de fase, como son las de Ferwerda, Taylor, Hurt o Anderson y Sali, secundan esta consideración teórica, aunque en todos los casos se constata su impracticidad. Se probará aquí la inviabilidad de llegar a las conclusiones de Hoenders, y no por incorrección del teorema sino porque a partir de éste no pueden seguirse tales consecuencias. De hecho el teorema como se verá, a penas permite sacar conclusiones en el caso continuo, mientras que al analizar el problema en su formulación discretizada se observa que las condiciones de unicidad son distintas y ahora sí compatibles con la práctica, que como se adelantó en la

aproximación intuitiva del caso visual (§1.1.3) implican el conocimiento del campo sobre dos superficies.

Finalmente y teniendo en cuenta las condiciones de unicidad del problema sin fase, los métodos inversos se clasifican en *manipuladores* cuando se modifican las distribuciones de campo, y *observadores* cuando se pliegan a la condición de recabar información de módulo sobre dos superficies. Los métodos empleados en muy diversas disciplinas que van desde la microscopía a la astrología (pasando por la cristalografía, óptica, reconstrucción de imágenes, metrología...), han sido formuladas en los términos de nuestro universo de discurso y en especial los métodos observadores se han generalizado, en parte gracias a la formulación directa para poder adaptarse a cualquier geometría y poder incorporar todas aquellas informaciones que faciliten la solución de nuestro problema. En la validación experimental de métodos inversos serán precisamente los procedimientos observadores lo que se tengan en cuenta.

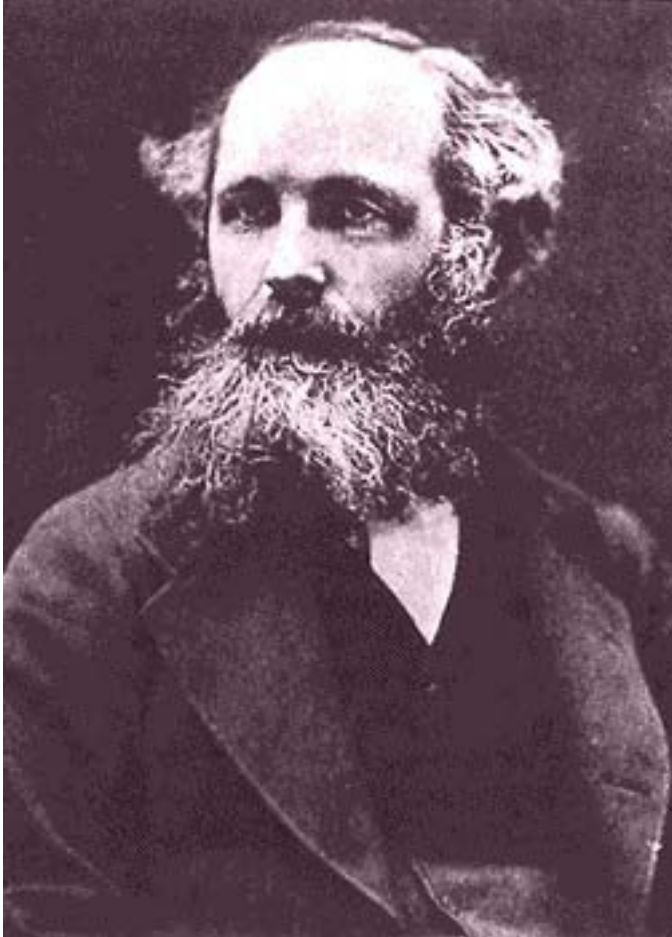
### **1.2.3 Sobre la observación del campo electromagnético**

La observación real como se argumentó al principio (§1.1.1), estará siempre lastrada por una inevitable cantidad de ruido y por el resto de limitaciones esenciales a tenor de los instrumentos reales de observación. No obstante, las exigencias de observación podrán rebajarse de acuerdo con los objetivos de identificación de las fuentes. En función de estos la observación habrá de controlarse con más o menos artificios. Se presta especial atención al caso en el que el número de artificios para controlar el entorno de medida sea mínimo, siguiendo la línea de procedimientos observadores ahondada en los métodos inversos.

La solución que se propone se hace especialmente atractiva para la observación de las grandes antenas de los sistemas de radiocomunicación en los que resulta inconveniente interrumpir su operación. El sistema de observación propuesto, que hemos llamado *sistema adaptado de medida* consiste esencialmente en emplear las señales determinísticas que emite el sistema radiante en sus condiciones de operación y construir un receptor óptimo para éstas recurriendo a la teoría de Kotel'nikov. Se plantea un modelo general de sistema y se ejemplifica en la construcción de un sistema de diagnosis para antenas de radar secundario, problema que a su vez ha servido para ilustrar un gran número de cuestiones teóricas tanto del problema directo y su discretización como en la comparación de los métodos inversos.







*“Faraday visualizaba líneas de fuerza que atravesaban todo el espacio donde los matemáticos sólo veían centros de fuerzas que actuaban a distancia.*

*Faraday veía un medio donde ellos únicamente veían distancia.*

*Faraday buscaba la fuente de los fenómenos a partir acciones reales que transcurrían en el medio; mientras que aquellos quedaron satisfechos de haberla encontrado en el poder de acción a distancia presente en los fluidos eléctricos.”*

J.C.Maxwell. *“A Treatise on electricity and magnetism”*

## II. PROLEMA ELECTRO- MAGNÉTICO DIRECTO



## 2.1 ECUACIÓN DE ONDA Y CAMPOS RADIADOS

Puesto que nuestro propósito es el de la descripción de los sistemas radiantes (ya sea en el camino de ida o en el de vuelta) reduciremos nuestro universo teórico al de un conjunto de fuentes electromagnéticas concentradas en una determinada zona del espacio (circunscritas por una superficie  $S$ ). Obviamente la caracterización exacta de un problema electromagnético real, aún bajo la óptica de nuestra reducción, debiera considerar todas las peculiaridades electromagnéticas del entorno que según hemos admitido carece de fuentes. Sin embargo, esto puede llegar a complicar sobremanera el problema y, de hecho, más que caracterizar el sistema radiante estaríamos vinculándolo inexorablemente a un entorno específico, ya que la inclusión de detalles no tendría fin y con ello tampoco la solución. Así pues, para poder evaluar la naturaleza de la radiación del conjunto de fuentes bajo estudio, con independencia del ambiente específico en el que se encuentra, y con el fin de llegar a una solución práctica, asumiremos que estas fuentes se encuentran inmersas en un espacio isotrópico y homogéneo como ilustra la figura 2-1 (donde  $\mathcal{D}$  simboliza una región arbitraria del espacio en la que queremos conocer los campos electromagnéticos). No obstante, ya que a menudo es necesario dar cuenta de ciertos entornos específicos la caracterización de estos puede lograrse reduciendo el problema real al propuesto mediante la aplicación de aproximaciones y teoremas electromagnéticos. Como es bien sabido, no se tiene aun noticia de cargas magnéticas y, por tanto, un sistema radiante estará esencialmente constituido por cargas y corrientes eléctricas, sin embargo, el recurso a los teoremas de equivalencia nos obliga a considerar unos entes que no responden a la realidad electromagnética, y que por tanto son ideales. Se trata de las densidades de carga y corriente magnética, que nos permiten representar complejos problemas reales por medio de otros más sencillos y equivalentes en una región del espacio. Así pues, el modelo que esquematiza la figura 2-1, tiene un campo de aplicación que depende de las herramientas de equivalencia y aproximación electromagnética que podamos poner en juego sin violar los requisitos de precisión que para cada problema se tengan.

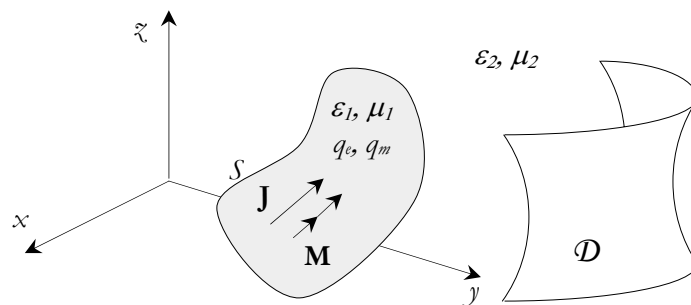


Figura 2-1. Modelo del sistema radiante

De acuerdo a esta descripción del problema electromagnético las leyes de Maxwell ampliadas con los términos de las corrientes ideales nos describen las relaciones que deben mantenerse entre las entidades electromagnéticas para cualquier punto del espacio, que en el caso de estar constituido

por medios isotrópicos y homogéneos, podemos reducir al uso exclusivo de las intensidades de campo eléctrico y magnético matizadas por la permitividad  $\varepsilon$  y la permeabilidad  $\mu$  (complejas):

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= -\mathbf{M} - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{D} &= q_e \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= q_m\end{aligned}\quad (2-1)$$

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= -\mathbf{M} - \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ \varepsilon \cdot \nabla \cdot \mathbf{E} &= q_e \\ \mu \cdot \nabla \cdot \mathbf{H} &= q_m\end{aligned}\quad (2-2)$$

a las que hay que añadir las ecuaciones de continuidad:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial q_e}{\partial t} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{M} + \frac{\partial q_m}{\partial t} &= 0\end{aligned}\quad (2-3)$$

Aplicando a las ecuaciones de Maxwell primeras (2-2.a,b) el rotacional y haciendo simples operaciones de sustitución con (2-2) y (2-3) se llega a las conocidas ecuaciones de onda:

$$\begin{aligned}\nabla^2 \mathbf{E} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} &= \nabla \times \mathbf{M} + \mu \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon} \nabla q_e \\ \nabla^2 \mathbf{H} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} &= -\nabla \times \mathbf{J} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} + \frac{1}{\mu} \nabla q_e\end{aligned}\quad (2-4)$$

que allí donde las cargas y corrientes estén prefijadas se convierten en ecuaciones de *D'Alambert* y que para regiones exteriores, exentas de cargas, equivalen a las ecuaciones vectoriales de *Helmholtz* (o ecuaciones *homogéneas* de onda) :

$$\begin{aligned}\nabla^2 \mathbf{E} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} &= 0 \\ \nabla^2 \mathbf{H} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} &= 0\end{aligned}\quad (2-5)$$

Teniendo en cuenta que, en virtud del teorema de Fourier, cualquier variación temporal de las corrientes puede expresarse como combinación lineal de corrientes armónicas, de aquí en adelante reduciremos las relaciones de Maxwell y las de onda a las de los campos armónicos eléctrico y magnético, y cuando hablemos de radiación electromagnética consideraremos que ésta es monocromática o que su ancho de banda es lo suficientemente pequeño como para poder admitir tal aproximación:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= -\mathbf{M} - j\omega\mu \mathbf{H} \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J} + j\omega\varepsilon \mathbf{E} \\ \varepsilon \cdot \nabla \cdot \mathbf{E} &= q_e \\ \mu \cdot \nabla \cdot \mathbf{H} &= q_m\end{aligned}\quad (2-6)$$

$$\begin{aligned}\nabla^2 \mathbf{E} + \beta^2 \mathbf{E} &= 0 \\ \nabla^2 \mathbf{H} + \beta^2 \mathbf{H} &= 0\end{aligned}\quad (2-7)$$

donde  $\beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$  es la constante de propagación o número de onda.

Si se resuelve la ecuación de onda (2-7) para las geometrías canónicas (rectangular, cilíndrica y esférica) obtenemos las configuraciones de campo que pudieran observarse en dominios que se

plieguen a tales geometrías. Sin embargo, mientras que para el caso plano la solución es bastante directa (mediante ecuaciones diferenciales independientes para cada componente del campo y separables para cada coordenada, que conducen a funciones armónicas) en el caso cilíndrico y esférico la solución es más compleja [12]. No obstante, puesto que nuestro problema no es el de encontrar todas las distribuciones de campo electromagnético válidas sobre un determinado dominio de observación  $\mathcal{D}$ , sino exclusivamente las causadas por las fuentes contenidas en  $\mathcal{S}$  busquemos pues tales campos.

### 2.1.1 Campos debidos a fuentes eléctricas y magnéticas

Para simplificar nuestro estudio nos interesa discernir los campos debidos a fuentes sólo eléctricas o sólo magnéticas cuyos efectos pueden separarse recurriendo a los potenciales vectores. Estos vectores auxiliares,  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{F}$ , podemos definirlos en virtud de la naturaleza solenoidal de los flujos magnético y eléctrico en las zonas libres de carga (leyes de Maxwell 3ª y 4ª) como:

$$\mathbf{H}_A = \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} \quad \text{si } q_m = 0 \quad (2-8) \quad \mathbf{E}_F = -\frac{1}{\varepsilon} \nabla \times \mathbf{F} \quad \text{si } q_e = 0 \quad (2-9)$$

Donde los subíndices  $_A$  y  $_F$  indican los campos debidos a los potenciales  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{F}$  respectivamente. El desarrollo para llegar a la ecuación de onda de los potenciales vector y la ulterior definición de los campos es bien conocida. Se aplica la primera ley de Maxwell a los campos debidos al potencial  $\mathbf{A}$ —considerando nulas las corrientes magnéticas—:

$$\nabla \times \mathbf{E}_A = -j\omega\mu\mathbf{H}_A = -j\omega\nabla \times \mathbf{A} \Rightarrow \nabla \times \{\mathbf{E}_A + j\omega\mathbf{A}\} = 0 \Rightarrow \mathbf{E}_A + j\omega\mathbf{A} = -\nabla\phi_e \quad (2-10)$$

Donde se ha podido definir un *potencial escalar eléctrico* arbitrario,  $\phi_e$ , gracias a que el campo vectorial entre llaves es irrotacional. Aplicando el rotacional a (2-8), utilizando la 2ª ley de Maxwell y (2-10c):

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu\mathbf{J} + j\omega\varepsilon\mu\mathbf{E}_A = \mu\mathbf{J} - j\omega\varepsilon\mu\nabla\phi_e + \omega^2\varepsilon\mu\mathbf{A} \quad (2-11)$$

es decir:

$$\nabla^2 \mathbf{A} + \beta^2 \mathbf{A} = -\mu\mathbf{J} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A} + j\omega\mu\varepsilon\phi_e) \quad (2-12)$$

Mientras que en (2-8) definimos el rotacional de  $\mathbf{A}$ , según el teorema de Helmholtz tenemos aun libertad para la definición de su divergencia:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -j\omega\mu\varepsilon\phi_e \Rightarrow \nabla^2 \mathbf{A} + \beta^2 \mathbf{A} = -\mu\mathbf{J} \quad (2-13)$$

Donde la primera ecuación es la conocida como condición de Lorenz y la segunda la buscada *ecuación de onda* del potencial vector  $\mathbf{A}$ . Si a partir de esta ecuación determinamos el potencial  $\mathbf{A}$ , desde éste podremos encontrar los campos sólo debidos a las corrientes eléctricas, usando (2-8) para  $\mathbf{H}_A$  y (2-10c) y (2-13a) para  $\mathbf{E}_A$ :

$$\mathbf{E}_A = -j\omega\mathbf{A} - j\frac{1}{\omega\mu\varepsilon}\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) \quad (2-14)$$

En virtud de la simetría de las ecuaciones de Maxwell es inmediato encontrar que el potencial vector  $\mathbf{F}$  deberá satisfacer la *ecuación de onda*:

$$\nabla^2 \mathbf{F} + \beta^2 \mathbf{F} = -\varepsilon \mathbf{M} \quad (2-15)$$

y que los campos sólo debidos a las corrientes magnéticas pueden determinarse usando (2-9b) y:

$$\mathbf{H}_F = -j\omega \mathbf{F} - j \frac{1}{\omega \mu \varepsilon} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) \quad (2-16)$$

Consideremos ahora que para nuestro estudio las corrientes están concentradas en una región del espacio (figura 2-1). La ecuación de onda para los potenciales vectores será:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{A} + \beta^2 \mathbf{A} &= \begin{cases} -\mu \mathbf{J}(\mathbf{r}') & \text{dentro de } S \\ 0 & \text{fuera de } S \end{cases} \\ \nabla^2 \mathbf{F} + \beta^2 \mathbf{F} &= \begin{cases} -\varepsilon \mathbf{M}(\mathbf{r}') & \text{dentro de } S \\ 0 & \text{fuera de } S \end{cases} \end{aligned} \quad (2-17)$$

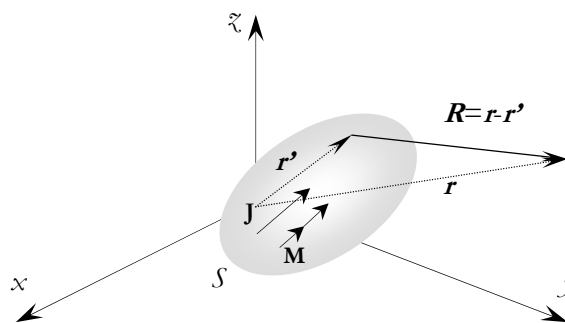
Aprovechando la linealidad de estas relaciones pueden tratarse de forma independiente cada elemento infinitesimal de corriente para después aplicar superposición. Para la consideración de cada elemento diferencial de corriente puede recurrirse a la función de Green, que da solución a:

$$(\nabla^2 + \beta^2)G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (2-18)$$

y que de forma general podemos expresar como:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{-j\beta R(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}}{4\pi R(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} \quad (2-19)$$

donde  $R = |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$  es la distancia entre los puntos definidos por  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{r}'$ , es decir, entre el punto de observación  $\mathbf{r}$  y un punto de las fuentes  $\mathbf{r}'$ . En la figura 2-2 se representa la geometría de nuestro problema.



**Figura 2-2.** Geometría del problema de radiación

Sumando, en fin, las contribuciones infinitesimales de cada punto de corriente, los potenciales vectores, debidos a las distribuciones de corrientes  $\mathbf{J}$  y  $\mathbf{M}$ , pueden expresarse (extendiendo el dominio de integración a todo el espacio) como el resultado de una convolución tridimensional:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \mu \iiint_{V'} \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dv' = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_{V'} \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \frac{e^{-j\beta R(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}}{R(\mathbf{r} - \mathbf{r}')} dv' = \mu \mathbf{J}(\mathbf{r}) * G(\mathbf{r}) \\ \mathbf{F}(\mathbf{r}) &= \varepsilon \iiint_{V'} \mathbf{M}(\mathbf{r}') \cdot G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dv' = \frac{\varepsilon}{4\pi} \iiint_{V'} \mathbf{M}(\mathbf{r}') \cdot \frac{e^{-j\beta R(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}}{R(\mathbf{r} - \mathbf{r}')} dv' = \varepsilon \mathbf{M}(\mathbf{r}) * G(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (2-20)$$

Donde en virtud de la propiedad de la convolución [126] de las transformadas de Fourier, resulta evidente, al hacer la transformada tridimensional en (2-20) (empleando, por ejemplo, las coordenadas cartesianas extendidas a todo el espacio), que las transformadas de  $\mathbf{A}(x,y,z)$ ,  $\mathbf{J}(x,y,z)$  y  $G(x,y,z)$  (o bien de  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{M}$  y  $G$ ) están relacionadas por un producto simple:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) &= \mu \tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{r}) \cdot \tilde{G}(\mathbf{r}) \\ \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{r}) &= \varepsilon \tilde{\mathbf{M}}(\mathbf{r}) \cdot \tilde{G}(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (2-21)$$

Siendo  $\tilde{X}$  la transformada de Fourier tridimensional de  $X(x,y,z)'$ . No obstante, si las corrientes estuvieran distribuidas superficial o linealmente, entonces podrían definirse un par de coordenadas  $(\xi, \eta)$  o una única  $\xi$ , respectivamente, sobre las que podría identificarse todos los puntos del dominio de corrientes, de modo que las integrales volumétricas en (2-20) se convertirían en superficiales. En caso de poder parametrizar el dominio de medida  $\mathcal{D}$  con esas mismas coordenadas, entonces las convoluciones y las transformadas de Fourier serían ahora bidimensionales o lineales referidas a las inversas de esas coordenadas sobre las cuales se verificarían las relaciones (2-21) –acaso matizada por factores de escala–.

Una vez definidos los potenciales vectores  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{F}$  puede recurrirse a las expresiones (2-9), (2-14) y (2-16) para finalmente identificar las intensidades de campo eléctrico y magnético:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -j\omega\mathbf{A} - j\frac{1}{\omega\mu\varepsilon} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \frac{1}{\varepsilon} \nabla \times \mathbf{F} = -j\omega \left\{ 1 + \frac{\nabla\nabla}{\beta^2} \right\} \mathbf{A} - \frac{1}{\varepsilon} \nabla \times \mathbf{F} \\ \mathbf{H} &= -j\omega\mathbf{F} - j\frac{1}{\omega\mu\varepsilon} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) + \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} = -j\omega \left\{ 1 + \frac{\nabla\nabla}{\beta^2} \right\} \mathbf{F} + \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} \end{aligned} \quad (2-22)$$

Como veremos este procedimiento de caracterización directa nos permite simplificar la formulación cuando nuestro problema solo se atenga a corrientes reales, es decir eléctricas, o sólo a corrientes ideales magnéticas, para lo cual es menester el recurso de los teoremas de equivalencia.

---

<sup>1</sup> que estará referida a las magnitudes:  $1/x, 1/y, 1/z$ , o bien:  $\beta_x=2\pi/\lambda_x; \beta_y=2\pi/\lambda_y; \beta_z=2\pi/\lambda_z$ . Nótese que en el hemiespacio exterior a las fuentes deberá cumplirse, por exigencia de la ecuación de Helmholtz, que  $\beta^2=\beta_x^2+\beta_y^2+\beta_z^2$  (es decir, las frecuencias espaciales están contenidas en la superficie de una esfera de radio constante). Por tanto, en la región homogénea la representación espectral es en esencia bidimensional, y así el conocimiento superficial (con tal de que esta superficie recorra por completo dos coordenadas) nos permitirá colegir el campo en todo el espacio homogéneo.

## 2.2 TEOREMA DE UNICIDAD Y EQUIVALENCIA

Supongamos que una vez identificados los campos sobre un dominio de observación fueran varias las configuraciones de campo posible en el resto del espacio, esto implicaría que en vano intentaríamos la caracterización del sistema radiante a partir de tales observaciones. Sin embargo, la naturaleza del campo electromagnético nos permite asegurar, en ciertas condiciones, la unicidad de solución. Estas condiciones y su demostración son bien conocidas: se suponen dos soluciones; se aplican las ecuaciones de Maxwell y se llega a una relación integral en la que se hace evidente que si el medio tiene pérdidas (por pequeñas que éstas sean) y conocemos alguno de los campos tangenciales en toda una superficie cerrada, la diferencia entre ambas soluciones (tanto en el interior como en el exterior) ha de ser nula. Es decir: “un campo electromagnético, generado por una distribución cualquiera de fuentes, es único en una región limitada por una frontera cuando se especifica sobre toda la frontera los campos tangenciales: bien eléctricos  $\mathbf{E}_T$ , bien magnéticos  $\mathbf{H}_T$ , o en una parte los eléctricos y en la otra los magnéticos”.

Si ahora consideramos los campos producidos por un determinado conjunto de fuentes, haciendo caso omiso a los que tienen otras causas, es evidente, según el principio de unicidad, que bastaría con identificar sobre una superficie cualquiera que englobe a tales fuentes los campos tangenciales (eléctricos o magnéticos) causados por éstas para a partir de éstos poder colegir los campos en el resto del espacio. Si contemplamos los campos sobre las superficies como los efectos ondulatorios de las fuentes, podemos interpretarlos como un frente de ondas. Pues bien, podemos olvidarnos de lo que había al otro lado de la superficie y usando las condiciones de frontera suponer cada uno de los puntos como nuevas fuentes electromagnéticas generadoras de ondas esféricas y que en su combinación deparan los campos efectivos debidos a las fuentes interiores. Éste es en esencia el principio que Huygens formulara en 1678 en su *Traité de la Lumière* [71], aunque derivado aquí desde la teoría maxweliana, como hizo Schelkunoff en 1936 [144]. Según este último, el *teorema de equivalencia superficial* garantiza que “el campo exterior a una superficie que englobe las fuentes puede obtenerse colocando sobre dicha superficie corrientes eléctricas y magnéticas apropiadas que satisfagan las condiciones de contorno”. Así pues, si el campo generado por las corrientes encerradas es  $\{\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1\}$ , y admitimos para el interior un campo arbitrario  $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$ , entonces las corrientes superficiales eléctricas y magnéticas que nos aseguren en el exterior el campo original deben ser:

$$\mathbf{J}_s = \hat{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}); \quad \mathbf{M}_s = -\hat{n} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}) \quad (2-23)$$

Donde  $\hat{n}$  representa un vector unitario normal a la superficie  $S$ . Si las corrientes se eligen de modo que el campo en el interior sea nulo se obtiene el conocido *equivalente de Love*:

$$\mathbf{J}_s = \hat{n} \times \mathbf{H}_1; \quad \mathbf{M}_s = -\hat{n} \times \mathbf{E}_1 \quad (2-24)$$

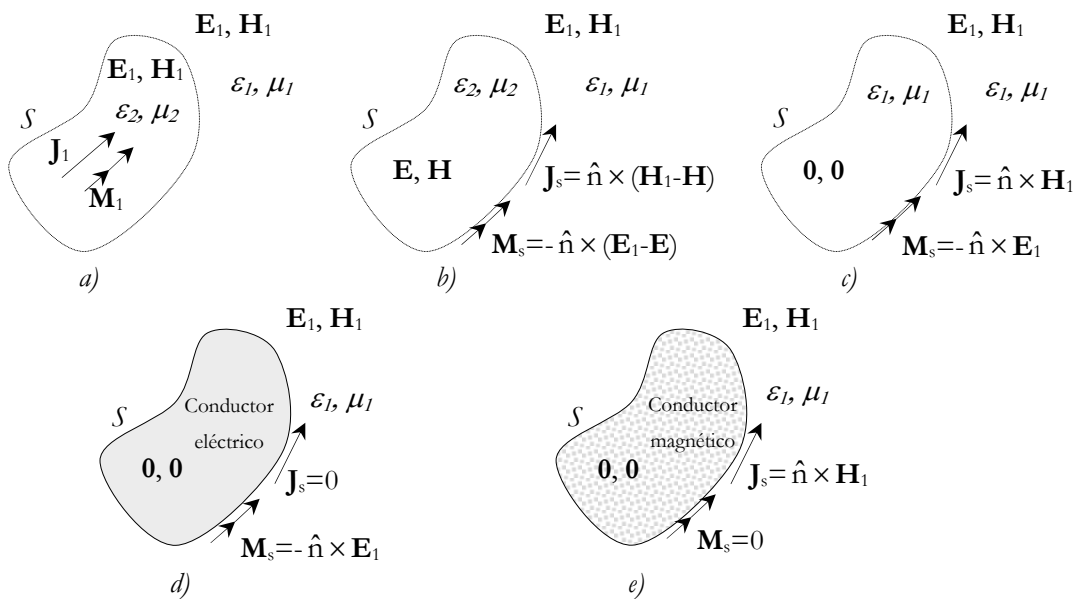


Que en caso de elegir un medio interior con las mismas característica electromagnéticas que el exterior nos permite transmuta el problema originalmente heterogéneo en otro homogéneo y equivalente, sobre el que podremos aplicar las soluciones integrales (2-20) para medios homogéneos.

Si, por otra parte, sustituimos el interior por un conductor eléctrico perfecto los campos interiores serán necesariamente nulos y puesto que una corriente eléctrica sobre una superficie conductora eléctrica no produce campos podemos entonces considerarla nula<sup>2</sup>, obteniendo así el *equivalente conductor eléctrico*:

$$\mathbf{J}_s = \hat{n} \times \mathbf{H}_1 = 0; \quad \mathbf{M}_s = -\hat{n} \times \mathbf{E}_1 \quad (2-25)$$

Que reduce el problema equivalente a la consideración de un único tipo de corrientes. De forma análoga se define el *equivalente conductor magnético* como aquel en el que el volumen interior es un conductor magnético, sobre el que podemos considerar nulas las corriente magnéticas y atender exclusivamente a las eléctricas. La figura 2-3 ilustra el problema real y los equivalentes descritos.



**Figura 2-3.** a) Problema real; b) modelo del problema equivalente; c) equivalente de Love; d) equivalente conductor eléctrico e) equivalente conductor magnético.

<sup>2</sup> Como aproximación intuitiva suele decirse que las corrientes eléctricas se cortocircuitan, y así podría entenderse en una aplicación directa de la óptica-física. Pero de forma estricta y a tenor del teorema de reciprocidad, como hace Harrington (véase [60, §3.8]), puede demostrarse que los campos provocados por una corriente eléctrica sobre un conductor eléctrico perfecto son nulos. Obsérvese, por otra parte, que el cumplimiento de (2-25b) es suficiente para la satisfacción del teorema de unicidad.

En virtud de estos equivalentes (especialmente los dos últimos) podemos reducir, a conveniencia, cualquier fuente de radiación, por compleja que sea, a un conjunto de corrientes eléctricas o magnéticas sobre una superficie que la englobe y utilizar las formulaciones descritas en §2.1.2.

Finalmente, aunque hayamos considerado los campos generados por radiadores independientes de forma separada podemos aplicar el *principio de superposición* y simplemente sumar las contribuciones particulares para encontrar el campo debido al conjunto de radiadores. Lo cual podemos hacerlo en virtud de que nos referimos a fenómenos macroscópicos en los que las leyes de Maxwell son aplicables, siendo así lineal –como se ha visto– la relación entre fuentes y campos.

### 2.3 FORMULACIONES DIRECTAS

Recurriendo por tanto a los teoremas de equivalencia podemos expresar el problema electromagnético en términos de corrientes solamente eléctricas o solamente magnéticas. Cuando nos refiramos a corrientes exclusivamente eléctricas las denominaremos fuentes reales, aunque éstas puedan ser tanto verdaderas entidades físicas como entidades ficticias si se hubiera recurrido al equivalente conductor magnético (fig.2-3.e). En estos dos casos, los campos eléctricos estarán referidos, respectivamente, a uno sólo de los potenciales vectores –simplificando (2-22)-:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_J &= -j\omega \left\{ 1 + \frac{\nabla\nabla}{\beta^2} \right\} \mathbf{A} \\ \mathbf{E}_M &= -\frac{1}{\varepsilon} \nabla \times \mathbf{F} \end{aligned} \quad (2-26)$$

Supondremos, por tanto, que todo el problema electromagnético directo lo habremos podido reducir a un conjunto finito de fuentes, ya sean reales o equivalentes, inmersas en un espacio homogéneo e isotrópico. Reducción que generalmente implica el recurso a los equivalentes antes descritos y a menudo a aproximaciones como la *óptica-física* [12]. Ahora nos falta investigar cómo serán los campos electromagnéticos debidos a tales fuentes; estudio que restringiremos, no obstante, al de los campos eléctricos ya que las relaciones (2-6a) nos permiten colegir los magnéticos a partir de los primeros y porque generalmente son aquellos a los que ciñen las medidas.

### 2.3.1 Fuentes reales<sup>3</sup>

Si hemos podido reducir la descripción del sistema radiante al de un conjunto finito de corrientes distribuidas dentro del volumen circunscrito por  $S$ , entonces nuestro problema inicial representado en la fig.2-1 se habrá simplificado al representado en la figura 2-4.

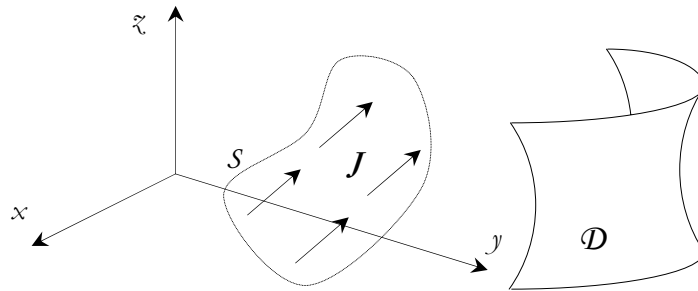


Figura 2-4. Problema electromagnético con corrientes eléctricas.

Utilizando las expresiones 2-26 y 2-20:

$$\mathbf{E}_J = -j\omega\mu \left\{ 1 + \frac{\nabla\nabla}{\beta^2} \right\} \iiint_{V'} \mathbf{J}(\mathbf{r}') G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dv' = j\omega\mu \iiint_{V'} \left\{ 1 + \frac{\nabla\nabla}{\beta^2} \right\} \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \frac{e^{-j\beta R(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}}{4\pi R(\mathbf{r} - \mathbf{r}')} dv' \quad (2-27)$$

donde haciendo operaciones vectoriales (teniendo en cuenta que el operador diferencial  $\nabla$  se refiere a los puntos del dominio de observación y, por tanto,  $\nabla \mathbf{J} = 0$ ) podemos llegar a la expresión:

$$\begin{bmatrix} E_{J_x} \\ E_{J_y} \\ E_{J_z} \end{bmatrix} = \iiint_{V'} \begin{bmatrix} G_1(R) + G_2(R)(x-x')^2 & G_2(R)(x-x')(y-y') & G_2(R)(x-x')(z-z') \\ G_2(R)(y-y')(x-x') & G_1(R) + G_2(R)(y-y')^2 & G_2(R)(y-y')(z-z') \\ G_2(R)(z-z')(x-x') & G_2(R)(z-z')(y-y') & G_1(R) + G_2(R)(z-z')^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} J_x(\mathbf{r}') \\ J_y(\mathbf{r}') \\ J_z(\mathbf{r}') \end{bmatrix} dv' \quad (2-28)$$

siendo:  $G_1(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -\frac{j\omega\mu}{4\pi\beta^2} \frac{-1 - j\beta R + \beta^2 R^2}{R^3} e^{-j\beta R}$  ;  $G_2(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -\frac{j\omega\mu}{4\pi\beta^2} \frac{3 + j3\beta R - \beta^2 R^2}{R^5} e^{-j\beta R}$

Expresión que podemos reducir en términos de la función de Green diádica,  $\underline{\underline{G}}$ , que correspondería al factor diádico, o tensorial, del integrando:

<sup>3</sup> Se hace aquí referencia a corrientes reales por mero contrapunto con las magnéticas, que por el momento gozan sólo de una existencia ideal aunque práctica a merced de los principios de equivalencia. Lo cual no impide que en muchos casos, cuando se hable de corrientes eléctricas, estas sean también ideales, procediendo al igualan de las magnéticas de la aplicación de los principios de equivalencia.

$$\mathbf{E}_J = \iiint_{V'} \underline{\underline{\mathbf{G}_J}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') dV' \quad \text{con} \quad \underline{\underline{\mathbf{G}_J}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = G_1(R) \cdot \underline{\underline{\mathbf{I}}} + G_2(R) [(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^T \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')] \quad (2-29)$$

Donde  $\underline{\underline{\mathbf{I}}}$  denota la matriz identidad y el superíndice  $T$  la operación de transposición. Extendiendo el dominio de integración  $V'$  en (2-29) nos permite referir el campo eléctrico, debido a fuentes reales, en términos de la convolución entre las corrientes y la función diádica de Green, que en el dominio de la transformada de Fourier generalizada se convierte en un producto:

$$\underline{\underline{\mathbf{E}}}_J = \underline{\underline{\mathbf{G}}}_J(\mathbf{r}) * \underline{\underline{\mathbf{J}}}(\mathbf{r}) \quad \text{en el dominio transformado:} \quad \underline{\underline{\mathbf{E}}}_J = \underline{\underline{\mathbf{G}}}_J(\mathbf{r}) \cdot \underline{\underline{\mathbf{J}}}(\mathbf{r}) \quad (2-30)$$

### 2.3.2 Fuentes equivalentes magnéticas

En el supuesto de que el problema electromagnético lo hayamos podido reducir a un conjunto de corrientes magnéticas, éstas estarán, en general, acomodadas a alguna geometría superficial ya que habrán resultado de la aplicación del equivalente superficial eléctrico (ec. 2-25; fig. 2-3d). De esta forma el problema original se habrá simplificado al que representa la figura 2-5, cuya aplicabilidad es, a pesar de tratarse de un problema virtual, más general que en el caso anterior.

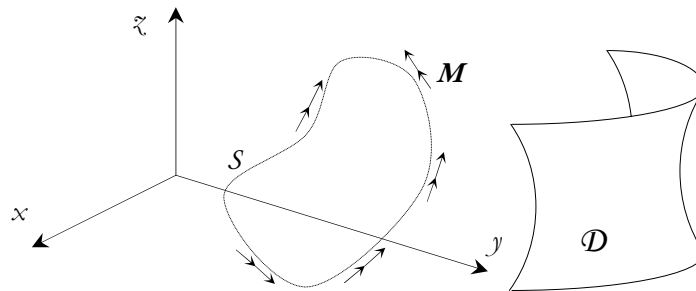


Figura 2-5. Problema electromagnético con corrientes magnéticas.

Utilizando las expresiones 2-26 y 2-20:

$$\mathbf{E}_M = -\nabla \times \iint_{S'} \mathbf{M}(\mathbf{r}') \cdot G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') ds' = \iint_{S'} \nabla \times \left( \mathbf{M}(\mathbf{r}') \cdot \frac{e^{-j\beta R(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}}{4\pi R(\mathbf{r} - \mathbf{r}')} \right) ds' \quad (2-31)$$

donde haciendo operaciones vectoriales (y teniendo en cuenta que  $\nabla \times \mathbf{M} = 0$ , ya que igual que antes el operador de Hamilton se refiere a los puntos de observación) se llega fácilmente a la expresión:

$$\begin{bmatrix} E_{M_x} \\ E_{M_y} \\ E_{M_z} \end{bmatrix} = \iint_{S'} G_3(R) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \times \mathbf{M}(\mathbf{r}') ds' = \iint_{S'} \left( G_3(R) \cdot \begin{bmatrix} 0 & (\xi - \xi') & -(y - y') \\ -(\xi - \xi') & 0 & (x - x') \\ (y - y') & -(x - x') & 0 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} M_x(\mathbf{r}') \\ M_y(\mathbf{r}') \\ M_z(\mathbf{r}') \end{bmatrix} ds' \quad (2-32)$$

$$\text{siendo: } G_3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi} \frac{1 + j\beta R}{R^3} e^{-j\beta R}$$

Expresión que, análogamente a la 2-28, podemos reducirla en términos de la función diádica de Green,  $\underline{\underline{G}}_M$ :

$$\mathbf{E}_M = \iiint_{V'} \underline{\underline{G}}_M(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}') dv' \quad \text{con} \quad \underline{\underline{G}}_M(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = G_3(\mathbb{R}) \cdot \begin{bmatrix} 0 & (\xi - \xi') & -(y - y') \\ -(\xi - \xi') & 0 & (x - x') \\ (y - y') & -(x - x') & 0 \end{bmatrix} \quad (2-33)$$

Que al igual que anteriormente nos permite referir el campo eléctrico, debido ahora a fuentes equivalentes magnéticas, en términos de la convolución entre las corrientes magnéticas y la función diádica de Green, o del producto en el dominio transformado:

$$\mathbf{E}_M = \underline{\underline{G}}_M(\mathbf{r}) * \mathbf{M}(\mathbf{r}) \quad \text{en el dominio transformado:} \quad \tilde{\mathbf{E}}_M = \tilde{\underline{\underline{G}}}_M(\mathbf{r}) \cdot \tilde{\mathbf{M}}(\mathbf{r}) \quad (2-34)$$

### 2.3.3 Fuentes electromagnéticas generalizadas

Esta descripción del campo eléctrico, tanto el causado por corrientes eléctricas (2-29 y 2-30) como el debido a fuentes magnéticas equivalentes (2-31 y 2-32), puede sintetizarse en una expresión referida a fuentes genéricas y a una función diádica de Green generalizada:

$$\mathbf{E} = \iiint_{V'} \underline{\underline{G}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{f}(\mathbf{r}') dv' \quad (2-35)$$

$$\mathbf{E} = \underline{\underline{G}}(\mathbf{r}) * \mathbf{f}(\mathbf{r}) \quad \text{en el dominio transformado:} \quad \tilde{\mathbf{E}} = \tilde{\underline{\underline{G}}}(\mathbf{r}) \cdot \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{r}) \quad (2-36)$$

Donde en cada caso tomará las expresiones que correspondan a la descripción de las fuentes y que en el supuesto de que esta fuera mixta (a la vez eléctricas y magnéticas) la función diádica y las fuentes podrán formarse por yuxtaposición:

$$\underline{\underline{G}} = [[G_J] \vdots [G_M]] \quad ; \quad \mathbf{f}(\mathbf{r}) = \begin{bmatrix} \mathbf{J} \\ \dots \\ \mathbf{M} \end{bmatrix} \quad (2-37)$$

### 2.3.4 Campos sobre geometrías canónicas

Supongamos que tanto el dominio en el que se extienden las fuentes  $\mathcal{J}$  como el de medida  $\mathcal{D}$  fuera rectangular y paralelo. Se pueden elegir unas *coordenadas cartesianas* en las que tales dominios sean de coordenada  $\xi$  constante:  $\xi_f$  para las fuentes y  $\xi_o$  para el dominio de observación. Con estas consideraciones podemos describir las relaciones (2-33) y (2-34):

$$\mathbf{E}(x, y, \xi_o) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{\underline{G}}(x - x', y - y', \xi_o - \xi_f) \cdot \mathbf{f}(x', y') dx' dy' = \underline{\underline{G}}(x, y, \Delta_\xi) * \mathbf{f}(x, y) \quad (2-38)$$

$$\tilde{\mathbf{E}}(\tilde{z}_0) = \mathcal{F}_{xy} \left\{ \mathbf{E}_{z_0}(x, y) \right\} = \mathcal{F}_x \left\{ \mathcal{F}_y \left\{ \mathbf{E}_{z_0}(x, y) \right\} \right\} = \mathcal{F}_y \left\{ \mathcal{F}_x \left\{ \mathbf{E}_{z_0}(x, y) \right\} \right\} = \underline{\underline{\mathbf{G}}}(\tilde{z}_0 - \tilde{z}_f) \cdot \tilde{\mathbf{f}} \quad (2-39)$$

Y en consecuencia:

$$\mathbf{E}(\tilde{z}_0) = \mathcal{F}_{xy}^{-1} \left\{ \tilde{\mathbf{E}}(\tilde{z}_0) \right\} = \mathcal{F}_{xy}^{-1} \left\{ \underline{\underline{\mathbf{G}}}(\tilde{z}_0 - \tilde{z}_f) \cdot \tilde{\mathbf{f}} \right\} \quad (2-40)$$

En caso de que el dominio de observación se atenga a una geometría *cilíndrica*, de modo que podamos referirlo a una superficie de distancia radial constante  $\rho_0$ , entonces el campo eléctrico:

$$\mathbf{E}(\rho_0, \varphi, \tilde{z}) = \iiint_{(\rho', \varphi', \tilde{z}') \in V'} \underline{\underline{\mathbf{G}}}(\rho_0, \varphi, \tilde{z}, \rho', \varphi', \tilde{z}') \cdot \mathbf{f}(\rho', \varphi', \tilde{z}') \cdot \rho' d\rho' d\varphi' d\tilde{z}'$$

donde :  $\underline{\underline{\mathbf{G}}}(\rho_0, \varphi, \tilde{z}) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \underline{\underline{\mathbf{G}}}(x - x', y - y', \tilde{z} - \tilde{z}') \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi' & -\sin \varphi' & 0 \\ \sin \varphi' & \cos \varphi' & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  (2-41)

con :  $\{x = \rho \cdot \cos \varphi ; x' = \rho' \cdot \cos \varphi' ; y = \rho \cdot \sin \varphi ; y' = \rho' \cdot \sin \varphi'\}$

A partir de estas expresiones, sin embargo, la formulación en términos de una convolución y a continuación espectral se encuentra con la dificultad de expresar  $\mathbf{G}$  en términos de  $\rho-\rho'$ ,  $\phi-\phi'$ .

Si, por otra parte, el dominio de observación fuera esférico, podrían definirse unas *coordenadas esféricas* en las que este dominio quede definido por un valor constante de la coordenada radial, entonces el campo eléctrico:

$$\mathbf{E}(r_0, \theta, \varphi) = \iiint_{(r', \theta', \varphi') \in V'} \underline{\underline{\mathbf{G}}}(r_0, \theta, \varphi, r', \theta', \varphi') \cdot \mathbf{f}(r', \theta', \varphi') \cdot r' \cos \vartheta \cdot dr' d\theta' d\varphi'$$

donde :  $\underline{\underline{\mathbf{G}}}(r, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \varphi & \cos \theta \sin \varphi & -\sin \theta \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \end{pmatrix} \cdot \underline{\underline{\mathbf{G}}}(x, y, \tilde{z}) \cdot \begin{pmatrix} \sin \theta' \cos \varphi' & \cos \theta' \cos \varphi' & -\sin \varphi' \\ \sin \theta' \sin \varphi' & \cos \theta' \sin \varphi' & \cos \varphi' \\ \cos \theta' & \sin \theta' & 0 \end{pmatrix}$  (2-42)

con :  $\{x = r \sin \vartheta \cos \varphi ; y = r \sin \vartheta \sin \varphi ; \tilde{z} = r \cos \theta\}$

Que al igual que en el caso anterior presenta la dificultad de expresarse en términos convolucionales y espectrales.

Por último si referimos nuestro problema electromagnético a unas *coordenadas curvilíneas generalizadas*  $(\xi, \eta, \lambda)$ , entonces el campo eléctrico sobre una superficie  $\xi_0$  podrá expresarse como:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}(\xi, \eta, \lambda) &= \iiint_{(\xi', \eta', \lambda') \in V'} \underline{\underline{\mathbf{G}}}(\xi, \eta, \lambda, \xi', \eta', \lambda') \cdot \mathbf{f}(\xi', \eta', \lambda') \cdot \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\xi', \eta', \lambda')} \right| d\xi', d\eta', d\lambda' \\
 \text{donde : } \underline{\underline{\mathbf{G}}}(\xi, \eta, \lambda) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{b_1} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{1}{b_1} \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{1}{b_1} \frac{\partial x}{\partial \lambda} \\ \frac{1}{b_2} \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{1}{b_2} \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{1}{b_2} \frac{\partial y}{\partial \lambda} \\ \frac{1}{b_3} \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{1}{b_3} \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{1}{b_3} \frac{\partial z}{\partial \lambda} \end{pmatrix} \cdot \underline{\underline{\mathbf{G}}}(x, y, z) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{b_1} \frac{\partial x}{\partial \xi'} & \frac{1}{b_2} \frac{\partial x}{\partial \eta'} & \frac{1}{b_3} \frac{\partial x}{\partial \lambda'} \\ \frac{1}{b_1} \frac{\partial y}{\partial \xi'} & \frac{1}{b_2} \frac{\partial y}{\partial \eta'} & \frac{1}{b_3} \frac{\partial y}{\partial \lambda'} \\ \frac{1}{b_1} \frac{\partial z}{\partial \xi'} & \frac{1}{b_2} \frac{\partial z}{\partial \eta'} & \frac{1}{b_3} \frac{\partial z}{\partial \lambda'} \end{pmatrix} \quad (2-43) \\
 \text{con } \{x = x(\xi, \eta, \lambda); y = y(\xi, \eta, \lambda); z = z(\xi, \eta, \lambda)\} &\text{ y } \left\{ b_1 = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi'} \right|; b_2 = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \eta'} \right|; b_3 = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \lambda'} \right| \right\}
 \end{aligned}$$

De igual forma que en los casos anteriores, si el dominio de las fuentes se restringe a una superficie en que una de las coordenadas curvilíneas se hace constante, entonces la integral será de superficie; las fuentes tendrán sólo dos componentes; el jacobiano será respecto a las dos coordenadas libres, así como la matriz de transformación y los factores de Lamé (o escala).

### 2.3.5 Campos para un observador lejano

En campo lejano la distancia del observador al origen de coordenadas es incomparablemente mayor que la de los puntos más alejados del sistema radiante ( $|\mathbf{r}| \gg |\mathbf{r}'|$ ) y en consecuencia la posición del observador respecto a las fuentes,  $\mathbf{R}$ , es muy parecida a la posición absoluta del observador,  $\mathbf{r}$ . De esta manera la magnitud estricta de  $R$  sólo merece ser tenida en cuenta cuando actúa como argumento de funciones armónicas, es decir, en los términos exponenciales de argumento imaginario; y en el resto de los casos puede aproximarse por  $r$  (de forma estricta se puede decir que tiende asintóticamente a  $r$ ). En general, cuando nos encontramos en campo lejano, puede considerarse que los vectores  $\mathbf{R}$  y  $\mathbf{r}$  son paralelos como ilustra la figura 2-6, y, en consecuencia, su diferencia dependerá esencialmente del ángulo  $\psi$ . Es decir, para cada ángulo de observación la contribución relativa de cada uno de los puntos de las fuentes depende de su distancia a un plano perpendicular a la dirección de observación, o lo que es lo mismo a la proyección de  $\mathbf{r}'$  sobre  $\mathbf{r}$ . Por tanto, una aproximación razonable para la distancia entre el observador y la fuente será:

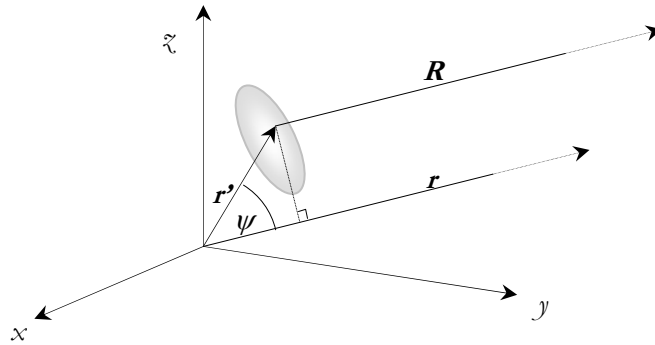
$$R \cong r - \{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}\} / r \quad (2-44)$$

Y, por tanto, los potenciales vectores (2-20) podrán expresarse como:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} &= \frac{\mu}{4\pi} \iint_{S'} \mathbf{J}_S \frac{e^{-j\beta R}}{R} ds' \cong \frac{\mu}{4\pi} \frac{e^{-j\beta r}}{r} \cdot \iint_{S'} \mathbf{J}_S \cdot e^{-j\beta r' \cos \psi} ds' = \frac{\mu}{4\pi} \frac{e^{-j\beta r}}{r} \cdot \mathbf{N}(\theta, \varphi) \\
 \mathbf{F} &= \frac{\varepsilon}{4\pi} \iint_{S'} \mathbf{M}_S \frac{e^{-j\beta R}}{R} ds' \cong \frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{e^{-j\beta r}}{r} \cdot \iint_{S'} \mathbf{M}_S \cdot e^{-j\beta r' \cos \psi} ds' = \frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{e^{-j\beta r}}{r} \cdot \mathbf{L}(\theta, \varphi)
 \end{aligned} \quad (2-45)$$

Con lo que el campo queda esencialmente expresado en términos de las funciones vectoriales de campo lejano  $\mathbf{N}$  y  $\mathbf{L}$  que pueden a su vez escribirse como:

$$\begin{aligned} \mathbf{N}(\theta, \varphi) &= \iint_{S'} \mathbf{J}_S \cdot e^{-j\beta r' \cos \psi} ds' = \iint_{S'} \mathbf{J}_S \cdot e^{-j\beta \frac{\{\mathbf{r}\mathbf{r}'\}}{r}} ds' \\ \mathbf{L}(\theta, \varphi) &= \iint_{S'} \mathbf{M}_S \cdot e^{-j\beta r' \cos \psi} ds' = \iint_{S'} \mathbf{M}_S \cdot e^{-j\beta \frac{\{\mathbf{r}\mathbf{r}'\}}{r}} ds' \end{aligned} \quad (2-46)$$



**Figura 2-6.** Geometría del problema electromagnético para un observador lejano.

Supongamos que las fuentes ocupan un dominio plano y hagamos que coincidan con  $z=0$ , tal y como ilustra la figura. Es trivial que en tales casos :

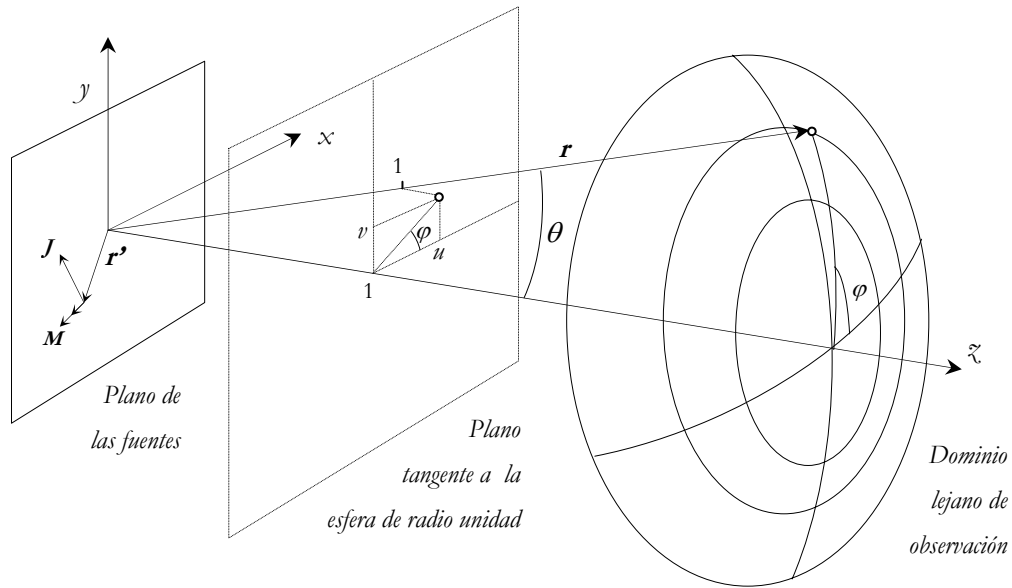
$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r} &= r \sin \theta \cos \varphi \cdot \hat{x} + r \sin \theta \sin \varphi \cdot \hat{y} \\ \mathbf{r}' &= x' \cdot \hat{x} + y' \cdot \hat{y} \end{aligned} \right\} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r} = x' \cdot \sin \theta \cos \varphi + y' \cdot \sin \theta \sin \varphi \quad (2-47)$$

Llamando  $u = \sin \theta \cos \varphi$ ,  $v = \sin \theta \sin \varphi$ , las funciones de campo lejano se pueden expresar en términos de transformadas de Fourier:

$$\begin{aligned} \mathbf{N}(\theta, \varphi) &= \mathbf{N}(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{J}_S \cdot e^{-j\beta(x'u + y'v)} dx' dy' = \mathcal{F}_{x', y'} \{ \mathbf{J}_S(x', y') \} = \tilde{\mathbf{J}}_S \\ \mathbf{L}(\theta, \varphi) &= \mathbf{L}(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{M}_S \cdot e^{-j\beta(x'u + y'v)} dx' dy' = \mathcal{F}_{x', y'} \{ \mathbf{M}_S(x', y') \} = \tilde{\mathbf{M}}_S \end{aligned} \quad (2-48)$$

Donde las variables  $u, v$ —como puede observarse en la figura— corresponden a las coordenadas  $x, y$  respectivamente de la proyección de los puntos de observación, idealmente situados en una esfera de radio unidad, sobre su plano tangente —y paralelo a la superficie de las fuentes—.





**Figura 2-7.** Interpretación geométrica de los parámetros fundamentales en una observación lejana.

Para determinar los campos electromagnéticos basta recurrir a las expresiones (2-22) o (2-26) y quedarse con los términos asintóticamente dominantes, que son todos los que tienen una dependencia con  $(1/r)$  de orden 1, pudiéndose además despreciar la componente radial en comparación con las tangenciales. Despreciando entonces en (2-22) todos los términos de orden superior y obviando la componente radial se llega a los siguientes comportamientos asintóticos:

$$\begin{cases} \mathbf{E}_J \cong -j\omega \cdot \mathbf{A} & (\text{con: } E_r \cong 0) \\ \mathbf{E}_M \cong -\frac{1}{\varepsilon} \nabla \times \mathbf{F} \cong j\omega\eta \cdot \hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{F} = -\eta \cdot \hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{H}_M \end{cases} \quad \begin{cases} \mathbf{H}_J = \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} \cong -\frac{j\omega}{\eta} \cdot \hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{A} = \frac{1}{\eta} \cdot \hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{E}_J \\ \mathbf{H}_M \cong -j\omega \cdot \mathbf{F} & (\text{con: } H_r \cong 0) \end{cases} \quad (2-49)$$

Usando las expresiones anteriores (que excluyen las componentes radiales) y aplicando la matriz de transformación de coordenadas a las funciones de campo lejano (cuya dirección depende de la de las fuentes) se llega sencillamente a la expresión:

$$\begin{pmatrix} E_\theta \\ E_\phi \end{pmatrix} = j\omega(-\mathbf{A} + \eta \hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{F}) = \frac{-j\beta e^{-j\beta r}}{4\pi \cdot r} \begin{pmatrix} \eta \cos\theta \cos\phi & \eta \cos\theta \sin\phi & \sin\phi & \cos\phi \\ \eta \sin\phi & \eta \cos\phi & -\cos\theta \cos\phi & -\cos\theta \sin\phi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{J}_x \\ \tilde{J}_y \\ \tilde{M}_x \\ \tilde{M}_y \end{pmatrix} \quad (2-50)$$

$$\mathbf{E} = \underline{\underline{\mathbf{T}_{cl}}} \cdot \tilde{\mathbf{f}} \quad \text{y} \quad \mathbf{H} = \frac{\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{E}}{\eta}$$

Es decir, en campo lejano, las expresiones integrales se reducen a un simple producto del espectro plano de las fuentes por una función diádica. Aunque la integración sigue, en realidad, presente en la transformada de Fourier de las fuentes.

### 2.3.6 Representación modal

A menudo resulta conveniente la descripción del campo, con independencia de las fuentes. Si esta descripción se hace en términos de funciones de distribución ortogonales sobre determinados dominios isocoordenados, que a su vez permitan la transposición al resto del espacio (o al hemiespacio limitado por uno de tales dominios, por ejemplo, el de medida), entonces este conjunto de funciones define eficazmente –mediante combinación lineal– el grupo completo de las distribuciones de campo válidas sobre todo un hemiespacio. Si sobre ese grupo, que en general será infinito numerable, se define una norma métrica (por ejemplo, la distancia cuadrática media de las distribuciones de campo extendidas a todo el dominio), esto constituye un espacio de Hilbert sobre el que están definidos todas las distribuciones de campo válidas y que nos permitirá la determinación óptima (aunque no única) de distribuciones de campo medidas sobre el grupo de distribuciones válidas. Esta forma de proyección de distribuciones de campo medidas sobre el grupo de distribuciones válidas puede considerarse como una forma de minimización óptima del error (medido en términos de la norma métrica elegida), que en general será equivalente a la proyección sobre cualquier grupo de funciones válidas descrito en términos de cualquier otra elección de funciones ortogonales.

Tal definición, sin embargo, no es trivial –salvo acaso en geometrías cartesianas– para cualquier tipo de dominios isocoordenados<sup>4</sup>. No obstante, para las geometrías canónicas (rectangular, cilíndrica y esférica), bien por medio de resolución directa de la ecuación de onda (2-7) o mediante recurso indirecto de la función de Green y los potenciales vectores, se han encontrado soluciones a este problema, a menudo, referida como expansión de ondas planas, cilíndricas o esféricas, que en general, permiten reconocer los campos tangenciales sobre un dominio isocoordenado perteneciente a todo el hemiespacio exento de singularidades<sup>5</sup>. La utilización de esta descripción requiere la identificación de los modos mediante la aplicación de las propiedades de ortogonalidad sobre una superficie en la que se conocen los campos, lo que corresponde a la proyección antes citada. Si esta superficie encierra completamente a las fuentes, en virtud del teorema de unicidad, el

---

<sup>4</sup> De hecho, como probó Eisenhart [40], la ecuación de Helmholtz escalar es separable en 11 sistemas coordenados diferentes; mientras que para la ecuación vectorial sólo se han encontrado soluciones completas en 6 sistemas coordenados (los 3 canónicos y otros 3 de escasa utilidad práctica: cilindro elíptico y parabólico y sistema esférico en coordenadas cónicas [168]). Aunque posiblemente la primera exposición acabada de la expansión modal fuera la de Stratton [151], ya se había abordado el problema para geometrías concretas, como fue el caso de Hansen para el problema esférico [59].

<sup>5</sup> Es decir, allí donde son aplicables las ecuaciones de Helmholtz (2-7). Nótese que este hemiespacio es necesariamente ideal, aunque legítimo para el intento de identificación de la radiación con independencia del entorno.

campo exterior a ésta quedará así biunívocamente identificado y éste habrá de ser idéntico al generado por las corrientes equivalentes sobre dicha superficie.

### a) Modos planos

En caso de que el dominio de observación  $\mathcal{D}$  sea una superficie plana de coordenada  $z$  constante el campo eléctrico podrá describirse como [151; 60; 168]:

$$\mathbf{E}_T = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \{ \underline{\mathbf{M}}_p(\beta_x, \beta_y) \cdot e^{j\beta_z z} \} e^{j\beta_x x} e^{j\beta_y y} d\beta_x d\beta_y = \mathcal{F}_{xy}^{-1} \{ \underline{\mathbf{M}}_p(\beta_x, \beta_y) \cdot e^{j\beta_z z} \} \quad (2-51)$$

con  $\beta^2 = \beta_x^2 + \beta_y^2 + \beta_z^2$

Y por tanto:

$$\tilde{\mathbf{E}}_T(z) = \mathcal{F}_{xy} \{ \mathbf{E}_T(z) \} = \underline{\mathbf{M}}_p(\beta_x, \beta_y) \cdot e^{j(\sqrt{\beta^2 - \beta_x^2 - \beta_y^2})z} = \underline{\mathbf{M}}_p(\beta_x, \beta_y) \cdot f_p(\beta_x, \beta_y, z) \quad (2-52)$$

Donde  $\underline{\mathbf{M}}_p$  son los denominados *modos planos* del campo, que a su vez corresponden con el espectro espacial sobre la superficie  $z=0$  (y que, en consecuencia, es a menudo referido como espectro de ondas planas), y  $f_p$  la *función de proyección* de los modos a una superficie arbitraria de coordenada  $z$  constante. A partir de (2-52) es inmediato que si conocemos los campos tangenciales sobre un plano  $z=z_0$  pueden determinarse los modos:

$$\underline{\mathbf{M}}(\beta_x, \beta_y) = \tilde{\mathbf{E}}_T(z_0) \cdot f_p^{-1}(\beta_x, \beta_y, z_0) \quad (2-53)$$

Nótese que, en virtud de la unicidad de solución, en el hemiespacio homogéneo (2-34) y (2-53) deberán ser idénticos:

$$\tilde{\mathbf{E}}_T(z_0) = \underline{\underline{\mathbf{G}}}(z_0 - z_f) \tilde{\mathbf{f}} = f_p(\beta_x, \beta_y, z_0) \cdot \underline{\mathbf{I}} \cdot \underline{\mathbf{M}}_p \quad (2-54)$$

Que muestra la equivalencia entre el espacio de las fuentes y el de los modos planos, y que por tanto podrán referirse mediante un operador de proyección (a partir de 2-54):

$$\tilde{\mathbf{f}} = \left[ \underline{\underline{\mathbf{G}}}_{\Delta z} \right]^{-1} \cdot f_p(\beta_x, \beta_y, z_0) \cdot \underline{\mathbf{M}}_p = \underline{\underline{\mathbf{P}}}_{M-f} \cdot \underline{\mathbf{M}}_p \quad (2-55)$$

En el caso de que las fuentes sean magnéticas, el operador de proyección será (según 2-32 – restringida a las componentes x, y– y 2-38):

$$\underline{\underline{\mathbf{P}}}_{M-f} = \left[ \underline{\underline{\mathbf{G}}}_{\Delta z} \right]^{-1} f_p(\beta_x, \beta_y, z_0) = \frac{f_p(\beta_x, \beta_y, z_0)}{\tilde{\mathbf{G}}_3(\beta_x, \beta_y, \Delta z) \cdot \Delta z} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = f'_p(\beta_x, \beta_y) \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2-56)$$

Lo que pone en evidencia, ya no solo el isomorfismo entre los modos planos y las corrientes magnéticas, sino en este caso una relación directa (aunque cruzada y matizada por un factor de escala) debida a la correspondencia entre el principio de Huygens y el de equivalencia<sup>6</sup>.

### b) Modos cilíndricos

Si el dominio de observación fuera cilíndrico, entonces el campo eléctrico puede expresarse, análogamente al caso plano, en términos de unos modos cilíndricos  $\underline{\mathbf{M}}_C$  [151; 60]:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\rho, \varphi, z) = \begin{bmatrix} E_\rho \\ E_\varphi \\ E_z \end{bmatrix} &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} \frac{-jn}{\rho} H_n^{(2)}(\beta_\rho \rho) & \frac{j\beta_z}{\beta} \frac{\partial H_n^{(2)}(\beta_\rho \rho)}{\partial \rho} \\ \frac{\partial H_n^{(2)}(\beta_\rho \rho)}{\partial \rho} & -n\beta_z H_n^{(2)}(\beta_\rho \rho) \\ 0 & -\frac{\beta_\rho^2}{\beta} H_n^{(2)}(\beta_\rho \rho) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a(n, \beta_z) \\ b(n, \beta_z) \end{bmatrix} \cdot e^{jn\varphi} \cdot e^{j\beta_z z} d\beta_z \quad (2-57) \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \underline{\mathbf{H}}(n, \rho) \cdot \underline{\mathbf{M}}_C(n, \beta_z) \right\} \cdot e^{jn\varphi} \cdot e^{j\beta_z z} d\beta_z = \mathcal{F}_{z, \varphi}^{-1} \left\{ \underline{\mathbf{H}}(n, \rho) \cdot \underline{\mathbf{M}}_C(n, \beta_z) \right\} \\ &\quad \text{con } \beta^2 = \beta_\rho^2 + \beta_z^2 \end{aligned}$$

siendo  $H_n^{(2)}(x)$  las funciones de Hankel de segunda especie de orden  $n$ , y la transformada bidimensional de Fourier (sobre las coordenadas  $\varphi$  y  $z$ ) debe interpretarse ahora como la transformada sobre  $z$  y los coeficientes del desarrollo en serie de las funciones periódicas en  $\varphi$ .

$$\begin{aligned} \tilde{X}(n, \beta_z) &\stackrel{\Delta}{=} \mathcal{F}_\varphi \left\{ \mathcal{F}_z \left\{ X(\varphi, z) \right\} \right\} = \mathcal{F}_z \left\{ \mathcal{F}_\varphi \left\{ X(\varphi, z) \right\} \right\} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\varphi, z) e^{-jn\varphi} e^{-j\beta_z z} d\varphi dz \quad (2-58) \\ X(\varphi, z) &\stackrel{\Delta}{=} \mathcal{F}_\varphi^{-1} \left\{ \mathcal{F}_z^{-1} \left\{ \tilde{X}(n, \beta_z) \right\} \right\} = \mathcal{F}_z^{-1} \left\{ \mathcal{F}_\varphi^{-1} \left\{ \tilde{X}(n, \beta_z) \right\} \right\} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X(\varphi, z) e^{-jn\varphi} e^{-j\beta_z z} d\beta_z \end{aligned}$$

Con lo cual, si se conoce el campo eléctrico sobre una superficie cilíndrica  $\rho = \rho_0$ :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}}(\rho) &= \mathcal{F}_{\varphi, z} \left\{ \mathbf{E}_\rho(\varphi, z) \right\} = \underline{\mathbf{H}}(n, \beta, \rho) \cdot \underline{\mathbf{M}}_C \\ \underline{\mathbf{M}}_C &= \left[ \underline{\mathbf{H}}(\rho_0) \right]^{-1} \tilde{\mathbf{E}}(\rho_0) \end{aligned} \quad (2-59)$$

donde  $[\underline{\mathbf{H}}]^{-1}$  admite varias definiciones, por ejemplo:  $\frac{1}{H_{21}H_{32} - H_{31}H_{22}} \cdot \begin{bmatrix} 0 & H_{32} & -H_{22} \\ 0 & -H_{31} & H_{21} \end{bmatrix}$

Puesto que comúnmente se conoce el campo tangencial, es decir,  $E_\varphi$  y  $E_z$ , la condición (2-59) concernirá solo a tales componentes, para las cuales se puede concretar la función diádica  $\underline{\mathbf{H}}$  para solamente las componentes tangenciales, en cuyo caso será cuadrada y por tanto con inversa única.

<sup>6</sup> Nótese que la relación cruzada, que muestra la matriz de proyección (2-56), se debe a la identidad entre las corrientes magnéticas equivalentes y el producto vectorial entre la normal a la superficie de las corrientes y el campo eléctrico sobre ésta (de acuerdo con el principio de equivalencia §2.2).

Como puede observarse en (2-57) ahora existe una relación directa entre la componente vertical del campo y los modos  $b(n, \beta_z)$  que, en consecuencia, nos permite identificarlos como modos verticales eléctricos.

### c) Modos esféricos

Finalmente, cuando el dominio de observación sea esférico el campo puede expresarse en términos de sus modos esféricos  $\underline{\mathbf{M}}$ , como puede derivarse a partir de expresiones similares [151; 60; 58; 59]:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} E_r(r, \vartheta, \varphi) \\ E_\vartheta(r, \vartheta, \varphi) \\ E_\varphi(r, \vartheta, \varphi) \end{bmatrix} &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \begin{bmatrix} 0 & \frac{n(n+1)}{r} h_n^{(2)}(\beta r) Y_{nm}(\vartheta, \varphi) \\ \beta \eta_0 h_n^{(2)}(\beta r) \frac{m \cdot Y_{nm}(\vartheta, \varphi)}{\sin \vartheta} & \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \{r h_n^{(2)}(\beta r)\} \frac{\partial Y_{nm}(\vartheta, \varphi)}{\partial \theta} \\ \beta \eta_0 h_n^{(2)}(\beta r) \frac{\partial Y_{nm}(\vartheta, \varphi)}{\partial \theta} & \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \{r h_n^{(2)}(\beta r)\} \frac{j m Y_{nm}(\vartheta, \varphi)}{\sin \vartheta} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a(n, m) \\ b(n, m) \end{bmatrix} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \underline{\mathbf{H}}_\epsilon(r, \vartheta, \varphi, n, m) \cdot \underline{\mathbf{M}}_\epsilon(n, m) \end{aligned} \quad (2-60)$$

$$\text{donde: } Y_{nm}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} \cdot e^{jm\varphi} P_n^m(\cos \theta)$$

siendo  $h_n^{(2)}(x)$  las funciones esféricas de Hankel de segunda especie y  $P_n^m(x)$  los polinomios asociados de Legendre. Como puede observarse los modos  $a(n, m)$  no producen componente radial, se denominan así *modos transversales eléctricos* (TE); mientras que los  $b(n, m)$  son los *transversales magnéticos* (TM). Si se conoce el campo tangencial sobre una esfera de radio  $r_0$ , los modos podrán determinarse gracias a la ortogonalidad de las funciones esféricas usando sólo la parte tangencial (inferior) de la función diádica en (2-60), que podemos denotar por  $\underline{\mathbf{H}}_{\epsilon T}$  [168]:

$$\underline{\mathbf{M}}_\epsilon = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} [\underline{\mathbf{H}}_{\epsilon T}(r_0)]^{-1} \begin{bmatrix} E_\vartheta(r_0) \\ E_\varphi(r_0) \end{bmatrix} \cdot d\vartheta d\varphi \quad (2-61)$$

### d) Isomorfismo entre la distribución superficial de corrientes y la representación modal

Según se demostró en §2.3.6.a, para una geometría plana los espacios representados por los modos y por las corrientes superficiales son isomorfos, y en ese caso se determinó el operador de proyección entre ambos espacios. No obstante, a tenor del principio de equivalencia superficial (§2.2) ese resultado puede generalizarse a toda la representación modal. En efecto, las representaciones modales (2-51), (2-57), (2-60) nos permiten determinar el campo en todo el espacio homogéneo, y así conocer el campo tangencial en una superficie tan próxima a las fuentes como queramos. Si éstas las hemos circunscrito por medio de una superficie plana, cilíndrica o esférica, respectivamente, podemos proyectar los modos hasta esta superficie y aplicando aquí las equivalencias (2-24) o (2-25) encontrar la relación entre modos y corrientes (generalizando las expresiones modales y usando 2-6a):

$$\begin{aligned}\hat{n} \times \mathbf{M}_S &= \mathbf{E}_T|_S = \sum_{\forall \text{modos TE}} \underline{\underline{\mathbf{H}}}|_S \cdot \underline{\underline{\mathbf{M}}}|_{TE} \\ -\hat{n} \times \mathbf{J}_S &= \mathbf{H}_T|_S = \frac{j}{\beta\eta} [\nabla \times \mathbf{E}_S]_T = \frac{j}{\beta\eta} \sum_{\forall \text{modos TM}} \left[ \nabla \times \left( \underline{\underline{\mathbf{H}}}|_S \cdot \underline{\underline{\mathbf{M}}}|_{TM} \right) \right]_T\end{aligned}\quad (2-62)$$

(donde los subíndices:  $_S$  representa la particularización sobre la superficie de corrientes;  $_T$  la particularización en las componentes tangenciales;  $_{TE}$  y  $_{TM}$  los modos tangenciales eléctricos y magnéticos respectivamente). Para el caso plano se determinó en (2-55) y (2-56); para el *cilíndrico* se puede aplicar el equivalente conductor eléctrico e identificar los modos verticales  $b(n, \beta_z)$  con el espectro de campo en  $z$  y éste con el espectro de las corrientes en  $\varphi$ . Las corrientes en  $z$  serán iguales (aunque opuestas) al campo superficial en  $\varphi$ ; que a su vez está linealmente relacionado con los dos modos:

$$\begin{aligned}\tilde{M}_\varphi &= \tilde{E}_z|_S = H_{C,zb}|_S b(n, \beta_z) \\ \tilde{M}_z &= -\tilde{E}_\varphi|_S = -\underline{\underline{\mathbf{H}}}_{C,\varphi}|_S \begin{bmatrix} a(n, \beta_z) \\ b(n, \beta_z) \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (2-63)$$

Finalmente para una geometría *esférica* basta considerar las expresiones (2-62) en las que puede observarse que el campo eléctrico debido a las corrientes magnéticas es necesariamente tangencial a la superficie de las corrientes y, por consiguiente, sólo puede estar descrito por los modos TE. Análogamente las corrientes eléctricas estarán directamente ligadas con los modos TM:

$$\begin{aligned}\hat{n} \times \mathbf{M}_S &= \mathbf{E}_T|_S = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \underline{\underline{\mathbf{H}}}_e(r, \vartheta, \varphi, n, m)|_S \cdot \begin{bmatrix} a(n, m) \\ 0 \end{bmatrix} \\ -\hat{n} \times \mathbf{J}_S &= \mathbf{H}_T|_S = \frac{j}{\beta\eta} [\nabla \times \mathbf{E}_S]_T = \frac{j}{\beta\eta} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \nabla \times \left( \underline{\underline{\mathbf{H}}}_e(r, \vartheta, \varphi, n, m)|_S \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ b(n, m) \end{bmatrix} \right)\end{aligned}\quad (2-64)$$

En suma, las expresiones (2-55), (2-63) y (2-64) representan la proyección entre el espacio de las fuentes electromagnéticas y el de los modos para cada una de las geometrías canónicas. Y determinada la proyección lineal entre estos queda pues probado el isomorfismo entre ambas representaciones.

## 2.4 DISCRETIZACIÓN DEL PROBLEMA ELECTROMAGNÉTICO

Llegados a este punto podríamos admitir que se haya resuelto el problema de la determinación del campo radiado por un conjunto de fuentes adaptándolo al conocimiento que de éstas tengamos y a las geometrías que resulten más convenientes a cada problema en particular, para lo cual se ha llegado a expresiones diversas que podemos compendiarlas en:

$$\mathbf{E} = \sum_{\forall \text{ las fuentes}} \underline{\underline{\mathbf{G}}} \cdot \mathbf{f} = \sum_{\forall \text{ los modos}} \underline{\underline{\mathbf{H}}} \cdot \mathcal{M} \quad (2-65)$$

Donde la suma debe entenderse en la mayor parte de los casos (por ejemplo, 2-33, 2-51), como una suma de elementos infinitesimales, es decir, una integral; o en otros (por ejemplo 2-60 y parcialmente en 2-57) como una suma de infinitos términos. Por supuesto, que –según se ha probado– el problema de conocer el campo en todo el espacio es tridimensional y hemos conseguido reducirlo a sólo dos dimensiones, lo cual puede sentirse como un alivio, pero siendo las dos dimensiones restantes infinito numerables poco nos importa esperar a recabar datos que sean infinitos en dos o en tres dimensiones, nunca acabaremos y el que hemos llamado problema directo quedaría perpetuamente pendiente de solución<sup>7</sup>. La dificultad podría ser del mismo orden que la de pretender dar cuenta hasta el más ínfimo detalle del sistema radiante y de su entorno. Obviamente siempre podemos recurrir al uso de métodos numéricos para aproximar las integrales y para truncar las series atendiendo a sus características de convergencia y así minimizar el error. Sin embargo, es posible demostrar que el problema acotado en los términos descritos en §2.1 –que, en última instancia, no es sino una idealización de cualquier problema real– tiene una dimensión esencial que es finita y determinable.

### 2.4.1 Teorema de muestreo para el problema electromagnético

Aunque resulta evidente que un número finito de datos ha de ser suficiente para la caracterización de la radiación debida a un conjunto acotado de fuentes, varios autores (por ejemplo [18; 21; 22], [74; 75]) han probado que puede limitarse el error tanto como se quiera usando un número mínimo de datos. Sin embargo, las demostraciones hacen uso de expresiones asintóticas y aproximaciones que no son del todo necesarias si se recurre a la ecuación de Helmholtz y al teorema de muestreo (propuesto por Whittaker [162] como parte de la teoría de interpolación, y ampliamente utilizado desde Nyquist [125] y Shannon [146]), con lo que puede llegarse a una prueba sencilla de la *dimensión esencial* del problema de radiación.

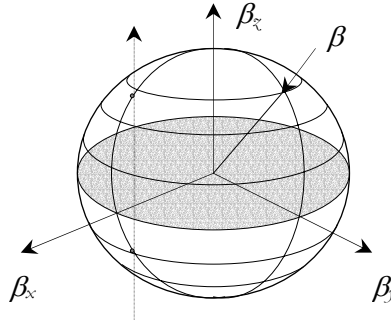
La ecuación de Helmholtz (2-7), como ya se ha hecho notar anteriormente, impone una restricción esencial a las tres frecuencias espaciales:

$$\beta^2 = \beta_x^2 + \beta_y^2 + \beta_z^2 \quad (2-66)$$

---

<sup>7</sup> En el mejor de los casos, la descripción en términos de modos esféricos requiere un número de coeficientes infinito pero entero para la dimensión  $\theta$  y un número infinito pero natural para la dimensión  $\varphi$ .

Lo que en el espacio  $\beta_x, \beta_y, \beta_z$  supone que los únicos puntos válidos, es decir representativos del problema homogéneo expresado en la ecuación de Helmholtz, corresponden a una esfera<sup>8</sup> de radio  $\beta$  (representada en la figura 2-8).



**Figura 2-8.** Superficie de las frecuencias espaciales isomorfa con el espacio de los campos radiados.

Obviamente, los puntos de esa esfera no representa el espacio completo de soluciones de la ecuación de Helmholtz, para ello debiéramos considerar valores imaginarios en las variables  $\beta_i$ , es decir, ondas que no se propagan y que por tanto son evanescentes. Si prescindimos de una de las variables  $\beta_i$ , por ejemplo  $\beta_z$ , entonces las *ondas radiadas* estarán representadas por el círculo sombreado de la fig.2-8, y las *ondas evanescentes* corresponderán a puntos exteriores del plano, para las cuales la constante de propagación es imaginaria y, por tanto, presentan un perfil de decaimiento en la dirección  $z$ . Estas soluciones, según hemos precisado nuestro problema §2.1, representarán campos que a unas pocas longitudes de ondas de las fuentes podrán haberse atenuado tanto que resulten invisibles y, en consecuencia, la zona sombreada de la figura 2-8 se denomina *espectro visible*, que es el que en esencia atañe al problema de radiación.

Prescindamos por el momento de las ondas evanescentes y consideremos que a nuestro problema conciernen sólo los campos radiados, y que, por tanto, la transformada de Fourier bidimensional sobre cualquier dominio de medida y para cualquier dirección está estrictamente limitada en banda.

<sup>8</sup> Nótese que esta restricción hace que al aplicar al campo eléctrico la transformada de Fourier tridimensional (que puede obtenerse aplicando secuencialmente la unidimensional para cada una de las direcciones ortogonales siguiendo un orden arbitrario), si, por ejemplo, se ha hecho primero para las direcciones  $x$ , y (y nos limitamos a los campos que se propagan hacia  $z > 0$ , es decir,  $\beta_z > 0$ ) entonces ésta sólo estará valuada en  $\beta_z = (\beta^2 - \beta_x^2 - \beta_y^2)^{1/2}$ . Es decir:

$$\mathcal{F}_{xy\zeta} \{E_j(x, y, \zeta)\} = \mathcal{F}_\zeta \{ \mathcal{F}_{xy} \{E_j(x, y, \zeta)\} \} = \mathcal{F}_\zeta \{ \tilde{E}_j(\beta_x, \beta_y) \} = M(\beta_x, \beta_y) \cdot \delta(\beta_z - \sqrt{\beta^2 - \beta_x^2 - \beta_y^2})$$

expresión que es evidente si nos desplazamos a través de la línea punteada de la figura 2-6; y a partir de ésta:

$$\tilde{E}_j(\beta_x, \beta_y, \zeta) = \mathcal{F}_\zeta^{-1} \{ M(\beta_x, \beta_y) \cdot \delta(\beta_z - \sqrt{\beta^2 - \beta_x^2 - \beta_y^2}) \} = M(\beta_x, \beta_y) \cdot e^{-j\sqrt{\beta^2 - \beta_x^2 - \beta_y^2} \zeta}$$

De donde, la formulación de modos planos (2-52) se deriva directamente.



*Teorema 1:* La mínima distancia entre intensidades de campo radiado independientes es  $\lambda/2$ .

De acuerdo con (2-66) resulta evidente que el valor máximo de la frecuencia espacial en cualquiera de las direcciones espaciales es  $\beta$ , lo cual implica, a tenor del teorema de muestreo [146; 126], que la mínima distancia entre valores independientes del campo es estrictamente  $\pi/\beta = \lambda/2$ , tal y como se había afirmado. □

Esta distancia por estar referida a cualquier dirección espacial puede generalizarse a la separación mínima independiente en cualquier *coordenada curvilínea*:

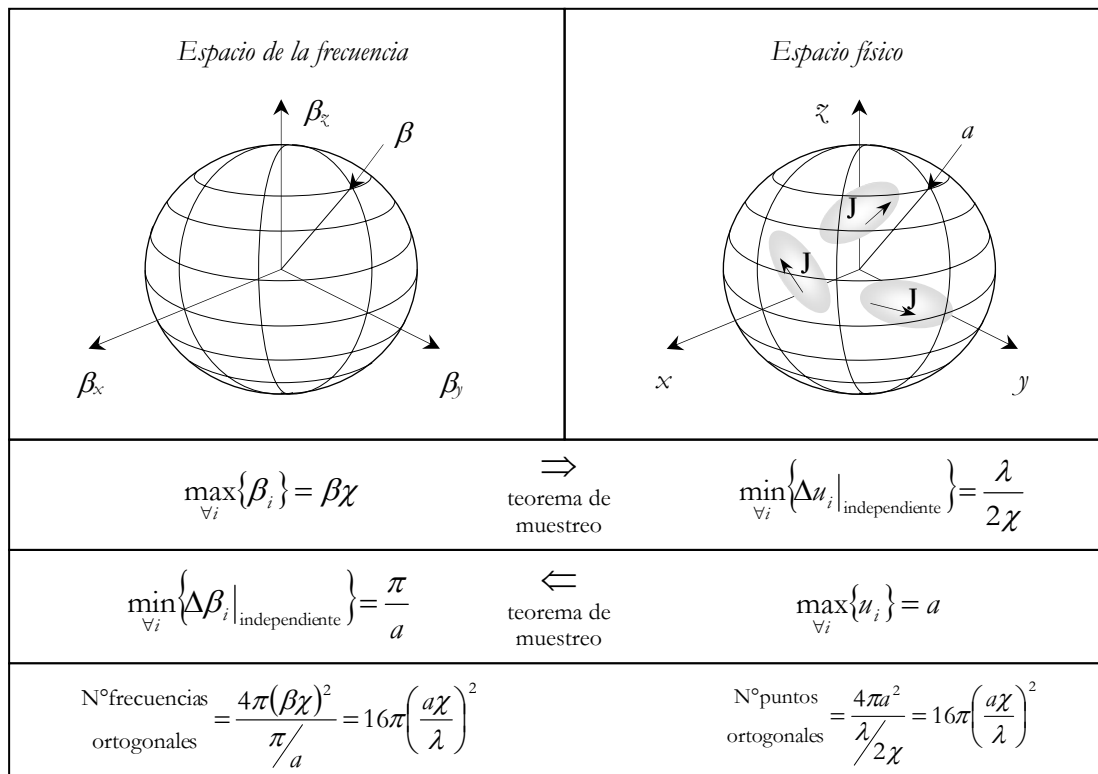
$$\Delta\xi_{min} = \Delta r \cdot \frac{\partial\xi}{\partial r} = \Delta r \cdot \frac{1}{h_\xi} = \frac{\lambda}{2h_\xi} \quad (2-67)$$

siendo  $h_\xi$  el factor de Lamé (o escala) para la coordenada en cuestión. Si sobre una superficie admitimos una cierta proporción de *modos evanescentes* entonces el ancho de banda espacial en cualquier dirección perteneciente a dicha superficie tendrá un cierto exceso, que denotaremos por  $\chi > 1$ . Una adecuada elección de este factor (como se verá más adelante en §2.4.3) nos permitirá aproximar tanto como se desee los campos sobre la superficie mediante la discretización de su distribución a una frecuencia  $2\beta\chi$ . Diremos entonces que la frecuencia espacial de los campos sobre la superficie es  $\beta\chi$  y las muestras ortogonales deberán distanciarse:

$$\Delta\xi_{min} = \frac{\lambda}{2h_\xi\chi} \quad (2-68)$$

*Teorema 2:* El máximo número de intensidades de corriente independientes inscritas en una esfera de radio  $a$  y generadoras de campos radiados es  $16\pi(a\chi/\lambda)^2$ . Ésta es la dimensión esencial del problema de radiación.

Consideremos ahora que todos los radiadores están contenidos en el interior de una esfera de radio  $a$ . Según el principio de equivalencia, si conocemos los campos sobre esa superficie, podemos determinar una distribución superficial de corrientes equivalentes que genere el mismo campo sobre todo el espacio. Según nos vayamos aproximando a los radiadores éstas se irán pareciendo cada vez más a las corrientes verdaderas. Invirtiendo aquí el teorema de muestreo –gracias al principio de dualidad–, resulta inmediato que “los campos sobre la esfera de radio  $a$ ” no sólo estarán limitados en banda sino que además la mínima separación entre frecuencias espaciales independientes necesarias para su descripción será  $\pi/a$ . (fig 2.9).



**Figura 2-9.** Dimensión esencial del problema de radiación.

Estando limitada la distancia entre puntos independientes u ortogonales, el tamaño mínimo de elementos ortogonales de superficie será  $(\lambda/2\chi)^2$ , y puesto que la superficie de corrientes equivalentes es de área limitada, podemos entonces establecer la dimensión esencial del problema. En el dominio frecuencial podemos hacer lo mismo, ya que la frecuencia está limitada por  $\beta\chi$  y existe una separación mínima entre frecuencias ortogonales, en cuyo caso los resultados deben ser coherentes, como se muestra en la figura 2-9. Así pues, podemos establecer que la *dimensión esencial* del problema de radiación es  $N=16\pi(a\chi/\lambda)^2$ . Tal y como se había afirmado.□

*Teorema 3:* La máxima distancia entre intensidades de campo independientes, radiadas desde un conjunto cualquiera de corrientes inscrito en una esfera de radio  $a$  cuyo centro se encuentra a una distancia  $d$  es:  $\lambda d/2a\chi$ .

Consideremos la descripción del campo en términos de los modos esféricos (2-60). Si nos acercamos hasta la esfera de radio  $a$  para determinar los campos sobre esa superficie y tomamos  $N$  muestras equiespaciadas (prefiltradas para evitar la contaminación de los modos evanescentes<sup>9</sup>),

<sup>9</sup> Lo cual podría hacerse sobremuestreando (respecto a  $\lambda/2$ ); filtrando las muestras obtenidas y finalmente diezmandolas. Olvidémonos de la dificultad de tomar sobre una esfera  $N$  muestras equiespaciadas.

entonces habremos recabado toda la información que se requiere para determinar de forma unívoca los campos *radiados* (o con una aproximación tan ajustada como se desee). La posición de cada uno de esos puntos dependerá exclusivamente de las posiciones angulares  $(\theta, \varphi)$ , ya que toda la información referente a las variaciones radiales está contenida en las funciones esféricas de Hankel y, por tanto, a los coeficientes modales sólo les conciernen variaciones angulares. Según el teorema 1 –ecuación 2-68– la separación angular entre muestras ortogonales debe ser  $\Delta\theta = \lambda/2r\chi$  en elevación y  $\Delta\varphi = \lambda/(2r\chi \sin\theta)$  en acimut (o en caso de regularizar las muestras:  $\Delta\varphi = \lambda/2r\chi$ ). Es decir, la máxima frecuencia angular que puede esperarse sobre la esfera de radio  $a$  será:  $\beta r\chi = \beta a\chi$ , y puesto que la frecuencia angular máxima de un modo esférico de orden  $[n,m]$  es  $n/2\pi$  -tanto en elevación como en acimut- habrá un número entero de modos que ofrezcan una definición exacta de los campos. Al truncarse la serie de modos esféricos las condiciones integrales de ortogonalidad (2-54) se pueden traducir a series:

$$\sum_{n=1}^{N'} \sum_{m=-n}^n \underline{\underline{H_{\epsilon,i}}}(r, n\Delta\theta, m\Delta\varphi) \cdot \underline{\underline{H_{\epsilon,j}}}(r, \Delta\theta, m\Delta\varphi) = \begin{cases} \neq 0 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (2-69)$$

Con lo cual el sistema:

$$\begin{cases} \underline{\underline{E}}(r_o, \theta_1, \varphi_1) = \sum_{n=1}^{N'} \sum_{m=-n}^n \underline{\underline{H_{\epsilon,n,m}}}(r_o, \theta_1, \varphi_1) \cdot \underline{\underline{M_{n,m}}} \\ \vdots \\ \underline{\underline{E}}(r_o, \theta_N, \varphi_N) = \sum_{n=1}^{N'} \sum_{m=-n}^n \underline{\underline{H_{\epsilon,n,m}}}(r_o, \theta_N, \varphi_N) \cdot \underline{\underline{M_{n,m}}} \end{cases} \quad (2-70)$$

tiene solución única si:

$$\begin{vmatrix} \underline{\underline{H_{\epsilon,1}}}(r_o, \theta_1, \varphi_1) & \cdots & \underline{\underline{H_{\epsilon,N}}}(r_o, \theta_1, \varphi_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{\underline{H_{\epsilon,1}}}(r_o, \theta_N, \varphi_N) & \cdots & \underline{\underline{H_{\epsilon,N}}}(r_o, \theta_1, \varphi_1) \end{vmatrix} = f(r_o) \neq 0 \quad (2-71)$$

Como puede verse en (2-60), considerando sólo las componentes tangenciales y en virtud de las propiedades de las funciones esféricas de Hankel (siempre definidas y distintas de cero para  $r>0$ ), una modificación de la distancia se traduce en la multiplicación por una constante compleja en toda una columna del determinante (2-71). Por tanto, si eligiendo adecuadamente la posición de las muestras a una determinada distancia existe una solución única a (2-70), entonces la habrá también a cualquier otra distancia siempre que se considere el mismo número de puntos y las mismas posiciones angulares.

En suma, si nos separamos una distancia arbitraria  $d$  respecto al centro de nuevo necesitamos el mismo número de muestras de campo y éstas deberán tomarse con idénticas separaciones

angulares. Esto nos ofrece una respuesta clara a la pregunta ¿Cuál es la separación mínima entre muestras ortogonales cuando nos encontramos a una determinada distancia? Supongamos que hacemos un recorrido circular (en un plano cualquiera) sobre la esfera de radio  $a$ . Según lo anterior necesitaremos  $N_l = 2\pi a \chi / (\lambda/2) = 4\pi a \chi / \lambda$  muestras. Si nos separamos a una circunferencia de radio mayor seguiremos necesitando el mismo número de muestras  $N_l = 2\pi d / \Delta$  y por tanto:

$$\Delta_{\min} |_{\text{indep}} = \frac{\lambda d}{2a\chi} \quad (2-72)$$

Que es lo que arriba habíamos afirmado. □

Dicho de otra manera, el *ancho de banda espacial* de la distribución del campo sobre un determinado dominio de observación será:  $\beta a \chi / d$ . Resultado que es equivalente al de Bucci [18; 21; 22], aunque éste lo refiera a coordenadas normalizadas respecto a la distancia mínima y, por tanto, diga que el ancho de banda espacial es  $\beta a \chi$ .

Si solamente usamos estas muestras, para obtener el campo sobre el resto del dominio tenemos dos alternativas: 1) interpolar usando funciones armónicas, que en caso de tratarse de una esfera habrán de ser precisamente armónicos esféricos, o bien, 2) hacerlo de forma indirecta considerando una distribución regular de muestras y suponiendo, en un primer momento, que el campo consiste en una sucesión de deltas de Dirac para después filtrarlas a la frecuencia  $\beta a \chi / d$ .

Observemos que una de las consecuencias de esta separación mínima entre muestras independientes es que a distancias alejadas el mínimo ancho del lóbulo principal de una antena dependerá de su dimensión máxima,  $D = 2a$ . Asumiendo que en el límite no sea necesario exceso de ancho de banda ( $\chi=1$ ):

$$\Delta_{\min} |_{\text{indep}} = \frac{\lambda d}{2a} = \frac{\text{Distancia mínima entre nulos}}{2} \Rightarrow \theta_{\min} = \arctan \frac{\text{Distancia mínima entre nulos}}{d} \cong \frac{2\lambda}{D} \quad (2-73)$$

Resultado que es bien conocido en la teoría de antenas, pero al que comúnmente se llega por muy distinto camino (p.ej. [123, §49])<sup>10</sup>.

---

<sup>10</sup> Si bien este resultado, netamente convalidado por los resultados experimentales y técnicos, ha intentado a menudo rebatirse teóricamente desde el marco de las “antenas de superganancia”, debe tenerse en cuenta que éstas se fundan en extrapolaciones hechas sobre el círculo transformado de Schelkunoff –o transformaciones equivalentes– y éste a su vez se basa en la proyección asintótica de campo lejano. Sin embargo ¿cuándo se alcanza estrictamente dicho comportamiento?... demasiado lejos para poder correlar allí distancias y ángulos. Quizá no sin motivo la realidad se niega a dar asiento a estas antenas ideales.

## 2.4.2 Muestreo del dominio de observación y del campo observado

Supongamos que describimos analíticamente el dominio de observación  $\mathcal{D}$  como  $\mathbf{r}(u)$  si es curvilíneo, o  $\mathbf{r}(u, v)$  si es superficial (siendo  $\mathbf{r}$  la posición desde el origen que además coincide con el de la esfera que circunscribe las fuentes). Para tener sobre este dominio el mínimo número de muestras que permita la descripción completa del campo radiado el muestreo deberá ser ortogonal, de acuerdo a las prescripciones de los teoremas anteriores. Este muestreo se traduce en una discretización del dominio de observación de modo que, según (2-72), para el caso curvilíneo:

$$\Delta \mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi} \Delta \xi \Rightarrow \Delta \xi = \frac{|\Delta \mathbf{r}|}{|\partial \mathbf{r} / \partial \xi|} = \frac{|r(\xi)| \lambda}{h_\xi 2a\chi} \quad (2-74)$$

y para el caso superficial, suponiendo que las coordenadas  $\xi, \eta$  son ortogonales:

$$\Delta \mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi} \Delta \xi + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \eta} \Delta \eta \Rightarrow \begin{cases} \Delta \xi = \frac{|r(\xi, \eta)| \lambda}{h_\xi 2a\chi} \\ \Delta \eta = \frac{|r(\xi, \eta)| \lambda}{h_\eta 2a\chi} \end{cases} \quad (2-75)$$

Valores que, en general, dependerán de la posición, pero que en caso de desearse un muestreo regular —es decir  $(\Delta u, \Delta v) = \text{cte}$ — sobre todo el dominio de observación, entonces deberá elegirse el valor mínimo de los periodos de muestreo (2-74) y (2-75). En suma, el dominio podrá expresarse matricialmente, en el caso *curvilíneo*:

$$\begin{cases} \xi_1 \\ \xi_2 = \xi_1 + \Delta \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_M = \xi_{M-1} + \Delta \xi_{M-1} \end{cases} \Rightarrow \mathcal{D} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}(\xi_1) \\ \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}(\xi_2) \\ \vdots \\ \mathbf{r}_M = \mathbf{r}(\xi_M) \end{bmatrix} \quad (2-76)$$

y en el caso *superficial*:

$$\begin{cases} \xi_1 \\ \xi_2 = \xi_1 + \Delta \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_{M_\xi} = \xi_{M_\xi-1} + \Delta \xi_{M_\xi-1} \end{cases} \begin{cases} \eta_1 \\ \eta_2 = \eta_1 + \Delta \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_{M_\eta} = \eta_{M_\eta-1} + \Delta \eta_{M_\eta-1} \end{cases} \Rightarrow \mathcal{D} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{11} & \mathbf{r}_{12} & \cdots & \mathbf{r}_{1M_\eta} \\ \mathbf{r}_{21} & \mathbf{r}_{22} & \cdots & \mathbf{r}_{2M_\eta} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{r}_{M_\xi 1} & \mathbf{r}_{M_\xi 2} & \cdots & \mathbf{r}_{M_\xi M_\eta} \end{bmatrix} \quad (2-77)$$

con:  $\mathbf{r}_{n,m} = \mathbf{r}(\xi_n, \eta_m)$

Y en consecuencia, el campo eléctrico sobre el dominio de observación podrá igualmente expresarse de forma matricial:

$$\text{En el caso } \textit{curvilíneo}: \underline{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}(\mathbf{r}_1) \\ \vdots \\ \mathbf{E}(\mathbf{r}_M) \end{bmatrix}; \text{ en el } \textit{superficial}: \underline{\underline{\mathbf{E}}} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}(\mathbf{r}_{11}) & \cdots & \mathbf{E}(\mathbf{r}_{1M_\eta}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{E}(\mathbf{r}_{M_\xi 1}) & \cdots & \mathbf{E}(\mathbf{r}_{M_\xi M_\eta}) \end{bmatrix} \quad (2-78)$$

En el caso de las fuentes (ya sean corrientes reales o equivalentes magnéticas), según se ha justificado en el apartado anterior el muestreo óptimo corresponde a una distancia euclídea entre muestras de  $\lambda/2$ . Por tanto, los periodos óptimos de muestreo sobre el dominio de las fuentes en coordenadas curvilíneas serán:  $\Delta\xi' = \lambda/2h_{\xi'}$ ;  $\Delta\eta' = \lambda/2h_{\eta'}$  y a partir de estos puede llegarse a expresiones matriciales análogas a la (2-76), (2-77) –añadiendo tildes para denotar las fuentes-. Dependiendo de si las fuentes se extienden sobre un dominio lineal o sobre un dominio plano:

$$\text{En el caso } \underline{\text{curvilíneo}}: \underline{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{r}'_1) \\ \vdots \\ \mathbf{f}(\mathbf{r}'_M) \end{bmatrix}; \text{ en el } \underline{\text{superficial}}: \underline{\underline{\mathbf{f}}} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{r}'_{11}) & \cdots & \mathbf{f}(\mathbf{r}'_{1M_{\eta'}}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{f}(\mathbf{r}'_{M_{\xi'}1}) & \cdots & \mathbf{f}(\mathbf{r}'_{M_{\xi'}M_{\eta'}}) \end{bmatrix} \quad (2-79)$$

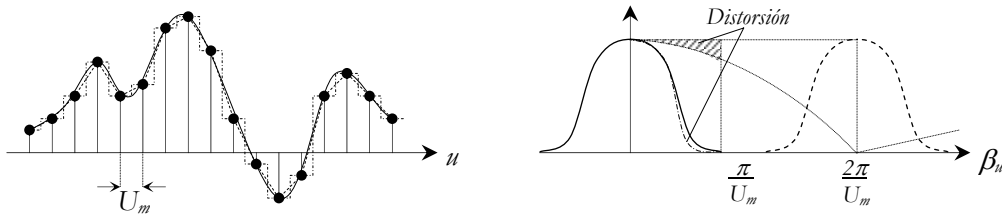
### **Funciones de distribución en los subdominios de muestreo (interpolación)**

Elegida la discretización óptima de las corrientes y los campos podríamos preguntarnos por las *funciones base* que mejor caracterizan estas entidades en su aproximación al problema continuo. Supongamos que sobre cada subdominio de muestreo, ya sean de corrientes o de campos, las muestras son representativas de algún tipo de distribución, por ejemplo cuadrada  $\Pi(u,v)$ , triangular  $\Lambda(u,v)$ , cosenoidal  $\cap(u,v)$ ... como muestra la figura 2-10:

$$\mathbf{E}(u) = \sum_{-N}^N \mathbf{E}(u_n) f_{SD}(u - u_n) \quad (2-80)$$

En cualquiera de estos casos es evidente que se produce una desviación con respecto a la verdadera distribución. Si las funciones de interpolación fueran cuadradas, la diferencia con respecto al caso real es especialmente patente por las discontinuidades entre subdominios. Sin embargo, si consideramos la limitación espectral arriba descrita, la eliminación de las frecuencias superiores traería consigo la supresión de tales discontinuidades, pero se mantendría una cierta cantidad de distorsión que se hace patente en el dominio frecuencial, como ilustra la figura 2-10.b. Esta conclusión puede en realidad extenderse a cualquier función de subdominio definida sólo en el espacio del subdominio. La única manera de evitar esta distorsión sería por medio de funciones cuyo espectro sea plano en el ancho de banda espacial de las corrientes o del campo, por ejemplo mediante pulsos ideales de Nyquist. Ésta es precisamente la opción que propone Bucci en sus series de muestreo [18; 21; 22]:

$$\mathbf{E}(u) = \sum_{-N}^N \mathbf{E}(u_n) \frac{\sin\{\beta_{u,\max}(u - u_n)\}}{\beta_{u,\max}(u - u_n)} \quad (2-81)$$



**Figura 2-10.** Interpolación mediante funciones de subdominio. a) dominio espacial b) dominio de la frecuencia espacial. El uso de funciones definidas sólo en el intervalo del subdominio producen distorsión.

De acuerdo a las conclusiones llegadas en §2.4.1 podemos considerar que con independencia del ancho de banda de la distribución de fuentes electromagnéticas, el fenómeno de radiación limita el ancho de banda. Es decir, en virtud de (2-21) podemos considerar que la función de Green sobre un determinado dominio se comporta como un filtro de ancho de banda  $\beta$ . Frecuencias espaciales superiores en la distribución de fuentes generan únicamente ondas evanescentes que sólo pueden percibirse en las inmediaciones de las fuentes. Por tanto, la utilización de deltas de Dirac para la caracterización de las fuentes electromagnéticas sobre subdominios permite una caracterización no distorsiva de las fuentes. En efecto, supongamos que la figura 2-10a representa una distribución lineal de corrientes y que el trazo continuo de la fig.2-10b su espectro espacial. Si discretizamos la distribución espacial y consideramos deltas de Dirac como funciones de distribución dentro de los subdominios entonces su espectro será periódico como ilustra el trazo discontinuo de la fig.2-10b. En este caso el espectro para frecuencias inferiores a la mitad de la de muestreo es idéntico al del caso continuo y, por tanto, en virtud de la limitación espectral del proceso de radiación “los campos radiados debidos a la distribución continua de corrientes y a la distribución discreta con deltas de Dirac son idénticos siempre que la separación entre éstas sea  $\lambda/2\chi$  o menos”. Es decir, aunando este resultado con el teorema de equivalencia se puede asegurar que “*el campo radiado desde un conjunto de fuentes cualquiera circunscrito por una cierta superficie es idéntico al que genera una agrupación finita de dipolos de Hertz (eléctricos y magnéticos), debidamente distribuidos sobre dicha superficie y cuyas corrientes satisfagan las condiciones de contorno (p.ej. 2-24)*”. Sin embargo, esto implica que las muestras del campo sobre la superficie de corrientes equivalentes deben tomarse lo suficientemente próximas para evitar que el muestreo de modos evanescentes en la proximidad de las fuentes reales con alto contenido frecuencial produzcan aliasing.

### 2.4.3 Ondas evanescentes

Volvamos al problema de las ondas evanescentes. Como decíamos antes éstas pueden eliminarse mediante un filtrado previo al muestreo óptimo descrito en §2.4.1 forzando que  $\mathcal{F}_{u,v}\{\mathbf{E}\}=0$  para  $(\beta_r^2 + \beta_z^2) < \beta^2$ . Sin embargo, podemos considerar las ondas evanescentes y entonces admitir un mayor ancho de banda para los campos sobre las coordenadas libres de un determinado dominio de

observación. De hecho según nos aproximemos a las fuentes éstas irán cobrando mayor importancia, cuya consecuencia inmediata es un aumento del ancho de banda del campo observado y así una reducción de la distancia entre valores independientes. Sobre una superficie en la que se aplicara el principio de equivalencia esto se traduciría en un aumento de la resolución de corrientes necesaria para su biunívoca representación respecto al campo generado. Sin embargo, los campos que esta distribución engendra tienen un alcance limitado. Podríamos, en definitiva, hablar de una resolución máxima de corrientes “generadora biunívoca” de los campos sobre un determinado dominio de observación con un error de relación<sup>11</sup> tan pequeño como se quiera.

En efecto, supongamos una onda evanescente con constante de atenuación  $\alpha'$  sobre un dominio cuya distancia mínima a las fuentes sea  $R_{\min}$ . Debido al decaimiento exponencial es inmediato que de estas ondas, respecto al valor que tenían junto a las fuentes quedará menos que  $e^{-\alpha' R_{\min}}$ . Podemos tomar este valor como representativo del error cometido al limitarnos a considerar las ondas evanescentes con  $\alpha \leq \alpha'$ , es decir, del error de truncamiento de los modos evanescentes<sup>12</sup>. Por tanto:

$$\alpha' = \frac{1}{R_{\min}} \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \quad (2-82)$$

Y para considerar estas ondas deberá aumentarse el ancho de banda en un factor  $\chi$ . Usando, por ejemplo, coordenadas cartesianas:

$$\beta_x^2 + \beta_y^2 = (\beta\chi)^2 \Rightarrow \beta_z^2 = \beta^2(1 - \chi^2) \Rightarrow \alpha_z^2 = \beta\sqrt{\chi^2 - 1} \quad (2-83)$$

Usando (2-82) y (2-83) podemos referir  $\chi$  a la cota de error  $\varepsilon$ :

$$\chi = \sqrt{1 + \left(\frac{\ln[1/\varepsilon]}{\beta \cdot R_{\min}}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\ln[1/\varepsilon]}{2\pi}\right)^2 \left(\frac{\lambda}{R_{\min}}\right)^2} \quad (2-84)$$

Y si particularizamos para  $R_{\min} = n\lambda$ :

<sup>11</sup> llamando *error de relación* a la diferencia entre el campo efectivo sobre el dominio de observación y el debido a la distribución de corrientes limitada en banda o discretizada.

<sup>12</sup> Obsérvese que este valor puede considerarse en realidad como una cota del error de truncamiento de los modos evanescentes. En efecto, supóngase que asintóticamente existe una distribución homogénea de tales modos (de acuerdo a la ecuación de Helmholtz las soluciones se sitúan ahora en el espacio  $\{\beta_1, \beta_2, \alpha_3\}$  sobre un hiperboloide de una hoja). La energía total de los modos evanescentes será proporcional a:

$$E_{eva} = \int_0^{\infty} e^{-2\alpha R_{\min}} d\alpha = \frac{1}{2R_{\min}} \quad \text{y la parte correspondiente de los modos truncados: } E_{trunc} = \int_{\alpha'}^{\infty} e^{-2\alpha R_{\min}} d\alpha = \frac{e^{-2\alpha' R_{\min}}}{2R_{\min}}$$

En consecuencia, el valor cuadrático medio del error de truncamiento:  $\varepsilon \cong (E_{trunc}/E_{eva})^{1/2} = e^{-\alpha' R_{\min}}$

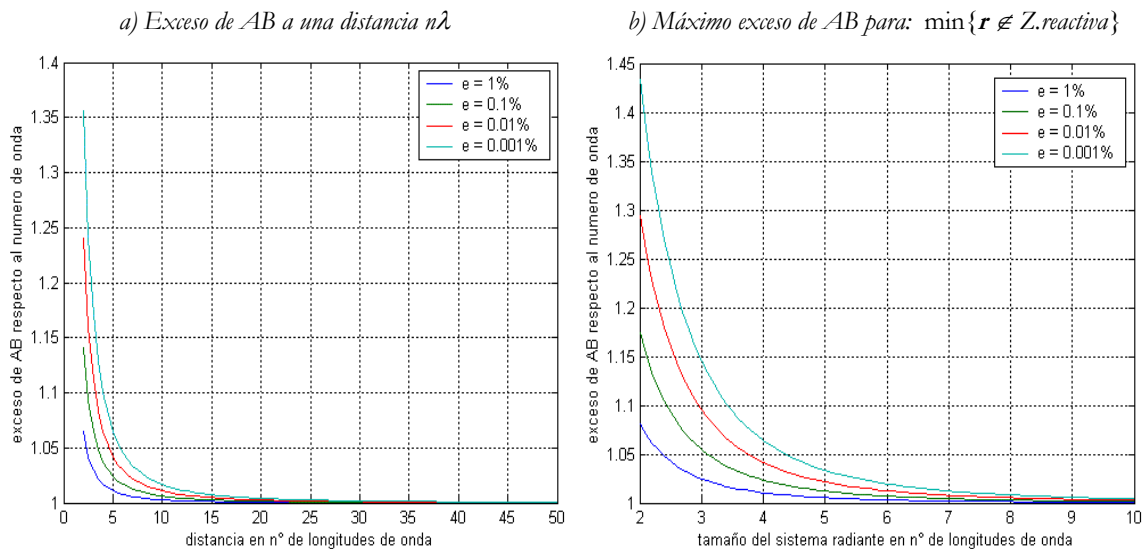


$$\chi = \sqrt{1 + \left( \frac{\ln[1/\varepsilon]}{2\pi \cdot n} \right)^2} \quad (2-85)$$

Puesto que normalmente el dominio de observación excluye la zona reactiva, la distancia mínima a las fuentes será ahora:  $R_{\min} = 0.62 \{D^3/\lambda\}^{1/2}$  [88] –donde D es la dimensión máxima del sistema radiante– que nos ofrece otra interesante particularización de (2-84), representada en la fig. 2-11b:

$$\chi \leq \sqrt{1 + \left( \frac{\ln[1/\varepsilon]}{3.96} \right)^2 \left( \frac{\lambda}{D} \right)^3} \quad (2-86)$$

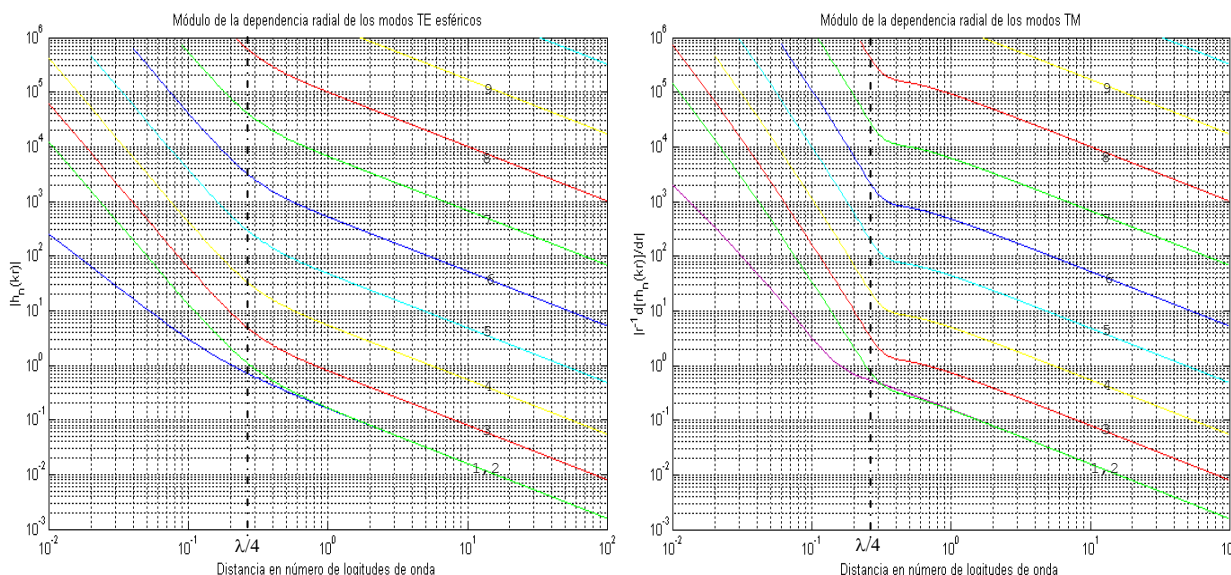
En la figura 2-11a se representa gráficamente la ecuación (2-85) donde puede observarse cómo, al distanciarse unas pocas longitudes de onda, el ancho de banda sobre el dominio de observación tiende rápidamente al número de onda. Si, por ejemplo, la distancia es mayor de  $20\lambda$  entonces el ancho de banda espacial sobre el dominio de observación sólo debería aumentar un 0.36% respecto al número de onda para un error inferior a  $10^{-6}$ . En suma, podemos reducir arbitrariamente el error de truncamiento de los modos evanescentes aumentando en un pequeño factor la frecuencia de muestreo (o lo que es lo mismo disminuyendo la distancia entre muestras: 2-74, 2-75).



**Figura 2-11.** Exceso del ancho de banda espacial con respecto al número de onda en función de la distancia para varios errores de truncamiento.

Si bien esto nos proporciona un criterio acerca de la separación entre muestras ortogonales del campo observado a una determinada distancia, en realidad no estamos considerando el tamaño del sistema radiante y en consecuencia obtenemos un factor de exceso con respecto a la separación en  $\lambda/2$ . Pero en realidad nuestro teorema segundo y tercero de muestreo (§2.4.1) iban considerablemente más lejos, reduciendo la dimensión de la distribución de campo a un número finito, que supone, a su vez, una separación entre muestras ortogonales del campo distante superior a  $\lambda/2$ . Allí se decía que la dimensión esencial del problema era  $N = 16\pi(a\chi/\lambda)^2$  y que en

consecuencia la separación entre muestras ortogonales habría de ser:  $\lambda d/2a\chi$ . Pero quedó sin precisar el valor de ese factor de exceso. Una combinación del criterio obtenido anteriormente para el exceso respecto a  $\beta$  (2-84) y el comportamiento de las funciones de Hankel nos proveerán una pauta para determinar el exceso respecto a  $\beta a/d$ . Recuérdese que fueron precisamente estas funciones las que nos otorgaron la evidencia de la distancia mínima entre muestras ortogonales, sancionando así el tercer teorema de muestreo.



**Figura 2-12.** Módulo de la dependencia radial de los modos esféricos, usando como argumento la distancia radial expresada en número de longitudes de onda.

En la figura 2-12 se representa el módulo de la función de dependencia de los modos esféricos, que como puede verse en la expresión modal (2-60) depende esencialmente de las funciones esféricas de Hankel (directamente para los modos TE y dependiente de su derivada para los modos TM). Esta figura nos permite observar varias características relevantes. Por una parte para ambos modos se pueden observar dos comportamientos asintóticos (para valores pequeños y grandes del argumento) que convergen cuando la distancia radial es  $\lambda/4$ <sup>(13)</sup>. Además a partir de  $\lambda$  la relación entre funciones de orden diferente es constante y todos los modos presentan una declive de 10 dB/decada. En definitiva, esto nos permite considerar que a partir de  $\lambda/4$  todos los modos tienen un mismo peso relativo. Es decir, si caracterizamos el campo usando un mínimo número de muestras sobre una esfera de radio mayor que  $\lambda/4$ , entonces la caracterización a cualquier otra

<sup>13</sup> Es precisamente a partir de este valor donde las funciones de Bessel de orden mitad a un impar y con términos cosenoidales, y así con discontinuidad en el origen, se regularizan con respecto a las que tienen términos senoidales –sin discontinuidad–

distancia será sobre las mismas posiciones angulares (si a una distancia los ordenes superiores a uno dado son superfluos lo serán también a cualquier otra distancia).

Consideremos que en un caso extremo haya una equidistribución de modos evanescentes sobre la superficie de una esfera, es evidente que a una cierta distancia parte de esos modos han disminuido tanto que podríamos depreciarlos. Supongamos, usando (2-84), que puede considerarse que el campo sobre los puntos situados a esa distancia (que a su vez forman una esfera) tiene un ancho de banda espacial  $\beta\chi$  (con un error tan pequeño como se quiera). Entonces la discretización del campo con dicho ancho de banda puede hacerse con un número finito de muestras. A cualquier otra distancia, según hemos probado antes, nos bastará ese mismo número de muestras para una descripción eficaz del campo y el resto serán superfluos. Existe una distancia (o una esfera ampliada, representada en la figura 2-13) en la que se requiere un número mínimo de muestras para una determinada cota de error, que la podemos tomar como dimensión esencial del problema espacial.

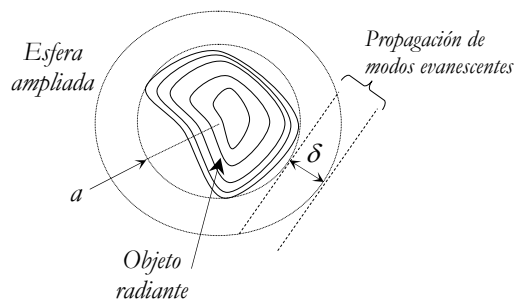
En suma, un criterio juicioso para establecer el exceso de ancho de banda que necesitamos tanto sobre la superficie de las fuentes como sobre cualquier dominio de observación que rodee a las fuentes consistiría en:

- 1) Si la esfera mínima que contiene las fuentes es de radio  $a$ , considerar una esfera ampliada de radio  $a + \delta$ .
- 2) Sobre la esfera ampliada determinar el exceso de ancho de banda para el mencionado error máximo de truncamiento de modos evanescentes usando la expresión (2-84). A ese exceso le corresponde un número de puntos de muestreo (teorema 2):

$$N_{\min} = \min_{\delta} \left\{ \frac{16\pi(a + \delta)^2 \chi^2(\delta)}{\lambda^2} \right\} = \min_{\delta} \left\{ 16\pi(a' + \delta')^2 \left( 1 + \left( \frac{\ln \epsilon}{2\pi\delta'} \right)^2 \right) \right\} \quad (2-87)$$

Donde  $a'$  y  $\delta'$  representan los valores  $a$  y  $\delta$  normalizados a la longitud de onda.

- 3) Minimizar el número de muestras necesarias tomando  $\delta$  como variable independiente.



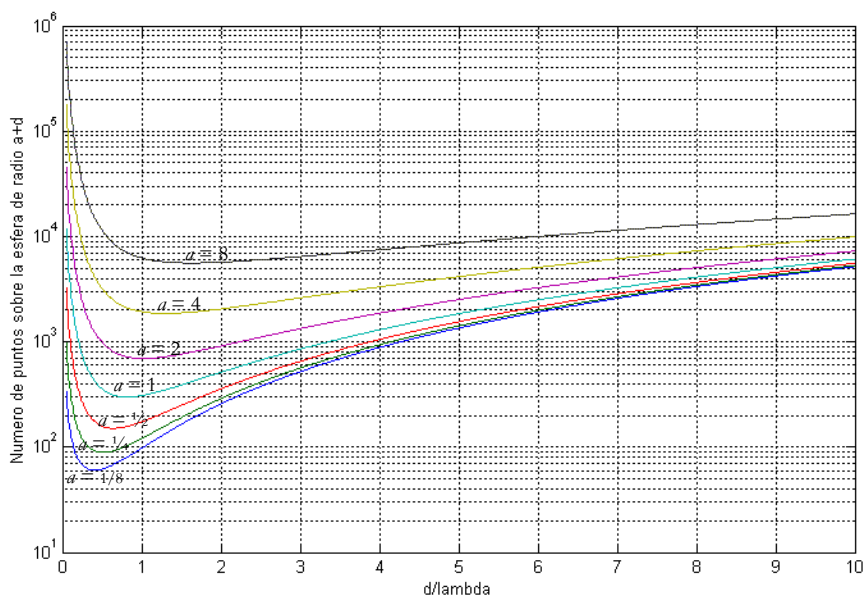
**Figura 2-13.** Geometría del problema de discretización del campo generado por radiadores finitos.

La relación  $N(\delta')$  de la ecuación (2-87) se trata de un polinomio en  $\delta'$  cuya derivada presenta una raíz real positiva, que corresponde con el mínimo que nos interesa. Dicho mínimo, representado en la figura 2-14 para varios tamaños del sistema radiante y una cota de error de  $10^{-2}$ , depende

exclusivamente de la cota superior de error y del tamaño eléctrico del radiador. Si bien para radiadores grandes la dimensión obtenida es muy elevada debe tenerse en cuenta que se trata de la caracterización sobre dominios superficiales que engloban completamente las fuentes. En muchos casos en los que se trabaja con grandes radiadores y la distribución de corrientes es separable en las dos dimensiones del dominio, el problema de su caracterización sobre dominios superficiales puede separarse en dos dominios unidimensionales. En ciertos contextos basta la caracterización sobre un único dominio unidimensional. En todas estas situaciones podrá hablarse de la dimensión esencial del problema electromagnético para dominios curvilíneos (unidimensionales):

$$N_{\min, \text{curv.}} = \min_{\delta} \left\{ \frac{4\pi(a + \delta)\chi(\delta)}{\lambda} \right\} = \min_{\delta} \left\{ 4\pi(a' + \delta') \sqrt{1 + \left( \frac{\ln \varepsilon}{2\pi\delta'} \right)^2} \right\} = \min_{\delta} \left\{ \sqrt{\pi \cdot N_{\min, \text{sup.}}} \right\} \quad (2-88)$$

Que como es evidente presenta un mínimo para el mismo valor del argumento que en el caso bidimensional (2-87), aunque guardando una relación cuadrática entre sus valores. En la figura 2-15a se representa la dimensión del problema superficial respecto al tamaño del radiador, usando la cota de error como parámetro. Los valores correspondientes del factor de exceso del ancho de banda  $\chi$  y del exceso del radio mínimo  $\delta$  se encuentran en la figura 2-15b, que es válida para dominios curvilíneo y superficiales. Finalmente en la figura 2-16 se representa la dimensión esencial del problema curvilíneo para un mayor rango de tamaños del radiador (la relación 2-88 permite relacionar el problema en una y dos dimensiones).



**Figura 2-14.** Variación del número de muestras necesarias sobre las esferas ampliadas de radio  $a + \delta$ .

Si bien estos resultados parecen especialmente juiciosos para la discretización del campo observado, para la discretización en el dominio de las fuentes parece razonable plegarse a su estructura. Por ejemplo, en el caso de estructuras planas esto supondrá una reducción importante del número de

muestras sobre el dominio de las fuentes. En estas circunstancias podrán usarse los resultados obtenidos para los factores de exceso sobre el dominio de las fuentes, mientras que los resultados de la dimensión esencial seguirán siéndonos útiles para el dominio del campo.

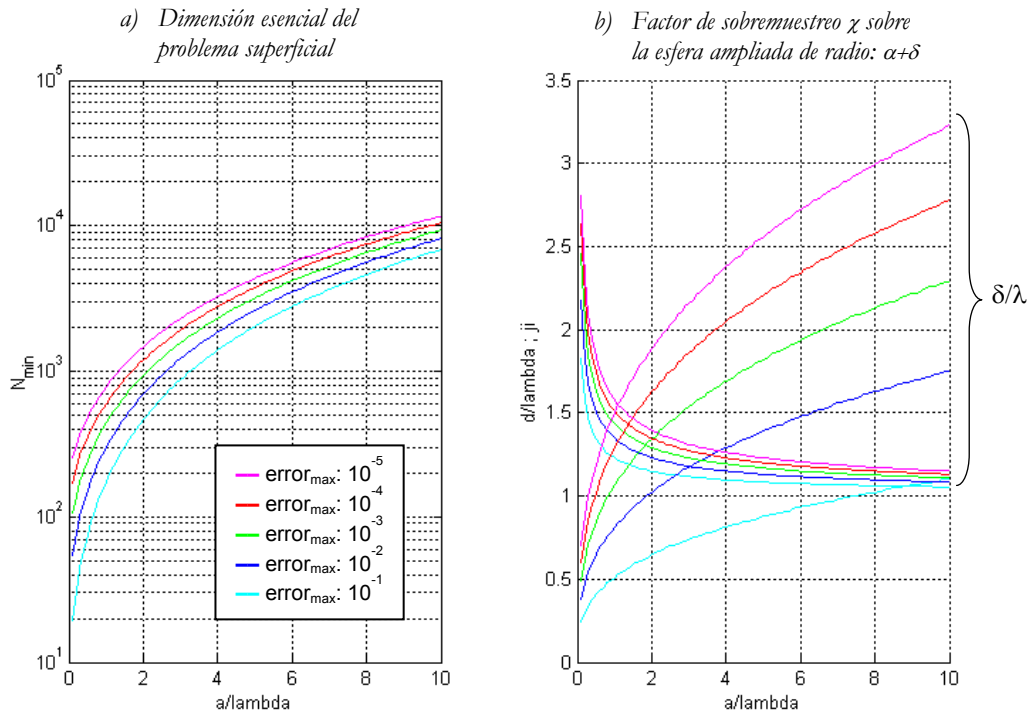


Figura 2-15. Dimensión esencial del problema superficial (a) y factores de sobremuestreo y de exceso del radio para los problemas tanto superficial como curvilíneos (b).

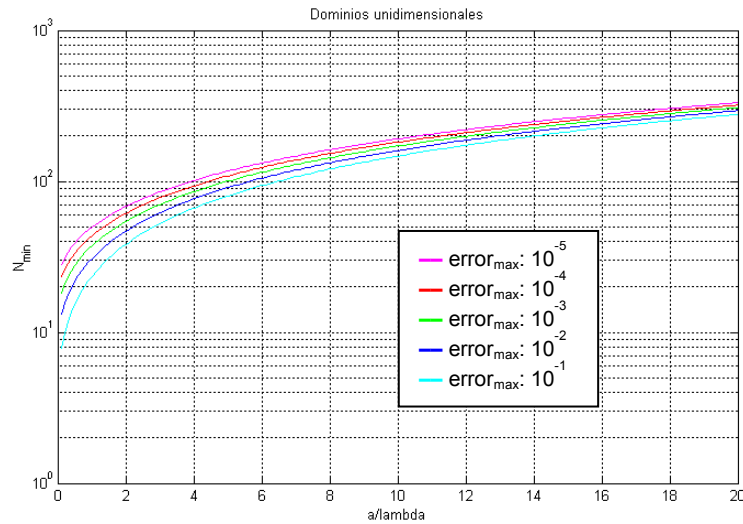


Figura 2-16. Dimensión esencial para dominios curvilíneos (Los parámetros  $\chi$  y  $\delta$  correspondientes son los de la figura 2-15.b).

### 2.4.4 Expresión del problema discretizado

Según se estableció en §2.4.2 podemos discretizar el dominio de las fuentes y el de los campos utilizando un conjunto finito de valores de tal forma que entre estos exista una relación biunívoca. En virtud del teorema de muestreo §2.4.1 y teniendo en cuenta la discutida conveniencia (§2.4.2) de la representación de las fuentes en términos de deltas de Dirac, la expresión (2-33) puede reducirse a una suma de un número finito de términos (N fuentes):

$$\begin{aligned} \underline{E}(\mathbf{r}) &= \iiint_{V'} \underline{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \left\{ \sum_{n=1}^{N \geq D, \text{esencial}} \mathbf{f}_n \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}'_n) dv' \right\} = \sum_{n=1}^N \underline{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'_n) \cdot \mathbf{f}_n = \\ \begin{pmatrix} E_\xi(\xi, \eta) \\ E_\eta(\xi, \eta) \end{pmatrix} &= \sum_{n=1}^N \begin{pmatrix} G_{\xi\xi'}(\xi, \eta, \xi'_n, \eta'_n) & G_{\xi\eta'}(\xi, \eta, \xi'_n, \eta'_n) \\ G_{\eta\xi'}(\xi, \eta, \xi'_n, \eta'_n) & G_{\eta\eta'}(\xi, \eta, \xi'_n, \eta'_n) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_{\xi'}(\xi'_n, \eta'_n) \\ f_{\eta'}(\xi'_n, \eta'_n) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2-89)$$

Expresión que se ha concretado para las componentes tangenciales a las superficies  $\mathcal{D}$  y  $\mathcal{S}$  (nótese que aquí y en (2-43) los sistemas coordenados para el dominio de observación  $\{\xi, \eta, \lambda\}$  y para el de las fuentes  $\{\xi', \eta', \lambda'\}$  pueden ser diferentes y así adaptarse cada uno de ellos a sus respectivas geometrías). Teniendo ahora en cuenta la discretización del dominio de observación (en M puntos) la anterior expresión funcional puede reducirse a una expresión numérico-matricial:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} E_\xi(\xi_1, \eta_1) \\ \vdots \\ E_\xi(\xi_M, \eta_M) \\ E_\eta(\xi_1, \eta_1) \\ \vdots \\ E_\eta(\xi_M, \eta_M) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \underline{G}_{\xi\xi'} \\ \underline{G}_{\xi\eta'} \\ \underline{G}_{\eta\xi'} \\ \underline{G}_{\eta\eta'} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_{\xi'}(\xi'_1, \eta'_1) \\ \vdots \\ f_{\xi'}(\xi'_N, \eta'_N) \\ f_{\eta'}(\xi'_1, \eta'_1) \\ \vdots \\ f_{\eta'}(\xi'_N, \eta'_N) \end{pmatrix} \\ \text{donde: } \underline{G}_{UV'} &= \begin{bmatrix} G_{UU'}(u_1, v_1, u'_1, v'_1) & \cdots & G_{UU'}(u_1, v_1, u'_N, v'_N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{UU'}(u_M, v_M, u'_1, v'_1) & \cdots & G_{UU'}(u_M, v_M, u'_N, v'_N) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2-90)$$

Donde el operador diádico que resulta de la discretización de la función diádica de Green (2-28) y (2-32) puede interpretarse como *operador lineal de transformación* del espacio de las fuentes al espacio del campo:

$$\begin{aligned} \underline{E} &= \underline{\mathcal{T}} \cdot \underline{f} \\ \text{donde: } \underline{E} &= \begin{pmatrix} E_\xi \\ E_\eta \end{pmatrix}; \underline{\mathcal{T}} = \begin{pmatrix} \underline{G}_{\xi\xi'} & \underline{G}_{\xi\eta'} \\ \underline{G}_{\eta\xi'} & \underline{G}_{\eta\eta'} \end{pmatrix}; \underline{f} = \begin{pmatrix} f_{\xi'} \\ f_{\eta'} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2-91)$$

En algunos casos cada componente direccional del campo esta referido a una única componente de las fuentes (por ejemplo, cuando éstas son magnéticas y el dominio de observación es plano), en cuyo caso la expresión diádica (2-91) se reduce a una expresión matricial.

Utilizando elementos vectoriales para las matrices podemos expresar (2-91) como:

$$\begin{bmatrix} \underline{E}_1 \\ \vdots \\ \underline{E}_M \end{bmatrix} = \sum_{n=1}^N \underline{\Psi}_n \cdot \underline{f} = \begin{bmatrix} \underline{\Psi}_{11} & \cdots & \underline{\Psi}_{N1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{\Psi}_{1M} & \cdots & \underline{\Psi}_{NM} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{f}_1 \\ \vdots \\ \underline{f}_N \end{bmatrix} \equiv \underline{E} = \underline{T} \cdot \underline{f} \quad (2-92)$$

Expresión que en caso de poderse desligar las componentes direccionales se reduce a una relación escalar:  $\underline{E} = \underline{T} \cdot \underline{f}$ . Como veremos esta expresión nos permitirá la definición de un espacio vectorial n-dimensional métrico y normado en el que queden representadas todas las posibles soluciones de los campos radiados sobre el dominio de observación.

#### 2.4.4.1 Dominios planos

Supongamos que así el dominio de las fuentes como el de observación sean planos. Hagamos coincidir, por simplicidad operativa, ambos dominios con planos de  $\zeta$  constante y que las coordenadas de discretización sean para los dos dominios idénticas. Entonces la expresión (2-90) podrá simplificarse:

$$\underline{E} = \begin{pmatrix} \underline{G}(x_1 - x_1, y_1 - y_1) & \cdots & \underline{G}(x_1 - x_N, y_1 - y_N) \\ \underline{G}(x_2 - x_1, y_2 - y_1) & \cdots & \underline{G}(x_2 - x_N, y_2 - y_N) \\ \vdots & \ddots & \cdots \\ \underline{G}(x_N - x_1, y_N - y_1) & \cdots & \underline{G}(x_N - x_N, y_N - y_N) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{f}(x_1, y_1) \\ \vdots \\ \underline{f}(x_N, y_N) \end{pmatrix} \quad (2-93)$$

Si en lugar de emplear expresiones matriciales, utilizamos expresiones secuenciales se observa claramente que la expresión (2-90) se trata de una convolución de secuencias discretas, cuyo correlato en el dominio transformado es el producto de las secuencias transformadas [126]:

$$\begin{aligned} \underline{E}[n, m] &= \sum_{p=1}^N \underline{G}[x_i - x_p, y_i - y_p] \cdot \underline{f}(x_n, y_n) = \sum_{n=1}^{N_x} \sum_{m=1}^{N_y} \underline{G}[x_i - x_n, y_i - y_m] \cdot \underline{f}(x_n, y_m) \\ &= \underline{\Psi}_o[n, m] * \underline{f}[n, m] = IDFT\{\tilde{\Psi}_o \cdot \tilde{f}\} \end{aligned} \quad (2-94)$$

Donde ahora las transformadas deben entenderse en términos de transformadas discretas de Fourier –que se definen para el caso bidimensional como en (2-39)– y  $\Psi_o$  la función de Green en el origen del plano de observación (o lo que es lo mismo, el campo eléctrico generado por un dipolo de Herz en el origen).

Cuando, finalmente, el dominio de observación sea lejano, entonces es evidente a partir de (2-50):

$$\underline{E}[n, m] = \underline{T}_{CL} \cdot DFT\{\underline{f}\} \quad : \quad \begin{pmatrix} E_\theta[n, m] \\ E_\phi[n, m] \end{pmatrix} = \underline{T}_{CL} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{J}_x[n, m] \\ \tilde{J}_y[n, m] \\ \tilde{M}_x[n, m] \\ \tilde{M}_y[n, m] \end{pmatrix} \quad (2-95)$$

Donde  $\mathcal{T}_{CL}$  es un operador diádico (definido en 2-50) entre magnitudes vectoriales y no entre entidades matriciales como lo es  $\underline{\mathcal{T}}$

Cuando el tamaño del radiador es elevado, si éste es plano y el dominio de observación es igualmente plano o bien se encuentra en la zona de Faunhoffer, entonces las expresiones (2-94) y (2-95) pueden reducir considerablemente el coste operativo de (2-92). No sin razón esta técnica numérica a la que se volverá más adelante, especialmente aprovechando las ventajas de las transformadas rápidas, ha sido puesta innumerablemente en práctica desde los años 70 [142, 168].

### 2.4.5 El espacio de campos radiados sobre el dominio de observación: $\tilde{\mathcal{E}}$

Si la discretización expresada en (2-90) ha sido efectiva podemos aquí interpretar los vectores  $\underline{\Psi}_n$  —que a su vez constituyen el operador lineal  $\underline{\mathcal{T}}$ — como una base de un espacio vectorial  $\tilde{\mathcal{E}}$  —de campos radiados sobre el dominio de observación  $\mathcal{D}$ — definido sobre un cuerpo de escalares complejos y cuya dimensión será la *dimensión esencial*  $N$  (§2.4.1). A partir de esta base podría definirse un conjunto ortogonal sobre el que cada distribución de campo quedara óptimamente representado.

En virtud de las conclusiones alcanzadas en §2.4.1 y §2.4.2 y la presente formulación podemos establecer el siguiente corolario:

*Corolario.* Si las funciones de campo  $\underline{\Psi}_n$  corresponden a los campos eléctricos sobre  $\mathcal{D}$  engendrados por una distribución de dipolos de Hertz de corriente unitaria sobre una superficie  $S$  adecuadamente distanciados, entonces el espacio generado por la base  $\{\underline{\Psi}\}$  es el de todos los posibles campos electromagnéticos *radiados* sobre  $\mathcal{D}$  por cualquier distribución de corrientes superficial o interior a  $S$ .

Si la distancia entre los mencionados dipolos de Hertz unitarios es menor que  $\lambda/2$  —en un factor  $\chi$ — y se separan una distancia adecuada de las fuentes reales, entonces el espacio generado por la base  $\{\underline{\Psi}\}$  aproxima todos los posibles campos radiados a partir de esa distancia cometiendo un error de truncamiento tan pequeño como se desee. Tanto la distancia a las fuentes como el error dependen del exceso de ancho de banda  $\chi$  considerado en §2.4.3.

Nos será de especial utilidad hacer que el espacio vectorial  $\tilde{\mathcal{E}}$  sea métrico y normado. Para ello nos basta concretar sobre dicho espacio un *producto interno* que se defina por medio de una forma sesquilineal hermítica sobre  $\mathcal{C}$ , cuya forma hermítica asociada sea positiva<sup>14</sup>:

---

<sup>14</sup> Es decir, el espacio  $\tilde{\mathcal{E}}$  será ahora, en virtud de este producto interno, prehilbertiano complejo; y puede considerarse hilbertiano de dimensión finita gracias a su separabilidad y completitud [106; 29]. Aunque el



$$\langle \underline{\mathbf{E}}_1, \underline{\mathbf{E}}_2 \rangle = \underline{\mathbf{E}}_1^T \cdot \underline{\mathbf{E}}_2^* = \sum_{m=1}^M \langle \mathbf{E}_{1_m}, \mathbf{E}_{2_m}^* \rangle \in \mathbb{C} \quad (2-96)$$

Donde el superíndice  $\top$  representa la matriz transpuesta y  $*$  el complejo conjugado. Este producto interno (definido a su vez en términos del producto escalar entre vectores  $\mathbf{E}$ , que en algunos casos podrá reducirse a un producto entre entidades escalares) permite a su vez definir una norma y una distancia:

$$\|\underline{\mathbf{E}}\| = \langle \underline{\mathbf{E}}, \underline{\mathbf{E}} \rangle^{1/2} = (\underline{\mathbf{E}}^T \cdot \underline{\mathbf{E}}^*)^{1/2} = \left( \sum_{m=1}^M \langle \mathbf{E}_{1_m}, \mathbf{E}_{1_m}^* \rangle \right)^{1/2} \in \mathfrak{R} \quad (2-97)$$

$$d(\underline{\mathbf{E}}_1, \underline{\mathbf{E}}_2) = \|\underline{\mathbf{E}}_1 - \underline{\mathbf{E}}_2\| \quad (2-98)$$

La norma cuadrática es, de hecho, proporcional a la potencia electromagnética que atraviesa la superficie  $\mathcal{D}$  y por tanto, con independencia de su geometría y extensión, será finita, siempre que lo sean las fuentes, es decir, los coeficientes de excitación de los dipolos de Hertz, que en el espacio  $\mathfrak{E}$  juegan el papel de las coordenadas sobre la base  $\{\Psi\}$ .

Obsérvese que al aumentar el número de muestras  $M$  sobre el dominio de observación no se modifica la dimensión del espacio  $\mathfrak{E}$ , pero aumenta la distancia entre los vectores independientes  $\Psi_m$  y su norma. Característica que como se verá más adelante será de suma importancia para el problema electromagnético inverso.

## 2.5 EJEMPLOS

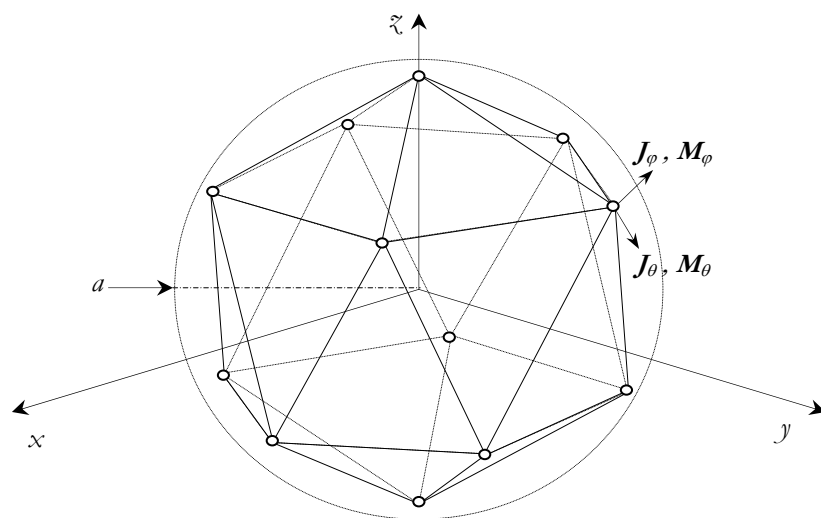
Para ilustrar alguna de las conclusiones a las que se ha llegado, consideremos un par de ejemplos teóricos. En primer lugar, supondremos una distribución arbitraria de corrientes interior a una esfera de reducido diámetro eléctrico que podamos discretizarla por medio de los vértices de un poliedro regular para que las distancias entre los dipolos de Hertz sean constantes. En este caso el reducido tamaño del objeto radiante no nos permite usar la teoría de imágenes y, por tanto, es menester contar con corrientes eléctricas y magnéticas sobre la superficie que rodea las fuentes. En segundo lugar, consideraremos una antena real cuya geometría y corrientes nos son conocidas y cuyo tamaño sí nos permite el recurso a la teoría de imágenes y, en consecuencia, limitarnos al uso de corrientes magnéticas.

---

producto interno aquí definido convierte el espacio  $\mathfrak{E}$  en euclídeo, más adelante –en §3.2– se verá una definición más general según la cual el espacio  $\mathfrak{E}$  ya no puede considerarse euclídeo, aunque si hilbertiano.

### 2.5.1 Corrientes sobre los vértices de un icosaedro

Con objeto de maximizar la dimensión del problema haremos que el cuerpo platónico en cuestión sea un icosaedro como ilustra la figura 2-10. Según las conclusiones a que se ha llegado, los campos engendrados por las corrientes tangenciales sobre los vértices del icosaedro deberían representar cualquier distribución de corrientes interior a la esfera que éste discretiza. Para probarlo elegiremos una distribución de corrientes eléctricas arbitraria e interior a la esfera para la que se probarán distintas excitaciones. Desde el punto de vista de la frecuencia espacial el peor caso consistirá en hacer que las corrientes interiores presenten variaciones espaciales lo más abruptas posibles, es decir, que queden descritas por medio de deltas de Dirac, siguiendo una distribución irregular. Según estas condiciones los modos evanescentes sobre la superficie de la esfera serán importantes y para satisfacer las condiciones del teorema de equivalencia el tamaño entre los vértices del icosaedro deberá ser menor que  $\lambda/2$ . Nótese que en un caso real las distribuciones de corrientes no pueden variar tan rápidamente y, por tanto, este ejemplo teórico está peor condicionado para la discretización que cualquier caso real.



**Figura 2-17.** Geometría del problema de corrientes interiores a una esfera discretizada por un icosaedro

Si la distribución de campos generada por cada componente superficial de corriente en cada vértice del icosaedro no puede determinarse mediante combinación lineal de las restantes, es entonces evidente que la dimensión del espacio  $\mathfrak{E}$  generado por las fuentes superficiales sobre los vértices del icosaedro será  $4 \times 12 = 48$ . Cuando la distancia entre los vértices sea eléctricamente demasiado pequeña los campos que generan las corrientes en los vértices dejarán de ser independientes y entonces la dimensión del espacio  $\mathfrak{E}$  será menor que 48.

De acuerdo al teorema de muestreo expuesto, la distancia entre los dipolos de Hertz debe ser  $\lambda/(2\chi)$  donde  $\chi$  corresponde con el exceso de ancho de banda necesario para dar cuenta de los modos evanescentes. El teorema de equivalencia nos asegura que si una distribución superficial de

corrientes verifica, por ejemplo, las relaciones del equivalente de Love (2-24), entonces el campo electromagnético generado por tal distribución será idéntico en todo el hemiespacio exterior. Y si esta distribución (de campos o corrientes sobre la superficie que engloba las fuentes) está limitada espacialmente en banda entonces es muestreable.

Supondremos que la distancia entre los vértices del icosaedro es constante e igual a 5 cm. La esfera que lo circunscribe será de un poco menos de 10 cm de diámetro (9.5106 cm). Y escalaremos su tamaño eléctrico mediante la variación de el número de onda  $\beta$  (o lo que es lo mismo, mediante la variación de  $\lambda$ ). Es obvio que si muestreamos a  $\lambda/2$  perderemos todas las componentes evanescentes sobre la superficie esférica y, en consecuencia, habrá una cierta discrepancia entre los campos generados por las corrientes  $J_i$  y los representados en el espacio  $\mathbb{R}^3$  generado a su vez por las corrientes sobre los vértices del icosaedro. Consideraremos dos distribuciones interiores a una esfera que circunscribe el icosaedro: a) una constituida por una decena de dipolos de Hertz de posición  $r'$  con corrientes reales  $J_i$ ; b) otra correspondiente a una distribución continua de corrientes sobre una esfera de 3 cm de diámetro.

a) Para la *distribución discontinua de corrientes*, cuyos resultados se muestran a continuación, la posición de cada dipolo de Herz y su intensidad de corriente vienen dados por:

$$r' = \left\{ \begin{array}{ccccc} (0, 0, 0) & (.04, 0, 0) & (-.03, 0, .02) & (0, .03, 0) & (0, -.04, 0) \\ (0, 0, .03) & (0, 0, -.03) & (.02, .02, .02) & (-.02, -.02, -.02) & (.02, -.01, .02) \end{array} \right\}$$

$$J = \left\{ \begin{array}{ccccc} (1, 1, 0) & (1, 0, 1) & (0, 2, 1) & (0, -1, -2) & (1, 0, 1) \\ (2, 0, -1) & (0, 0, 2) & (0, 3, 1) & (1, -2, 2) & (-1, 1, -1) \end{array} \right\}$$

b) La *distribución continua de corrientes* se ha simulado por medio de la discretización en 80 puntos de la esfera de 3 cm de diámetro, siendo la función de distribución de corriente:

$$J = \{[\sin(2\pi \cdot 5x/0.015), \sin(2\pi \cdot y/0.015), \sin(2\pi \cdot 2.5 \cdot z/0.015)] / (x, y, z) \in \text{Esfera}(\varnothing=0.03)\}$$

### 2.5.1.1 Formulación del problema

En ambos casos, a partir de la distribución interior de corrientes, se determinan los campos tangenciales sobre un dominio esférico de observación (ver figura 2-18) usando la formulación directa descrita en §2.3.1; §2.3.3 y §2.4.4. Según las expresiones (2-28), (2-42), y (2-90):

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} E_{\theta_1} \\ \vdots \\ E_{\theta_M} \\ E_{\varphi_1} \\ \vdots \\ E_{\varphi_M} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \underline{G}_{J\theta x'} & \underline{G}_{J\theta y'} & \underline{G}_{J\theta z'} \\ \underline{G}_{J\varphi x'} & \underline{G}_{J\varphi y'} & \underline{G}_{J\varphi z'} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} J_{x1} \\ \vdots \\ J_{xN} \\ J_{y1} \\ \vdots \\ J_{yN} \\ J_{z1} \\ \vdots \\ J_{zN} \end{pmatrix} = \underline{\mathcal{T}}_{J,\text{interior}} \cdot \underline{J}_{x'y'z'} \quad (2-99) \\ \text{donde: } \underline{\mathcal{T}}_{J,\text{interior}} &= \begin{pmatrix} \cos \theta_1 \cos \varphi_1 & \cos \theta_1 \sin \varphi_1 & -\sin \theta_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cos \theta_M \cos \varphi_M & \cos \theta_M \sin \varphi_M & -\sin \theta_M \\ -\sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 & \underline{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -\sin \varphi_M & \cos \varphi_M & \underline{0} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{G}_{J_{xx'}} & \underline{G}_{J_{yy'}} & \underline{G}_{J_{zz'}} \\ \underline{G}_{J_{yx'}} & \underline{G}_{J_{yy'}} & \underline{G}_{J_{yz'}} \\ \underline{G}_{J_{zx'}} & \underline{G}_{J_{zy'}} & \underline{G}_{J_{zz'}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donde  $\underline{G}_J$  está definido en (2-28).

Por otra parte, el espacio  $\mathfrak{E}$  generado por las fuentes superficiales sobre los vértices del icosaedro, se determina por medio de otro operador lineal,  $\underline{\mathcal{T}}_{\text{icosaedro}}$ , que se define a partir de las expresiones (2-28), (2-32), (2-37), (2-42), y (2-90):

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} E_{\theta_1} \\ \vdots \\ E_{\theta_M} \\ E_{\varphi_1} \\ \vdots \\ E_{\varphi_M} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \underline{G}_{J\theta\theta'} & \underline{G}_{J\theta\varphi'} & \underline{G}_{M\theta\theta'} & \underline{G}_{M\theta\varphi'} \\ \underline{G}_{J\varphi\theta'} & \underline{G}_{J\varphi\varphi'} & \underline{G}_{M\varphi\theta'} & \underline{G}_{M\varphi\varphi'} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} J_{\theta'} \\ J_{\varphi'} \\ M_{\theta'} \\ M_{\varphi'} \end{pmatrix} = \underline{\mathcal{T}}_{\text{tetraedro}} \cdot \underline{f}_{\theta'\varphi'} \quad (2-100) \\ \begin{pmatrix} \underline{G}_{\theta\theta'} & \underline{G}_{\theta\varphi'} \\ \underline{G}_{\varphi\theta'} & \underline{G}_{\varphi\varphi'} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \theta_1 \cos \varphi_1 & \cos \theta_1 \sin \varphi_1 & -\sin \theta_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cos \theta_M \cos \varphi_M & \cos \theta_M \sin \varphi_M & -\sin \theta_M \\ -\sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 & \underline{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -\sin \varphi_M & \cos \varphi_M & \underline{0} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{G}_{J_{xx'}} & \underline{G}_{J_{yy'}} & \underline{G}_{J_{zz'}} \\ \underline{G}_{J_{yx'}} & \underline{G}_{J_{yy'}} & \underline{G}_{J_{yz'}} \\ \underline{G}_{J_{zx'}} & \underline{G}_{J_{zy'}} & \underline{G}_{J_{zz'}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \theta'_1 \cos \varphi'_1 & -\sin \varphi'_1 \\ \vdots & \vdots \\ \cos \theta'_N \cos \varphi'_N & -\sin \varphi'_N \\ \cos \theta'_1 \sin \varphi'_1 & \cos \varphi'_1 \\ \vdots & \vdots \\ \cos \theta'_N \sin \varphi'_N & \cos \varphi'_N \\ \sin \varphi'_1 & \underline{0} \\ \vdots & \vdots \\ \sin \varphi'_N & \underline{0} \end{pmatrix} \\ \text{En definitiva: } \begin{pmatrix} E_{\theta} \\ E_{\varphi} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \underline{\mathcal{T}}_{J,\text{interior}} \cdot \underline{J}_{x'y'z'} \\ \underline{\mathcal{T}}_{\text{tetraedro}} \cdot \underline{f}_{\theta'\varphi'} \end{pmatrix} \Rightarrow \exists \underline{f}_{\theta'\varphi'} / \min \left\{ d \left( \underline{\mathcal{T}}_{J,\text{int}} \cdot \underline{J}_{x'y'z'}, \underline{\mathcal{T}}_{\text{tetr}} \cdot \underline{f}_{\theta'\varphi'} \right) \right\} \quad (2-101) \end{aligned}$$

Así, una vez determinado el campo de las corrientes interiores sobre el dominio de observación esférico, éste se proyecta sobre el espacio  $\mathfrak{E}$  generado por las fuentes sobre el icosaedro, que puede interpretarse como la determinación de las coordenadas  $\{\underline{J}; \underline{M}\}$ , es decir, el valor de corrientes que mejor aproxima en  $\mathfrak{E}$  la distribución de campo debida a las corrientes interiores. A partir de esas

fuentes sobre el icosaedro se determina el campo sobre un dominio circular a mayor distancia sobre el plano  $\theta=\pi/2$ .

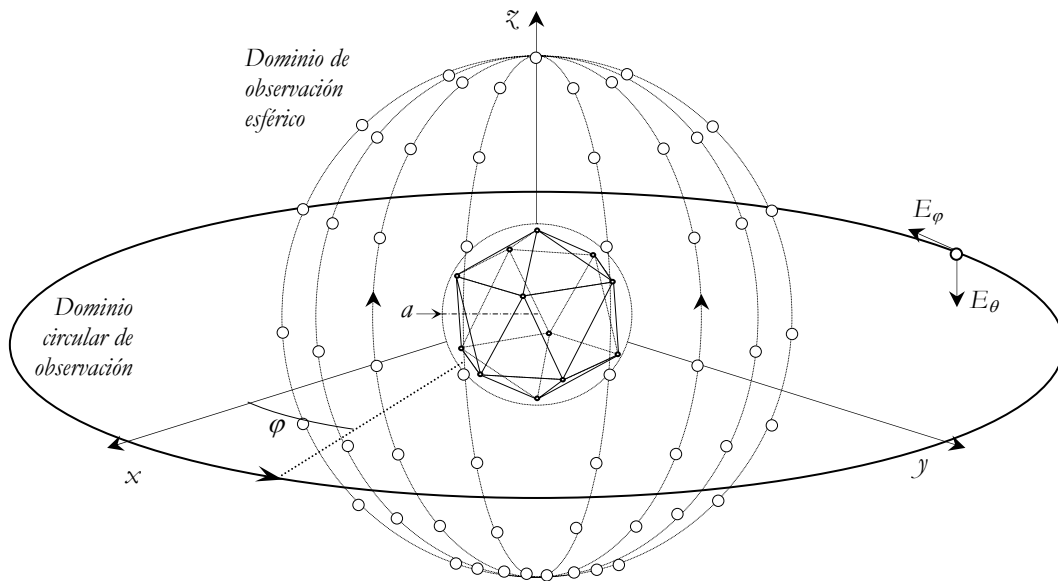


Figura 2-18. Dominios de observación de los campos generados por las corrientes interiores al icosaedro.

### 2.5.1.2 Distribución discontinua de corrientes interiores

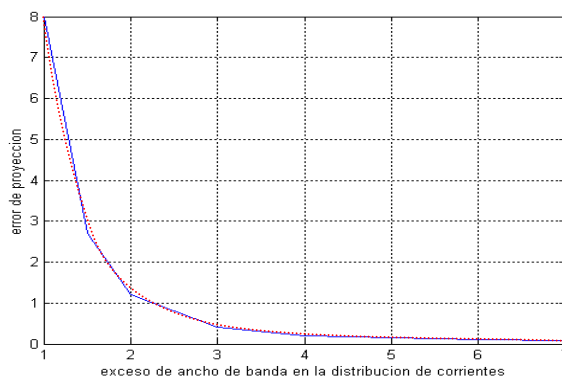
Como decíamos la separación en  $\lambda/2$  entre los vértices del icosaedro no puede dar cuenta de los modos evanescentes sobre la superficie que discretiza y, por tanto, en este caso, se acusará una cierta distancia entre la distribución de campo debido a las corrientes interiores y su proyección sobre  $\mathfrak{E}$ . Según el teorema de muestreo es menester tomar muestras cada  $\lambda/(2\chi)$ , donde  $\chi$  es el factor de exceso de ancho de banda de la distribución de corrientes superficiales respecto al número de onda. Como es de esperar –según puede verse en la tabla 2.1– el error decrece siguiendo una ley exponencial (§2.4.3) pero llega un momento en el cual los vectores que definen el espacio  $\mathfrak{E}$  dejan de ser independientes. A partir de este punto podemos considerar que el espacio  $\mathfrak{E}$  es completo, respecto a las distribuciones de campo debidas a las corrientes interiores. Esto ocurre cuando  $\chi > 6$ .

$\chi$	1	1.5	2	3	4	5	6	7
$\varepsilon$ (%)	8	2.7	1.2	0.4	0.2	0.16	0.1	0.08

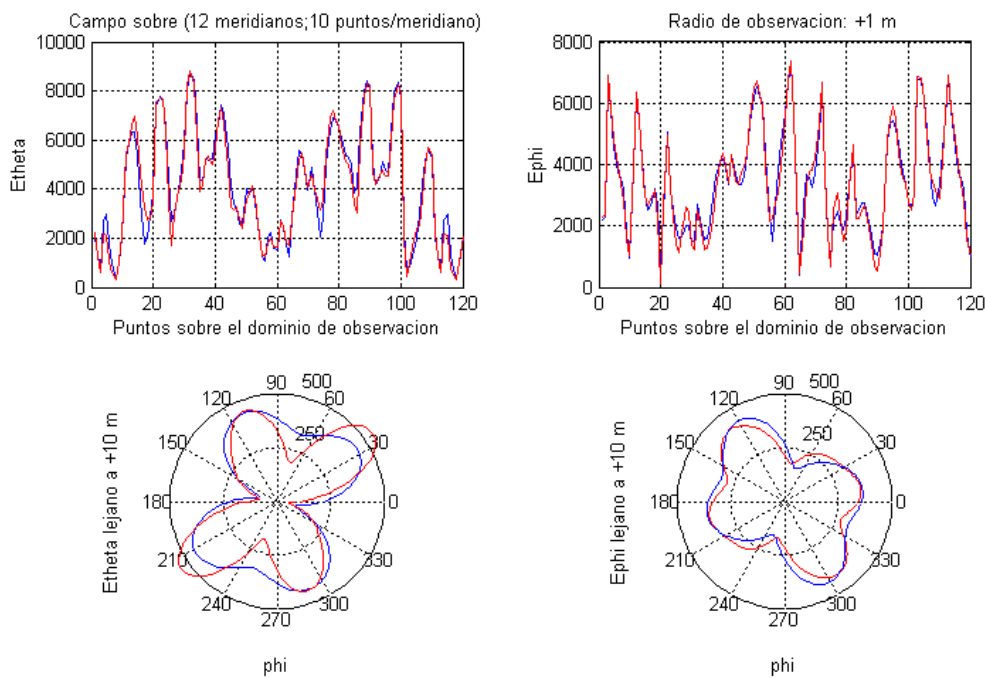
Tabla 2-1. Evolución del error de proyección respecto al exceso de ancho de banda de la distribución de corrientes superficiales.

Las figuras 2-20 a 2-24 muestran los resultados de la proyección para los 4 primeros casos de la tabla. Aunque estos resultados corresponden a la proyección de la distribución de corrientes arriba descrita, la modificación de las corrientes, o en general el uso de otras relaciones de distribuciones interiores deparan resultados similares, especialmente, respecto al error de proyección y con independencia del número de fuentes interiores. La figura 2-19 representa gráficamente la evolución

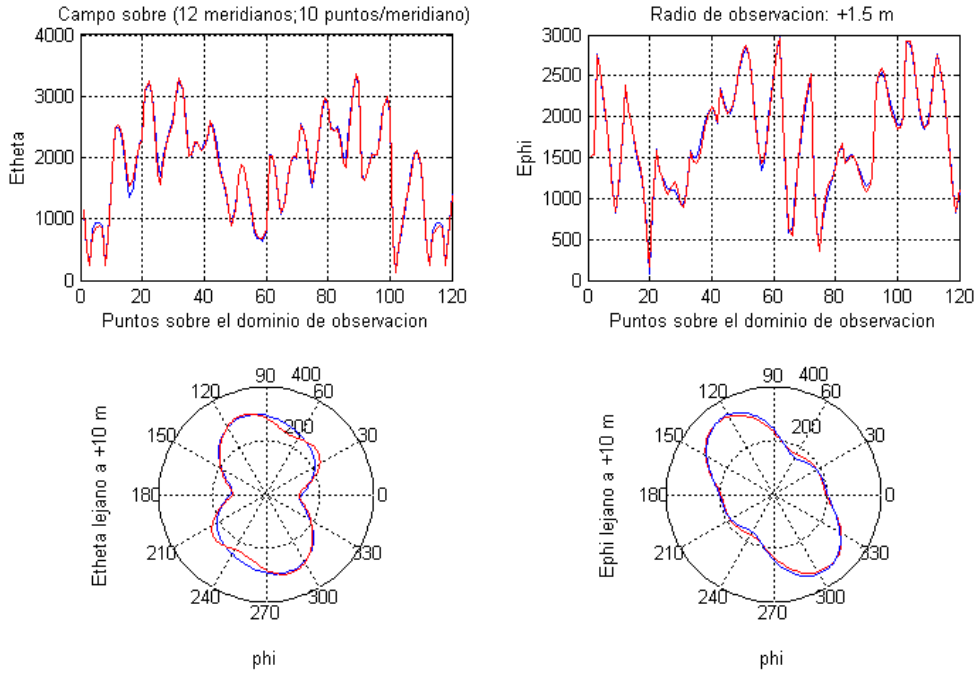
del error de proyección respecto al exceso de ancho de banda en la distribución superficial de corrientes.



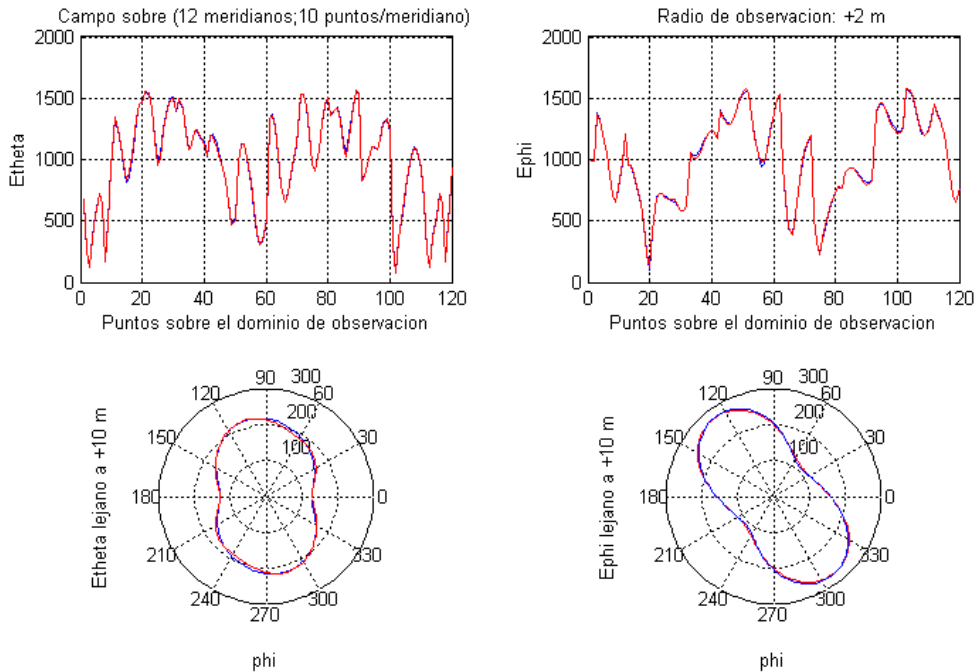
**Figura 2-19.** Evolución del error de proyección (%) respecto al exceso de ancho de banda  $\chi$ .



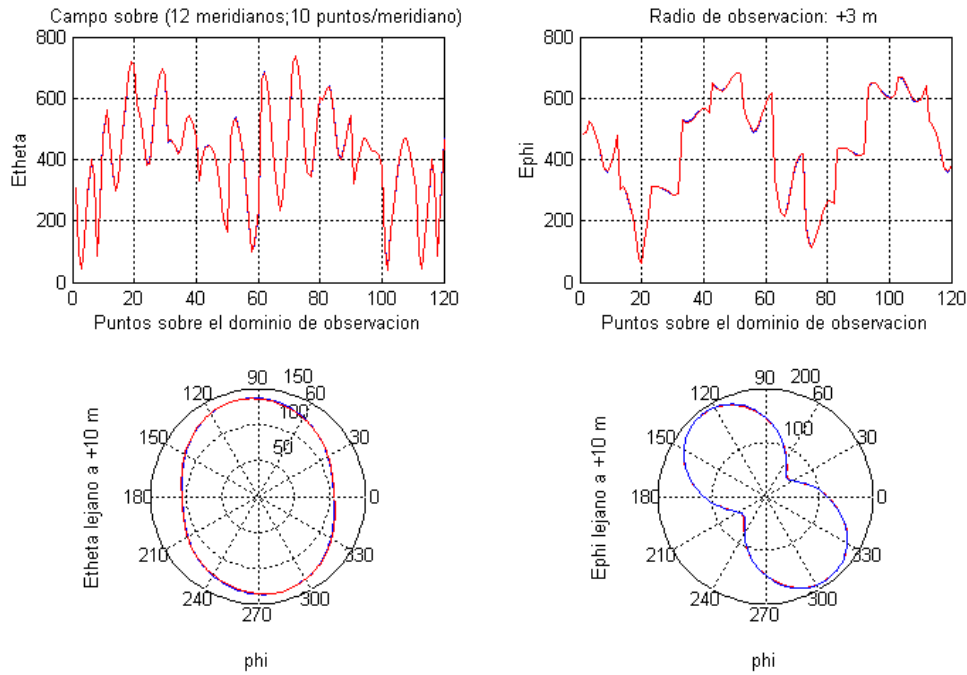
**Figura 2-20.** Distancia entre vértices del icosaedro:  $\lambda/2$  ( $\lambda=0.1$  m;  $\chi=1$ ). Distribución discontinua de corrientes. En azul: campos generados por las corrientes interiores; en rojo: proyección sobre  $\Xi$ . Error de aproximación sobre todo el dominio de observación esférico (de radio  $10\lambda$ ): 8 %



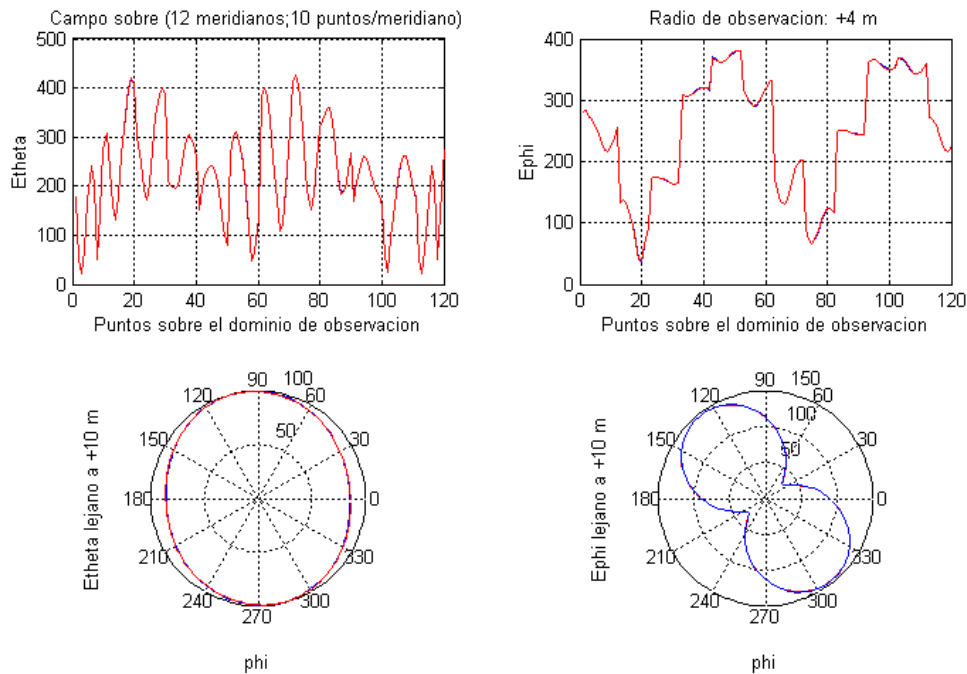
**Figura 2-21.** Distancia entre vértices del icosaedro:  $\lambda/3$  ( $\lambda=0.15$  m;  $\chi=1.5$ ). Distribución discontinua de corrientes. En azul: campos generados por las corrientes interiores; en rojo: proyección sobre  $\hat{\xi}$ . Error de aproximación sobre todo el dominio de observación (de radio  $10\lambda$ ): 2.7 %



**Figura 2-22.** Distancia entre vértices del icosaedro:  $\lambda/4$  ( $\lambda=0.2$  m;  $\chi=2$ ). Distribución discontinua de corrientes. En azul: campos generados por las corrientes interiores; en rojo: proyección sobre  $\hat{\xi}$ . Error de aproximación sobre todo el dominio de observación (de radio  $10\lambda$ ): 1.2 %.



**Figura 2-23.** Distancia entre vértices del icosaedro:  $\lambda/6$  ( $\lambda=0.3$  m;  $\chi=3$ ). Distribución discontinua de corrientes. En azul: campos generados por las corrientes interiores; en rojo: proyección sobre  $\xi$ . Error de aproximación sobre todo el dominio de observación (de radio  $10\lambda$ ): 0.4 %



**Figura 2-24.** Distancia entre vértices del icosaedro:  $\lambda/8$  ( $\lambda=0.4$  m;  $\chi=4$ ). Distribución discontinua de corrientes. En azul: campos generados por las corrientes interiores; en rojo: proyección sobre  $\xi$ . Error de aproximación sobre todo el dominio de observación (de radio  $10\lambda$ ): 0.2 %



Para el caso en el que la distancia entre los vértices del icosaedro es  $\lambda/6$  ( $\chi=3$ ), las fuentes equivalentes a la proyección del campo observado sobre el espacio  $\mathfrak{E}$  son:

$ J_{\theta i} $	fase $\{J_{\theta i}\}$	$ J_{\varphi i} $	fase $\{J_{\varphi i}\}$	$ M_{\theta i} $	fase $\{M_{\theta i}\}$	$ M_{\varphi i} $	fase $\{M_{\varphi i}\}$
0.2854	151.4084	0.2622	35.4673	512.2	-4.1051	284.3	158.1056
0.2387	55.1468	0.4136	12.4194	165.6	-12.1080	183.7	142.0822
0.1785	129.2902	0.2812	-166.1806	183.3	27.8639	201.8	156.3744
0.5568	18.9388	0.3783	-19.3341	853.4	173.6861	184.4	173.1480
0.2174	171.1978	0.1955	-143.7597	205.5	-10.2752	029.6	107.8093
0.1545	-156.7106	0.1267	115.6684	333.7	-20.7290	455.3	167.1279
0.5129	0.6790	0.1652	-3.3185	281.9	7.8062	087.7	0.3273
1.4516	5.1981	0.2569	-24.8274	356.2	164.4472	276.3	1.0300
0.4628	44.5945	0.4869	2.9460	358.8	170.8250	580.3	6.4004
0.0802	178.9812	0.1886	79.3212	579.3	-6.9263	721.3	9.3034
0.4806	-6.1400	0.3054	18.6601	151.6	-142.1747	940.2	3.3982
0.3095	-117.9710	0.3087	-171.0026	046.0	-80.1502	292.9	-14.7413

Tabla 2.2.

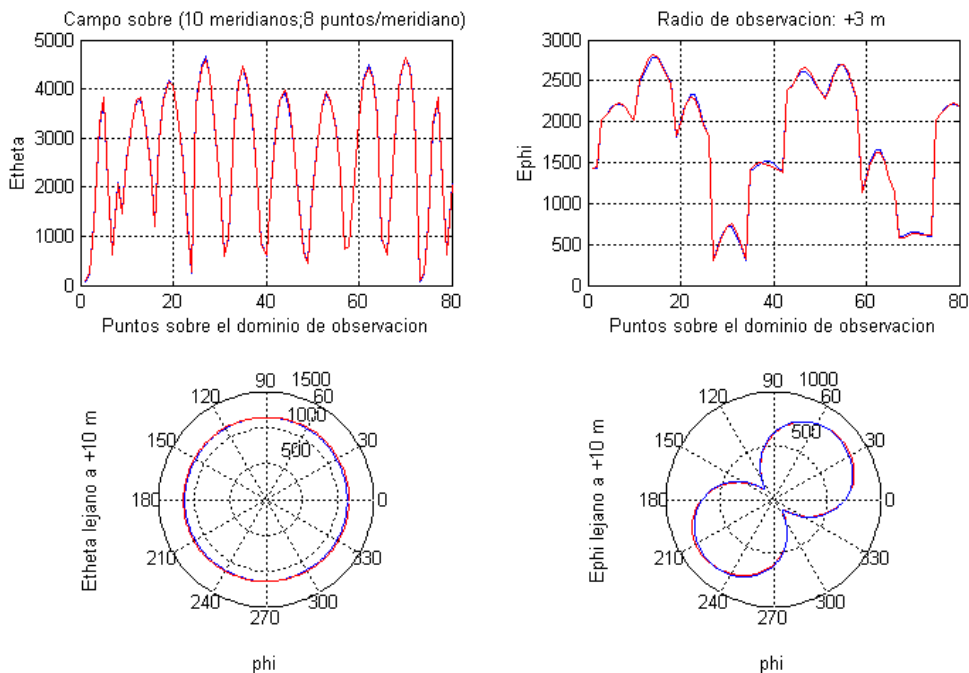
Para comparar la contribución que supone cada conjunto de corrientes puede determinarse la energía de cada distribución escalando las corrientes eléctricas o las magnéticas mediante la impedancia intrínseca del vacío. Así se observa que la energía asociada a cada una de las distribuciones es:

$$\{ E_{J\theta} = 702; \quad E_{J\varphi} = 390; \quad E_{M\theta} = 1379; \quad E_{M\varphi} = 2244 \}$$

Como puede apreciarse el peso de las corrientes magnéticas es mayor que el de las eléctricas. De hecho, cuando el tamaño de la fuente es eléctricamente mayor la teoría de imágenes es aplicable y entonces es suficiente –como se verá en el ejemplo siguiente– el recurso exclusivo a las corrientes magnéticas para la generación del espacio  $\mathfrak{E}$ .

### 2.5.1.3 Distribución continua (esférica) de corrientes interiores

Finalmente en la figura 2-25 se recogen los resultados de la distribución continua de corrientes sobre la esfera de 3 cm diámetro y cuya función de distribución de corrientes se describió anteriormente. De nuevo se observan unos resultados acordes con la dependencia del error de proyección respecto al exceso de ancho de banda de la tabla 2-1 (figura 2-24).



**Figura 2-25.** Distribución continua de corrientes sobre una esfera de 3 cm de diámetro. Distancia entre vértices del icosaedro:  $\lambda/4$  ( $\chi=2$ ). Error de proyección sobre el dominio de observación esférico (de radio  $15\lambda$ ): 1 %.

### 2.5.2 Campo radiado por una antena de agrupación de dipolos.

Para este ejemplo vamos a considerar un tipo concreto de antena utilizada en los sistemas de Radar Secundario (Secondary Surveillance Radar, SSR) [27; 28] cuya geometría y dimensiones están representadas en la figura 2-26. Desde esta antena se emiten pulsos a 1030 MHz con una duración de aproximadamente un microsegundo y que por tanto su ancho de banda es lo suficientemente pequeño como para considerar que la radiación es monocromática. La antena consiste básicamente en una agrupación de  $10 \times 33$  dipolos verticales que se ordenan en 33 columnas, cuyas características geométricas y eléctricas son idénticas. La alimentación de la antena se realiza mediante una red que distribuye a cada columna una determinada intensidad de corriente, seguida de otra red de distribución perteneciente a cada columna e idéntica a la de las otras columnas, que hace llegar la intensidad deseada a cada dipolo. Por tanto, la distribución de corrientes es separable, es decir, la corriente de un dipolo cualquiera  $[i, j]$  puede determinarse como el producto de dos distribuciones discretas:

$$I[i, j] = f_{fila}[i] \cdot f_{columna}[j] \tag{2-102}$$

Con lo cual, todas las filas o todas las columnas entre si tienen una misma relación de excitaciones, como puede observarse en la figura 2-26b. Esto tiene como consecuencia que la observación del campo sobre un dominio horizontal experimente variaciones debidas casi exclusivamente al

diagrama horizontal de excitaciones; y en los dominios verticales a la distribución vertical de corrientes.

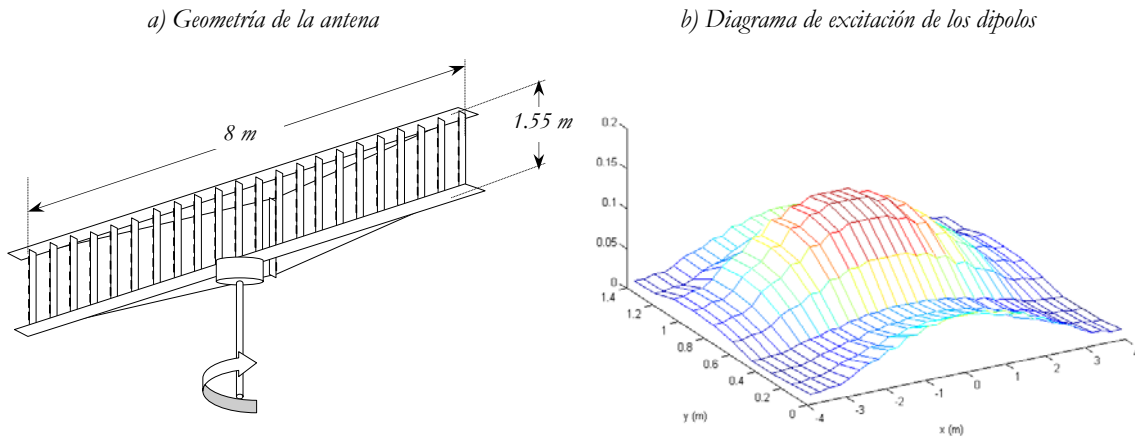


Figura 2-26. Geometría y diagrama de excitación con fase constante de los dipolos de la antena SSR.

### 2.5.2.1 Formulación del problema

Puesto que se conoce la distribución de corrientes en el sistema radiante puede recurrirse a la formulación directa basada en corrientes reales §2.3.1 y a partir de ésta determinar los campos sobre los dominios de interés. Según se justificó en §2.4.2 una buena aproximación del problema real consiste en considerar que los dipolos son puntuales, lo cual nos permite reducir la formulación integral a la formulación discreta (2-90):

$$\begin{pmatrix} E_{\xi} \\ E_{\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{J_{\xi}'} \\ G_{J_{\eta}'} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} J_{y^1} \\ \vdots \\ J_{y^N} \end{pmatrix} = \underline{\underline{\mathcal{T}}_J} \cdot \underline{J}_{y'}$$
(2-103)

proporcionando unos resultados idénticos para cualquier dominio de observación que no se encuentre en la estricta vecindad de la antena (es decir, donde prevalezca una considerable proporción de modos evanescentes). De acuerdo con §2.4.5 una determinada distribución de corrientes tangenciales a una superficie plana que recubra frontalmente la antena generará el mismo campo que la conocida distribución interior. Para comprobar esta identidad de distribuciones espaciales podemos limitar nuestra observación, en virtud de la separabilidad de las excitaciones horizontal y vertical, a dos dominios lineales de observación: uno horizontal y otro vertical – representados en la figura 2-27–. Si en ambos dominios las distribuciones de campo son idénticas podemos concluir que lo serán en cualquier dominio superficial (especialmente exterior al de los dominios lineales de observación, pero que en realidad puede extenderse interiormente hasta una cierta distancia de la antena).

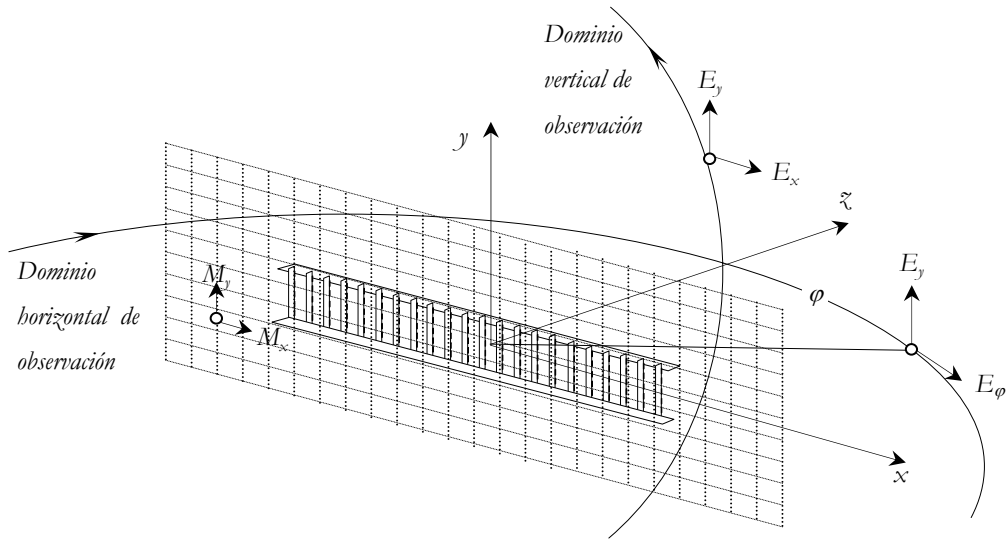


Figura 2-27. Dominios de observación del campo radiado por la antena de Radar Secundario.

Podríamos tratar de aplicar el teorema de equivalencia muestreando el campo generado por la antena sobre la superficie plana que la recubre, para después comparar sobre los dos dominios de observación el campo engendrado por las corrientes originales y por la distribución de corrientes equivalentes magnéticas que resulte de aplicar las condiciones de contorno (2-25) a las muestras tangenciales del campo. Puesto que en este caso la superficie de corrientes equivalentes es plana se puede recurrir al equivalente conductor (2-25), que nos permite reducir las fuentes equivalentes a solamente las magnéticas, y mediante aplicación de la teoría de imágenes, convertir el problema inhomogéneo, con un hemiespacio conductor, en su equivalente homogéneo válido para todo el hemiespacio vacío, como ilustra la figura 2-28.

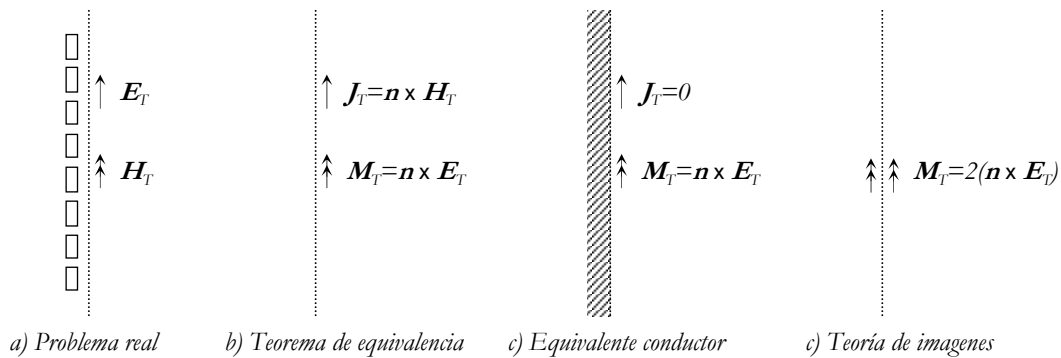


Figura 2-28. Aplicación del principio de equivalencia y de la teoría de imágenes para la reducción del problema equivalente.

Para determinar el campo sobre el dominio horizontal a partir de las corrientes eléctricas interiores podemos recurrir a las expresiones (2-28), (2-42), y (2-90) —obsérvese que aunque el dominio horizontal puede considerarse como un corte de un dominio cilíndrico, en este caso la relación entre las coordenadas cartesianas y las cilíndricas, como se observa en la fig.2-27, no es la usual pero

cuya relación se obtiene inmediatamente a partir de (2-41) mediante un simple intercambio de las variables cartesianas:

$$\begin{pmatrix} E_{\varphi_1} \\ \vdots \\ E_{\varphi_M} \\ E_{y_1} \\ \vdots \\ E_{y_M} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{G}_{J\varphi'} \\ \underline{G}_{Jy'} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} J_{y_1} \\ \vdots \\ J_{y_N} \end{pmatrix} = \underline{\mathcal{T}}_J \cdot \underline{J}_{y'} \quad \text{donde:} \quad \underline{\mathcal{T}}_J = \begin{pmatrix} -\sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 \\ -\sin\varphi_M & \cos\varphi_M & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{G}_{J\varphi'} \\ \underline{G}_{Jy'} \\ \underline{G}_{Jy'} \end{pmatrix} \quad (2-104)$$

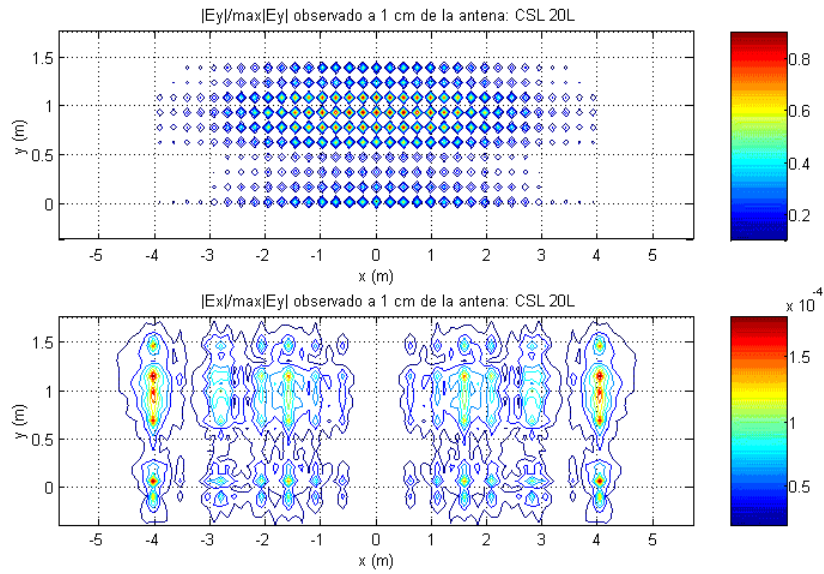
Donde  $\underline{G}_J$  está definido en (2-28). A partir de las corrientes equivalentes magnéticas, el campo que éstas generan sobre el mismo dominio podrá determinarse mediante:

$$\begin{pmatrix} E_{\varphi_1} \\ \vdots \\ E_{\varphi_M} \\ E_{y_1} \\ \vdots \\ E_{y_M} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{G}_{M\varphi'} \\ \underline{G}_{My'} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} M_{x_1} \\ \vdots \\ M_{x_N} \\ M_{y_1} \\ \vdots \\ M_{y_N} \end{pmatrix} = \underline{\mathcal{T}}_M \cdot \underline{J}_{y'} \quad \text{donde:} \quad \underline{\mathcal{T}}_M = \begin{pmatrix} -\sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 \\ -\sin\varphi_M & \cos\varphi_M & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{G}_{Mx'} & \underline{G}_{My'} \\ 0 & \underline{G}_{My'} \\ \underline{G}_{Mx'} & 0 \end{pmatrix} \quad (2-105)$$

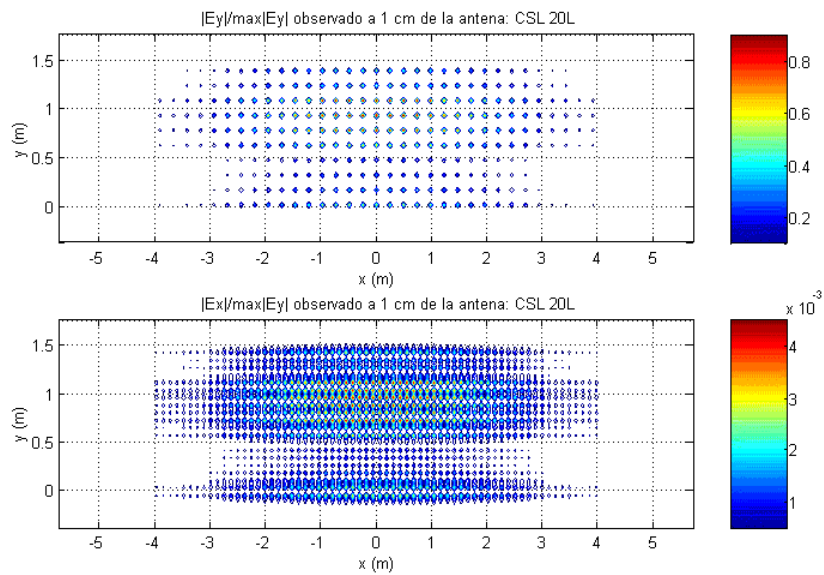
Donde  $\underline{G}_M$  está definido en (2-32).

### 2.5.2.2 Muestreo del campo muy próximo a la antena

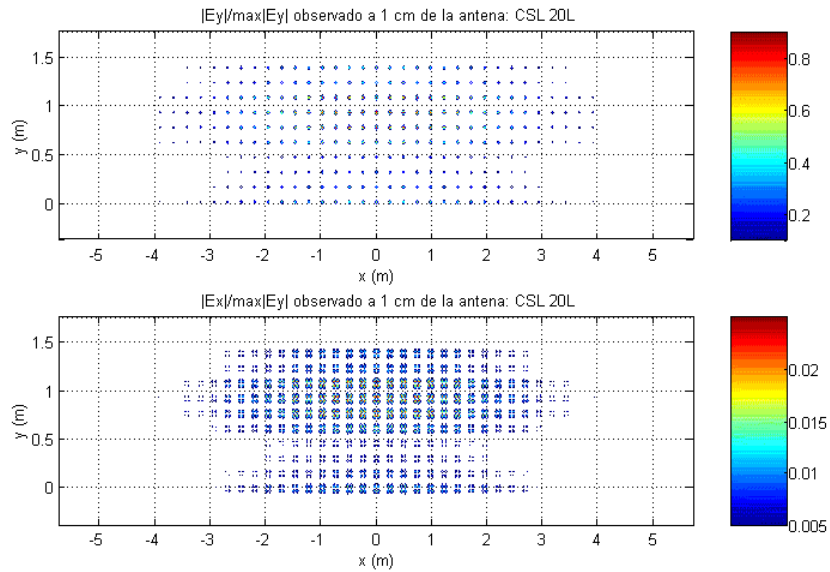
Los campos eléctricos tangenciales generados por la distribución de dipolos de Herz, en la misma posición que los dipolos reales, sobre un plano muy próximo a la antena (a  $1\text{ cm} \cong \lambda/30$ ), se ilustran en las figuras 2-29 a 2-31. Debido al alto contenido de modos evanescentes, la frecuencia espacial de estos campos es considerablemente elevada y así un muestreo a cualquier frecuencia practicable estará afectado por el solapamiento de las frecuencias superiores a la mitad de la de muestreo (aliasing). Esto tiene como consecuencia que parte de la energía de la distribución quedará perdida y otra falseada por la contaminación de las altas frecuencias. En estas figuras puede observarse este fenómeno a medida que aumenta la frecuencia de muestreo horizontal y vertical ( $\chi_h$  representa el aumento de frecuencia de muestreo horizontal respecto a  $\lambda/2$ , y  $\chi_v$  el aumento correspondiente a la frecuencia de muestreo vertical). Según se aumenta la frecuencia de muestreo se observa que van apareciendo, especialmente en el campo horizontal, nuevas componentes antes invisibles, de tal forma que inclusive la distribución espacial y cantidad de energía van variando apreciablemente. No obstante, según se observó en §2.4.3, los modos evanescentes decaen rápidamente y, en consecuencia, puede preverse una disminución importante del contenido frecuencial si nos distanciamos, por ejemplo,  $\lambda/2$ . La figura 2-32 presenta los resultados de muestrear el campo tangencial aproximadamente a esa distancia y como puede observarse en relación a 2-31 el contenido frecuencial ha disminuido considerablemente.



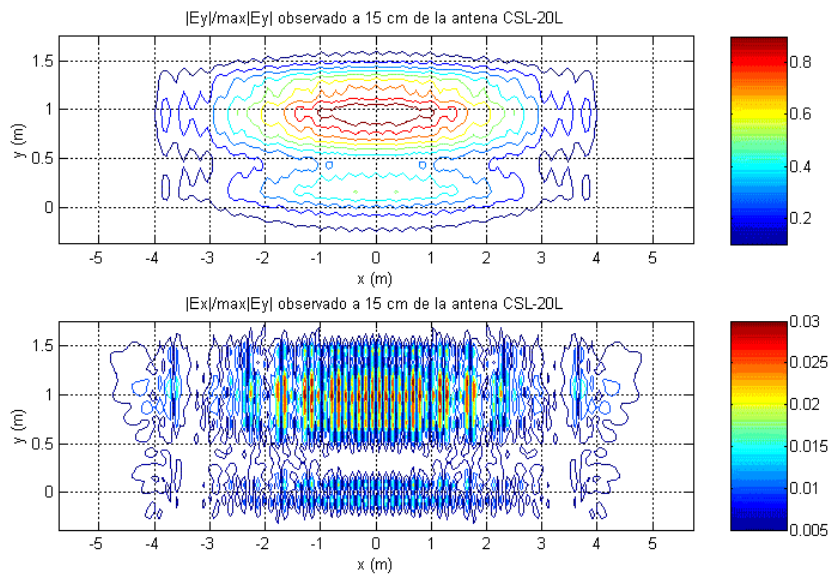
**Figura 2-29.** Campos eléctricos tangenciales sobre la superficie que recubre frontalmente la antena SSR, obtenidos mediante muestreo con  $\chi_b=1'195$ ;  $\chi_v=1'916$  (95 x 29 puntos).



**Figura 2-30.** Campos eléctricos tangenciales sobre la superficie que recubre frontalmente la antena SSR, obtenidos mediante muestreo con  $\chi_b=2'39$ ;  $\chi_v=3'83$  (189 x 57 puntos).



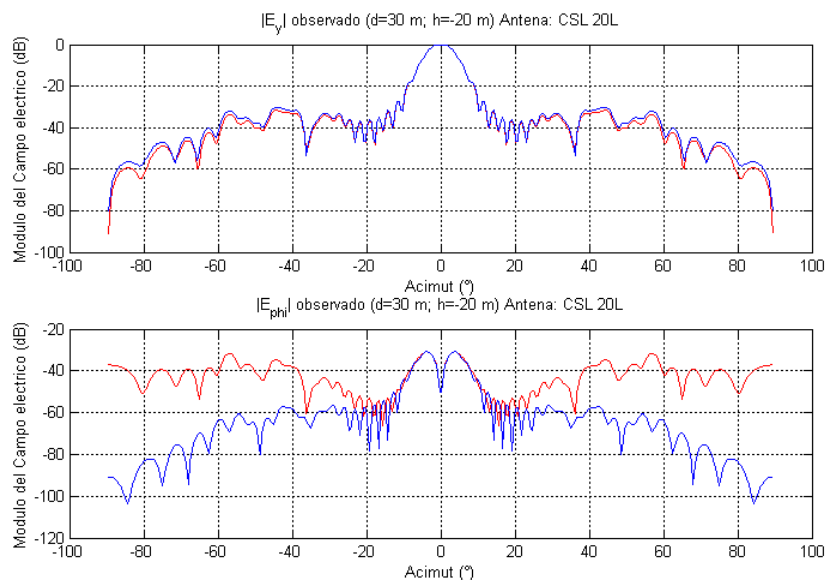
**Figura 2-31.** Campos eléctricos tangenciales sobre la superficie que recubre frontalmente la antena SSR, obtenidos mediante muestreo con  $\chi_b=4^{\circ}78$ ;  $\chi_v=7^{\circ}66$  (377 x 113 puntos).



**Figura 2-32.** Campos eléctricos tangenciales sobre la superficie que recubre frontalmente la antena SSR y distanciada  $\lambda/2$ , obtenidos mediante muestreo con  $\chi_b=4^{\circ}78$ ;  $\chi_v=7^{\circ}66$  (377 x 113 puntos). Puede apreciarse respecto a los campos a 1cm (de la figura 2-31) una disminución de las altas frecuencias espaciales.

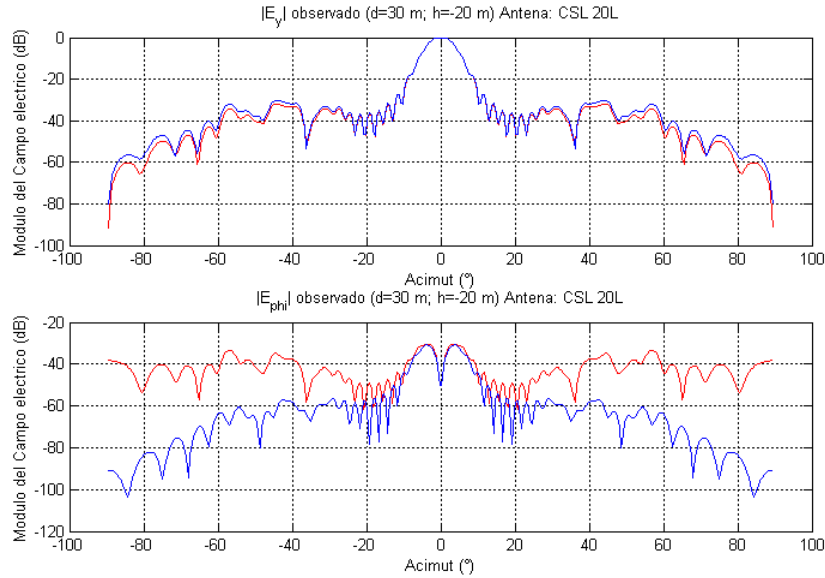
Si a partir de estas distribuciones de campo aplicamos las condiciones de contorno para determinar una distribución discreta de corrientes equivalentes y con éstas determinamos las distribuciones de campo que generan en los dominios de observación antes citados, se obtienen los resultados de las figuras 2-33 y 2-34. En estas figuras se comparan las distribuciones de campo que proceden tanto de las corrientes interiores (azul) como de las equivalentes (rojo). En cuanto al campo vertical, sólo

debido a las corrientes magnéticas horizontales (y así al campo eléctrico vertical sobre el plano de corrientes equivalentes), puede apreciarse un considerable parecido que solamente se desvía de la distribución original cuando la antena empieza a verse de canto. Sin embargo, el campo horizontal, debido en buena medida a las corrientes magnéticas verticales, sufre una notable diferencia, que se mantiene incluso cuando se aumenta la frecuencia espacial. Debe tenerse en cuenta que las frecuencias de muestreo se han elegido de tal manera que las muestras coincidan frontalmente con los dipolos reales (las frecuencias de muestreo superiores son el doble y el cuádruple de la frecuencia primera), por esta razón incluso a la frecuencia de muestreo más baja se obtiene una buena aproximación de la componente horizontal de las corrientes magnéticas, que es, en definitiva, la que tiene un mayor efecto en los campos radiados, cosa que no ocurre con la componente vertical. Así la diferencia entre las figuras 2-33 y 2-34 no es muy notable, en lo que respecta a su parecido con la verdadera distribución de campo, ya que en ambos casos el efecto del aliasing es muy importante y falsea la verdadera distribución de corrientes tangenciales (para las corrientes magnéticas correspondientes al muestreo de las figuras 2-31 y 2-32 se obtienen resultados que aun siendo diferentes, al igual que los de las figuras 2-33 y 2-34, no consiguen aproximar adecuadamente el campo horizontal). En suma, si no fuera por la evidencia analítica del teorema de equivalencia, y porque además puede verificarse con numerosos ejemplos, podríamos ponerlo en duda a tenor de estos resultados, que no obstante, se explican —como se ha hecho— desde el punto de vista de las frecuencias espaciales y de sus consecuencias en el muestreo.



**Figura 2-33.** Comparación del campo observado horizontalmente a 30 m, engendrado por la antena SSR (azul) y por las corrientes equivalentes (rojo) obtenidas mediante muestreo con  $\chi_b=1.195$ ;  $\chi_r=1.916$ .



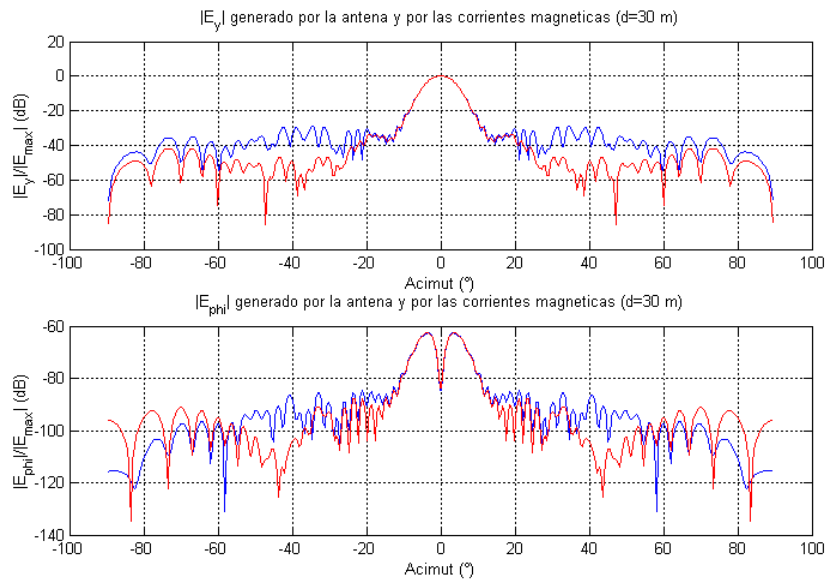


**Figura 2-34.** Comparación del campo observado horizontalmente a 30 m, engendrado por la antena SSR (azul) y por las corrientes equivalentes (rojo) obtenidas mediante muestreo con  $\chi_h=2'39$ ;  $\chi_v=3'832$ .

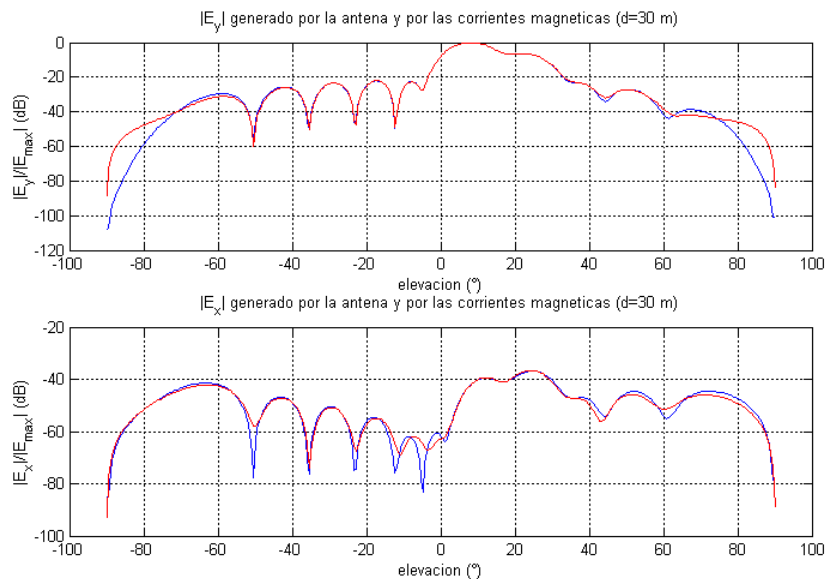
### 2.5.2.3 Proyección sobre el espacio $\mathcal{E}$

Las diferencias antes observadas, que de hecho ya se habían anunciado desde un punto de vista teórico en §2.4.2, no debiera invalidar la conclusión alcanzada en §2.4.5, según la cual una agrupación de dipolos de Herz homogéneamente distribuidos a distancias  $\lambda/2\chi$  sobre una superficie que recubra las fuentes puede engendrar todas las posibles distribuciones de campo debidas a cualquier agrupación interior de corrientes. Si esto es cierto, entonces debiera poderse encontrar proyecciones adecuadas de las distribuciones de campo generadas por la antena SSR sobre el espacio  $\mathcal{E}$  engendrado por los mencionados dipolos hercianos, que en nuestro caso –ver figura 2-28–, se reduce a dipolos de corrientes magnéticas con componentes horizontal y vertical. Según el teorema de muestreo si distribuimos los dipolos equivalentes a distancias superiores a  $\lambda/2$  el campo que estos generan no puede dar cuenta de todas las distribuciones debidas a las corrientes interiores. Este es el caso de hacer coincidir los dipolos equivalentes justo en frente de los dipolos reales (que corresponde a un submuestreo horizontal de 0'6 y aproximadamente un muestreo vertical a  $\lambda/2$ ,  $\chi_v=0'958$ ). A tenor de la separabilidad de las excitaciones horizontal y vertical, se pueden buscar de forma separada las distribuciones horizontal y vertical de corrientes por medio de la proyección del campo radiado sobre el dominio de observación horizontal y vertical respectivamente. Para el caso en el que la separación horizontal sea igual que la de los dipolos de la antena el teorema de muestreo nos augura una considerable diferencia entre la distribución horizontal de campo original y la proyectada sobre el espacio  $\mathcal{E}$  correspondiente. Mientras que si puede esperarse una buena aproximación en la distribución vertical del campo. Las figuras 2-35 y 2-36 corroboran estas dos previsiones. No obstante, la distribución de corrientes magnéticas sobre la

retícula rectangular correspondiente a la proyección de las distribuciones de campo horizontal y vertical sobre el espacio  $\mathcal{E}$  –representada en la figura 2-37– presenta un considerable parecido con la verdadera distribución de corrientes de la figura 2-26b. Puede observarse donde termina la antena y en caso de que nuestro interés residiera en buscar fallos en alguno de sus elementos podrían llegar a detectarse.

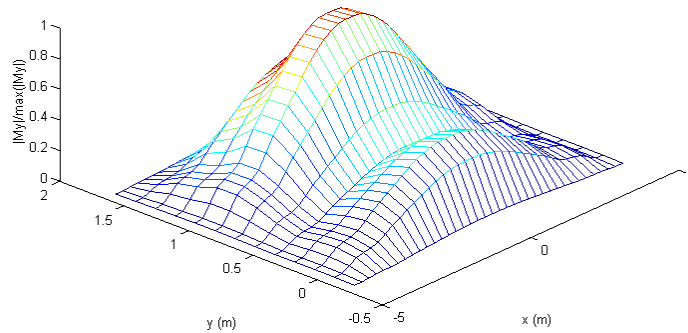


**Figura 2-35.** Comparación del campo observado horizontalmente a 30 m, engendrado por la antena SSR (azul) y por las corrientes equivalentes de los dipolos de Hertz (rojo) sobre una retícula con la misma separación que los dipolos de la antena ( $\square h=0.5975$ ). Error cuadrático medio para  $E_y=6.7\%$ ; para  $E_x=10.7\%$ .



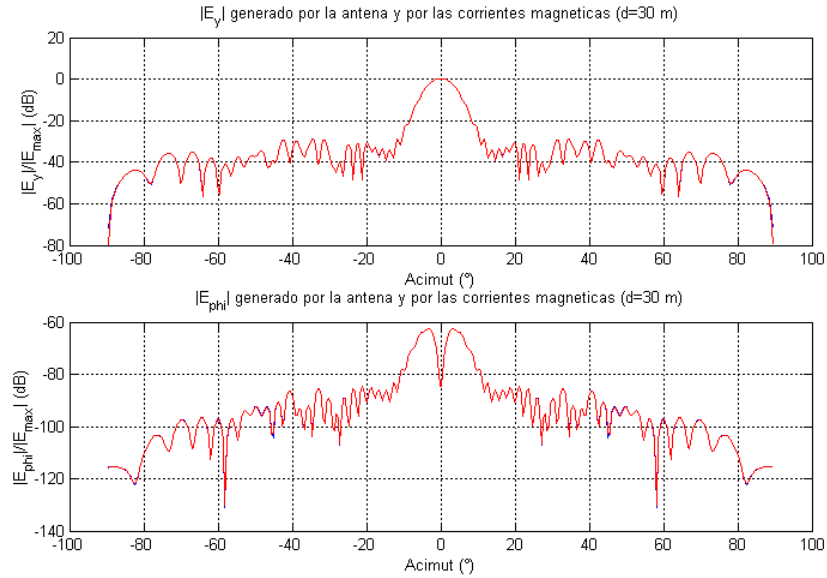
**Figura 2-36.** Comparación del campo observado verticalmente a 30 m, generado por la antena (azul) y por las corrientes magneticas de los dipolos de Hertz (rojo) sobre una retícula con la misma

separación que los dipolos de la antena ( $\chi_r=0.958$ ). Error cuadrático medio para  $E_y=0.74\%$ ; para  $E_x=11.5\%$ .

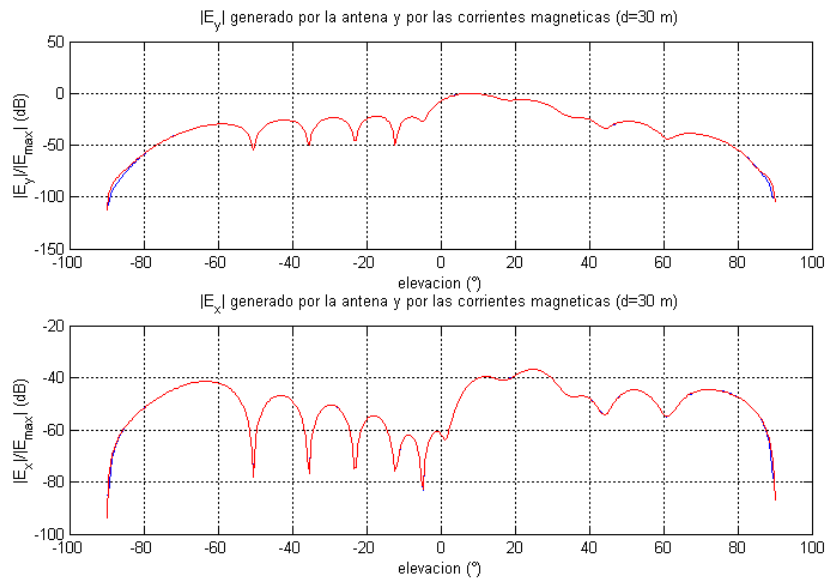


**Figura 2-37.** Corrientes magnéticas correspondientes a la proyección de las distribuciones horizontal y vertical de los campos eléctricos generados por la antena sobre el espacio  $\mathcal{E}$  (generado por una retícula plana de  $38 \times 14$  dipolos de Hertz con la misma separación que los dipolos de la antena.  $\chi_r=0.5975$ ;  $\chi_r=0.958$ ).

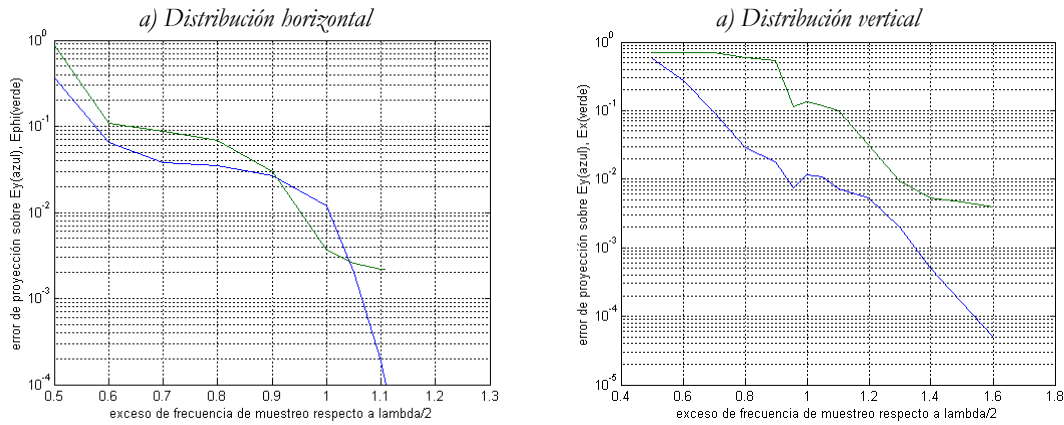
Si aumentamos la frecuencia de muestreo el error va disminuyendo especialmente cuando se sobrepasa la frecuencia en que la separación entre muestras es  $\lambda/2$ , y al igual que ocurría en el ejemplo del icosaedro se alcanza un umbral a partir del cual los vectores que definen el espacio  $\mathcal{E}$  dejan de ser independientes. Cuando el factor de sobremuestreo horizontal es 1.1 se llega a una excelente aproximación en la distribución horizontal del campo como puede contemplarse en la figura 2-38. Para la distribución vertical se alcanza un buen resultado cuando el sobremuestreo es 1.5 según se observa en la figura 2-39. La dependencia del error de proyección con respecto al factor de sobremuestreo se ha recogido en la figura 2-40. En la evolución del error sobre el dominio horizontal se observa un primer decrecimiento rápido hasta el punto en el que la posición de los dipolos equivalentes y reales coincide; después se estabiliza y cuando se supera el umbral de la separación a  $\lambda/2$  se observa un importante declive que se prolonga hasta que se alcanza el límite de los errores numéricos. A partir de aquí el operador de proyección tiende a hacerse singular y para  $\chi > 1.18$  ya no puede asegurarse la independencia de los vectores  $\{\Psi\}$  de  $\mathcal{E}$ . Para el dominio vertical ocurre algo semejante pero la aproximada coincidencia del punto de inflexión en  $\lambda/2$  con el caso en el que la posición de los dipolos equivalentes y reales se iguala puede confundir estas dos tendencias. En un principio se experimenta una reducción del error hasta que se alcanza el caso de la coincidencia espacial, que de hecho corresponde con un mínimo local, y después de superar el muestreo a  $\lambda/2$  se experimenta nuevamente una reducción que se prolonga (con menor pendiente que en el caso horizontal) hasta alcanzar el límite de los errores numéricos. La dependencia de los errores sobre las componentes horizontales del campo tiene el mismo cariz aunque inevitablemente se topa antes con los errores numéricos, ya que su energía, con respecto al campo horizontal, es varios ordenes de magnitud inferior.



**Figura 2-38.** Comparación del campo observado horizontalmente a 30 m, generado por la antena SSR (azul) y por las corrientes equivalentes de los dipolos de Hertz (rojo) sobre una retícula con separación horizontal  $\lambda/2\chi_b$  ( $\chi_b=1'1$ ). Error cuadrático medio para  $E_y = 0'019\%$ ; para  $E_\phi = 0'22\%$ .

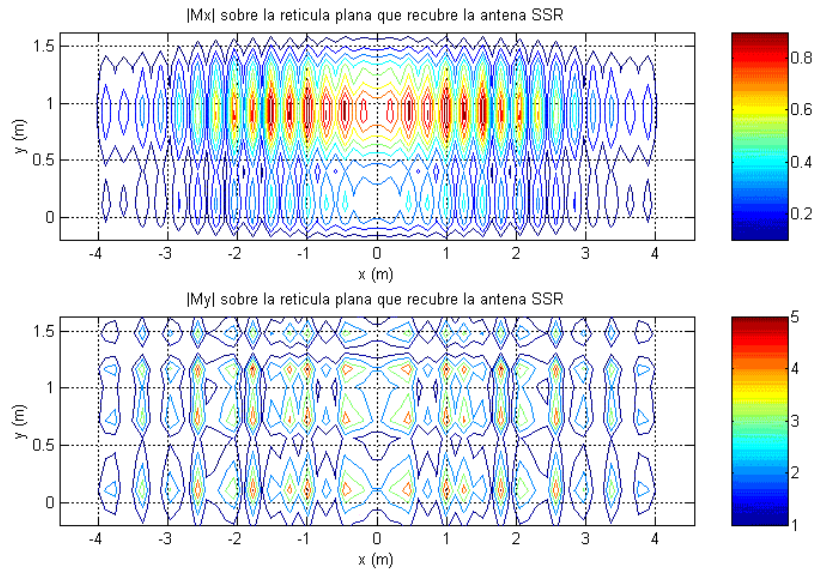


**Figura 2-39.** Comparación del campo observado verticalmente a 30 m, generado por la antena SSR (azul) y por las corrientes equivalentes de los dipolos de Hertz (rojo) sobre una retícula con separación vertical  $\lambda/2\chi_r$  ( $\chi_r=1'5$ ). Error cuadrático medio para  $E_y = 0'0164\%$ ; para  $E_x = 0'46\%$ .

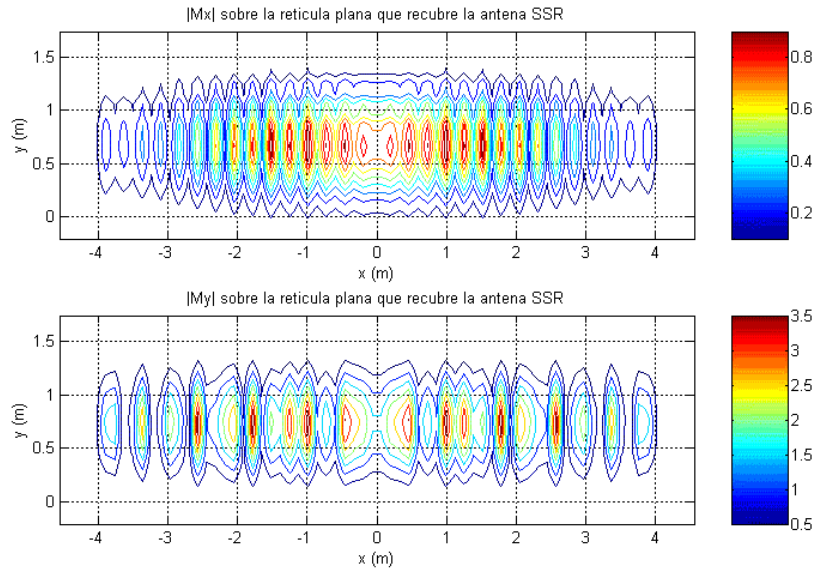


**Figura 2-40.** Dependencia del error de proyección con respecto al factor de sobremuestreo (*azul*: para la componente horizontal  $M_x$ ; *verde*: para la componente vertical  $M_y$ ).

Las distribuciones de corriente magnética correspondientes a la proyección del campo radiado por la antena sobre el espacio  $\mathcal{E}$  para una retícula con  $\{\chi_h=1^{\circ}1, \chi_v=0^{\circ}958\}$  pueden observarse en la figura 2-40; y para una retícula con  $\{\chi_h=1^{\circ}1, \chi_v=0^{\circ}958\}$  en la figura 2-41. En ambos casos puede intuirse la posición horizontal de los dipolos reales y sólo en el primero la distribución vertical de excitaciones (no su posición ya que esto requeriría una precisión de entorno a  $\lambda/4$  y para tal separación los campos generados por los correspondientes dipolos de Hertz no son independientes). Aunque en la figura 2-41 no pueda distinguirse la distribución vertical de excitaciones, debe señalarse que la posición de los dipolos equivalentes y reales no coincide en ningún caso y solamente dos se encuentran a una relativa proximidad.



**Figura 2-41.** Corrientes magnéticas correspondientes a la proyección de las distribuciones horizontal y vertical de los campos eléctricos generados por la antena sobre el espacio  $\mathcal{E}$  (generado por una retícula plana de  $70 \times 14$  dipolos de Hertz con  $\chi_h=1^{\circ}1$ ;  $\chi_v=0^{\circ}958$ ). En las figuras 2-38 y 2-36 se representan las distribuciones de campo debidas a este conjunto de corrientes sobre los dominios horizontal y vertical respectivamente.



**Figura 2-42.** Corrientes magnéticas correspondientes a la proyección de las distribuciones horizontal y vertical de los campos eléctricos generados por la antena sobre el espacio  $\mathbb{E}$  (generado por una retícula plana de  $70 \times 20$  dipolos de Hertz con  $\chi_h=1'1$ ;  $\chi_v=1'5$ ). En las figuras 2-38 y 2-39 se representan las distribuciones de campo debidas a este conjunto de corrientes sobre los dominios horizontal y vertical respectivamente.

#### 2.5.2.4 Sobre la frecuencia espacial

En lo que respecta al ancho de banda de la distribución del campo eléctrico sobre el dominio de medida el teorema 3 de muestreo (§2.4.1) nos asegura que la mínima distancia entre intensidades de campo independientes y observadas a una distancia  $d$  de las fuentes es  $\lambda d/2a\chi$ , donde ahora  $\chi$  dependerá de los modos evanescentes en el dominio de observación y del exceso de muestreo sobre la superficie que recubre las fuentes. Así, en caso de prescindir por completo de los modos evanescentes sobre el dominio de observación (cosa que de hecho está justificada a nuestra distancia de observación,  $100\lambda$ , según los resultados de la figura 2-9a) para el dominio horizontal  $\chi$  habrá de ser  $1'1$  y para el dominio vertical  $1'5$ . Por tanto, la distancia angular a la que deben separarse, en un muestreo óptimo, las muestras horizontales será –usando 2.75– :

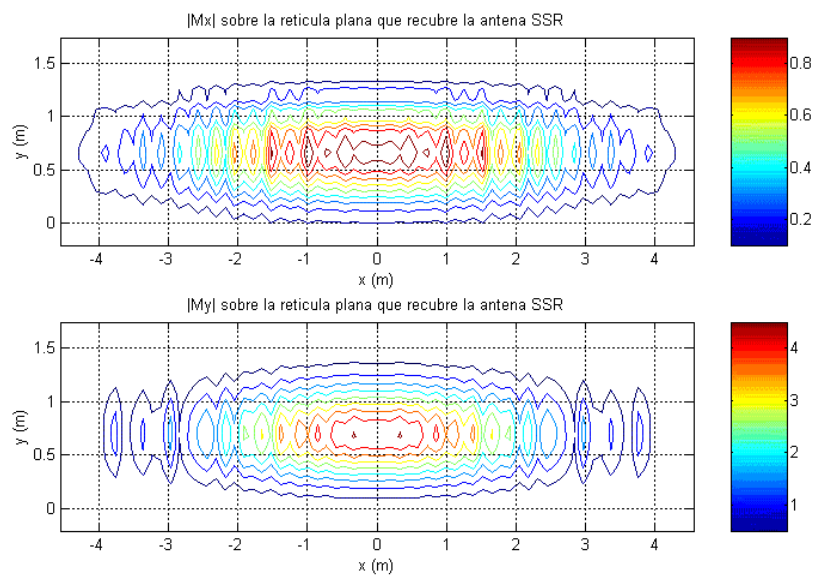
$$\Delta\varphi = \frac{\lambda r}{r \sin(\pi/2) 2a\chi_h} = \frac{\lambda}{2a\chi_h} = \frac{0.2913}{8 \cdot 1.1} = 0.01655 \text{ rad} = 1.896^\circ$$

$$\Delta\theta = \frac{\lambda r}{r 2a\chi_v} = \frac{\lambda}{2a\chi_v} = \frac{0.2913}{1.4 \cdot 1.5} = 0.138 \text{ rad} = 7.94^\circ$$

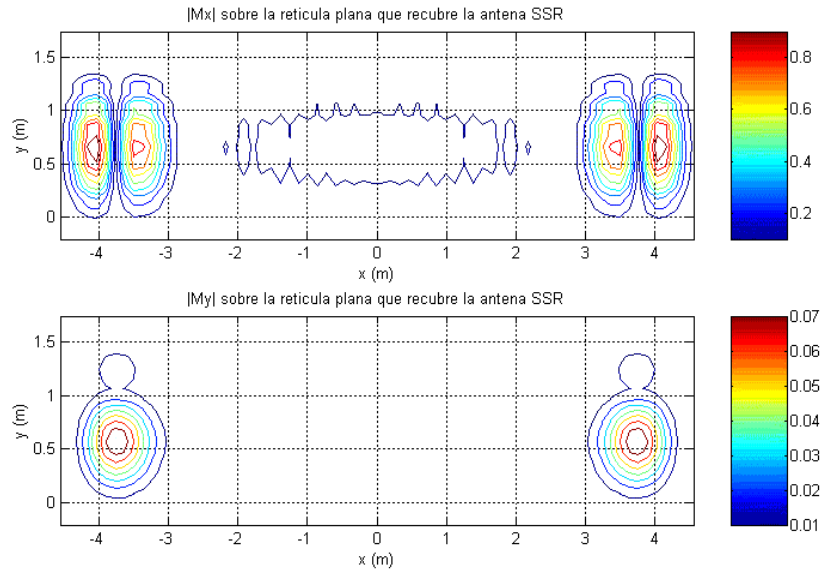
Con lo cual, puesto que el rango angular de observación es  $180^\circ$ , se requerirán horizontalmente 96 puntos, y verticalmente 24.

Cuando se muestrea al doble de estos requerimientos se obtienen los resultados recogidos en las figuras 2-38, 2-39 y 2-42. Usando exclusivamente el citado número de muestras mínimas se obtiene una distribución de corrientes que es prácticamente idéntica a la de la figura 2-42, con un ligero

aumento en los valores máximos de las corrientes verticales, que son las más expuestas a los errores numéricos como se justificó anteriormente. Si llamamos error cuadrático medio al de la aproximación con respecto a la distribución de corrientes de la figura 2-42 (normalizando ambas a sus respectivos valores máximos), se obtiene para el muestreo citado un error en las corrientes horizontales de 0'03 y 0'01 para las verticales. Cuando se reduce la frecuencia de muestreo en un 10% entonces el error asciende a 0'1 para las corrientes horizontales y a 1'2 para las verticales, observándose ahora –en la figura 2-43– una notable diferencia cualitativa en la distribución de corrientes. Submuestreando al 18% el error pasa a ser 0,6 y 0'7 respectivamente, siendo ahora radical la disparidad cualitativa en las distribuciones espaciales (figura 2-44). Esta drástica variación del error en el entorno del mencionado muestreo corrobora la existencia de un muestreo óptimo.



**Figura 2-43.** Distribución de corrientes sobre la misma retícula de dipolos equivalentes de la figura 2-42 pero obtenidas mediante un submuestreo al 10% del campo observado.



**Figura 2-44.** Distribución de corrientes sobre la misma reticula de dipolos equivalentes de la figura 2-42 pero obtenidas mediante un submuestreo al 18% del campo observado.

## 2.6 SUMARIO

Recapitemos, antes de empezar el camino de vuelta, el itinerario seguido desde el planteamiento del problema hasta el punto al que hemos llegado. Primeramente acotamos nuestro problema al de un conjunto de fuentes monocromáticas circunscritas por una cierta superficie y rodeadas de un espacio homogéneo (§2.1).

Utilizando las *leyes de Maxwell* (§2.1) se llegó primero a las *ecuaciones vectoriales de Helmholtz* que deben satisfacer los campos en el hemiespacio exterior a las fuentes y, una vez definidos los potenciales vectores (§2.1.1), se alcanzaron las *ecuaciones de D'Alambert* aplicables a todo el espacio, incluidas las fuentes. Desde aquí se pudo derivar la solución general externa e interna en términos de las funciones de Green.

De acuerdo con el *teorema de unicidad* (§2.2) se recordó que el campo exterior a una superficie cerrada es único si sobre ésta se especifica alguno de los campos eléctrico o magnético tangenciales, y que en términos del *teorema de equivalencia* se traduce a que una distribución superficial de corrientes sobre una superficie cerrada genera un campo electromagnético único en su exterior. La conjunción de estos teoremas reduce el problema electromagnético, en apariencia tridimensional –de las corrientes distribuidas en un volumen y del campo en cualquier punto del espacio exterior– a un problema en esencia bidimensional –distribución superficial de corrientes y campos–. Esta consecuencia se hizo notar al introducir la relación entre las transformadas de Fourier del campo, la función de Green y las fuentes unida a la restricción sobre las frecuencias espaciales impuesta por la ecuación de Helmholtz.



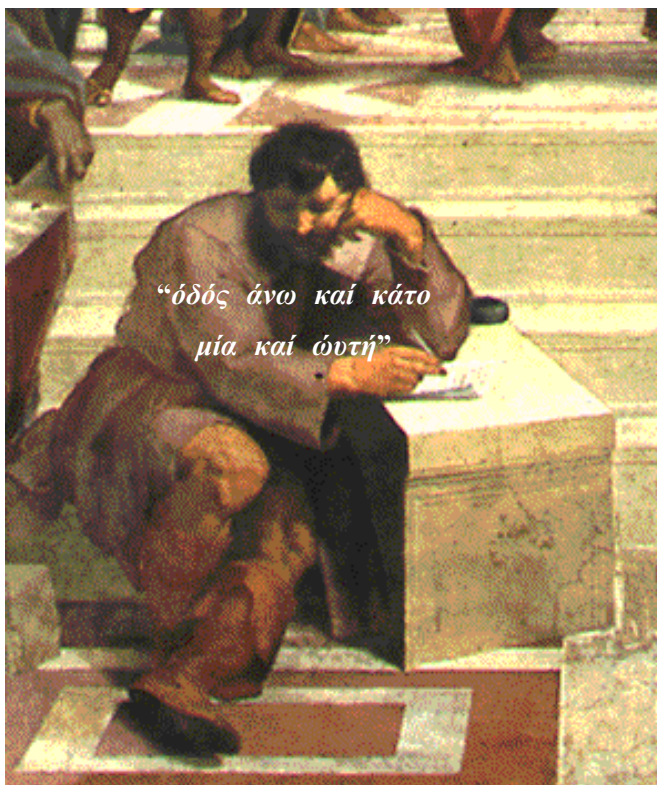
A continuación (§2.3) se particularizó la expresión general para el caso de corrientes reales –eléctricas– (§2.3.1) y para el de corrientes equivalentes magnéticas (§2.3.2), que después se integró en una formulación compacta para cualquier tipo de fuentes electromagnéticas (§2.3.3). Se especificó la solución sobre geometrías canónicas (§2.3.4) y se generalizó para cualquier elección de coordenadas curvilíneas.

Se revisaron las formulaciones modales (§2.3.6) y se probó el isomorfismo sobre el hemiespacio homogéneo de éstas con la formulación en términos de fuentes electromagnéticas, para lo que se encontraron operadores de proyección.

Finalmente se discretizó el problema electromagnético (§2.4), en principio continuo, y se demostró que su dimensión es finita y determinable (§2.4.1), dependiendo exclusivamente del área de la superficie que engloba las fuentes y de la frecuencia. A partir de este resultado se establecieron las distancias entre valores ortogonales tanto del campo sobre cualquier dominio de observación como de las fuentes sobre la superficie que las engloba. Se probó que una distribución superficial de corrientes cualquiera puede representarse por medio de una agrupación de dipolos de Hertz debidamente distribuidos (§2.4.2). La distancia entre valores ortogonales del campo se matizó para tener en cuenta las *ondas evanescentes* (§2.4.3) en términos del ancho de banda observable sobre un determinado dominio, precisándose éste para un error de truncamiento tan pequeño como se desee.

Finalmente se formuló el problema electromagnético discretizado (§2.4.4) en términos de un conjunto finito de funciones de campo que a su vez constituyen una base generadora de todos los campos electromagnéticos *radiados* por cualquier distribución de corrientes superficial o interior a una superficie dada.





*“El camino  
hacia arriba  
y el camino  
hacia abajo  
es uno y el  
mismo”*

Heráklitos  
de Efesos

### **III. PROBLEMA ELECTRO- MAGNÉTICO INVERSO**



### 3.1 INTRODUCCIÓN

Una vez recorrido con detalle el camino que va desde las fuentes hasta el campo electromagnético sobre un dominio arbitrario de observación, nos encontramos en mejores condiciones para emprender el camino de vuelta. Es decir, conociendo el campo descubrir las fuentes que lo ocasionaron. De hecho, el último de nuestros pasos en la resolución del problema directo es de capital importancia para nuestro regreso: el campo eléctrico sobre el dominio de interés  $\mathcal{D}$  quedó expresado en términos de un espacio vectorial  $\mathfrak{E}$  sobre un cuerpo de números complejos directamente vinculado con las fuentes (§2.4.5). Si se define una base adecuada  $\{\Psi\}$  entonces las coordenadas sobre dicho espacio constituyen las intensidades de corriente sobre la superficie de las fuentes. Aunque en realidad la distribución de corrientes que se obtendría de esta manera sería discreta, en virtud de la limitación espectral de dicha distribución (§2.4.1) y de acuerdo al teorema de muestreo, podría interpolarse a partir de ésta una distribución continua (§2.4.2). En tales términos el problema inverso parece trivial, incluso en presencia de ruido. Supongamos que nuestro conocimiento del campo sobre el dominio de observación procede de medidas. Es evidente, que junto con el propio campo aparecerá inevitablemente una cierta cantidad de *ruido* que podemos intentar reducirla pero nunca eliminarla. Esta componente estocástica no pertenecerá al espacio vectorial de distribuciones de campo válidas sobre el dominio de medida, de modo que al añadirse al campo radiado desde las fuentes, que por definición pertenece al espacio  $\mathfrak{E}$ , hará que la distribución medida quede ahora estrictamente fuera de dicho espacio. No obstante, extendiendo la métrica del espacio  $\mathfrak{E}$  (2-81 y 2-82) a las distribuciones medidas podemos hablar de distancias entre distribuciones de campo, pertenezcan o no a tal espacio. Esta distancia nos permitirá encontrar una proyección óptima de acuerdo a una métrica elegida (si la distancia es una forma cuadrática, entonces esta proyección será mínimo cuadrática y el error podremos referirlo en términos de una cierta potencia de ruido).

Pero el problema puede aun complicarse más: cuando las frecuencias son altas la determinación de la fase del campo se hace progresivamente más difícil y, en general, en muchos casos topamos con la limitación tecnológica o práctica de *sólo poder conocer el módulo del campo*. Esta limitación es mucho más severa que la del ruido ya que, extendiendo nuevamente la métrica de  $\mathfrak{E}$  a la distribución medida, la distancia de ésta a cualquier elemento de  $\mathfrak{E}$  es considerablemente mayor. No obstante, existen ciertas características analíticas de las distribuciones de campo que pueden facilitarnos la recuperación de la información de fase. En general, para eliminar las posibles incertidumbres – como demostró Hoenders en 1975 [65]–, nos es menester saber algo más acerca de las fuentes o recabar información sobre varias superficies.

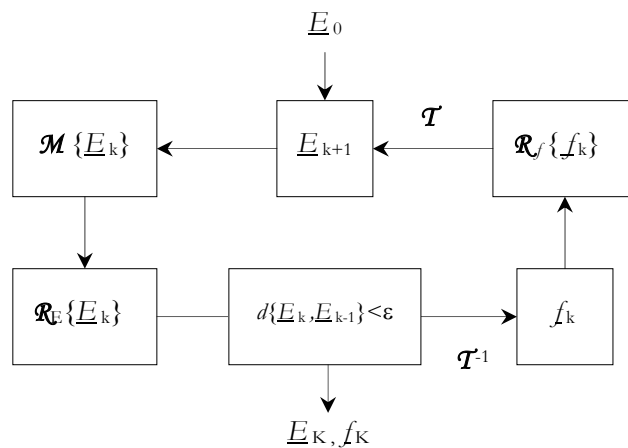
En algunas ocasiones podrá también ocurrir que sobre todo el dominio de observación sólo se haya medido una parte. Nuevamente, nos ocurre que la distribución medida y las distribuciones válidas

del espacio  $\mathcal{E}$  se encuentran a una cierta distancia. También en este caso podemos utilizar información adicional para reconstruir las distribución de campo sobre la parte del dominio en que la desconocíamos.

En los casos en que nos falte alguna información sobre la distribución de campos en todo el dominio  $\mathcal{D}$ , podremos recurrir a *procedimientos iterativos* [143] en los que se utilice de forma secuencial la información que se conozca acerca de las fuentes y de la distribución de campo. Este proceder nos permitirá encontrar las funciones de distribución que perteneciendo al espacio  $\mathcal{E}$  mejor se adapten a nuestro conocimiento del campo y de las fuentes. Ya hemos denominado  $\mathcal{T}$  al operador lineal que liga las fuentes con los campos, podemos representar mediante  $\mathcal{T}^{-1}$  a su operador inverso. Llamemos ahora  $\mathcal{R}_E$  y  $\mathcal{R}_f$  a los operadores que imponen restricciones sobre la distribución del campo y sobre las fuentes respectivamente. De modo que  $E_n = \mathcal{R}_E \{E_{n-1}\}$  cumple las condiciones de nuestro conocimiento adicional sobre la distribución del campo (por ejemplo, un determinado ancho de banda) y  $f_n = \mathcal{R}_f \{f_{n-1}\}$  las condiciones de nuestro conocimiento sobre las fuentes (por ejemplo, un soporte finito). Si por otra parte llamamos  $\mathcal{M}$  al operador que sustituye sobre una distribución de campo cualquiera la información que se haya medido (por ejemplo el módulo sobre todo el dominio de observación, el campo complejo sobre sólo una parte, etc) entonces la distribución  $E_n = \mathcal{M} \{E_{n-1}\}$  contiene la información medida, siendo idéntica a  $E_{n-1}$  en todo aquello de lo que no se disponga de medidas es idéntico a  $E_{n-1}$ . Recurriendo pues a estos operadores (inverso de la aplicación  $f \rightarrow E$ ,  $\mathcal{T}^{-1}$ , los de aplicación de restricciones,  $\mathcal{R}_E$  y  $\mathcal{R}_f$  y el de imposición de medidas,  $\mathcal{M}$ ) la ecuación básica del procedimiento iterativo tendrá la forma:

$$\underline{E}_n = \mathfrak{S} \{ \underline{E}_{n-1} \} = \mathcal{T} \left\{ \mathcal{R}_f \left\{ \mathcal{T}^{-1} \left\{ \mathcal{R}_E \left\{ \mathcal{M} \{ \underline{E}_{n-1} \} \right\} \right\} \right\} \right\} \quad (3-1)$$

Donde  $\mathfrak{S}$  simboliza el operador de iteración. Obviamente el esquema iterativo deberá empezar desde alguna hipótesis inicial y requiere de algún criterio de convergencia para que concluya, como por ejemplo que la distancia entre las distribuciones  $\underline{E}_n$  y  $\underline{E}_{n-1}$  sea inferior a una cierto valor, que podremos tratar como error de predicción. La figura 3-1 ilustra este esquema.



**Figura 3-1.** Esquema general de proceso iterativo aplicado al problema electromagnético inverso.

### 3.1.1 Acerca del problema de sólo observar el campo eléctrico

Desde que se hizo mención del teorema de unicidad electromagnético (§2.2) el discurso se ha restringido a referirnos al campo eléctrico. Según aquel teorema sólo existe una solución al problema electromagnético externo al volumen de las fuentes si se conoce sobre una superficie que las englobe el campo tangencial (ya sea eléctrico; magnético o una mezcla de ambos). Por esta razón limitamos entonces nuestra descripción a la del campo eléctrico. Abordar la del campo magnético es directo a partir de la obtenida para el eléctrico, habida cuenta la identidad formal de las expresiones de ambos campos (2-22) en relación a las fuentes (aunque el papel de las corrientes eléctricas y magnéticas esté cruzada). Usando dicha semejanza es fácil demostrar que si el campo eléctrico lo describimos como:

$$E = \iint \{ \underline{\underline{G}}_{\alpha}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') + \underline{\underline{G}}_{\beta}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}') \} ds' \quad (3-2a)$$

entonces el magnético tendrá la siguiente forma:

$$H = \iint \{ -\underline{\underline{G}}_{\beta}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') + \frac{1}{\eta^2} \underline{\underline{G}}_{\alpha}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}') \} ds' \quad (3-2b)$$

Discretizando el problema continuo que estas relaciones representan, a la manera descrita en §2.4.4, se llegaría a que tanto para el campo eléctrico como para el magnético se requieren las mismas funciones base  $\{\Psi_n\}$  (obtenidas a partir de la discretización de  $\underline{\underline{G}}_{\alpha}$  y  $\underline{\underline{G}}_{\beta}$ ). Con lo cual, asumiendo que la dimensión del problema electromagnético sea  $N$ , éste será el número de funciones elementales que necesitaremos para su descripción, ya estemos hablando del campo eléctrico o del magnético. Si a partir de dichas funciones la descripción del campo es completa (en el sentido de que el espacio que éstas engendran incluye todas las posibles distribuciones de campo que pudiera generar cualquier distribución de corrientes interior a  $\mathcal{S}$ ), entonces con sólo la observación del campo eléctrico –o sólo la del magnético– sería suficiente para poder colegir la distribución de corrientes superficiales. Pero, ¿cómo elegir las funciones  $\{\Psi_n\}$ ? Teniendo en cuenta la aplicabilidad general de los principios de equivalencia y la restringida de la teoría de imágenes, podemos considerar tres posibilidades:

- 1) En virtud del equivalente conductor eléctrico: situar  $N$  dipolos elementales de Hertz de corriente magnética sobre la superficie que engloba las fuentes, y aplicar a continuación la teoría de imágenes. Se trataría, por tanto, de la aproximación de óptica física discretizada.
- 2) Situar  $N/2$  dipolos elementales de Hertz que a la vez contengan corrientes eléctricas y magnéticas con el doble de separación que en el caso anterior.
- 3) Situar  $N/2$  dipolos elementales de Hertz de corriente eléctrica y  $N/2$  de corriente magnética intercaladas.

La primera de las soluciones es evidente que será tanto mejor cuanto mayor sea el tamaño eléctrico del radiador. De las dos últimas alternativas la más juiciosa parece ser la tercera, ya que cuando la distancia de observación aumenta las distribuciones de campo de los elementos puntuales de corriente eléctrica y magnética tienden a igualarse (aunque su relación direccional sea cruzada como se observará en §3.2.2) de modo que en zonas alejadas las correspondientes funciones  $\{\Psi_n\}$  irían haciéndose cada vez menos independientes (en el ejemplo del icosaedro §2.5.1 se recurrió a la solución segunda debido a su peculiaridad geométrica, pero gracias a la ausencia de ruido la estricta independencia fue allí suficiente para obtener resultados satisfactorios).

En lo sucesivo, seguiremos refiriéndonos fundamentalmente a la observación del campo eléctrico, aunque puntualmente hagamos también alusión a la del magnético –en el problema inverso sin fase–. No obstante, de acuerdo con la mencionada identidad formal (2-22) y (3-2), la expresión del problema en términos del campo magnético es directa a partir de la articulada en términos del eléctrico. Por otra parte, puede fácilmente demostrarse –usando las formulaciones modales– que para las geometrías canónicas existe una relación diádica directa entre las distribuciones de campo eléctrico y magnético.

### 3.1.2 Los problemas inversos

Al pluralizar el problema inverso pretende hacerse hincapié en la diferencia que plantea el disponer de la información completa de la distribución de campo eléctrico (es decir, que ésta contenga fase y que se extienda, con suficiente número de muestras, sobre un dominio que circunscriba las fuentes) o bien que de alguna manera la información sea incompleta. De entre los tipos de incompletitud posible deben destacarse dos: 1° que la medida sobre el dominio  $\mathcal{D}$  sea parcial, que referiremos como *observación incompleta*, 2° que carezcamos que información de fase. No obstante, el estudio que se presenta a continuación sobre el problema inverso quedará dividido bajo la más severa de las condiciones: contar o no con información de fase. Así el problema de la observación incompleta se abordará dentro del problema con fase, una vez analizado el caso de la información completa.

Tanto para el problema inverso con fase como para aquel en el que se carece de fase se comenzará estudiando la unicidad de solución para después investigar la manera de llegar a ella. No obstante, mientras que en el caso con fase la prueba de unicidad es sencilla, para el caso sin fase dicho estudio ocupa una buena porción de este capítulo, y como el lector, una vez recorrido el hilo de esas páginas, podría llegar a la conclusión de que quizá lo dicho en cuarto lugar podría haberse dicho primero y en general cambiar el orden y el estilo, me veo forzado a dar razón de ambos. El principal motivo para ese orden se debe a que el análisis usual del problema de unicidad conduce directamente a un callejón sin salida en el que se ha permanecido durante mucho tiempo, aunque según una confusa interpretación se creyera estar fuera. Este camino se ha querido recorrer ya que, de hecho, se obtienen importantes consecuencias, pero con intención se ha llegado hasta el



mencionado embrollo, para después intentar, a tenor de las soluciones prácticas planteadas y usadas, un nuevo enfoque que nos permita salir del atolladero<sup>1</sup>.

En lo que respecta a las soluciones, para el problema inverso con información completa primero se ha buscado la solución directa, con indiferencia del coste operativo, y después se ha planteado la manera de reducir éste mediante procedimientos numéricos, considerando aparte el caso de observación plana y de la observación lejana, a tenor de su sencillez operativa y por la especificidad de sus problemas. Consideración que da paso al problema de la observación incompleta. Por último, las soluciones al problema sin fase se han estudiado según una categorización propia que discierne entre métodos manipuladores de la distribución de campo y métodos exclusivamente observadores. Intentando integrar la mayor parte de los métodos planteados en diversas disciplinas dentro del marco de nuestro discurso, con lo que se obtiene una perspectiva coherente que facilita en algunos casos su crítica y en otros llegar a métodos más generales.

## 3.2 PROBLEMA INVERSO CON FASE

Cuando se introdujo el espacio vectorial  $\mathfrak{E}$  (§2.4.5) de las distribuciones de campo sobre los dominios de observación, se hizo notar que éste estaba definido sobre un cuerpo de escalares complejos, es decir, tanto las coordenadas sobre la base  $\{\Psi_n\}$  (que no es sino la distribución discretizada de corrientes que engloba las fuentes reales) como la distribución de campos sobre el dominio de observación se pueden entender como dos arreglos de números complejos. En principio, según las conclusiones alcanzadas en el estudio del problema directo, el espacio generado por los dipolos de Hertz –de dimensión finita–, si están debidamente distanciados, es completo con respecto al conjunto de distribuciones de campos debidas a cualquier conjunto interior de corrientes –que es un conjunto infinito numerable, de dimensión infinita–. Entonces, el problema de determinar las corrientes discretizadas sobre la superficie que engloba las fuentes, se reduce a encontrar la proyección de la distribución medida del campo complejo sobre el denominado espacio  $\mathfrak{E}$ , para lo cual la definición del producto interno –como entontes se hizo notar– es ahora de capital importancia. Este producto nos permite introducir una norma y una distancia, y si cumple unas ciertas condiciones entonces el problema de encontrar la proyección tiene solución única.

Si al formular el problema directo teníamos licencia para hablar de una distancia prácticamente nula entre el *campo observado* y el generado por una determinada distribución de corrientes sobre los dipolos de Hertz de la superficie  $S$  discretizada, ahora, al hablar de *campo medido* tendremos que

---

<sup>1</sup> Creo que esta manera de exponer el problema, que no sigue el cauce ordinario de inferencia deductiva, se encuentra más próxima a la verdadera investigación en la que se aborda el problema desde una cierta perspectiva, después se observan los errores, se ensaya una nuevo punto de vista, y así sucesivamente.

admitir una distancia irreductible ya que, estrictamente, no hay manera de eliminar por completo el ruido, y éste siempre presentará una cierta cantidad en nuestro espacio. Aquí de nuevo observamos el beneficio de reducir al máximo la dimensión de nuestro problema directo: la proyección del ruido será tanto más pequeña. Por otra parte se revela el interés de tener un mayor número de muestras sobre el espacio de observación: aumenta la distancia entre las distribuciones de campo válidas. No obstante, llegará un momento a partir del cual el aumento de muestras de la distribución de interés y ruidosas resultará igualmente redundante, aumentando por igual la energía de ambas, sin obtener por tanto, provecho.

### 3.2.1 Proyección ortogonal sobre el espacio $\tilde{\mathcal{E}}$

Según se argumentó al referirnos a la descripción modal (§2.3.6) y a las formulaciones directas en general, las posibles distribuciones de campo sobre un determinado dominio de observación constituyen un espacio de Hilbert, que podemos llamar  $\mathcal{H}$ , dentro del cual se encuentra el espacio  $\tilde{\mathcal{E}}$  que a su vez es un conjunto cerrado. Éste es, pues, un subespacio de  $\mathcal{H}$ , que aproxima de forma óptima todas las posibles distribuciones de campo generadas por cualquier conjunto de corrientes interiores a una superficie dada  $S$ . Si llamamos  $\tilde{\mathcal{E}}^{\circ}$  al complemento ortogonal de  $\tilde{\mathcal{E}}$ , entonces  $\mathcal{H} = \tilde{\mathcal{E}}^{\circ} \oplus \tilde{\mathcal{E}}$ , y de acuerdo con el *teorema de la proyección ortogonal* existirá una proyección única de los elementos de  $\mathcal{H}$  sobre  $\tilde{\mathcal{E}}$  siempre que sobre éste último se haya definido un producto interno en base a una forma sesquilineal hermítica cuyas formas hermíticas asociadas sean positivas [106, p.127]. Una manera de generalizar la definición del producto interno dada en (2-84) es por medio de unos factores arbitrarios de ponderación,  $\pi_m$ , que habrán de ser reales y positivos, que modifiquen el peso relativo –en la métrica del espacio  $\tilde{\mathcal{E}}$ – de los campos en cada uno de los puntos de observación:

$$\langle \underline{\mathbf{E}}_1, \underline{\mathbf{E}}_2 \rangle = \underline{\mathbf{E}}_1^+ \cdot \left[ \underline{\text{diag}}(\underline{\pi}) \right] \cdot \underline{\mathbf{E}}_2 = \underline{\mathbf{E}}_1^+ \cdot \underline{\pi} \cdot \underline{\mathbf{E}}_2 = \sum_{m=1}^M \pi_m \cdot \langle \mathbf{E}_{1_m}^*, \mathbf{E}_{2_m} \rangle \in \mathbb{C} \text{ con } \pi_m \in \mathbb{R}^+ \quad \forall m \quad (3-3)$$

Donde la matriz diagonal de los factores de ponderación, para simplificar la notación, la representaremos, en adelante, por medio de la matriz  $\underline{\pi}$ . A partir de esta definición, la norma generalizada de un elemento del espacio  $\tilde{\mathcal{E}}$  y la distancia entre dos de sus elementos será:

$$\|\underline{\mathbf{E}}\| = \langle \underline{\mathbf{E}}, \underline{\mathbf{E}} \rangle^{1/2} = \left( \underline{\mathbf{E}}^+ \cdot \underline{\pi} \cdot \underline{\mathbf{E}} \right)^{1/2} = \left( \sum_{m=1}^M \pi_m \langle \mathbf{E}_{1_m}, \mathbf{E}_{1_m}^* \rangle \right)^{1/2} \in \mathbb{R}^+ \quad (3-4a)$$

$$d(\underline{\mathbf{E}}_1, \underline{\mathbf{E}}_2) = \|\underline{\mathbf{E}}_1 - \underline{\mathbf{E}}_2\| \in \mathbb{R}^+ \quad (3-4b)$$

Gracias a la mencionada definición del producto interno la distancia entre una distribución de campo determinada y cualquier otra es una forma hermitica positiva<sup>2</sup>, que por tanto tiene un solo mínimo. Cuando la distribución en cuestión pertenece al espacio  $\mathfrak{E}$  entonces tal mínimo supone una distancia nula. Sin embargo, cuando el producto interno se extiende a distribuciones exteriores al espacio  $\mathfrak{E}$ , entonces el mínimo puede suponer una cierta separación que puede interpretarse en términos de una distancia ortogonal al dicho espacio y que a su vez pertenece a su complemento ortogonal,  $\mathfrak{E}^0$ . A esa distancia existe una única distribución perteneciente al espacio  $\mathfrak{E}$  que corresponde con la denominada *proyección ortogonal*, y cuya unicidad de solución depende exclusivamente de la definición del producto interno [124, §5.8; 106, p.127].

### 3.2.1.1 Unicidad de solución

Llamemos  $\underline{E}_m$  al campo medido sobre el dominio de observación y  $\underline{E}_f$  al generado por las corrientes  $\{\underline{f}\}$  sobre los dipolos de Hertz que engloban las fuentes y supongamos que la extensión y discretización de ambos dominios sea adecuada, siendo el número de puntos del dominio de observación  $M$  mayor o igual que el número de dipolos de Hertz  $N$ .

*Teorema 1:* Existe una única distribución de campo  $\underline{E}_{f,opt}$  del espacio  $\mathfrak{E}$ , asociada a una distribución de corrientes  $\underline{f}_{opt}$  que presente mínima distancia a la distribución medida  $\underline{E}_m$ .

Es evidente, que la distancia entre la distribución de campo medida y una cualquiera del espacio  $\mathfrak{E}$  es una función de las fuentes  $\underline{f}$ :

$$d(\underline{f}) = d(\underline{E}_m, \underline{E}_f(\underline{f})) = \|\underline{E}_m - \underline{E}_f(\underline{f})\| = \left\{ (\underline{E}_m - \underline{E}_f(\underline{f}))^T \cdot \underline{\pi} \cdot (\underline{E}_m - \underline{E}_f(\underline{f})) \right\}^{1/2} \quad (3-5)$$

Y la distancia cuadrática será una forma hermitica pura:

$$\begin{aligned} d^2(\underline{f}) &= (\underline{E}_m - \underline{E}_f)^+ \cdot \underline{\pi} \cdot (\underline{E}_m - \underline{E}_f) \\ &= \underline{E}_m^+ \cdot \underline{\pi} \cdot \underline{E}_m - (\underline{E}_m^+ \cdot \underline{\pi} \cdot \underline{E}_f + \underline{E}_f^+ \cdot \underline{\pi} \cdot \underline{E}_m) + \underline{E}_f^+ \cdot \underline{\pi} \cdot \underline{E}_f \end{aligned} \quad (3-6)$$

Considerando que  $\underline{E}_f = \underline{T} \cdot \underline{f}$ ;  $\underline{E}_f^+ = \underline{f}^+ \cdot \underline{T}^+$ :

$$d^2(\underline{f}) = \underline{E}_m^+ \cdot \underline{\pi} \cdot \underline{E}_m - (\underline{E}_m^+ \cdot \underline{\pi} \cdot \underline{T} \cdot \underline{f} + \underline{f}^+ \cdot \underline{T}^+ \cdot \underline{\pi} \cdot \underline{E}_m) + \underline{f}^+ \cdot \underline{T}^+ \cdot \underline{\pi} \cdot \underline{T} \cdot \underline{f} \quad (3-7)$$

Llamando a:

---

<sup>2</sup> El equivalente sobre cuerpos de números reales sería una forma cuadrática positiva, que intuitivamente puede interpretarse como un paraboloide n-dimensional, con un solo mínimo.

$$\begin{aligned}
\underline{\mathbf{E}}_m^+ \cdot \underline{\boldsymbol{\pi}} \cdot \underline{\mathbf{E}}_m &= k \in \mathfrak{R} \\
\underline{\mathbf{E}}_m^+ \cdot \underline{\boldsymbol{\pi}} \cdot \underline{\boldsymbol{\tau}} &= \underline{b}^+ \in \mathfrak{C}^N \Rightarrow \underline{b} = \underline{\boldsymbol{\tau}}^+ \cdot \underline{\boldsymbol{\pi}} \cdot \underline{\mathbf{E}}_m = \begin{pmatrix} \langle \underline{\boldsymbol{\Psi}}_1, \underline{\mathbf{E}}_m \rangle \\ \vdots \\ \langle \underline{\boldsymbol{\Psi}}_N, \underline{\mathbf{E}}_m \rangle \end{pmatrix} \\
\underline{\boldsymbol{\tau}}^+ \cdot \underline{\boldsymbol{\pi}} \cdot \underline{\boldsymbol{\tau}} &= \underline{\zeta} \in \mathfrak{C}^{N \times N}
\end{aligned} \tag{3-8}$$

la distancia cuadrática podrá describirse como:

$$d^2(\underline{\mathbf{f}}) = k - (\underline{b}^+ \cdot \underline{\mathbf{f}} + \underline{\mathbf{f}}^+ \cdot \underline{b}) + \underline{\mathbf{f}}^+ \cdot \underline{\zeta} \cdot \underline{\mathbf{f}} \tag{3-9}$$

Obsérvese que los elementos diagonales de la matriz  $\underline{\zeta}$  de (3-9) corresponden a la norma cuadrática de los vectores  $\{\boldsymbol{\Psi}_n\}$  que forman la base del espacio  $\mathfrak{E}$ , y pueden interpretarse como la energía de las distribuciones de campo sobre el dominio de medida engendradas por cada uno de los dipolos unitarios de Hertz sobre la superficie  $\mathcal{S}$ . Mientras que los elementos no diagonales corresponden a la correlación cruzada entre esas distribuciones:  $R_{ij}\{\boldsymbol{\Psi}_i, \boldsymbol{\Psi}_j\} = \langle \boldsymbol{\Psi}_i, \boldsymbol{\Psi}_j \rangle = \langle \boldsymbol{\Psi}_j, \boldsymbol{\Psi}_i \rangle^*$ , lo que, a su vez hace evidente que la matriz  $\underline{\zeta}$  es hermítica. Por tanto, y en virtud de que los vectores  $\{\boldsymbol{\Psi}_n\}$  generan un espacio de dimensión  $N$ , es entonces claro que la expresión (3-9) es una *forma hermítica positiva* y, en consecuencia, con un único mínimo.

En definitiva, la unicidad de solución estará a expensas de la no singularidad de  $\underline{\zeta}$  (o lo que es lo mismo, y como se verá más adelante en (3-17), de su invertibilidad), es decir, que los  $N$  vectores  $\{\boldsymbol{\Psi}_n\}$  formen un espacio de dimensión  $N$ . Para lo cual, es evidente que el número de componentes de los vectores  $\boldsymbol{\Psi}_n$ ,  $M$  (número de muestras del dominio  $\mathcal{D}$ ), ha de ser necesariamente mayor o igual que  $N$ . Teniendo además en cuenta los teorema 2 y 3 de muestreo (§2.4.1), para disponer de suficientes muestras independientes,  $M$ , que generen un espacio de dimensión  $N$  (no superior a la dimensión esencial) será además necesario que el dominio de observación *circunscriba* las fuentes, que es a lo que aludíamos al principio al advertir que la extensión y discretización de ambos dominios fuera adecuada. Por tanto, cumplidas estas condiciones podemos asegurar la unicidad de solución que es lo que en un principio afirmamos. □

Esta característica de la expresión (3-9) nos permite observar que el conjunto de los elementos del espacio  $\mathfrak{E}$  definidos por una distancia a un campo medido menor o igual a un valor dado formen un *conjunto convexo* [29] que (como se observa más adelante en §3.2.1.3.c) garantiza la unicidad de solución en términos de minimización de la distancia, así como la inexistencia de subconjuntos localmente cóncavos o de convexidad limitada al entorno de un mínimo local. En virtud de esta propiedad podrá definirse, como se hará más adelante en §3.2.1.3.c, toda una familia de algoritmos convergentes hacia la solución única.

### 3.2.1.2 Solución analítica

Pero veamos cual es ese mínimo de la forma hermitica (3-9) que corresponde con la solución única de nuestro problema inverso. Para buscarlo supongamos primero que la distribución de corrientes  $\underline{f}$  sea real, después que sea imaginaria y finalmente compleja:

$$\text{si } \underline{f} \in \mathfrak{R}^M : \begin{cases} d^2(\underline{f}) = k - (\underline{b}^+ \cdot \underline{f} + \underline{b}^T \cdot \underline{f}) + \underline{f}^+ \cdot \underline{\zeta} \cdot \underline{f} \\ = k - 2 \operatorname{Re}\{\underline{b}^T\} \cdot \underline{f} + \underline{f}^+ \cdot \underline{\zeta} \cdot \underline{f} \end{cases} \quad (3-10)$$

$$\text{si } \underline{f} \in \mathfrak{I}^M : \begin{cases} d^2(\underline{f}) = k - (\underline{b}^+ \cdot \underline{f} - \underline{b}^T \cdot \underline{f}) + \underline{f}^+ \cdot \underline{\zeta} \cdot \underline{f} \\ = k + 2j \operatorname{Im}\{\underline{b}^T\} \cdot \underline{f} + \underline{f}^+ \cdot \underline{\zeta} \cdot \underline{f} \end{cases} \quad (3-11)$$

El mínimo aparecerá allí donde el gradiente de las formas hermitica (3-10) se anulen:

$$\text{si } \underline{f} \in \mathfrak{R}^M : \nabla\{d^2(\underline{f})\} = -2 \operatorname{Re}\{\underline{b}^T\} + 2 \underline{f}^T \underline{\zeta} = 0 \Rightarrow \underline{f}^T = \operatorname{Re}\{\underline{b}^T\} \cdot \underline{\zeta}^{-1} \quad (3-12)$$

$$\text{si } \underline{f} \in \mathfrak{I}^M : \nabla\{d^2(\underline{f})\} = +2j \operatorname{Im}\{\underline{b}^T\} - 2 \underline{f}^T \underline{\zeta} = 0 \Rightarrow \underline{f}^T = j \operatorname{Im}\{\underline{b}^T\} \cdot \underline{\zeta}^{-1} \quad (3-13)$$

Teniendo en cuenta las definiciones (3-8), es evidente la igualdad general de (3-12) y (3-13) como  $\underline{f} = \underline{\zeta}^{-1} \cdot \underline{b}$ . Y, en definitiva, suponiendo una distribución de fuentes complejas, podemos generalizar el resultado anterior:

$$\text{si } \underline{f} \in \mathfrak{C}^M : \underline{f} = \{\operatorname{Re}\{\underline{b}^T\} + j \operatorname{Im}\{\underline{b}^T\}\} \cdot \underline{\zeta}^{-1} = \underline{b}^T \cdot \underline{\zeta}^{-1} \Rightarrow \underline{f} = \underline{\zeta}^{-1} \cdot \underline{b} \quad (3-14)$$

Es decir, usando (3-8), la proyección de una medida del campo eléctrico complejo sobre el dominio de observación en el espacio  $\mathfrak{E}$ :

$$\underline{f}_{\text{proyección}} = [\underline{\mathcal{T}}^+ \cdot \underline{\pi} \cdot \underline{\mathcal{T}}]^{-1} \underline{\mathcal{T}}^+ \cdot \underline{\pi} \cdot \underline{E}_m \quad (3-15)$$

Resultado que es equivalente al de Harrington y Mautz [111] y que generaliza al de otros autores [37, 101, 110, 152]; siendo además idéntico al que se llegaría definiendo el producto interno como:

$$\langle \underline{E}_1, \underline{E}_2 \rangle = \underline{E}_1^T \cdot \underline{\pi} \cdot \underline{E}_2^* \quad (3-16)$$

Así como en §2.4.4 definimos el operador directo  $\underline{\mathcal{T}}$  la ecuación 3-14 podemos interpretarla como una definición del operador inverso, que podemos denotarlo como  $\underline{\mathcal{T}}^{-1}$ :

$$\underline{\mathcal{T}}^{-1} \hat{=} [\underline{\mathcal{T}}^+ \cdot \underline{\pi} \cdot \underline{\mathcal{T}}]^{-1} \underline{\mathcal{T}}^+ \cdot \underline{\pi} \quad \text{y así: } \underline{f}_{\text{proyección}} = \underline{\mathcal{T}}^{-1} \cdot \underline{E}_m \quad (3-17)$$

Este es, de hecho, el operador de proyección que se utilizó en los ejemplos del capítulo 2 y que en caso de contar con toda la información del campo complejo sobre el dominio de observación supone una solución completa al problema electromagnético inverso, cuya complejidad depende esencialmente del número de fuentes (o en caso de que la discretización haya sido efectiva, de la dimensión esencial del problema directo). Pues como puede observarse en 3-17 el cálculo del

operador directo supone la inversión de la matriz  $\underline{\zeta}$  arriba descrita, de dimensión  $N \times N$ —siendo  $N$  el número de fuentes—<sup>3</sup>. Donde nuevamente puede verse que la unicidad de solución depende de la invertibilidad de  $\underline{\zeta}$ .

En el caso de que el número de fuentes (es decir, el tamaño eléctrico de  $\mathcal{S}$ ) sea muy elevado, como ocurre en los sistemas radiantes de gran tamaño eléctrico, la inversión del operador directo puede significar un coste numérico inabordable. En tales casos es menester recurrir a procedimientos numéricos, como, por ejemplo, el gradiente conjugado [139; 24], para la minimización de (3-9) o en caso de que la geometría lo permita utilizar transformadas discretas de Fourier.

### 3.2.1.3 Solución numérica

#### a) Solución numérica de la ecuación lineal

La complejidad computacional de obtener el operador inverso en realidad puede relajarse teniendo en cuenta que la minimización de (3-9) equivale a la resolución de la ecuación lineal—que procede directamente de (3-14)—:

$$\min_f \{d(\underline{E}_m, \underline{T} \cdot \underline{f})\} \Rightarrow \underline{\zeta} \cdot \underline{f} = \underline{b} \quad \equiv \quad \{\underline{T}^+ \underline{\pi} \cdot \underline{T}\} \cdot \underline{f} = \underline{T}^+ \underline{\pi} \cdot \underline{E}_m \quad (3-18)$$

Con lo que, en definitiva, nuestro problema consiste en la resolución de un conjunto cuadrado de ecuaciones lineales ( $N$  ecuaciones y  $N$  incógnitas) que podemos abordar por medio de un amplio abanico de procedimientos numéricos<sup>4</sup>. Sin embargo, aunque en principio cualquiera de ellos pueda ser teóricamente aplicable, de entre los compactos debe resaltarse el de Choleski, en virtud de la naturaleza hermitica de la matriz  $\underline{\zeta}$ , que no obstante, deja de perder sus ventajas cuando el número de fuentes es superior a 100, siendo a partir de este punto cuando los métodos iterativos presentan su especial atractivo. Estos procedimientos, con los que sólo se alcanza una solución aproximada en un número finito de etapas, son, en suma, los que presentan especial ventaja en detrimento del cálculo de la inversa por dos razones: por una parte porque sólo se suele recurrir a la resolución numérica de la ecuación lineal cuando el número de fuentes es elevado (de lo contrario puede abordarse la inversión de  $\underline{\zeta}$ ) y porque la matriz del sistema  $\underline{\zeta}$  es necesariamente *dispersa* (poco densa) aunque no llegue a ser tridiagonal. Obsérvese, como se hizo resaltar antes, que la matriz del sistema

<sup>3</sup> Obsérvese que es, por tanto, independiente del número de puntos del dominio de observación. El efecto de éste número,  $M$ , sobre el coste operacional se revela en el cálculo de la propia matriz  $\underline{\zeta}$ , no de su inversa, presentando una relación lineal respecto al número de operaciones.

<sup>4</sup> Éstos podrán ser *directos*, como la eliminación de Gauss, o los métodos compactos de descomposición LU como son los de Choleski, Crout o Deolittle; o bien *iterativos*: Jacobi, Gauss-Seidet o de Sobrerrelajaciones Sucesivas (SRS) (un gran número de manuales de métodos numéricos y de álgebra lineal contienen discusiones sobre estos procedimientos [124; 84; 159]).

puede definirse en términos de la correlación cruzada -o del producto interno- de los campos engendrados por los dipolos unitarios de Hertz, cuya separación es de tal grado que sus respectivos campos no sean linealmente dependientes. Una discusión detallada de estos procedimientos, junto con criterios analíticos de su conveniencia así como para evaluar su rapidez de convergencia, puede encontrarse en [124, §9.6].

**b) Reducción numérica del residuo**

También se puede abordar el problema de la minimización de la distancia a los elementos del espacio  $\mathfrak{E}$  y la distribución medida (3-18) por medio de toda una familia de procedimientos iterativos que, en general, pueden entenderse como una reducción progresiva del residuo:  $\underline{R} = \underline{E}_m - \underline{T} \underline{f}$ . Obsérvese que, a fin de cuentas, el gradiente de la distancia cuadrática puede expresarse (según 3-8, 3-12, 3-13) en términos del residuo:

$$\underline{\nabla} \{d^2(\underline{f})\} = \{ \underline{T}^+ \underline{\pi} \underline{T} \} \cdot \underline{f} - \underline{T}^+ \underline{\pi} \underline{E}_m = -\underline{T}^+ \underline{\pi} \underline{R} \tag{3-19}$$

Podemos partir de una hipótesis inicial e ir progresando hacia el mínimo por medio de una cuidadosa elección de la dirección de cambio:

$$\underline{f}^{(i+1)} = \underline{f}^{(i)} + \lambda^{(i)} \cdot \underline{p}^{(i)} \tag{3-20}$$

Donde  $\underline{p}^{(i)}$  representa la dirección de cambio y  $\lambda^{(i)}$  es un parámetro que podemos ajustar en cada iteración para minimizar el residuo en esa precisa dirección. De entre todos los procedimientos que pudieran plantearse, derivados de la elección de estos dos parámetros –esencialmente la dirección de cambio– dos gozan de especial interés: el de la *mínima pendiente* (o gradiente descendiente) y el de *gradiente conjugado*. En el primero se elige para cada iteración la dirección opuesta a la del gradiente (3-18):

$$\underline{p}^{(i)} = -\underline{\nabla} \{d^2(\underline{f}^{(i)})\} = \underline{T}^+ \cdot \underline{\pi} \cdot \underline{R}^{(i)} \tag{3-21}$$

Procedimiento cuya convergencia depende esencialmente de la forma hermítica (3-9) y que, por tanto, en nuestro caso es garantizable, aunque la solución que nos provee es aproximada en un número finito de pasos. El procedimiento del *gradiente conjugado* puede entenderse en términos de una ortogonalización secuencial del espacio  $\mathfrak{E}$ , que permite alcanzar la solución única en un número finito de pasos aunque a expensas de un mayor coste operacional. La elección de las direcciones se hace en este caso de modo que el gradiente de cada iteración sea ortogonal a todas las anteriores direcciones de cambio elegidas. Al realizar la  $N$ -ésima iteración, siendo  $N$  la dimensión del espacio  $\mathfrak{E}$ , se habrá conseguido el número máximo de direcciones ortogonales en  $\mathfrak{E}$ . Llegados a este punto, el residuo será necesariamente nulo en ausencia de ruido, o en caso de haberlo, el remanente corresponderá con la proyección de éste sobre nuestro espacio, con el que, sin más remedio, tendremos que aguantarnos.

La mencionada condición de ortogonalidad, que se irá imponiendo secuencialmente, puede expresarse en términos del producto interno (3-3):

$$\langle \nabla \{d^2(\underline{\mathbf{f}}^{(i+1)})\}, \underline{\mathbf{p}}^{(j)} \rangle = \langle \underline{\mathbf{T}} \cdot \nabla \{d^2(\underline{\mathbf{f}}^{(i+1)})\}, \underline{\mathbf{T}} \cdot \underline{\mathbf{p}}^{(j)} \rangle = 0 \quad \forall j \leq i \quad (3-22)$$

Así, después de haber aplicado esta condición  $N$  veces (que guarda un estrecho parecido con la ortogonalización de Gramm-Smith), se habrá conseguido un conjunto  $\{\underline{\mathbf{p}}\}$  de direcciones ortogonales que será, de hecho, una base ortogonal del espacio  $\mathfrak{E}$ , como también lo es el conjunto de los gradientes de cada etapa:

$$\left. \begin{aligned} &\langle \underline{\mathbf{T}}^+ \underline{\pi} \cdot \underline{\mathbf{T}} \cdot \underline{\mathbf{p}}^{(i)}, \underline{\mathbf{p}}^{(j)} \rangle = \langle \underline{\mathbf{T}} \cdot \underline{\mathbf{p}}^{(i)}, \underline{\mathbf{T}} \cdot \underline{\mathbf{p}}^{(j)} \rangle = 0 \\ &\langle \nabla \{d^2(\underline{\mathbf{f}}^{(i)})\}, \nabla \{d^2(\underline{\mathbf{f}}^{(j)})\} \rangle = 0 \\ &\langle \nabla \{d^2(\underline{\mathbf{f}}^{(i)})\}, \underline{\mathbf{p}}^{(j)} \rangle = 0 \end{aligned} \right\} \forall j \neq i \quad (3-23)$$

Para materializar el algoritmo y elegir los parámetros  $\lambda$  más oportunos basta con partir de una aproximación inicial cualquiera:

$$\underline{\mathbf{f}}^{(0)} \Rightarrow \begin{cases} \underline{\mathbf{R}}^{(0)} = \underline{\mathbf{E}}_m - \underline{\mathbf{T}} \cdot \underline{\mathbf{f}}^{(0)} \\ \nabla \{d^2(\underline{\mathbf{f}}^{(0)})\} = -\underline{\mathbf{T}}^+ \underline{\pi} \cdot \underline{\mathbf{R}}^{(0)} \\ \underline{\mathbf{p}}^{(0)} = \underline{\mathbf{T}}^+ \underline{\pi} \cdot \underline{\mathbf{R}}^{(0)} \end{cases} \quad (3-24)$$

Que como puede verse es, en este primer paso, equivalente al método de la mínima pendiente, pero que a partir de aquí se continua por medio de la aplicación reiterada ( $N-1$  veces) de las siguientes operaciones [139; 24, §8.3.2; 105, §8.3]:

$$\begin{aligned} \lambda^{(k)} &= \frac{\|\underline{\mathbf{T}}^+ \underline{\pi} \cdot \underline{\mathbf{R}}^{(k)}\|^2}{\|\underline{\mathbf{T}} \cdot \underline{\mathbf{p}}^{(k)}\|^2} & \beta^{(k)} &= \frac{\|\underline{\mathbf{T}}^+ \underline{\pi} \cdot \underline{\mathbf{R}}^{(k+1)}\|^2}{\|\underline{\mathbf{T}}^+ \underline{\pi} \cdot \underline{\mathbf{R}}^{(k)}\|^2} \\ \underline{\mathbf{f}}^{(k+1)} &= \underline{\mathbf{f}}^{(k)} + \lambda^{(k)} \underline{\mathbf{p}}^{(k)} & \underline{\mathbf{p}}^{(k+1)} &= \underline{\mathbf{T}}^+ \underline{\pi} \cdot \underline{\mathbf{R}}^{(k+1)} + \beta^{(k)} \underline{\mathbf{p}}^{(k)} \\ \underline{\mathbf{R}}^{(k+1)} &= \underline{\mathbf{R}}^{(k)} - \lambda^{(k)} \underline{\mathbf{T}} \cdot \underline{\mathbf{p}}^{(k)} \end{aligned} \quad (3-25)$$

Obsérvese que aún la semejanza con el método de la mínima pendiente, ya que la última ecuación de (3-25) podríamos expresarla como:

$$-\nabla \{d^2(\underline{\mathbf{f}}^{(k+1)})\} - \left( \begin{array}{c} \text{factor acelerador} \\ \text{de la convergencia} \end{array} \right) \quad (3-26)$$

es decir, la elección de la dirección de cambio puede entenderse como una aceleración de la convergencia del método primero. Una exhaustiva exposición de este método aplicado a distintos problemas electromagnéticos, así como una justificación detallada de todo el algoritmo, puede encontrarse en [139]. La aplicación de este procedimiento al problema inverso se encuentra frecuentemente en la literatura (p.ej. [45; 139; 98; 16]).



**c) Algoritmo iterativo basado en el Teorema Global de la Convergencia**

Cuando anteriormente se encontró la forma hermética de la distancia a las distribuciones del espacio  $\mathfrak{E}$  (3-9), se hizo notar que todo conjunto de puntos sobre el espacio  $\mathfrak{E}$  definidos por una distancia a una distribución de campo óptima menor que una dada forman un conjunto convexo sobre todo el espacio  $\mathfrak{E}$ . Esta característica puede servir para la definición de todo un conjunto de algoritmos iterativos que convergen hacia la solución, en virtud de la definición topológica de *conjunto convexo* y del *teorema global de la convergencia, TGC* [105]. Según éste si se define una cierta operación de iteración  $\mathfrak{S}\{\circ\}$  y se tiene en cuenta –como se ha demostrado– que sólo hay una solución  $f_{opt}$  al problema inverso, entonces la sucesión  $\{f_k\}_{k=0}^{\infty} / f_{k+1} \in \mathfrak{S}\{f_k\}$  converge a la deseada solución si:

- 4) Todos los puntos  $f_k$  están contenidos en un conjunto compacto incluido en  $f$ ,
- 5) Existe además una función continua  $Z\{\circ\}$  en  $f$  tal que:
  - a) si  $f \neq f_{opt}$  entonces:  $Z\{f'\} < Z\{f\} \quad \forall f' \in \mathfrak{S}\{f\}$
  - b) si  $f = f_{opt}$  entonces:  $Z\{f'\} = Z\{f\} \quad \forall f' \in \mathfrak{S}\{f\}$
- 6) Y por último, la transformación  $\mathfrak{S}$  es cerrada en los puntos exteriores a la solución.

Evidentemente, en nuestro caso podemos hacer que esa función  $Z\{\circ\}$  sea precisamente la distancia  $d\{\circ\}$  antes definida. Con lo cual la convergencia estará absolutamente a expensas de la definición de la aplicación de iteración  $\mathfrak{S}\{\circ\}$ . Que, naturalmente, habrá de garantizar que  $d\{\mathfrak{S}\{f\}\} < d\{f\}$  si  $f$  no es solución y  $d\{\mathfrak{S}\{f\}\} = d\{f\}$  cuando  $f$  sea solución. Si por otra parte fundamos las operaciones de iteración en aplicaciones lineales e imposición de las condiciones únicas entonces las condiciones (1) y (2) del TGC se verificarán automáticamente (no aparecerán dominios inconexos y la frontera de un dominio objeto se traducirá en la frontera del dominio imagen obtenido por la aplicación).

Teniendo en cuenta que, de acuerdo a las condiciones de convergencia, la transformación  $\mathfrak{S}\{f\}$  de un conjunto convexo cualquiera de distribuciones de fuentes  $f$ , es también convexo, entonces puede establecerse toda una familia de algoritmos iterativos basados en la definición de convexidad topológica. Es decir, dadas dos distribuciones  $f_1$  y  $f_2$  del conjunto convexo, la distribución definida como  $\lambda f_1 + (1-\lambda) f_2$  también pertenece a ese conjunto, siempre que  $\lambda$  se encuentre comprendido entre 0 y 1 ( $0 \leq \lambda \leq 1$ ) [29; 105; 106].

Así pues, partiendo de una hipótesis inicial de distribución de corriente,  $f^{(0)}$ , el conjunto de distribuciones obtenidas a partir de la aplicación reiterada de la operación  $\mathfrak{S}\{\circ\}$  formará un subconjunto convexo y por tanto el proceso iterativo definido por la ecuación de iteración:

$$\begin{aligned} \underline{f}_{k+1} &= \lambda \cdot \mathfrak{S}\{\underline{f}_k\} + (1-\lambda) \underline{f}_k \\ &= \underline{f}_k + \lambda \cdot \left\{ \mathfrak{S}\{\underline{f}_k\} - \underline{f}_k \right\} \end{aligned} \tag{3-27}$$

convergerá hacia la solución única para valores de  $\lambda$  comprendidos entre 0 y 1,  $0 < \lambda \leq 1$ .<sup>5</sup>

Si solamente existe un punto en el cual se verifiquen las restricciones impuestas en la operación de iteración  $\mathfrak{S}\{\circ\}$ , es decir que  $\underline{f}_m = \mathfrak{S}\{\underline{f}_m\}$ , entonces:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \underline{f}_k = \underline{f}_m + \lambda \cdot \{\underline{f}_m - \underline{f}_m\} = \underline{f}_m \quad (3-28)$$

Así, las condiciones matemáticas que pueden garantizar la convexidad del subconjunto definido por la operación  $\mathfrak{S}\{\circ\}$  y, en consecuencia, la convergencia del algoritmo (3-27) deberán abarcar el conjunto de condiciones físicas que sólo pueden ser satisfechas por una solución. De hecho, antes se ha visto que sólo existe una distribución de fuentes sobre todo el espacio  $\mathfrak{E}$  cuyo campo engendrado se encuentre a una mínima distancia del medido<sup>6</sup>. Por tanto, cualquier aplicación  $\mathfrak{S}\{\circ\}$  que trate de imponer al conjunto de dipolos de Hertz que el campo que éstos engendren sea lo más parecido posible al observado irá reduciendo la distancia hacia esa solución única.<sup>7</sup> Si bien no se repara explícitamente en ello el extenso estudio de Schaffer sobre algoritmos iterativos [143] y su propuesta general de algoritmo convergente (definido en términos análogos a 3-27) depende, en última instancia de la definición de conjuntos matemáticos convergentes. Así, la inclusión de condiciones adicionales para mejorar la convergencia consisten precisamente en la incorporación de restricciones que aumente las garantías de unicidad, haciendo que el conjunto de los resultados de cada iteración sea convexo.

### 3.2.2 Observación plana cercana y observación lejana

Para cierto tipo de radiadores, de elevado tamaño eléctrico, como es el caso de los grandes radiotelescopios, ya no sólo la operación inversa (3-17) sino incluso la operación directa  $\underline{I} \cdot \underline{f}$  puede llegar a ser un problema que puede, no obstante, abordarse cómodamente cuando la geometría de la superficie de las fuentes es plana y el dominio de observación igualmente plano (paralelo al de las fuentes) en la zona de Fresnel, o bien se trata de una observación lejana. Para tales geometrías el

<sup>5</sup> Nótese que para  $\lambda=1$  se obtendría una ecuación de iteración como la (3-1), sin embargo, para  $\lambda=0$  (que de hecho se ha excluido), el proceso iterativo se estancaría obviamente en su punto de partida.

<sup>6</sup> Según el *teorema de unicidad* (§2.2) la determinación del campo complejo tangencial sobre un dominio de observación que circunscriba las fuentes es sólo compatible con una solución.

<sup>7</sup> En el extenso estudio de Schaffer sobre algoritmos iterativos [143], si bien no se repara explícitamente en ello, su propuesta general de algoritmo convergente (definido en términos análogos a 3-27) depende, en última instancia de la definición de conjuntos matemáticos convergentes. Así, la inclusión de condiciones adicionales para mejorar la convergencia consisten precisamente en la incorporación de restricciones que aumente las garantías de unicidad, haciendo que el conjunto de los resultados de cada iteración sea convexo.

recurso de las transformadas discretas de Fourier (especialmente las transformadas rápidas) minimizan considerablemente el coste numérico en perjuicio de la flexibilidad sobre los dominios de fuentes y observación aplicables. No obstante, la utilización de procedimientos numéricos como las Transformadas de Hankel Quasirápidas [147], han permitido la extensión de estos métodos a geometrías cilíndricas y esféricas a partir de sus respectivas formulaciones modales (§2.3.5).

El uso de las transformadas discretas de Fourier para la solución del problema inverso en geometrías planas se encuentra frecuentemente en la literatura. Por ejemplo, en óptica y microscopía electrónica las elevadas frecuencias de radiación hacen que los campos en las zonas de interés estén relacionados mediante transformadas de Fourier (ya que la distancia eléctrica entre éstas es elevada), razón que explica que sea en esta disciplina donde se encuentren las contribuciones más tempranas en el uso de las transformadas discretas, especialmente desde los años 70. Saxton [142] expone exhaustivamente las técnicas desarrolladas en estos dos ámbitos, así como referencias a las primeras y más importantes aportaciones. Yaghjian [168] hace una amplia relación de contribuciones tempranas aplicadas a medidas en campo cercano. Finalmente aplicado a la reconstrucción de fuentes electromagnéticas sobre antenas, puede también encontrarse un gran número de propuestas en las que se recurre de una u otra manera a los dominios transformados: Morris [118; 119]; Ramat-Samii [132]; Anderson [7; 8]; Bucci [19]; Toland [158]; James [79]; Yaccarino [166]; Isernia [76]; Blanch [16]; Leone [103]; Las Heras [98], etc.

En general, las relaciones directas entre el campo y las fuentes transformadas en la observación de radiadores planos (ya sea sobre dominios planos próximos o esféricos lejanos) hacen que la relación inversa sea inmediata, como pudo observarse en §2.3.5 y §2.4.4.1. Esta manera particular de resolver el problema inverso, no es absolutamente diferente a la solución única encontrada en (3-17) en términos del operador directo  $\mathcal{T}$ . La manera regular en que este operador muestrea la función de Green (cuando los dominios de fuente y de campo tienen las mismas coordenadas superficiales) nos permite transformar los dominios espaciales en dominios discretos de Fourier de modo que la matriz transformada se convierte en una matriz diagonal, cuya inversión es trivial. Sin embargo, sólo cuando el ángulo de observación es lo suficientemente extenso el principio de unicidad nos garantiza una buena reconstrucción de la distribución de corrientes.

Para el caso de una **observación plana** en las proximidades del sistema radiante (zona de *Fresnel*):

$$\underline{\tilde{E}} = \underline{\tilde{\Psi}}_o \cdot \underline{\tilde{f}} \quad \Rightarrow \quad \underline{f} = DFT^{-1} \left\{ \begin{array}{c} \underline{\tilde{E}} \\ \underline{\tilde{\Psi}}_o \end{array} \right\} \quad (3-29)$$

Donde puede apreciarse que la frecuencia espacial de la distribución de fuentes reconstruida se encontrará limitada por la de la distribución de campo. Pero aquí nos surge una dificultad fundamental: como hemos visto en §2.4.1 la frecuencia espacial de la distribución de campo depende esencialmente del tamaño eléctrico de las fuentes. Sin embargo, por ser limitado en su

ancho de banda espacial, su extensión sobre el plano será ilimitada y, en consecuencia, cualquier observación real –obviamente limitada en extensión– representará un truncamiento de la distribución real, cuyo ancho de banda no es estrictamente finito. Esto da un carácter aproximado a cualquier solución de problemas planos, que se acercará tanto mejor a la realidad cuanto menor sea la energía de la distribución de campo truncada. No obstante, para que la relación anterior (3-29) tenga validez, entre los dominios de fuente y observación ha de existir una relación de translación, con lo cual, al aumentar la extensión de la observación aumentará a la vez el número de fuentes y con ello la frecuencia espacial de las distribuciones representables. Por esta razón, al expandir ambos dominios es cada vez más necesario incluir ciertas restricciones que nos permitan aproximarnos mejor a la realidad: sobre el dominio de fuentes podremos incluir restricciones sobre su extensión efectiva y sobre el dominio de campo restricciones sobre su ancho de banda.

En el caso de la **observación** sea **lejana** (en zona de Fraunhofer) –aplicando en (2-50) el equivalente conductor eléctrico para la superficie de las fuentes–:

$$\underline{\mathbf{E}} = [\mathbf{T}_{CL}]_{2 \times 2} \cdot \underline{\tilde{\mathbf{M}}} \quad \Rightarrow \quad \underline{\mathbf{M}} = [\mathbf{T}_{CL}]_{2 \times 2}^{-1} DFT^{-1} \{ \underline{\mathbf{E}} \} \quad (3-30)$$

Donde las transformadas son unidimensionales cuando pueden así considerarse los dominios de las fuentes y de observación; pero cuando estos son planos las transformadas serán bidimensionales – para cuya definición puede extenderse la expresión 2-39 a las transformadas discretas–, de modo que  $\underline{\mathbf{E}}$ ,  $\underline{\mathbf{y}}$ ,  $\underline{\mathbf{f}}$  y  $\underline{\mathbf{M}}$  se manipulan comúnmente como matrices cuyos elementos corresponden a los puntos de la retícula plana. Téngase en cuenta que la matriz de transformación  $\mathbf{T}_{CL}$  sólo afecta a las componentes vectoriales, no a las matriciales.

Reviste un cierto interés teórico el hecho de que la aplicación del equivalente conductor eléctrico (ECE) y magnético (ECM) en (3-19) conduce a dos ecuaciones prácticamente idénticas:

$$\left. \begin{array}{l} \text{E.C.E.} \rightarrow \begin{pmatrix} E_g \\ E_\varphi \end{pmatrix} = f(r) \cdot \begin{pmatrix} \cos \vartheta \cos \varphi & \cos \vartheta \sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{M}_x \\ \tilde{M}_y \end{pmatrix} \\ \text{E.C.M.} \rightarrow \begin{pmatrix} E_g \\ E_\varphi \end{pmatrix} = \eta \cdot f(r) \begin{pmatrix} \sin \varphi & \cos \varphi \\ -\cos \vartheta \cos \varphi & -\cos \vartheta \sin \varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{J}_x \\ \tilde{J}_y \end{pmatrix} \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{\mathbf{M}} = \eta \cdot (\underline{\mathbf{J}} \times \hat{\mathbf{z}}) \quad (3-31a)$$

Es decir, si solamente contamos con la información de campo lejano, entonces las corrientes que generan dicha distribución cumplen la relación de equivalencia (3-31), lo cual no implica que esa distribución de corrientes engendre en todo el espacio una distribución de campos idéntica a la de la verdadera relación de corrientes sobre la superficie que engloba las fuentes. En definitiva, en campo lejano –que estrictamente se trata de una distribución ideal a la que se tiende asintóticamente– se ha producido una pérdida de información que limita la capacidad del proceso inverso. Desde el punto de vista numérico habrá en efecto un momento –que dependerá de la precisión utilizada– a

partir del cual no pueda distinguirse entre las distribuciones equivalentes de corriente eléctrica y magnética.

Si en el caso de *observación plana cercana* aplicamos alternativamente los principios de equivalencia, como hemos hecho para observación lejana usando (2-30), (2-33) es fácil demostrar que entre las corrientes eléctricas y magnéticas existe una relación funcional:

$$\underline{\underline{\tilde{\mathbf{M}}}} = \frac{\underline{\underline{\tilde{\mathbf{G}}_J}}}{\underline{\underline{\tilde{\mathbf{G}}_M}}} \tilde{\mathbf{J}} = \frac{1}{\tilde{\mathbf{G}}_{M,xy}} \begin{bmatrix} -\tilde{\mathbf{G}}_{J,xy} & -\tilde{\mathbf{G}}_{J,yz} \\ \tilde{\mathbf{G}}_{J,xx} & \tilde{\mathbf{G}}_{J,zy} \end{bmatrix} \cdot \tilde{\mathbf{J}} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{M}} = \eta \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \tilde{\mathbf{J}} = \eta \cdot (\tilde{\mathbf{J}} \times \mathbf{z}) \quad (3-31b)$$

Donde puede verse que la relación diádica existente entre ambas distribuciones de campo al aumentar la distancia tiende a convertirse en una relación vectorial simple e idéntica a la de la relación (3-31a).

En lo que respecta al *coste operacional* resulta evidente que si hacemos coincidir el número de muestras con una potencia de 2, estos procedimientos presentarán un mayor atractivo operativo – tanto en (3-29) como en (3-30)–, al poder calcular las transformadas discretas por medio de transformadas rápidas de Fourier (FFT).

### 3.2.3 Observación incompleta

Si en lugar de hablar de medidas reales nos contentáramos con hacerlo de unas utópicas en las que el ruido fuera despreciable y el ángulo de observación completo, entonces, podríamos concluir diciendo que la separación entre muestras que minimizan la complejidad del problema es  $\lambda/(2\chi)$  –donde  $\chi$  puede determinarse como se indica en §2.4.3–. Sin embargo, lo normal es tener que lidiar con el ruido y que no gocemos de un ángulo de observación tan amplio como pudiéramos desear. En estas circunstancias –¡tan habituales!– se hace menester recurrir a toda la información adicional de que se disponga para eliminar aquello que no corresponda a las distribuciones de campo generadas por una determinada clase de radiadores y reconstruir el campo en las zonas no medidas.

La incorporación de esta información adicional puede hacerse por medio de un procedimiento iterativo como se indicó en §3.1 (figura 3-1). Cuando realizamos la proyección sobre el espacio  $\tilde{\mathcal{E}}$ , estamos en realidad eliminando todas las componentes que no pertenezcan a dicho espacio y así haciendo que las distribuciones cumplan las restricciones sobre el ancho de banda mencionadas en el capítulo 2 y aun otras más estrictas, ya que como es obvio no todas las distribuciones con ancho de banda igual o inferior al del campo son distribuciones de campo válidas. De hecho, mientras que

las primeras pueden considerarse de dimensión infinita<sup>8</sup>, las segundas –como se demostró en el capítulo 2– son de dimensión finita. Sin embargo, cuando usamos las atractivas relaciones de Fourier entre las distribuciones planas de fuentes y campos –(3-29) y (3-30)– ya no estamos realizando la proyección sobre el espacio  $\tilde{\mathcal{E}}$ , en el que está representado de forma mínima todas las distribuciones de campo engendrables por cualquier conjunto acotado de fuentes. En estos casos, debemos entonces recurrir a otras propiedades conocidas de las distribuciones sobre los dominios de observación y de fuentes. Esas propiedades podemos obtenerlas a partir de cualquier conocimiento a priori sobre los dos dominios, pero generalmente se reducen a la limitación espacial sobre el dominio de las fuentes y a la limitación frecuencial sobre el de observación.

Normalmente se conoce la superficie sobre la que se extienden las fuentes y así la parte del dominio plano en que éstas pueden considerarse nulas. A esta restricción –muy usada en diversas disciplinas [143; 45; 46; 47; 61; 62; 70]– se la denomina *soporte finito*. Para una limitación del *ancho de banda* espacial, independiente del tamaño del radiador, puede usarse el teorema 1 de muestreo y para una máxima limitación frecuencial en el dominio de observación puede recurrirse al teorema 3 (§2.4.1). Si bien desde el punto de vista operativo puede desearse una mínima cantidad de puntos de muestreo, la utilización de un sobremuestreo –al margen de los beneficios frente al aliasing– junto con la imposición de la limitación espectral, como demuestra Schaffer [143], mejora los resultados obtenidos. Así pues las restricciones impuestas a las fuentes y al campo observado pueden expresarse como:

$$\underline{f}_{k+1} = \mathcal{R}_f \{ \underline{f}_k \} = \begin{cases} \underline{f}_k(\mathbf{r}) & \mathbf{r} \in S' \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \quad \underline{\tilde{E}}_{k+1} = \mathcal{R}_E \{ \underline{\tilde{E}}_k \} = \begin{cases} \underline{\tilde{E}}_k & \beta_x^2 + \beta_y^2 \leq \beta^2 / \delta \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \quad (3-32)$$

En general, el uso de estas restricciones es necesario siempre que se utilicen las relaciones de Fourier entre los dominios de las fuentes y del campo (con independencia de la extensión de las observación), de lo contrario el ruido agregado en las medidas de campo puede arruinar el proceso inverso.

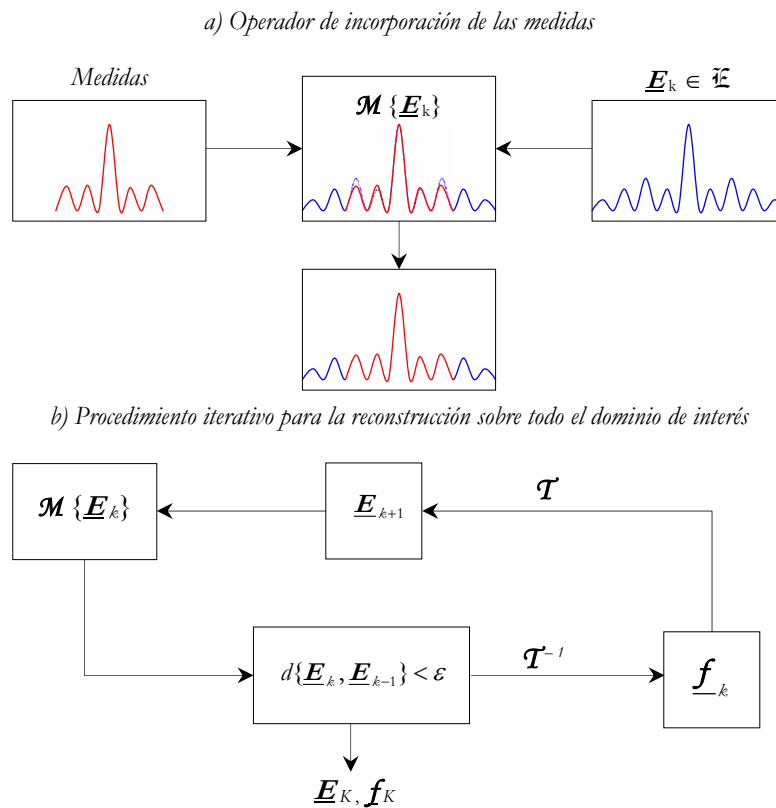
En lo que respecta a la incorporación de las medidas del campo electromagnético, cuando sólo se dispone de un ángulo de observación inferior al de interés, el operador que simboliza dicha operación,  $\mathcal{M}$  puede representarse como:

$$\underline{E}_{k+1} = \mathcal{M} \{ \underline{E}_k \} = \begin{cases} \underline{E}_{\text{medido}}(\mathbf{r}) & \mathbf{r} \in \mathcal{D}_m \\ \underline{E}_k(\mathbf{r}) & \mathbf{r} \notin \mathcal{D}_m \end{cases} \quad (3-33)$$

---

<sup>8</sup> Sólo si se consideran dominios de observación de área ilimitada. Cuando se utilizan dominios de área acotada, el conjunto de funciones de distribución limitadas en banda sobre dicho dominio –como demostró Shannon [146]– es de dimensión finita.

Donde  $\mathcal{D}_m$  representa el dominio de medida, y el *resto* corresponde a la parte del dominio de interés no cubierto por las medidas (la figura 3-2a ilustra gráficamente esta operación).



**Figura 3-2.** Procedimiento iterativo para la aplicación de medidas sobre parte del dominio de interés.

Podríamos, llegados a este punto, preguntarnos si la incorporación de las mencionadas restricciones –siendo beneficiosas cuando pueden usarse las relaciones de Fourier– aportan o no beneficios al proceso inverso cuando se está aplicando la proyección sobre el espacio  $\mathcal{X}$  (§3.2). Es evidente que la restricción de soporte finito se incorpora implícitamente al limitar el dominio de las fuentes, sobre el que se sitúan los dipolos equivalentes de Hertz, a aquel sobre el que sabemos que se extienden. Y en lo que respecta a la restricción de ancho de banda, como ya se señaló, aparece de forma natural al realizar la proyección, que puede interpretarse como un filtrado óptimo sobre el espacio de las distribuciones de campo válidas. Se hace así patente que la incorporación de tales restricciones resultaría superflua cuando se recurre al procedimiento de proyección, ya que éste es de hecho más restrictivo. Por tanto, en este caso el procedimiento iterativo, que permitiría la reconstrucción paulatina de la distribución de campo sobre el dominio completo de interés, podría obtenerse como particularización del procedimiento genérico de la figura 3-1, prescindiendo de las restricciones sobre el campo y las fuentes<sup>9</sup>.

<sup>9</sup> En algunos casos la utilización de una distribución plana extensa facilita la complejidad del problema directo –e indirectamente el inverso– al permitir el uso de la teoría de imágenes. Cuando eso ocurre, entonces la

### 3.2.3.1 Observación incompleta sobre dominios planos o lejanos

Cuando se trabaja con dominios planos o en campo lejano, entonces la relación entre fuentes y campos puede establecerse por medio de transformadas, en cuyo caso la utilización de las restricciones es de capital importancia –como se indicó en §3.2.2 y se observará en el capítulo de validación–. Las figuras 3-3 y 3-4 (en las que se simbolizan con  $\mathcal{F}$  la transformada discreta oportuna al dominio de observación) representan el procedimiento equivalente al de la figura 3-2 para los casos de dominios planos en zona de Fresnel y en observación lejana respectivamente. El algoritmo de ampliación del dominio se hace aquí formalmente equivalente al propuesto por Gerchberg, Papoulis y otros [70, §1.2] que según demostraron la sucesión de distancias entre distribuciones consecutivas  $\{d_n\}$  es monótonamente decreciente. Por otra parte, de acuerdo a los resultados demostrados por Schaffer [143], cuando haya una sola distribución de campo y de fuentes que satisfagan simultáneamente las restricciones y las medidas, entonces puede decirse que estos procedimientos son consistentes y tienden hacia dicha solución. Este es el caso, en virtud del teorema de unicidad, de que el ángulo de observación sea lo suficientemente amplio y de que sean posibles las medidas de campo complejo.

Cuando se utilizan medidas planas y cercanas, entonces la ecuación básica de iteración (3-1) representa matemáticamente el proceso recursivo de la figura 3-3, desde el punto de vista del campo o de las fuentes respectivamente:

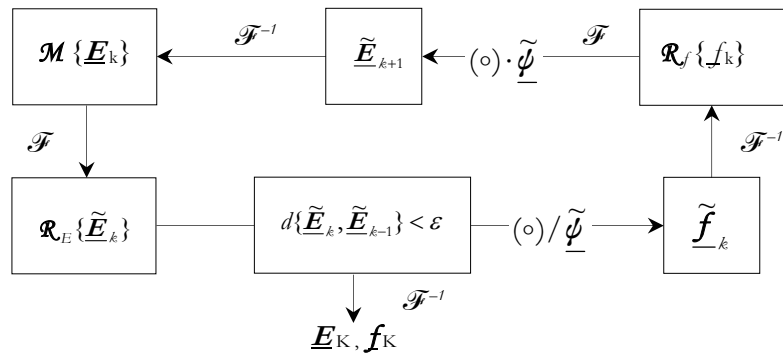
$$\underline{E}_n = \mathfrak{S}\{\underline{E}_{n-1}\} = DFT^{-1} \left\{ DFT \left\{ \mathcal{R}_f \left\{ DFT^{-1} \left\{ \frac{\mathcal{R}_E \{ DFT \{ \mathcal{M} \{ \underline{E}_{n-1} \} \} \}}{\tilde{\psi}} \right\} \right\} \right\} \right\} \cdot \tilde{\psi} \right\} \quad (3-34)$$

$$\underline{f}_n = \mathfrak{S}\{\underline{f}_{n-1}\} = DFT \left\{ \mathcal{R}_f \left\{ DFT^{-1} \left\{ \frac{\mathcal{R}_E \{ DFT \{ \mathcal{M} \{ DFT^{-1} \{ \underline{f}_{n-1} \cdot \tilde{\psi} \} \} \}}{\tilde{\psi}} \right\} \right\} \right\} \right\} \quad (3-35)$$

---

incorporación de la restricción de soporte finito es beneficiosa también cuando se usa el procedimiento de proyección sobre el espacio  $\mathfrak{E}$ .



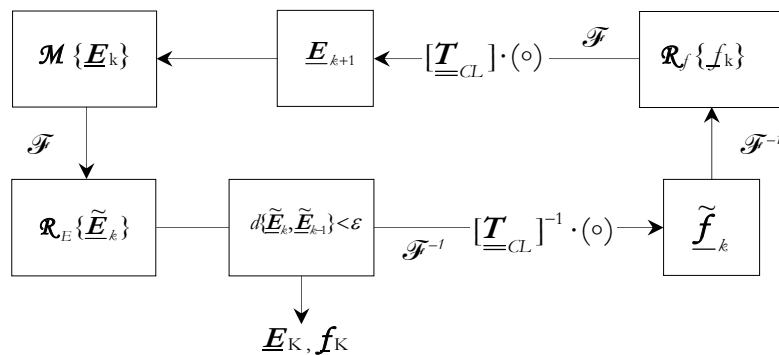


**Figura 3-3.** Procedimiento iterativo para la aplicación de información adicional en dominios planos para una observación cercana (zona de Fresnel).

Cuando lo que se utilizan son medidas lejanas y se reconstruye sobre una superficie plana, entonces la ecuación de iteración del proceso recursivo representado en la figura 3-4 se expresa, desde el punto de vista del campo o las fuentes, como:

$$\underline{E}_n = \mathfrak{S}\{\underline{E}_{n-1}\} = [\underline{T}_{CL}] \cdot DFT \left\{ \mathcal{R}_f \left\{ DFT^{-1} \left\{ [\underline{T}_{CL}]^{-1} \cdot DFT^{-1} \left\{ \mathcal{R}_E \left\{ DFT \left\{ \mathcal{M} \left\{ \underline{E}_{n-1} \right\} \right\} \right\} \right\} \right\} \right\} \right\} \quad (3-36)$$

$$\underline{f}_n = \mathfrak{S}\{\underline{f}_{n-1}\} = \mathcal{R}_f \left\{ DFT^{-1} \left\{ [\underline{T}_{CL}]^{-1} \cdot DFT^{-1} \left\{ \mathcal{R}_E \left\{ DFT \left\{ \mathcal{M} \left\{ [\underline{T}_{CL}] \cdot DFT \left\{ \underline{f}_{n-1} \right\} \right\} \right\} \right\} \right\} \right\} \right\} \quad (3-37)$$



**Figura 3-4.** Procedimiento iterativo para la aplicación de información adicional para reconstrucción sobre dominios planos y observación lejana (zona de Fraunhofer).

Si bien en los esquemas de las figuras 3-2 a 3-4 podría echarse en falta un punto de partida, la ausencia es deliberada, ya que en la práctica –cuando el algoritmo es absolutamente convergente– poco importa el punto de partida y puede empezarse con una hipótesis arbitraria tanto sobre las fuentes como sobre los campos (por ejemplo una distribución homogénea sobre cualquiera de los dos dominios). Finalmente puede aún definirse, en caso de que la información sea suficiente para garantizar la convexidad de las distribuciones respecto a las medidas, toda una familia de algoritmos iterativos como se hacía en §3.2.1.3.c por medio de la ecuación de iteración (3-27) usando ahora los operadores de iteración  $\mathfrak{S}\{\circ\}$  definidos en 3-35 y 3-37.

### 3.3 PROBLEMA INVERSO SIN FASE

Como se dijo al principio es muy usual que en ciertas condiciones experimentales sólo nos resulte accesible el conocimiento del módulo del campo. Es evidente que en tales circunstancias el teorema de unicidad (§2.2) no nos garantiza que la utilización exclusiva de esta información sea suficiente para poder conocer el campo en otras zonas del espacio. Con mayor motivo tampoco podríamos estar seguros de poder reconstruir una distribución de corrientes equivalentes que pueda engendrar el mismo campo que el de las fuentes originales. En principio, si dejamos volar la imaginación podría llegar incluso a parecernos verosímil que a esa distribución de módulo del campo le correspondiera una distribución arbitraria de su fase. Esto supondría que el problema electromagnético inverso a partir del módulo admitiría un conjunto ilimitado de soluciones. Aunque claramente, se trataría de un imaginar irresponsable, porque la *extensibilidad analítica* de las funciones de onda establece una solidaridad interna entre sus partes real e imaginaria, y en consecuencia entre su módulo y fase. No obstante, el criterio de distribución analítica puede aún no ser suficiente para garantizarnos que sólo haya una distribución de fase compatible con la de módulo (al margen de la diferencia inesencial de una constante de fase), pero en cualquier caso parece ahora más responsablemente verosímil que pueda establecerse una relación de dispersión entre el módulo y la fase que limite nuestra ambigüedad.

Cuando el dominio de observación está lo suficientemente alejado las distribuciones de campo, como se ha visto en §2.3.5, están relacionados con las distribuciones de corriente sobre el dominio de las fuentes por medio de transformadas de Fourier. En este caso el conocido *teorema de Paley-Wiener* [129] nos ofrece una garantía esencial acerca de las distribuciones en el dominio de observación, ya que cuando la distribución de corrientes tiene un “soporte finito”, como es el caso<sup>10</sup>, “su transformada de Fourier se puede extender en una función analítica entera”<sup>11</sup>. En consecuencia, las partes real e imaginaria de dicha distribución deberán estar ligadas por medio de las condiciones de Cauchy-Riemann, y lo que es más, puede establecerse una relación de dispersión que asocia mediante la transformada de Hilbert las partes real e imaginaria de forma más directa [64]:

---

<sup>10</sup> Característica que, por otra parte, pone límites a la extensibilidad analítica de las distribuciones de corriente [30, §19].

<sup>11</sup> Podría también añadirse, a merced del teorema de Titchmarsh [157], que una distribución causal es suficiente para garantizar la extensibilidad analítica de su transformada. Teniendo en cuenta que el origen de coordenadas siempre puede desplazarse arbitrariamente, bastará, por tanto, para garantizar la extensibilidad analítica de la distribución de campo que las corrientes estén limitadas por un solo lado.

$$\operatorname{Re}\{E(x)\} = -\mathcal{H}\{\operatorname{Im}\{E(x)\}\} = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Im}\{E(x')\}}{x-x'} dx' \quad (3-38)$$

Si, por otra parte, consideramos no sólo las distribuciones sobre dominios lejanos sino, en general, sobre cualquier otro relativamente separado de las fuentes, es decir, sobre un dominio exento de singularidades, entonces las propiedades de las funciones de Green nos permiten llegar a conclusiones análogas. Para ello basta recordar que las funciones de Green fuera de las singularidades son funciones armónicas ([30, §63; 84, §31])<sup>12</sup>, y por tanto extensibles a funciones *enteras* sobre la prolongación compleja de los dominios de observación en un espacio  $\mathbb{C}^2$ . De esta forma, a tenor de la extensibilidad analítica de las funciones armónicas, pueden ahora generalizarse las relaciones entre las partes real e imaginaria de las distribuciones de campo sobre cualquier dominio de observación, antes referidas para los dominios de observación lejanos.

No obstante, si bien esta relación de dispersión (3-36) puede llegar a tranquilizarnos acerca de la coherencia interna de los valores complejos de la distribución y, en definitiva, de la reducción de la ambigüedad cuando sólo se cuenta con una parte de sus valores complejos, en realidad no pone en nuestras manos una pauta práctica para colegir la información que nos falta. Por limitaciones tecnológicas obvias no se da el caso de conocer las partes real o imaginaria de las distribuciones de campo, sobre las cuales se podría aplicar directamente la relación de dispersión (3-36), sino que cuando aparecen dificultades para obtener la distribución compleja lo que, naturalmente, se consigue es su módulo. En estas condiciones podría intentarse extender la relación de dispersión a la distribución logarítmica del campo, con lo que, al fin, quedarían ligados los valores de módulo y fase,  $\ln\{\mathbf{E}(\mathbf{r})\} = \ln\{|\mathbf{E}(\mathbf{r})|\} + j\varphi\{\mathbf{E}(\mathbf{r})\}$ . Si esta distribución admitiese una extensibilidad analítica [64] podemos ahora aplicar la relación (3-38):

$$\begin{aligned} \ln\{|\mathbf{E}(\mathbf{r})|\} &= -\mathcal{H}\{\varphi[\mathbf{E}(\mathbf{r})]\} \\ \varphi[\mathbf{E}(\mathbf{r})] &= \mathcal{H}\{|\mathbf{E}(\mathbf{r})|\} \end{aligned} \quad (3-39)$$

Sin embargo, topamos aquí con una limitación esencial: la singularidad de la función logarítmica en los ceros de la distribución de campo sobre el eje real. Es evidente, que bajo estas condiciones no podemos definir la transformada de Hilbert, y en consecuencia, la relación de dispersión (3-39) no puede sacarnos del atolladero. Debemos pues, buscar otra manera para estudiar si la distribución del valor absoluto del campo tiene o no solución única. Para ello consideraremos primero distribuciones de campo lejano sobre dominios unidimensionales, y una vez alcanzada una

---

<sup>12</sup> Nótese que la definición de funciones armónicas en términos de la ecuación de Laplace puede aquí extenderse de forma directa, como propusieron Minkowski y Sommerfeld, considerando el tiempo como una variable más entre las espaciales. De esta forma la ecuación de Helmholtz se convierte en una de Laplace generalizada [151, §1.19; 161, §28.3].

conclusión sólida de este problema particular, procuraremos extender los resultados a dominios superficiales y a distancias próximas.

El objetivo consiste pues en descubrir el conjunto de condiciones que son necesarios para poder asegurar la unicidad de solución. Condiciones que pueden ser de dos tipos: 1) ¿Qué propiedades deben cumplir las distribuciones?; 2) ¿Qué cantidad de información debe recabarse?. La búsqueda de ambos tipos de condiciones se abordará desde la factorización de las extensiones analíticas de las distribuciones de campo. Los procedimientos que procuren alcanzar dicha solución, §3.4, estarán evidentemente vinculados a los criterios de unicidad.

### 3.3.1 Unicidad de solución

Según se ha argumentado anteriormente la distribución de campo puede extenderse en una distribución analítica sin más que considerando la finitud del soporte de las fuentes. Consideremos, por simplicidad: que el dominio de observación es circular y lejano; que las fuentes se reparten sobre un dominio lineal y compacto, siendo además unidireccionales y de un único tipo (por ejemplo, corrientes magnéticas). Entonces, a partir de (2-50) es evidente que el campo sobre el dominio de observación será unidireccional y estará directamente ligado con la transformada de Fourier de la distribución de fuentes. Particularizando (2-50):

$$E(u) = k \cdot \int_a^b f(x) e^{-j\beta x} dx = k\lambda \cdot \int_{a'}^{b'} f(x') e^{-j2\pi x'} dx' = \int_{a'}^{b'} f_n(x') e^{-j2\pi x'} dx' = \quad (3-40)$$

$$= \mathcal{F}_u \{f_n(x)\} \left/ \begin{array}{l} k \in \mathfrak{C}; u = \sin \mathcal{G} \Rightarrow u \in [-1,1] \\ a' = a/\lambda; b' = b/\lambda \end{array} \right.$$

Suponiendo de antemano que la distribución de fuentes y las dimensiones del soporte,  $a$  y  $b$ , están normalizadas, la notación se simplifica en adelante:  $\left. \begin{array}{l} \text{Suponiendo de antemano que la} \\ \text{distribución de fuentes y las dimensiones} \\ \text{del soporte, } a \text{ y } b, \text{ están normalizadas, la} \\ \text{notación se simplifica en adelante:} \end{array} \right\} E(u) = E(\sin \mathcal{G}) = \tilde{f} = \int_a^b f(x) \cdot e^{-j2\pi \cdot u \cdot x} dx$

Donde  $[a,b]$  es aquí el soporte finito de las fuentes. La distribución  $E(u)$ ,  $u \in \mathfrak{R}$ , en virtud del mencionado teorema de Paley y Wiener, se puede extender en una distribución analítica  $E(z)$ ,  $z \in \mathfrak{C}$ , cuyo comportamiento asintótico es exponencial y de orden uno,  $E(z) \rightarrow O\{e^{b|z|}\}$ . Por tanto, aunque la extensión analítica de la distribución no sea un polinomio finito, puede asegurarse que sea trascendental [153], es decir, que aún teniendo una cantidad ilimitada de ceros, en cualquier disco acotado,  $|z| < r$ , sólo puede haber un número finito de ellos. Es además evidente, según (3-40) que la distribución de campo es de ancho de banda finito e igual a  $|b-a|$  (que es lo que de hecho predice el teorema 3 de muestreo §2.4.1).

Si pretendiéramos apoyar la unicidad de solución exclusivamente en la analiticidad de las distribuciones de campo, nos topáramos con una ambigüedad elemental que fue señalada

primeramente por Akutowicz en 1956 [2; 3] y luego con más detalle por Walter [160] y que consiste en la posibilidad de ubicar arbitrariamente los ceros de la función analítica en posiciones simétricas respecto al eje real, ya en la parte superior o en la inferior. El fundamento de esta ambigüedad radica en dos propiedades elementales de las funciones enteras:

- a) si  $z_k$  es uno de los ceros de  $E(z)$ , entonces la distribución  $E(z) \cdot (z - z_k^*) / (z - z_k)$  es también entera<sup>13</sup>;
- b) el módulo de una distribución entera sobre el eje real, según el lema 4.4 de Titchmarsh [157], puede determinarse como el producto del módulo de los binomios definidos por sus ceros:

$$|E(u)| = |E(0)| \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \left| 1 - \frac{u}{z_k} \right| = |E(0)| \cdot \prod_{\{k_1\}} \left| 1 - \frac{u}{z_k} \right| \cdot \prod_{\{k_2\}} \left| 1 - \frac{u}{z_k^*} \right| \quad \left\{ \begin{array}{l} \{k_1\} \cap \{k_2\} = \emptyset \\ \{k_1\} \cup \{k_2\} = [1, \infty] \end{array} \right. \quad (3-41)$$

Esto supone que, si  $E(z)$  es la extensión analítica de la verdadera distribución de campo, entonces:

$$E_1(z) = E(z) \cdot \prod_{\{k\}} \left\{ \frac{z - z_k^*}{z - z_k} \right\} = E(z) \cdot \prod_{\{k\}} B_k(z) \quad \text{donde} \quad \left\{ \begin{array}{l} \{k\} \text{ conjunto arbitrario de ceros} \\ B_k(z) \text{ factores de Blaschke} \end{array} \right. \quad (3-42)$$

es otra función entera, cuyo ancho de banda es además finito e igual al de  $E(z)$  [160; 153]. Por tanto, si nos fijamos exclusivamente en el módulo de la función de campo, en su ancho de banda y su extensibilidad analítica, entonces el problema inverso nos dejaría una ambigüedad que dependería del número *relevante* de *ceros*<sup>14</sup>,  $N$ . Puesto que la duda reside en situar cada uno de los ceros arriba o abajo del eje real, la ambigüedad que plantea el problema de Walther es de orden  $2^N$ . Equívoco que también puede interpretarse en términos de la distribución del cuadrado del módulo del campo:  $|E(x)|^2 = E(x) \cdot E^*(x)$ , cuya extensión analítica es  $E(z) \cdot E^*(z^*)$  y que, por tanto, tiene sus ceros simétricamente distribuidos respecto al eje real. Es evidente que si pudieran determinarse los ceros de esta última función entera, habría aún que elegir si en la deseada distribución de campo sus correspondientes ceros se encuentran por encima o por debajo del eje real, con lo que aparece nuevamente la ambigüedad de orden  $2^N$ .

<sup>13</sup> La analiticidad de esta función es trivial. De hecho, puede probarse directamente que si un conjunto de funciones cumple las condiciones de Cauchy-Riemann cualquier producto de éstas también las verifica [30, §19].

<sup>14</sup> El número “*relevante*” de *ceros* depende de la extensión del dominio de observación. Como se observará más adelante los ceros tienden a situarse asintóticamente sobre una recta paralela al eje real, distanciándose progresivamente. Entonces, de acuerdo con (3-42), los ceros demasiado alejados no tienen peso relevante sobre el módulo del campo, tendiendo su contribución a confundirse con el ruido [23; 44].

Por fortuna, Hoenders en 1975 indicó la pauta para resolver este embrollo, que naturalmente procede de poner en juego el comportamiento de la distribución de fuentes, ya que como hemos visto las consideraciones sobre la distribución de campo conducen a una aporía. Pero digo pauta, en lugar de solución, porque en realidad la conclusión que derivó Hoenders de su análisis dejó oculto un descuido que la invalida y que impide la practicidad de su correcto resultado matemático. Lamentablemente esto ha pasado inadvertido [44; 153; 6; 137; 70] y así su conclusión se ha perpetuado en beneficio de la tranquilidad teórica aunque a despecho de su practicidad. No obstante, antes de discutir este asunto buscaremos una relación de dispersión del estilo de la (3-39) que ligue el módulo y la fase de las funciones de campo, pero que a diferencia de aquella sea de validez general. Se observará que a tenor de la ubicación de los ceros de la distribución de campo, la ambigüedad es de menor orden que la sugerida por el problema de Walter [65; 44; 70].

### 3.3.1.1 Relación de dispersión entre el módulo y la fase

Si contemplamos el comportamiento asintótico de (3-40) para  $n \rightarrow \infty$  puede fácilmente demostrarse que éste tiende a:

$$E(z) \xrightarrow{z \rightarrow \infty} \frac{-1}{j2\pi z} \{f(b) \cdot e^{-j2\pi z b} - f(a) \cdot e^{-j2\pi z a}\} = \frac{-f(a) \cdot e^{-j2\pi z a}}{j2\pi z} \left\{ \frac{f(b)}{f(a)} e^{-j2\pi z(b-a)} - 1 \right\} \quad (3-43)$$

$$= k_{\epsilon} \frac{e^{-j2\pi a z}}{z} \{e^{j2\pi \gamma} \cdot e^{-j2\pi z(b-a)} - 1\} \quad / \quad k_{\epsilon} \in \mathfrak{C}$$

Con lo cual los ceros estarán asintóticamente distribuidos sobre una recta paralela al eje real<sup>15</sup>:

$$z_{k} \xrightarrow{z \rightarrow \infty} \frac{n + \gamma}{b - a} \quad / \quad \left\{ \begin{array}{l} n \in \mathbb{Z} \\ e^{j2\pi \gamma} = \frac{f(b)}{f(a)} \in \mathfrak{C} \end{array} \right. \quad (3-44)$$

Donde puede verse que si el rango de observación está limitado, el número de *ceros relevantes*,  $N$  (ver nota 14) dependerá esencialmente de la distancia a la que éstos se sitúen, que como vemos está en relación inversa a la extensión del dominio de fuentes,  $a-b$ . En definitiva,  $N$  se encuentra en relación directa con dicha extensión. Por otra parte, observamos en (3-44) que si  $\text{Im}\{\gamma\} > 0$  (para lo cual basta, según 3-44, que el módulo de la distribución de fuentes sea mayor en  $b$  que en  $a$ ), entonces el número de ceros en el semiplano inferior, SPI, es finito e ilimitado en el superior, SPS, (diríamos lo opuesto si invirtiéramos la condición anterior). Denotando a este conjunto finito de ceros sobre el SPS como:  $\{z_1, z_2, \dots, z_l\}$ , podemos construir una función auxiliar  $\Omega(z)$  cuyos ceros estén sólo situados en el semiplano superior, involucrando los oportunos factores de Blaschke:

<sup>15</sup> Este resultado es equivalente a la fórmula asintótica de Titchmarsh [157] y a la de Cartwright [26].

$$\Omega(z) = E(z) \cdot \prod_{k=1}^l \left\{ \frac{z - z_k^*}{z - z_k} \right\} \quad (3-45a)$$

No obstante, aunque  $\Omega(z)$  carezca de ceros finitos en el SPI, su comportamiento asintótico no está definido (como puede verse en 3-43). Sin embargo, la función:

$$\Xi(z) = \frac{\ln \{ \Omega(z) \cdot z \cdot e^{j2\pi u z} \}}{z - u} \quad (3-45b)$$

es analítica en todo ese área (incluido el infinito), salvo acaso en puntos discretos del eje real y con un polo en  $u$ . Por tanto, si se integra  $\Xi(z)$  sobre un contorno cerrado  $C$ , como el representado en la figura 3.4, que deje fuera todas las singularidades de  $\Xi(z)$  (con un semicírculo junto al eje real en torno a  $u$  de radio despreciable), el resultado tenderá a la mitad del residuo de  $\Xi(z)$  en  $z=u$ . [1, §5.3]. Así, según el contorno tienda a englobar todo el SPI, es decir  $R \rightarrow \infty$ , la integral puede separarse en dos partes –correspondientes al eje real y al semicírculo– que pueden definirse (usando el comportamiento asintótico de  $E(z)$  expresado en 3-43):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \text{Res}\{\Xi(z), u\} &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ \int_C \Xi(z') dz' \right\} = \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ \int_{\text{Semicírculo}} \Xi(z') dz' \right\} + \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ \int_{-R}^R \Xi(u') du' \right\} = \\ &= \int_0^{-\pi} \frac{\ln \{ f(a) / 2\pi i \}}{\text{Re}^{j\theta}} j \cdot \text{Re}^{j\theta} d\theta - P \int_{-\infty}^{\infty} \Xi(u') du' = \\ \pi i \cdot \ln \{ \Omega(u) \cdot u \cdot e^{j2\pi u u} \} &= \pi i \cdot \ln \left\{ \frac{f(a)}{2\pi i} \right\} - P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln \{ \Omega(u') \cdot u' \cdot e^{j2\pi u u'} \}}{u' - u} du' \end{aligned} \quad (3-46)$$

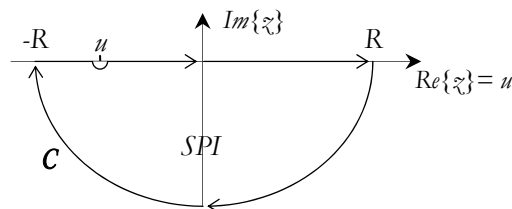


Figura 3-5. Contorno de integración para la obtención de la relación de dispersión (3-47).

Donde  $P$  denota el valor principal de Cauchy. Igualando en esta relación las partes real e imaginaria y recurriendo a (3-45) se obtiene una interesante relación de dispersión:

$$\arg \{ E(u) \} = \frac{P}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln \{ |E(u') \cdot u'| \}}{u' - u} du' + 2 \sum_{k=1}^l \arg \{ u - z_k \} + \arg \{ f(a) \} - \frac{\pi}{2} - 2\pi u u \quad (3-47)$$

Donde el primer término depende exclusivamente de la distribución del módulo del campo observado; el segundo de la posición de los ceros en el SPI; el tercero y el cuarto, por ser constantes, son inesenciales (ya que a partir del módulo del campo debe necesariamente admitirse, en la distribución de su fase, una constante arbitraria); y el último término refleja el hecho de que la

función  $E(x)$  es una función entera de orden unidad [1, p.208]. Obsérvese que de no haber dependido de una información tan sumamente inaccesible, como es la posición de los ceros en uno de los semiplanos, podríamos haber denominado a la expresión (3-47) como la *deseada* relación de dispersión. No obstante, nos permite llegar a varias conclusiones interesantes:

- 1) Si se pudiera asegurar que todos los ceros se encuentran por encima del eje real entonces la fase estaría biunívocamente determinada por su módulo (resultado al que podríamos haber llegado antes –en la discusión acerca del orden de la ambigüedad– y al que de hecho llegó Walther [160]).
- 2) Nuestra ambigüedad ya no depende de la ubicación de los  $N$  ceros relevantes de  $E(z)$  sino sólo de  $l$ , que es menor que el número de ceros relevantes, aunque éste sea un número a priori desconocido.
- 3) Aunque aún no hayamos resuelto el problema de la ambigüedad parece que éste va a depender de la disponibilidad de información apriorística.

### 3.3.1.2 Clases de ambigüedad

Antes de seguir, conviene recordar cuales son las fuentes de ambigüedad en términos de las características analíticas de las distribuciones de campo, cuando de ellas solamente se tiene a disposición su módulo [142, §4.2 y §4.3]. El mencionado teorema de Titchmarsh y la relación (3-41) nos permiten llegar de forma directa a las tres clases de ambigüedad, cuya importancia y consecuencia es diferente:

- 1) En primer lugar existe una ambigüedad obvia respecto a cualquier constante de fase que por el hecho de carecer de consecuencias prácticas podemos tildar de inesencial;
- 2) Cualquier variación lineal en la fase de la distribución de campo no tiene efecto sobre su módulo. Esta variación está representada por los factores  $e^{-j\mu x}$  que, en el dominio de las fuentes, corresponden a desplazamientos de la distribución.
- 3) La posibilidad de conmutar un cero de la distribución original con su complejo conjugado. Ésta es a la que básicamente se refiere Walter [160] y a la que hemos venido atendiendo en términos de los factores de Blaschke.

Obsérvese que si se consiguiera eliminar la incertidumbre causada por los factores de Blaschke entonces la imposición de un determinado soporte finito impediría la aparición de una variación lineal y arbitraria de fase, con lo que sólo quedaría la ambigüedad inesencial, y como ésta no nos importa, el problema inverso quedaría resuelto. Por esta razón Hoenders centra su análisis en la ambigüedad tercera.



### 3.3.1.3 Teorema de Hoenders

Si bien en §3.3.1.1 se consiguió limitar la ambigüedad, puede aún reducirse más si se consideran las propiedades de las distribuciones de fuentes. El *teorema de Hoenders* [65] demuestra que las distribuciones de fuentes  $f(x)$  y  $f_1(x)$  ceñidas a un soporte  $[a, b]$  y responsables, respectivamente, de la verdadera distribución de campo  $E(u)$  y de la modificada por un número arbitrario de factores de Blaschke  $E_I(x)$ , están ligadas mediante la siguiente ecuación integral de Volterra<sup>16</sup>:

$$f_I(x) = f(x) - i \sum_{\{n1\}} (\tilde{z}_{n1} - \tilde{z}_{n1}^*) \prod_{\substack{\{n\} \\ n \neq n1}} \frac{\tilde{z}_{n1} - \tilde{z}_n^*}{\tilde{z}_{n1} - \tilde{z}_n} \int_a^x e^{j\tilde{z}_{n1}(x-x')} f(x') dx' \\ + i \sum_{\{n2\}} (\tilde{z}_{n2} - \tilde{z}_{n2}^*) \prod_{\substack{\{n\} \\ n \neq n2}} \frac{\tilde{z}_{n2} - \tilde{z}_n^*}{\tilde{z}_{n2} - \tilde{z}_n} \int_x^b e^{j\tilde{z}_{n2}(x-x')} f(x') dx' \quad (3-48)$$

donde  $\{n1\}$  representa el conjunto de polos de los factores de Blaschke en el SPI;  $\{n2\}$  el de los polos de estos factores en el SPS y  $\{n\}$  el conjunto de todas las posibles combinaciones de ceros excluido el 'n'. De forma esquemática, las relaciones que ligan  $E_I$ ,  $E$ ,  $f_I$  y  $f$ :

$$E_I(\tilde{z}) = E(\tilde{z}) \cdot \prod_{\{n\}} \frac{\tilde{z} - \tilde{z}_n^*}{\tilde{z} - \tilde{z}_n} : \begin{cases} f(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} E(u) \xrightarrow{\text{extensión analítica}} E(\tilde{z}) \\ f_1(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} E_1(u) \xrightarrow{\text{extensión analítica}} E_1(\tilde{z}) \end{cases} \quad (3-49)$$

Según la relación (3-48), en el caso general en el que los ceros  $\tilde{z}_n$  contengan parte imaginaria (de lo contrario el factor de Blaschke carece de sentido), los términos de la derecha son funciones que se

<sup>16</sup> Aunque la teoría de Hoenders esté formulada en el ámbito de la microscopía óptica, su aplicación a nuestro problema es inmediata. Una forma alternativa a la de Hoenders para derivar su relación de dispersión, a la vez que más sencilla, es por medio de la transformada de Laplace, que naturalmente pueden interpretarse como la extensión analítica de la de Fourier. La relación entre el dominio de Laplace,  $s$ , y el que hemos caracterizado por  $\tilde{z}$  corresponde a una rotación de  $\pi/2$ . Por tanto, aplicando la transformada inversa de Laplace a un factor de Blaschke sobre un cero del SPI y la relación entre  $\tilde{z}$  y  $s$ , podemos obtener su efecto sobre el dominio transformado:

$$\frac{\tilde{z} - \tilde{z}_k^*}{\tilde{z} - \tilde{z}_k} \xrightarrow{\tilde{z}=ji} \frac{s + s_k^*}{s - s_k} = 1 + \frac{s_k + s_k^*}{s - s_k} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \delta(x) + (s_k + s_k^*) e^{s_k x} \Gamma(x) \xrightarrow{\tilde{z}=j\tilde{z}} \delta(x) - i(\tilde{z}_k - \tilde{z}_k^*) e^{-j\tilde{z}_k x} \Gamma(x)$$

Donde  $\Gamma$  representa a la función escalón. Recurriendo ahora al teorema de la convolución:

$$f_1(x) = f(x) * \mathcal{L}^{-1}\{B(s)\} = f(x) - i \cdot (\tilde{z}_k - \tilde{z}_k^*) \int_a^x f(x') \cdot e^{j\tilde{z}_k(x-x')} dx' = f(x) + 2y_k \cdot e^{j\tilde{z}_k x} \int_a^x f(x') \cdot e^{-j\tilde{z}_k x'} dx'$$

Observamos que aparecen los términos integrales de la relación (3-48). Mediante la consideración del producto de varios factores de Blaschke y separando los términos con polos sobre el SPI y el SPS se obtienen los términos descritos por los sumatorios y productorios de (3-48).

extienden fuera del intervalo  $[a, b]$ , ilimitadamente hacia uno u otro extremo (como puede verse en la nota 16: para ceros en el SPI aparecen términos que se extienden más allá de  $x=b$ ). De acuerdo con el razonamiento de Hoenders: si estos términos sin soporte finito vienen a modificar la función de distribución de las fuentes de forma aditiva, entonces una distribución de fuentes correspondiente a una distribución de campo modificada por factores de Blaschke no tendrá soporte finito. No obstante, existe un caso de reflexión de ceros al que debe corresponder a todas luces una distribución de soporte finito: aquella en la que se reflejan todos. Ésta distribución es evidentemente  $E^*(z^*)$ , cuya distribución de fuentes asociada es tan compacta como la original, como puede observarse mediante aplicación de las propiedades de las transformadas [65; 126]:

$$\begin{aligned} E(z) &\xleftrightarrow{\mathcal{D}_z \leftrightarrow \mathcal{S}} f(x) \\ E^*(z^*) &\xleftrightarrow{\mathcal{D}_z \leftrightarrow \mathcal{S}} f^*(-x) \end{aligned} \quad (3-50)$$

Por tanto, concluye Hoenders, que sólo caben dos distribuciones de fuentes compactas:  $f(x)$  y  $f^*(-x)$  que sean compatibles con una distribución de módulo del campo dada. Bastaría, según él saber a priori qué extremo de la distribución es mayor para poder romper esta última ambigüedad<sup>17</sup>. Obviamente podríamos preguntarnos que ocurre con todos los términos de soporte no finito que debería haber en la relación entre  $f(x)$  y  $f_I(x)$  según (3-38). Ante esto ni Hoenders, ni los que recurren a su resultado hacen especial mención. Podríamos atajar el problema diciendo que seguramente esos términos se cancelen unos a otros, pero si decimos eso tendríamos también que admitir otros casos en los que tales términos se cancelaran, con lo cual la ambigüedad tornaría a no ser tan estrecha como supone Hoenders.

El problema para poder discutir la divergencia de las distribuciones de fuente radica en que no podemos expresarlas en función de los ceros de las funciones de campo (es decir, no podemos determinar  $\mathcal{L}^{-1}\{(s-s_i)\}$ ). La única manera de poder resolver el problema es considerando la discretizabilidad del problema electromagnético discutida en el capítulo anterior y que se abordará más adelante (§3.3.1.6). Allí la relación entre ceros de la distribución de campo y las distribuciones de fuente es clara. Y además se observa que la ambigüedad debida a los factores de Blaschke (tipo 3) y la de los términos de fase lineal (tipo 2) no pueden considerarse por separado, como suponía Hoenders (§3.3.1.2). Por tanto, no se trata de que el teorema de Hoenders sea erróneo, sino que más bien a partir de él no podemos sacar conclusiones. Y aquí se encuentra el error tanto de Hoenders como el de los que a partir de él repiten la misma conclusión, como puede verse en las más importantes revisiones del problema inverso sin fase: Ferwerda [44], Taylor [153], Sali [137] o

---

<sup>17</sup> Obsérvese que si la distribución de fuentes fuese perfectamente simétrica (módulo par y fase constante) entonces  $f(x)$  y  $f^*(-x)$  sólo se diferenciarían en una constante, con lo cual, resultarían indistinguibles y la solución sería única e igual a:  $e^{j\theta}f(x)$  donde  $\theta \in \mathfrak{R}$  representa la ambigüedad inesencial.

Hurt [70]. Aunque curiosamente en éstas una vez esgrimido como sostén teórico, al final viene a lamentarse su inviabilidad práctica. Mientras que, no sería difícil la definición de un operador que aplicando de forma iterativa las condiciones de unicidad permitiera conducirnos a la solución —si el algoritmo cumpliera con las condiciones del teorema global de la convergencia—.

No obstante, la consecuencia general de Hoenders sí está avalada por la práctica, y nos dice que debemos contar con alguna *información adicional sobre las fuentes* (relativa a su extensión y algún otro conocimiento sobre su distribución de módulo) para garantizar la unicidad de solución del problema inverso sin fase. O lo que es lo mismo: la distribución del módulo del campo no es suficiente para la resolución del problema inverso, sino que es menester alguna información adicional. Ahora bien, ¿Cuánta y de qué especie? Desde luego algo más de lo que supone Hoenders. Pero antes de analizar el problema discretizado para poder encontrar alguna evidencia de las condiciones suficientes de unicidad echemos un vistazo a otras teorías sobre la ambigüedad, así como las soluciones encontradas al problema inverso a partir dos distribuciones observadas.

#### 3.3.1.4 Crítica de algunas teorías sobre la ambigüedad de la distribución de fase

En la discusión del problema inverso sin fase desarrollado por *Isernia* —y colaboradores— [74; 75; 76], éste alega que al conjugar las funciones modales se obtienen otras que no pertenecen al conjunto de las funciones modales válidas, y por tanto, el problema teórico de la ambigüedad quedaría resuelto. Sin embargo, de acuerdo a la discusión anterior las distribuciones que se plantean como ambiguas no son las conjugadas sino las conjugadas de argumento conjugado (que, en definitiva, son la continuación analítica de las funciones armónicas conjugadas) y, como puede comprobarse fácilmente, éstas sí son funciones modales válidas<sup>18</sup>. Por tanto, la unicidad de solución discutida por *Isernia* no puede considerarse válida en esos términos, y resulta sintomático el hecho de que en todas sus contribuciones recurra al uso de al menos dos superficies de observación [72; 73; 74; 75; 76; 103].

De distinto tipo es la discusión de la ambigüedad propuesta por *Sali* [6; 137], en la que intenta probarse que el orden de ésta depende del tamaño de las fuentes. Para ello recurre a la relación entre la distribución de campo y los valores, en los límites de su soporte, de la función de distribución de fuentes y sus derivadas. Si bien, a tenor de (3-44), es claro que en efecto el orden de la función de campo depende del tamaño del soporte de las fuentes, el planteamiento de *Sali* tiene el inconveniente de que siendo los puntos extremos de la distribución de fuente discontinuos, no

---

<sup>18</sup> Curiosamente, como puede verse en [73] la falta de analiticidad de la función de intensidad:  $E(\underline{\ell}) \cdot E^*(\underline{\ell})$  —donde  $\underline{\ell}$  representa al conjunto de coeficientes de la expansión modal— es atajada implícitamente en el procedimiento de optimización propuesto mediante el recurso al gradiente de la función analítica  $E(\underline{\ell}) \cdot E^*(\underline{\ell}^*)$ .

puede definirse aquí ni la función ni sus derivadas. Por otra parte, la solución práctica propuesta por Sali [137], que sería una forma ingeniosa de imponer las condiciones a las que llega Hoenders (y que naturalmente admite Sali), obtiene buenos resultados para algunas distribuciones mientras que se estanca en una que según las conclusiones de Hoenders sería inambigua<sup>19</sup>. Por una parte, este resultado podría ser un indicio de la insuficiencia de las condiciones de unicidad, pero además, una vez probado el algoritmo propuesto por Sali partiendo de hipótesis diferentes, se ha constatado que incluso las distribuciones declaradas por éste como exitosas dependen en realidad de la estimación inicial, ya que se han alcanzado soluciones diferentes y compatibles con las condiciones impuestas (con un error cuadrático menor que  $10^{-7}$ ).

En el ámbito de la reconstrucción de imágenes a partir del módulo de su transformada de Fourier [61; 62; 87; 78] se constata la posibilidad de conseguirlo solamente a partir del módulo de la transformada cuando se imponen ciertas condiciones sobre el dominio de la imagen. Especialmente los trabajos teóricos de Hayes suponen un esfuerzo riguroso y elegante para la determinación de las condiciones necesarias de unicidad de solución cuando sólo se cuenta con las distribuciones de fase o de módulo de la transformada de Fourier (para un caso  $n$ -dimensionales y discretizado). Sin embargo, se trata de condiciones cuyo conocimiento no suele ser accesible y por tanto de difícil aplicación práctica. De hecho, si se comparan los teoremas de Hayes-Lim-Oppenheim [61] con las conclusiones llegadas al hilo de la relación de dispersión §3.3.1.a, se observa que entre ellas existe una estrecha relación. No obstante, estos estudios han fomentado la aparición de procedimientos frecuentemente exitosos [62; 39, §7.1; 143; 46; 47; 169] pero que, dada la dificultad de imponer las condiciones necesarias indicadas por los enfoques teóricos, suelen aparecer estancamientos cuya explicación es difícilmente abordable y, en consecuencia, evitable [46; 47; 78; 62].

### 3.3.1.5 Unicidad de solución con dos distribuciones de campo

Posiblemente el antecedente más remoto del amparo a dos dominios de observación para la recuperación de una función compleja de onda, cuando sólo se dispone de información de módulo, es el de Reichenbach en los años cuarenta [133]. Éste estudia la posibilidad de obtener la función de onda mecánico-cuántica de una partícula, a partir de la distribución de probabilidad de un par conjugado de observables como son su posición y su momento, sin embargo, abandona su intento al señalar alguna de las ya mencionadas ambigüedades. Durante más de veinticinco años apenas es tratada esta posibilidad hasta que Gerschberg [52] en 1971 plantea por primera vez la solución al

---

<sup>19</sup> se trata de una distribución de fuentes rectangular y de fase constante. Los ceros de su correspondiente distribución de campo se sitúan equiespaciadamente sobre el eje real. En consecuencia, la ambigüedad de la pareja  $\{f(x), f^*(-x)\}$  carece evidentemente de sentido. Es decir, salvo una posible constante de fase, la solución es única.

problema inverso sin fase (inicialmente óptico) por medio del recurso a la observación en dos planos, que se traducirían en los términos de nuestro problema a un dominio de campo lejano y al de las fuentes. Inmediatamente y en colaboración con Saxton [53; 54] se propone el primer procedimiento práctico para la recuperación de la distribución de onda compleja a partir de observaciones de módulo en dos dominios (en términos del problema óptico, estos son el plano imagen y el de difracción). Los buenos resultados obtenidos por el procedimiento que terminó denominándose de *Geschberg-Saxton* despertaron la atención sobre las posibilidades que este planteamiento general presentaba. Las variantes se suceden en pocos años (en [142] se puede contemplar una larga lista de contribuciones desde 1972 hasta 1977), pero en 1973 Misell [114; 115; 116] propone una solución inspirada en la de Geschberg-Saxton, de la que han emergido una buena parte de las soluciones al problema inverso sin fase [6; 119; 145; 78; 167; 76; 34]. El procedimiento de *Misell* consiste esencialmente en la utilización de dos observaciones desenfocadas sobre el plano imagen (naturalmente, con distinto grado de desenfoque), que como Anderson propuso en 1985 [6] puede extenderse directamente a la observación sobre dos dominios separados. Esta solución es la que puede aplicarse de forma general al ámbito de nuestro problema.

Sin embargo, la evidencia teórica de la unicidad de solución, aunque sólo contrastada durante cierto tiempo por la práctica, fue aportada por Drenth *et al.* [38; 66] y casi simultáneamente por Hoenders [65]. Éste último demuestra [65, ec.36; 70, §17.8] que si se aplica un número arbitrario de factores de Blaschke a las dos distribuciones de campo, al introducir la relación que debe darse entre las correspondientes distribuciones de fuentes (es decir, en la pupila para el problema óptico o en la superficie de la apertura para un problema de antenas), éstas sólo son compactas si los factores de Blaschke son unitarios. De lo contrario, las distribuciones de fuentes no pueden verificar una relación que depende del factor de desenfoque y es, naturalmente, conocida de antemano. Aplicándolo al procedimiento de Anderson [6] ocurrirá que una y sólo una distribución de corrientes es compatible con la distribución de módulo observada sobre dos superficies.

Como se observó al derivar la relación de dispersión (§3.3.1.1) la unicidad de solución para el caso de conocer el campo sobre una única superficie estaba a expensas de la ubicación de los *ceros relevantes*, que a su vez dependían del soporte de las fuentes. Por tanto, si imponiendo el soporte se dieran las condiciones de unicidad, quedaría aún la ambigüedad de una fase lineal. Sin embargo, puesto que la unicidad de solución en el caso de observación sobre dos superficies no depende del soporte, será aquí suficiente imponer la condición del soporte para eliminar la ambigüedad debida a una fase lineal arbitraria. Por tanto, la prueba Hoenders ahora sí garantiza la unicidad de solución.

### 3.3.1.6 Extensión al caso discreto

#### a) Extensión analítica en términos de la transformada $Z$

En la formulación discretizada del problema electromagnético directo el dominio de las fuentes está constituido por un conjunto finito de dipolos de Hertz dispuestos sobre una retícula regular, y el de

observación por otra retícula finita de puntos de medida. Por tanto, en lugar de basar nuestra discusión en términos de transformadas continuas de Fourier y su extensión analítica (cuya relación con la transformada de Laplace es directa —basta con hacer una rotación de los ejes—) parece conveniente centrar nuestra atención en los correspondientes dominios transformados discretos, es decir, la transformada de Fourier discreta y su extensión analítica en términos de la transformada  $Z$ . Como es bien sabido, si el muestreo ha sido adecuado (§2.4.2), existe una identidad esencial entre ambos casos y por tanto, las consideraciones sobre el problema continuo podrían extenderse al discreto y viceversa gracias a esa identidad esencial. Siendo así, puede afortunadamente recurrirse a ciertas evidencias matemáticas que se han investigado directamente sobre los dominios discretos. De especial interés para el problema que nos atañe son los *teoremas de Hayes* [61; 62]. No obstante, podemos antes recordar ciertas propiedades elementales que son de radical importancia para el problema inverso sin fase.

Como se ha venido viendo el argumento central para la suficiencia del módulo en el problema inverso consiste en la analiticidad de las distribuciones de campo cuya evidencia nos la aporta el teorema de Paley y Wiener [129], que a su vez se encuentra a expensas del soporte finito de las fuentes. Su correlato en el ámbito de las distribuciones discretas es de evidente demostración, ya que aquí la extensión analítica de la transformada de Fourier no se trata de funciones trascendentales sino de polinomios en  $z$  de orden finito y, por tanto, definibles por medio de un número restringido de ceros y quizá un polo en cero o infinito. Precisamente a sazón de esta característica es como Oppenheim [126, §10.2] llega a su tercera propiedad de las regiones de convergencia: “Si  $x[n]$  tiene un soporte finito, entonces la región de convergencia se extiende a todo el plano  $Z$ , excepto posiblemente el origen o infinito”. Que equivale a decir que la extensión analítica de la transformada de Fourier de  $x[n]$  es una distribución entera, lo cual nos coloca en un punto de partida semejante al del caso continuo, y aun mejor ya que aquí no nos es necesario esgrimir la condición de “ceros relevantes” (ver §3.3.1, nota 14).

### ***b) Acerca de la ambigüedad***

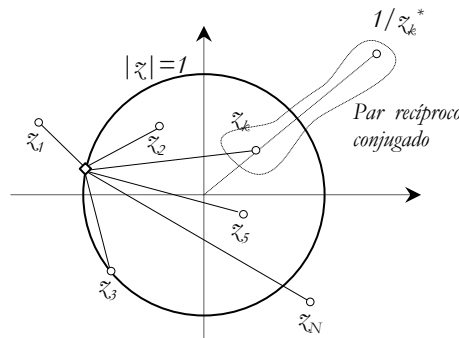
Pero antes de recurrir a los teoremas de Hayes es interesante, para la comprensión de nuestro problema, la consideración de algunas propiedades fundamentales de las distribuciones discretas, que por simplicidad, seguiremos de momento considerándolas unidimensionales. Como se ha dicho, en virtud de la finitud de las distribuciones, su transformada puede describirse mediante un número finito de ceros, de hecho, tantos como puntos en el soporte de la distribución. La transformada de Fourier de espacio discreto corresponde aquí con el círculo de radio unidad (si en nuestro problema la distribución discreta se refiere a la retícula de fuentes, la distribución sobre el círculo  $|z|=1$  será la distribución continua en campo lejano). Naturalmente el valor de la transformada en cualquier punto podrá determinarse como el producto de los vectores entre el punto y los ceros (véase la figura 3-6). Llamando  $F(z)$  a la *transformada*  $z$  de la distribución de fuentes  $f[n]$ , que a su vez corresponderá a la extensión analítica del campo lejano:

$$E(\tilde{z}) = F(\tilde{z}) = C \tilde{z}^{n_0} \prod_{k=1}^N (1 - \tilde{z}_k \tilde{z}^{-1}) / \begin{cases} C \text{ y } \tilde{z}_k \in \mathbb{C} \\ n_0 \in \mathbb{Z} \end{cases} \xrightarrow{|\tilde{z}|=1} F(e^{j2\pi u}) = E(u) = C e^{j2\pi u \cdot n_0} \prod_{k=1}^N (1 - \tilde{z}_k e^{-j2\pi u}) \quad (3-51)$$

De la observación de (3-51) pueden distinguirse las principales fuentes de ambigüedad cuando sólo se conoce el módulo:

- a) Cualquier variación homogénea en la fase de la distribución de fuentes no puede percibirse en la distribución del módulo del campo.
- b) El orden de los ceros (o polos) situados en el origen no tiene impacto en el módulo de la distribución de campo, pero engendra, sin embargo, una fase continua.
- c) Un cero situado en  $\tilde{z}_k$  genera la misma distribución de módulo que otro dispuesto en  $1/\tilde{z}_k^*$ , es decir, su *recíproco conjugado* (se trata de la misma ambigüedad que nos planteaban, en el caso continuo, los ceros conjugados):

$$\left. \begin{array}{l} \text{cero en } \tilde{z}_k : (1 - \tilde{z}_k \tilde{z}^{-1}) \\ \text{cero en } 1/\tilde{z}_k^* : (1 - \tilde{z}_k^* \tilde{z}) \end{array} \right\} \xrightarrow{|\tilde{z}|=1} \left\{ \begin{array}{l} |1 - \tilde{z}_k e^{-j2\pi u}| = |1 - \tilde{z}_k^* e^{j2\pi u}| \\ \text{fase}\{1 - \tilde{z}_k e^{-j2\pi u}\} = -\text{fase}\{1 - \tilde{z}_k^* e^{j2\pi u}\} \end{array} \right.$$



**Figura 3-6.** Ceros de la transformada Z de una distribución discreta de fuentes, que equivale a la extensión analítica de la distribución de campo lejano.

Es fácil advertir cómo los teoremas de Hayes-Lim-Oppenheim [61] sobre la suficiencia del módulo son compatibles con estas ambigüedades. Particularizándolos al caso que nos atañe, es decir, de inexistencia de polos (exceptuando el origen o  $\infty$ ), y ampliándolos para distribuciones complejas, los teoremas 7 y 8 pueden reunirse en uno sólo que diría:

*Teorema H-L-O* Siendo  $f_1[n]$  e  $f_2[n]$  dos distribuciones cuya transformada Z tiene todos los ceros bien sea dentro o bien fuera del círculo unidad. Si  $|\mathcal{F}\{f_1[n]\}| = |\mathcal{F}\{f_2[n]\}|$  entonces  $f_1[n] = e^{j\theta} \cdot f_2[n+m]$ , donde  $\theta \in \mathbb{R}$  y  $m \in \mathbb{Z}$ .

La primera ambigüedad, que ya antes hemos tildado de inesencial (en los comentarios a la ec. 3-47), aparece en el teorema en términos de la constante  $e^{j\theta}$ . Es evidente que esta ambigüedad no tiene consecuencias prácticas, ya que incluso en la formulación reducida del problema (ec. 3-40) hemos

prescindido de una constante compleja, aunque se haya asumido en la normalización de la distribución. En consecuencia, puede definirse una *relación de equivalencia* entre distribuciones:

$$f_1[n] \equiv f_2[n] \quad \text{si} \quad f_2[n] = e^{j\theta} \cdot f_1[n] \quad / \quad \theta \in \mathfrak{R} \quad (3-52)$$

La segunda ambigüedad aparece en la constante arbitraria  $m$ . Y finalmente la última fuente de equívoco es evadida en las condiciones del teorema al imponer que todos los ceros se encuentren a un lado o al otro del círculo unidad. Esta condición puede fácilmente compararse con la solución que Walther [160] proponía a la ambigüedad introducida por los hipotéticos factores de Blaschke: ésta evidentemente desaparece, como se discutió antes (§3.3.1.a), si tenemos la certeza de que los ceros se encuentren por encima o por debajo del eje real (su transposición al caso discreto es directa). Es decir, nos encontramos aún en una situación de incertidumbre semejante a la que llegamos en las consideraciones a la relación de dispersión (3-47), mientras que en el caso continuo el teorema de Hoenders (§3.3.1.b) pretendía llegar más lejos.

### ***c) Discusión de la unicidad para distribuciones de soporte finito***

Recuérdese que el teorema de Hoenders, así como la reducción de la ambigüedad debida a la limitación del número de *ceros relevantes* (§3.3.1.1), partía de tomar en consideración la finitud de la distribución de fuentes<sup>20</sup>. Intentemos, pues, buscar un conjunto de condiciones suficientes de unicidad alternativas a las que nos impone el teorema H-L-O pero que a diferencia de aquellas estén al alcance de la observación y que podamos aplicar para cualquier tipo de distribución.

#### *i. Multiplicidad de solución a partir de una única distribución de módulo*

Consideremos las distribuciones asociadas a ceros recíprocos conjugados, cuya contribución sobre el módulo es idéntica. En la figura 3-7 se ilustran dichas distribuciones. Como puede observarse su soporte es claramente discordante. Característica que, recurriendo al teorema de la convolución [126, 10.5.5], puede fácilmente generalizarse para cualquier distribución en la que se alterna alguno de sus ceros. Según el *teorema de la convolución* la distribución de fuentes correspondiente a un conjunto de ceros  $\{\zeta_k\}$  puede representarse mediante la convolución de las distribuciones asociadas a cada cero:

$$E(\zeta) = \mathcal{F}(\zeta) = C \zeta^{n_0} \prod_{k=1}^N (1 - \zeta_k \zeta^{-1}) \xrightarrow{Z^{-1}} f(x) = C \cdot \delta[n - n_0] * f_{\zeta_1}[n] * f_{\zeta_2}[n] * \dots * f_{\zeta_N}[n] \quad (3-53)$$

---

<sup>20</sup> En la formulación de Hoenders equivale al plano de la pupila.



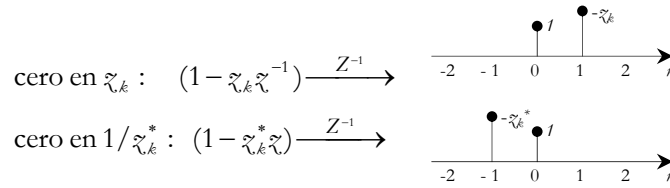


Figura 3-7. Distribuciones correspondientes a dos ceros recíprocos conjugados. Su soporte es diferente.

*Teorema 2.* Existen múltiples distribuciones de fuente con el mismo soporte y compatibles con el módulo de una distribución de campo conocida.

Es evidente que el soporte de la convolución de dos distribuciones  $f_1[n]$  y  $f_2[n]$  es diferente que el soporte de la convolución de la primera  $f_1[n]$  con la recíproca de la segunda  $f_{1/z_2^*}[n]$ :

$$\text{soporte}\{f_1[n] * f_{z_2}[n]\} \neq \text{soporte}\{f_1[n] * f_{1/z_1^*}[n]\} \tag{3-54}$$

Y, de hecho, si se conmuta alguno de los ceros por su recíproco conjugado ocurrirá que la distribución total resultante tiene un soporte diferente, pero la extensión de dicho soporte será idéntica. Si consideramos ahora la arbitraria aparición de ceros en el origen o en infinito entonces:

$$\text{soporte}\{f_1[n] * f_{z_2}[n]\} = \text{soporte}\{\delta[n-1] * f_1[n] * f_{1/z_1^*}[n]\} \tag{3-55}$$

En definitiva, si impusiéramos aquí factores de Blaschke arbitrarios:

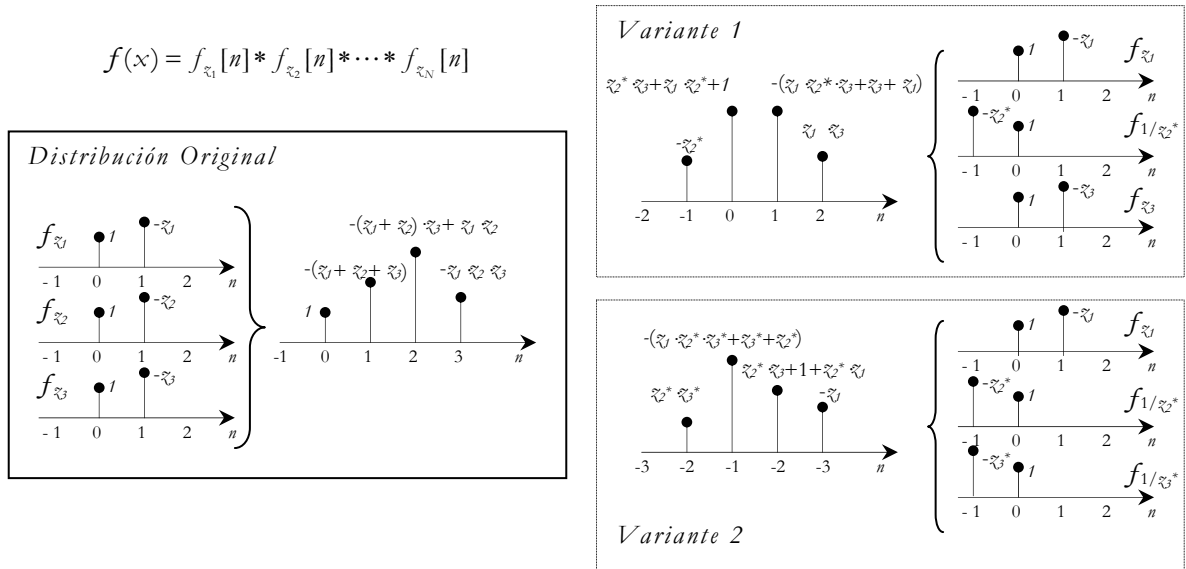
$$B_k(z) = \frac{(1 - z_k^* z)}{(1 - z_k z^{-1})} \xrightarrow{z=e^{j2\pi t}} B_k(e^{j2\pi t}) = e^{-j2 \cdot \arg\{1 - z_k e^{-j2\pi t}\}} \tag{3-56}$$

pero ningún factor que refleje la ambigüedad de los desplazamientos (fase lineal en la transformada) entonces su soporte será en efecto diferente. Si como Hoenders forzáramos la extensión de la distribución estrictamente dentro de los límites del soporte a la vez que nos desentendiéramos de la arbitraria aparición de ceros en el origen o infinito, entonces tendríamos que admitir que habría una única distribución de fuentes compatible con una distribución de módulo del campo dada. Sin embargo, si de acuerdo a las ambigüedades intrínsecas a nuestro problema se considera la arbitraria aparición de términos de fase lineal (es decir, ceros en el origen o infinito), resulta evidente que el problema de Walter no está aún resuelto y que, por tanto, existen múltiples soluciones posibles, tal y como se había afirmado. □ Se ve aquí con claridad la insuficiencia de la conclusión de Hoenders.

*ii. Unicidad de solución a partir de dos distribuciones de módulo*

Para el análisis de las condiciones de unicidad consideremos primero un caso sencillo, es decir, una distribución de orden moderado para después generalizarla. En la figura 3.8 se ilustra el problema de una distribución de orden 4, en la que pueden verse la distribución original y un par de variantes con la misma distribución de módulo del campo (si bien no se presentan las 8 posibilidades

existentes, una de ellas es la simétrica conjugada y las restantes son del tipo a las variantes representadas). Como puede observarse la conmutación de cualquier cero se traduce en la variación de la distribución de fuentes en todos sus punto, a no ser que el cero en cuestión esté situado en  $z_k = \pm 1$ . En este caso es trivial que a su conmutación corresponden distribuciones equivalentes, como también corresponderían a las conmutaciones de cualquier cero sobre  $|z_k|=1$ .



**Figura 3-8.** Distribuciones de fuentes de orden cuatro que generan una misma distribución de módulo de campo. A la izquierda se representa la distribución original; a la derecha dos variantes afectadas por factores de Blaschke (conmutación de uno o dos ceros recíprocos).

Según se ha visto, la conmutación de cualquier cero que pueda ser fruto de ambigüedad ( $|z_k| \neq 1$ ) modifica todos los valores de la distribución, más concretamente, su módulo. No obstante, sería apresurado suponer que esta conclusión nos ofrece una condición de unicidad, ya que la alternancia múltiple puede conducir a resultados diferentes. En efecto, consideremos la posibilidad de que  $|z_3| = 1 / |z_2|$ : si bien la alternancia de un solo cero modifica todos los valores de la distribución; cuando se conmutan simultáneamente  $z_2$  y  $z_3$  el módulo de los valores extremos permanece inalterado, a la vez que se modifica la fase de la distribución de campo; si por otra parte, se impone que el módulo de los elementos segundos sean iguales se llega a la conclusión de que el argumento de los ceros  $z_2$  y  $z_3$  debe ser simultáneamente 0 o  $\pi$  es decir  $z_3 = 1 / z_2^*$ , pero entonces al intercambiarlos se llegaría a la situación original. Es decir, no hay dos distribuciones de fuentes cuyo módulo sea idéntico y generen una distribución de campo con el mismo módulo y fase diferente. Pero por otra parte se ve que sólo la consideración de los valores extremos no es suficiente (y menos, como suponía Hoenders, la localización del valor extremo máximo). No obstante, antes de

llegar a una conclusión final respecto a las *condiciones observables de unicidad*<sup>21</sup> a la vez que aplicables a todos los casos consideremos una distribución arbitraria de N+1 elementos (con un soporte entre 0 y N), cuya transformada Z podrá representarse como:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(z) &= 1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N} = (1 - z_1 z^{-1}) \times \dots \times (1 - z_N z^{-1}) = \\ &= 1 - (z_1 + z_2 + \dots + z_N) \cdot z^{-1} + \left\{ \sum_{\substack{\forall C(n,m) \\ n \neq m}} z_n z_m \right\} \cdot z^{-2} \dots + (-1)^N (z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_N) \cdot z^{-N} \end{aligned} \quad (3-57)$$

Cuando se invierte uno de los ceros,  $z_i$ , la distribución correspondiente desplazada, hasta  $n=0$ , será:

$$\mathcal{F}(z) = -z_i^* + \{1 + z_i^* (z_1 + \dots + z_N - z_i)\} \cdot z^{-1} + \dots + (-1)^{N-1} \left( \frac{z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_N}{z_i} \right) \cdot z^{-1} \quad (3-58)$$

Si de nuevo se invierte otro cero,  $z_j$ :

$$\mathcal{F}(z) = z_i^* z_j^* - \{z_i^* + z_j^* + z_i^* z_j^* (z_1 + \dots + z_N - z_i - z_j)\} \cdot z^{-1} + \dots + (-1)^{N-2} \left( \frac{z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_N}{z_i z_j} \right) \cdot z^{-1} \quad (3-59)$$

Y en general, para M conmutaciones de ceros por sus recíprocos conjugados:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(z) &= (-1)^M z_i^* \dots z_l^* \\ &\quad - (-1)^M \{z_i^* + \dots + z_l^* + z_i^* \dots z_l^* (z_1 + \dots + z_N - z_i - \dots - z_l)\} \cdot z^{-1} + \\ &\quad \dots + (-1)^{N-M} \left( \frac{z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_N}{z_i \dots z_l} \right) \cdot z^{-1} \end{aligned} \quad (3-60)$$

Si a pesar de los cambios el módulo del primer elemento de (3-60) fuera idéntico al de la distribución original,  $|z_i \dots z_l| = 1$ ; el segundo sólo podrá ser igual si la suma de los argumentos de los ceros conmutados es nula... Según vamos considerando más elementos, la coincidencia entre las distribuciones introduce unas condiciones sobre los ceros cada vez más inverosímiles. De hecho, en la mayor parte de los casos la imposición de la igualdad de módulo sobre unos pocos puntos de la distribución de fuentes podrá ser suficiente para garantizar la unicidad de solución, ya que la ubicación real de los ceros no admite, por lo general, el cumplimiento de las condiciones acumuladas. No obstante, en ningún caso puede darse –como se vió con claridad en el problema de orden 4– la igualdad del módulo en todos los puntos.

---

<sup>21</sup> Es decir, que puedan obtenerse mediante experimentación, por ejemplo, sobre la distribución de fuentes; o bien, porque se trate de unas condiciones de la distribución de fuentes que se conozcan de antemano (como puede ser el caso de unas excitaciones nominales). En general, puesto que esta información se usa para la solución del problema inverso se denomina información *a priori*.

*Corolario 1.* Siendo  $f_1[n]$  e  $f_2[n]$  dos distribuciones con idéntico soporte finito  $\{0 \leq n \leq N\}$ . Si  $\{|E_1(n)| = |\mathcal{F}\{f_1[n]\}| = |\mathcal{F}\{f_2[n]\}| = |E_2(n)|\}$  y  $\{|f_1[n]| = |f_2[n]|\}$  entonces  $f_1[n] \equiv f_2[n]$ .

### 3.3.1.7 Extensión a dominios superficiales

La extensión al caso de dominios superficiales discretos, describibles por medio de un par coordinado  $\mathbf{n}=(n_1, n_2)$ , no puede hacerse por consideración de los ceros en el espacio complejo extendido,  $\mathbf{z}=(z_1, z_2)$ , sino que aquí deberá considerarse su factorización polinómica, que en general, puede no llegar hasta los monomios que corresponden a un único cero. La transformada Z para una distribución superficial podrá expresarse como [62; 39]:

$$E(\mathbf{z}) = \mathcal{F}(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{n}} f(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{z}^{-\mathbf{n}} \quad \text{donde: } \begin{cases} \mathbf{n} = (n_1, n_2) & / n_i \in \mathbb{Z} \\ \mathbf{z} = (z_1, z_2) & / z_i \in \mathbb{C} \end{cases} \quad (3-61)$$

Donde la particularización sobre la esfera  $|\mathbf{z}|=1$  se corresponde con la transformada de Fourier de la distribución de fuentes, es decir, el campo lejano. Con lo cual, la transformada Z juega aquí el papel de la extensión analítica de la distribución de campo lejano.

De acuerdo con el teorema 1° de Hayes [62] la factorización de la transformada Z en términos de polinomios irreducibles es única<sup>22</sup>:

$$\mathcal{F}(\mathbf{z}) = \alpha \cdot \mathbf{z}^{-n_0} \prod_{k=1}^p \mathcal{F}_k(\mathbf{z}) \quad (3-62)$$

Donde, evidentemente, los  $p$  polinomios no triviales son los responsables de la forma de la distribución, y así, mientras sea conocido el soporte de la distribución, la unicidad de solución dependerá esencialmente de estos. De la misma manera que en el caso unidimensional la ambigüedad que implica el desconocimiento de la fase del campo dependía de la simetría de los monomios (es decir, de si el cero asociado tiene o no módulo unidad), el grado de ambigüedad dependerá ahora de la simetría de los polinomios irreducibles. Si en las distribuciones lineales los ceros recíprocos ocasionaban una misma distribución de módulo, pero no necesariamente de fase, serán ahora los polinomios irreducibles simétricos los que devengan esa misma ambigüedad:

$$\tilde{\mathcal{F}}_k(\mathbf{z}) = \mathbf{z}^{-N} \mathcal{F}_k^*(1/\mathbf{z}^*) \quad (3-63)$$

Donde  $\tilde{\mathcal{F}}_k$  representa el polinomio simétrico, a partir del cual podrían generalizarse los factores de Blaschke como  $B_k(\mathbf{z}) = \tilde{\mathcal{F}}_k(\mathbf{z}) / \mathcal{F}_k(\mathbf{z})$ . Si tanto la transformada de Fourier de un polinomio como la

---

<sup>22</sup> Para lo que naturalmente es menester la definición de una clase de equivalencia polinómica [62].

de su simétrico tienen el mismo módulo, es entonces evidente que una distribución de fuentes cuya transformada Z pueda describirse según (3-63) generará la misma distribución de módulo de campo que cualquier otra cuya transformada correspondiente sea [62, teorema 6°]:

$$F_l(z) = \pm \alpha \cdot z^{-m} \prod_{\{k\}} F_k(z) \prod_{\{l\}} \check{F}_l(z) \quad / \quad \{k\} \cup \{l\} = [1, 2, \dots, p] \quad \text{y} \quad \mathbf{m} \in \mathbb{Z}^2 \quad (3-64)$$

Consecuentemente, podrá asegurarse que si  $f_1(\mathbf{n})$  tiene un soporte  $\{(0,0) \dots (N_1, N_2)\}$  y su transformada Z está compuesta:

- a) por factores que todos sean simétricos;
- b) un único factor irreducible y asimétrico;
- c) un solo factor irreducible asimétrico y los restantes simétricos;

entonces, cualquier distribución de fuentes  $f_2(\mathbf{n})$  con idéntico soporte que pueda engendrar la misma distribución de módulo será equivalente bien a  $f_1(\mathbf{n})$  o bien a  $f_1^*(-\mathbf{n})$ . Es decir:

$$|E_1(u, v)| = |E_2(u, v)| \Rightarrow f_2(\mathbf{n}) \in \{e^{j\theta} \cdot f_1(\mathbf{n}), e^{j\theta} \cdot f_1^*(-\mathbf{n})\} \quad / \quad \theta \in \mathfrak{R} \quad (3-65)$$

Bastará en los casos (b) y (c) –asimétricos– distinguir en qué extremo la distribución de fuentes tiene más amplitud para poder romper la ambigüedad (3-65)<sup>23</sup>.

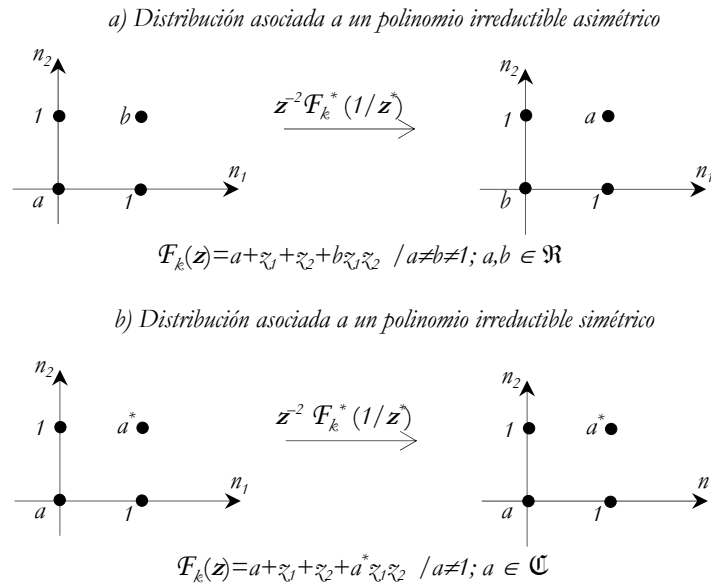


Figura 3-9. Ejemplo de polinomios irreducibles asimétrico y simétrico.

<sup>23</sup> Obsérvese que ésta es la condición de suficiencia para la unicidad de solución según las conclusiones de Hoenders [65; 44; 153; 137; 70]. Las condiciones (b) y (c) se obtienen mediante generalización para distribuciones complejas de los teoremas 7 y 9 de Hayes [62].

Desafortunadamente nuestro conocimiento de las distribuciones de fuentes no suele ir tan lejos como para poder asegurar que pertenezca a una de las categorías mencionadas, con lo cual nos interesa encontrar un conjunto de condiciones observables que permitan garantizarnos la unicidad de solución.

En la figura 3-9 se representan dos ejemplos de distribuciones equivalentes a polinomios irreducibles, siendo uno de ellos simétrico y el otro no. Al igual que en el caso lineal, la distribución de fuentes original equivaldrá aquí a la convolución de las distribuciones asociadas a cada uno de los polinomios irreducibles en que se factoriza su transformada  $Z$ . Es claro que cuando se sustituya una de esas distribuciones por su simétrica (3-63) el resultado de la convolución será invariante cuando el polinomio conmutado sea simétrico y diferente para polinomios asimétricos –como el de la figura 3-9a–. De hecho, en el problema superficial las condiciones de simetría son más restrictivas que en el lineal y al igual que allí habrá una única distribución de módulo de fuentes compatible con un módulo de campo dado. Pero, por otra parte, en relación a la dimensión del problema el orden de multiplicidad de las distribuciones de fuente compatibles con una de módulo de campo dada es menor para el caso superficial que para el lineal, ya que el número de factores irreducibles es ahora menor que la dimensión<sup>24</sup>. Con lo que, en definitiva, podemos generalizar el corolario al que se llegó en el caso superficial:

*Corolario 2.* Siendo  $f_1[\mathbf{n}]$  e  $f_2[\mathbf{n}]$  dos distribuciones con idéntico soporte finito  $\{(0,0)\dots(N_1,N_2)\}$ . Si  $\{|E_1(u,v)| = |E_2(u,v)|\}$  y  $\{|f_1[\mathbf{n}]| = |f_2[\mathbf{n}]|\}$  entonces  $f_1[\mathbf{n}] \equiv f_2[\mathbf{n}]$ .

### 3.3.1.8 Extensión a las distribuciones de campo en zona de Fresnel

#### *a) Multiplicidad de solución a partir de una única distribución de módulo del campo*

Hasta el momento hemos limitado nuestro estudio del problema sin fase al caso de una observación lejana, expresada en la relación (3-40). Las conclusiones de este estudio, compendiadas en el teorema y corolarios anteriores, nos dicen que conocida una distribución de módulo del campo lejano, en general, habrá múltiples distribuciones de fuente compatibles con aquella. Mientras que la condición suficiente de unicidad de solución supone que se debe conocer el módulo de las distribuciones sobre los dominios de fuente y campo. Es ahora menester investigar qué ocurre cuando nuestro conocimiento es el del campo sobre un dominio cercano. Para ello contamos con dos propiedades de radical importancia: el ancho de banda de la distribución de campo está limitada

---

<sup>24</sup> Por esta razón Barakat [13] concluye que para distribuciones reales (lo cual supone, traducido a nuestro problema, que se conoce la fase de la distribución de fuentes) la multiplicidad de soluciones en el caso bidimensional es “patológicamente raro”. Sanz [138] en su teorema 7 generaliza este aserto para  $n$  dimensiones.

(tanto más cuanto más pequeño sean las dimensiones de las fuentes –teorema 3 de muestreo); las transformadas de las distribuciones de fuente y de campo están relacionadas por medio de funciones diádicas (2-30).

*Teorema 3.* Existen múltiples distribuciones de fuente con el mismo soporte capaces de engendrar una distribución de módulo del campo próximo conocida.

Supongamos que la geometría de los dominios nos permite expresar la relación entre el campo y las fuentes a través de sus dominios transformados (§2.3):  $\tilde{\mathbf{E}} = \underline{\tilde{\mathbf{G}}} \cdot \tilde{\mathbf{f}}$ .

Puesto que el campo, en virtud de los teoremas de muestreo (§2.4.1), tiene un ancho de banda acotado, entonces podemos decir que  $\tilde{\mathbf{E}}$  es una distribución cuyo soporte es finito. De acuerdo al teorema 2 (§3.3.1.6) habrá varias distribuciones con el mismo soporte cuya transformadas sea de módulo idéntico. Las transformadas de  $\tilde{\mathbf{E}}$  corresponden aquí con las propias distribuciones de campo. Es decir, conocido  $|\underline{\mathbf{E}}|$ , según dicho teorema  $\exists \tilde{\mathbf{E}}_1, \tilde{\mathbf{E}}_2, \dots, \tilde{\mathbf{E}}_N / |\mathbf{E}_1| = |\mathbf{E}_2| = \dots = |\mathbf{E}_N|$  y, en consecuencia, habrá múltiples distribuciones de fuente  $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_N / \mathbf{f}_i = \mathcal{F}^{-1}\{\tilde{\mathbf{E}} \cdot \underline{\tilde{\mathbf{G}}}^{-1}\}$  capaces de generar la misma distribución de módulo del campo, tal y como se había afirmado. □

**b) Unicidad de solución a partir de varias distribuciones de módulo del campo**

Visto que no existe una única solución al problema de conocer el módulo del campo sobre una sola superficie a la vez que se conoce el soporte de las fuentes, queda investigar si la solución será única cuando se conoce el campo sobre dos superficies. Según se indicó anteriormente (§3.3.e) Hoenders aportó una prueba teórica a la unicidad de solución que sería aplicable al caso de disponer del módulo del campo sobre dos superficies. No obstante, la unicidad de solución puede probarse de una forma alternativa a la propuesta por Hoenders [65, 70] y compatible con la formulación directa planteada en §2.3, cuya aplicabilidad es más extensa que aquella.

Supongamos que los dominios de campo y fuentes se han elegido de tal modo que pueda emplearse la relación (2-36):

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}}_1 = \tilde{\mathbf{G}}_1 \cdot \tilde{\mathbf{f}} \Rightarrow \tilde{\mathbf{f}} &= \frac{\tilde{\mathbf{E}}_1}{\tilde{\mathbf{G}}_1} \\ \tilde{\mathbf{E}}_2 = \tilde{\mathbf{G}}_2 \cdot \tilde{\mathbf{f}} \Rightarrow \tilde{\mathbf{f}} &= \frac{\tilde{\mathbf{E}}_2}{\tilde{\mathbf{G}}_2} \end{aligned} \right\} \frac{\tilde{\mathbf{E}}_1}{\tilde{\mathbf{G}}_1} = \frac{\tilde{\mathbf{E}}_2}{\tilde{\mathbf{G}}_2} \tag{3-66}$$

Donde la tilde representa la transformada de Fourier bidimensional sobre dominios isocoordenados (obsérvese que en las geometrías canónicas podrían emplearse expresiones similares recurriendo a la formulación modal §2.3.6). Si se introducen ahora factores de Blaschke arbitrarios que preserven – respetando el mencionado teorema de Titchmarsh [157]– el módulo de cada una de las

distribuciones de campo, puede determinarse, a partir de éstas, unas distribuciones de fuentes modificadas por los respectivos factores de Blaschke:

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{1,m} &= \tilde{E}_1 \cdot B_1 \Rightarrow \tilde{f}^{(1m)} = \frac{\tilde{E}_{1m}}{\tilde{G}_1} \\ \tilde{E}_{2,m} &= \tilde{E}_2 \cdot B_2 \Rightarrow \tilde{f}^{(2m)} = \frac{\tilde{E}_{2m}}{\tilde{G}_2} \end{aligned} \quad (3-67)$$

Existiría ambigüedad si hubiera una distribución de fuentes  $\tilde{f}^{(1m)} = \tilde{f}^{(2m)}$  que fuera compatible con alguna combinación de factores de Blaschke. Imponiendo, pues, la condición natural de igualdad de las distribuciones de fuentes, se llega a la conclusión de que los factores de Blaschke deben ser iguales:

$$\left\{ \tilde{f}^{(1m)} = \frac{\tilde{E}_{1m}}{\tilde{G}_1} = \frac{\tilde{E}_1 B_1}{\tilde{G}_1} \stackrel{\langle 3-66 \rangle}{=} \tilde{f} \cdot B_1 \stackrel{\langle \text{por hipótesis de ambigüedad} \rangle}{=} \tilde{f}^{(2m)} = \frac{\tilde{E}_{2m}}{\tilde{G}_2} = \frac{\tilde{E}_2 B_2}{\tilde{G}_1} \stackrel{\langle 3-66 \rangle}{=} \tilde{f} \cdot B_2 \right\} \Rightarrow B_1(z) = B_2(z) \quad (3-68)$$

Es decir:

$$B_1(z) = \prod_{\{n\}} \frac{z - z_{1n}^*}{z - z_{1n}} = \prod_{\{n'\}} \frac{z - z_{2n}^*}{z - z_{2n}} = B_2(z) \quad (3-69)$$

donde  $z_{1n}$  representa los ceros de la distribución de campo en la primera superficie y  $z_{2n}$  los de la distribución en la segunda. Resulta evidente, según el teorema de Titchmarsh y a tenor de la diferencia existente entre las distribuciones del módulo del campo sobre las dos superficies, que sus ceros son necesariamente diferentes. Así pues, como los polos de los factores de Blaschke deben coincidir exactamente sobre los ceros de las distribuciones respectivas, que son diferentes para cada superficie, la condición (3-69) implica que estos han de ser necesariamente unitarios:

$$B_1(z) = B_2(z) = 1 \Rightarrow \begin{cases} E_{1m} = E_1 \\ E_{2m} = E_2 \end{cases} \quad (3-70)$$

Como para el caso de las distribuciones superficiales la extensión analítica del campo no es reducible a monomios sino a polinomios irreducibles, los factores de Blaschke pueden generalizarse como se indicó en §3.3.1.7. Pero como ocurre que las a distribuciones sobre diferentes superficies corresponden polinomios irreducibles diferentes, la conclusión es idéntica. Es decir, dadas dos distribuciones de módulo de campo, estas sólo son compatibles con sus distribuciones de campo complejas, y habrá en definitiva, una única distribución de fuentes asociada con la pareja de distribuciones de módulo.

Aplicando el teorema de equivalencia, este resultado puede extenderse para garantizar la unicidad de solución de acuerdo con el planteamiento de Geschberg [52], o sea, cuando se cuenta con las distribuciones de módulo del campo y de las fuentes. Para ello bastaría con poder situar un dominio



de fuentes equivalentes más próximo a las efectivas que el empleado para observarlas y recurrir en este último al teorema de equivalencia.

Conjugando estos resultados con los teoremas de unicidad y equivalencia (§2.2) se llega directamente a la conclusión:

*Corolario 3:* Sean  $\mathcal{D}_1$  y  $\mathcal{D}_2$  dos dominios de observación diferentes que engloban un sistema radiante. Si sobre  $\mathcal{D}_1$  y  $\mathcal{D}_2$  se conocen las distribuciones de módulo del campo tangencial,  $|\mathbf{E}_1|$  y  $|\mathbf{E}_2|$ , entonces existe una solución única al problema electromagnético exterior a las fuentes:  $\mathbf{E}(\mathbf{r}) \forall \mathbf{r} \notin \mathcal{V}$ . Sobre una superficie  $\mathcal{S}$  que englobe las fuentes habrá una distribución única de corrientes equivalentes.

Si además se tiene en cuenta que en la zona de Fresnel las distribuciones de campo eléctrico y de *campo magnético* sobre un determinado dominio debidas a unas mismas fuentes son siempre diferentes, se sigue que la factorización de sus extensiones analíticas es diferente. Por tanto, análogamente a como se demostró antes, los factores de Blaschke que afectarían a cada una de las distribuciones deberán ser unitarios y, en consecuencia, fijado el soporte de las fuentes, habrá una única solución que satisfaga simultáneamente las distribuciones de módulo de campo eléctrico y magnético.

*Corolario 4:* Sea  $\mathcal{D}$  un dominio de observación que englobe un sistema radiante. Si sobre  $\mathcal{D}$  se conocen las distribuciones de módulo de los campos tangenciales,  $|\mathbf{E}|$  y  $|\mathbf{H}|$ , entonces existe una solución única al problema electromagnético exterior a las fuentes:  $\{\mathbf{E}(\mathbf{r}), \mathbf{H}(\mathbf{r})\} \forall \mathbf{r} \notin \mathcal{V}$ . Sobre una superficie  $\mathcal{S}$  englobe las fuentes habrá una distribución única de corrientes equivalentes.

### 3.3.2 Soluciones al problema inverso sin fase

Si bien la solución al problema inverso sin fase depende esencialmente de que pueda garantizarse su unicidad, queda aún por indicar el camino que a partir de los *observables* nos conduzca hasta la solución deseada, o al menos nos deje tan cerca de ésta como nos lo permita el ruido. Naturalmente, las condiciones que se requieren para asegurar la unicidad de solución, tan discutidas en los párrafos precedentes, prefigurarán los ensayos experimentales y constituyen la espina dorsal de los métodos inversos. Por una parte hemos visto como hay una serie de propiedades analíticas sobre las que se sustenta la unicidad de solución, que en general, las hemos podido referir a la posición de los ceros de la extensión analítica de las distribuciones de campo. Cuando la ubicación de esos ceros cumplía ciertas condiciones entonces podía asegurarse la unicidad de solución a partir de una única distribución de módulo, e incluso la aplicabilidad de alguna relación de dispersión. Sin embargo, puesto que en muchos casos prácticos no pueden ratificarse las condiciones a cerca de la ubicación de los ceros, se ha visto cómo el aumento de *observables* es suficiente para garantizar la

unicidad de solución en cualquier caso. Así podrán distinguirse dos grandes clases de procedimientos: 1) los que intentan modificar la distribución observada para que la ubicación de sus ceros cumpla ciertas propiedades; y 2) los que sin modificar la distribución de campo aumentan la observación para procurar garantizar la unicidad de solución. Para designarlos de forma concisa llamaremos a los procedimientos de la primera especie *manipuladores* y a los segundos *observadores*. Normalmente en los métodos *manipuladores* suele disponerse de alguna *relación de dispersión* que permite la reconstrucción de la distribución compleja de campo; mientras que en los métodos *observadores* debe recurrirse a *procedimientos numéricos* que imponen las condiciones que se consideran suficientes para la unicidad de solución. Sin embargo, a los primeros pueden también aplicarse métodos numéricos y a los segundos relaciones analíticas, o a veces una mezcla de ambos<sup>25</sup>.

Como puede verse en los corolarios alcanzados en el estudio de la unicidad, la absoluta garantía de unicidad, cuando no se manipula la radiación, implica la medición de dos distribuciones de módulo, ya sean sobre el dominio de las fuentes y el campo; sobre dos dominios diferentes de campo; o bien las distribuciones de campo eléctrico y magnético sobre un solo dominio. En general, referiremos estos conjuntos de medidas, con independencia de su ubicación espacial, como *dominios de observación* diferentes.

Desde la aparición del algoritmo de Geschberg-Saxton [52; 53; 54], que consistía en la aplicación alternada de las distribuciones de módulo sobre dos dominios de observación, se fueron sucediendo los procedimientos que implicaban la proyección de las soluciones encontradas en un dominio a las distribuciones sobre el otro dominio. Como sólo hay una pareja de distribuciones complejas compatibles con las medidas, estos métodos que denominaremos de *proyecciones sucesivas*, terminan convergiendo hacia la solución<sup>26</sup>. No obstante, la aplicación del conjunto de observaciones suficientes puede hacerse de forma alternativa introduciendo todas las condiciones en un funcional que debe minimizarse. Generalmente este funcional es relativo a la distancia entre las distribuciones reconstruidas y las medidas, pero desafortunadamente estos funcionales no son cuadráticos como lo es el (3-5) y dependen de su condicionamiento para que los *métodos de*

---

<sup>25</sup> Como es el caso de la técnica propuesta por Nakajima [120] en la que se usa una relación de dispersión como la (3-47) y una búsqueda iterativa de la posición de los ceros. Por estas razones la clasificación que se presenta aquí es discordante con la que suele encontrarse en la literatura [153; 6; 119; 70] que distingue entre *métodos directos* (que recurren a relaciones y propiedades analíticas [153]) y *métodos numéricos* (o de reducción de error [46; 6]).

<sup>26</sup> Puesto que el operador de proyección es lineal, y las condiciones impuestas en cada iteración,  $\mathfrak{S}\{o\}$ , no pueden aumentar la distancia a la solución única, el teorema general de la convergencia, garantiza la unicidad de solución [105].

*optimización* aplicados no se estanquen. No obstante, esta técnica empezada a utilizar en óptica y microscopía electrónica al poco tiempo de la propuesta de los algoritmos iterativos [142; 45; 46], presenta ciertas ventajas que unido a la gran cantidad de variantes, desarrolladas en el ámbito general de la teoría de optimización, han hecho que el recurso a estos procedimientos se encuentre frecuentemente en la literatura [169; 78; 19; 20; 73; 74; 75; 76; 103; 48; 98; 99; 100; 140].

En suma, podrá distinguirse entre las siguientes categorías de métodos:

- 1) *Manipuladores*, que a su vez podrán pretender modificar:
  - a. la distribución de campo (*dominios causales, holografía y desplazamiento de ceros*)
  - b. la distribución de fuentes (*apodización, propuesta de Greenaway, antisimétricos*).
- 2) *Observadores*, a los que puede aplicarse procedimientos:
  - a. directos (variantes no iterativas de los algoritmos de GS y Misell);
  - b. de proyecciones sucesivas (*Gerchberg-Saxton, Misell, Anderson*);
  - c. de optimización.

### 3.3.2.1 Procedimientos manipuladores

Según se ha indicado antes, consideramos aquí todos los procedimientos que por intervención deliberada consiguen que la extensión analítica de la distribución de campo cumpla ciertas propiedades<sup>27</sup>. De hecho, al comenzar nuestra discusión sobre el problema inverso y recordar la relación que, por medio de la transformada de Hilbert, podía establecerse entre las partes real e imaginaria de las funciones cuadrado integrables (es decir,  $L^2$ ), nos parecía haber acariciado la solución al problema inverso. Especialmente, al considerar la relación de dispersión sobre las partes real e imaginaria del *logaritmo de la distribución de campo* (ec. 3-39). Sin embargo, los posibles ceros sobre el dominio de observación, que evidentemente impiden la pertenencia al grupo  $L^2$  del *logaritmo de la distribución*, se presentaron ya en ese punto como una limitación esencial para la utilización de una sencilla relación de dispersión que resolviera nuestro problema. Pero si contamos con la posibilidad de manipular la distribución de campo se podría intentar evitar las dificultades que impiden la utilización de la relación (3-39). La solución, inicialmente propuesta por Mehta y Gamo [113; 44] en el ámbito de las funciones de coherencia, es bien elemental: nos bastaría impedir que la distribución de campo se hiciera cero añadiendo sobre todo el dominio de observación una radiación homogénea y mayor que la procedente de las fuentes bajo estudio. Este procedimiento guarda estrecha relación con la famosa técnica holográfica de adición de un rayo de referencia, inicialmente desarrollada por Denis Gabor [50] y que, tras el descubrimiento del Láser, cobró

---

<sup>27</sup> Wolf y Walther fueron los primeros en señalar, en los años 60, que la posibilidad de calcular la fase de una función a partir de su módulo dependía esencialmente de la pertenencia de dicha función a una cierta clase de funciones complejas [165; 160].

especial auge al emplear Leith y Upatnieks [102] la luz laseriana –con su extraordinaria coherencia– como rayo de referencia. Posiblemente el éxito de esta técnica facilitó la rápida extensión a muy diversas aplicaciones [113; 5; 118; 119].

Desde el punto de vista de los ceros del dominio complejo extendido, la técnica de adición de un rayo de referencia supone el desplazamiento de todos los ceros al SPS. De esta forma, de acuerdo con Walther [160], se ha eliminado la ambigüedad. Pero, habrá otras formas de impedir el equívoco.

### ***a) Manipulación de la distribución de campo mediante una radiación de referencia***

Una primera solución al problema de la recuperación de la función completa de campo viene ya prefigurada en los exhaustivos estudios sobre las transformadas de Fourier en el dominio complejo realizados a principios del siglo XX por Paley y Wiener [129], así como por Titchmarsh [157], que en su aplicación al problema que nos atañe podemos denominar *método de los dominios causales*. Pero ha sido sobre todo en *holografía* y en el intento de *desplazar la posición de los ceros*, para aplicar la relación de dispersión sobre el logaritmo de la distribución de campo (3-39), donde se han obtenido los resultados más provechosos. En general, la técnica consiste en añadir una radiación de distribución conocida que modifique el campo observado de tal manera que éste cumpla las condiciones necesarias para el uso de alguna relación que nos permita reconstruir la función de distribución compleja.

#### *i. Método de los dominios causales*

Teniendo en cuenta que una distribución de campo podemos considerarla, en el caso lineal, como una superposición de dos distribuciones causales (o cuatro en el superficial<sup>28</sup>), puede aplicarse a cada una de ellas, en virtud del teorema de Titchmarsh [157], la relación (3-38) –entre las transformadas de Hilbert de las partes real e imaginaria–. Es decir, llamando  $\mathbf{E}_i$  a cada una de las distribuciones causales, se deberá cumplir que:  $\text{Re}\{\mathbf{E}_i(u,v)\} = -\mathcal{H}\{\text{Im}\{\mathbf{E}_i(u,v)\}\}$ . Evidentemente, y como se argumentó al principio, esta relación no resuelve de forma general nuestro problema, pero en ciertas condiciones de radiación, como es el caso de estar compuesta por la superposición de una radiación homogénea y la que en realidad nos interesa, sí puede aplicarse. En esta situación la distribución de campo normalizada podremos describirla como:

$$E(u) = 1 + E_r(u) \quad / \quad |E_r(u)| < 1 \quad \forall u \quad (3-71)$$

Supongamos que la *radiación* bajo estudio  $E_r(u)$  fuera *débil*, es decir,  $|E_r(u)| \ll 1$  [129; 141; 142]. Bajo este supuesto el cuadrado del módulo del campo será:

---

<sup>28</sup> Estrictamente habría que hablar de funciones causales y anticausales, pero como se trata de distribuciones espaciales la diferencia carece de importancia.

$$E(u) \cdot E^*(u) = 1 + 2 \cdot \text{Re}\{E_r(u)\} + \{\text{Re}\{E_r(u)\}\}^2 + \{\text{Im}\{E_r(u)\}\}^2 \approx 1 + 2 \cdot \text{Re}\{E_r(u)\} \quad (3-72)$$

Por tanto, las medidas realizadas sobre el módulo del campo pueden emplearse para aproximar la parte real de la distribución que nos interesa. Finalmente la transformada de Hilbert permite recuperar el resto de la distribución compleja de campo<sup>29</sup>.

Evidentemente, cuanto mayor sea nuestro empeño de que la aproximación (3-71) sea buena, el ruido irá teniendo paulatinamente mayor peso. Para evitar esta limitación Misell [117] propuso un procedimiento iterativo que sería válido para una *radiación semidébil*. Éste consiste en reconstruir progresivamente el término cuadrático: en la primera iteración se aplica la aproximación (3-71) y se reconstruye la parte real y la imaginaria; en las iteraciones sucesivas se emplean los términos cuadráticos de la etapa anterior:

$$\begin{aligned} \text{Re}\{E_r^{(n)}(u)\} &= 1/2 \{E(u) \cdot E^*(u) - 1 - [\text{Re}\{E_r^{(n-1)}(u)\}]^2 - [\text{Im}\{E_r^{(n-1)}(u)\}]^2\} \\ \text{Im}\{E_r^{(n)}(u)\} &= -\mathcal{H}\{\text{Re}\{E_r^{(n)}(u)\}\} \end{aligned} \quad (3-73)$$

Para poder asegurar una radiación homogénea sobre el dominio de observación lo normal es que éste se encuentre en la zona de campo lejano. Aunque basta con que la observación sea lejana para el radiador de referencia, que si es de dimensión pequeña, podrá ser compatible con la *zona de campo cercano* de un sistema radiante de mayor tamaño.

### ii. Holografía

En este caso no se trata de reconstruir primero la distribución compleja de campo, para después colegir las fuentes que lo ocasionaron, sino que como su nombre indica centra su atención en recuperar directamente la función completa del objeto<sup>30</sup> (que en nuestro caso corresponde a la distribución compleja de fuentes). Teniendo en cuenta la relación existente entre la distribución de fuentes y la de campo lejano por medio de transformadas de Fourier, basta añadir una fuente puntual de referencia para conseguir la deseada distribución homogénea [81; 82]. Es decir, considerando dominios lineales y llamando  $f_r(x)$  a la distribución de fuentes bajo estudio, la distribución total será:

$$f(x) = f_r(x) + \delta(x - x_0) \xrightarrow{\mathcal{F}} E(u) = E_r + e^{-j2\pi u x_0} \quad (3-74)$$

<sup>29</sup> Esta solución fue originalmente discutida por Hanszen y Morgenstern en 1969; posteriormente fue extendida por Hoppe, Misell y Greenaway [142; 117].

<sup>30</sup> El término acuñado por Gabor [50] hace alusión a la recuperación de toda, ‘ὅλη, la imagen, γράφη.

Con lo cual, el cuadrado del módulo del campo será:

$$\begin{aligned} |E(u)|^2 &= E(u)E^*(u) = (E_r + e^{-j2\pi ux_0})(E_r^* + e^{j2\pi ux_0}) = \\ &= E_r(u)E_r^*(u) + E_r(u)e^{j2\pi ux_0} + E_r^*(u)e^{-j2\pi ux_0} + 1 \end{aligned} \quad (3-75)$$

Y aplicando el teorema de la convolución:

$$\mathcal{F}^{-1}\{|E(u)|^2\} = f_r(x) * f_r^*(-x) + f_r(x + x_0) + f_r^*(-x - x_0) + 1 \quad (3-76)$$

Puesto que la extensión de  $f_r(x) * f_r^*(x)$  es el doble que la de las fuentes, es evidente a partir de (3-76), que si distanciamos la fuente puntual, desde el borde de la distribución, al menos una vez su dimensión máxima, podremos distinguir la distribución compleja de fuentes bajo estudio,  $f_r(x)$ , mediante la transformada inversa de Fourier del cuadrado de la distribución de campo. Es decir, se habrá resuelto de un solo plumazo el problema inverso. Desafortunadamente, no siempre las condiciones de ensayo nos permiten reproducir esta situación, que implica la medición en *campo lejano* y la disponibilidad de una fuente coherente y puntual. No obstante, la enorme extensión de esta técnica —estrechamente emparentada con la interferometría— a radioastronomía, metrología de alta frecuencia, reconstrucción de imágenes, microscopía electrónica, óptica, cristalografía... habla por sí sola de su interés práctico [5; 118; 119; 112; 134; 145].

### *iii. Desplazamiento de la posición de los ceros*

Consideremos nuevamente la radiación resultante de haber añadido una fuente puntual, expresada en (3-74) y (3-75), pero supongamos que ahora la intensidad de la fuente de referencia tiene amplitud  $A$ :

$$\begin{aligned} |E(u)|^2 &= |E_r(u)|^2 + A \cdot E_r(u)e^{j2\pi ux_0} + A \cdot E_r^*(u)e^{-j2\pi ux_0} + A^2 = \\ &= |E_r(u)|^2 + A^2 + 2A \cdot \text{Re}\{E_r(u)\} \cos(2\pi ux_0) + 2A \cdot \text{Im}\{E_r(u)\} \sin(2\pi ux_0) \end{aligned} \quad (3-77)$$

Habida cuenta de que el ancho de banda espacial de la distribución de campo es igual al tamaño de las fuentes (3-40), puede observarse en (3-77) que nuevamente la condición de que  $x_0 > b + (b-a)$  es necesaria para que a partir de (3-77) se pueda determinar la distribución compleja de campo (podrían filtrarse las frecuencias inferiores a  $2\beta_b$ , y utilizar las propiedades de ortogonalidad del seno y el coseno para distinguir las partes real e imaginaria). Pero desde el punto de vista de la ubicación de los ceros de la función  $E(z) = \{E_r(z) + Ae^{-j2\pi z x_0}\}$ : se observa fácilmente, teniendo en cuenta el comportamiento asintótico de  $E_r(z) \sim O\{f(b)e^{-j2\pi z b}/2\pi i z\}$  en el SPI, que mientras  $|A| > |E_r(x)| \forall x$  y  $x_0 > b$  entonces  $|Ae^{-j2\pi z x_0}| > |E_r(z)| \forall z \in \text{SPI}$ , con lo cual,  $E(z)$  no podrá tener ceros en el SPI. Si esto es así, según se discutió en §3.3.1.1, podrá emplearse la relación de dispersión (3-47). No obstante, las maneras de sortear las dificultades para la aplicación de ésta u otras relaciones de

dispersión similares, son bastante más amplias como probaron Burge *et al.* [23; 44]. Veamos, no obstante, primero la manera de utilizar la más sencilla de las relaciones de dispersión.

Consideremos nuevamente la radiación de referencia homogénea y constante:  $E(u)=E_r(u)+A$ . Teniendo en cuenta que  $E_r(x)$  tiende asintóticamente a cero:

$$\ln\{[E_r(z)+A]/A\} \in L^2 \text{ \{sobre cualquier línea en el SPI y paralela al eje real\}} \tag{3-78}$$

Con lo cual, según el teorema de Titchmarsh [157], podrá emplearse la transformada de Hilbert (3-39) para determinar la fase de la distribución compleja  $E(u)$ . Una vez conocida ésta, bastará con utilizar:

$$\begin{aligned} \tan(\arg\{E_r(u)\}) &= \frac{|E(u)| \cdot \sin(\arg\{E(u)\})}{|E(u)| \cdot \cos(\arg\{E(u)\}) - A} \\ |E_r(u)| &= \left\{A^2 + |E(u)|^2 - 2A \cdot E(u) \cos(\arg\{E(u)\})\right\}^{1/2} \end{aligned} \tag{3-79}$$

Pero el desplazamiento de los ceros para que en el SPI no quede ninguno puede aun generalizarse, de acuerdo con el teorema de Rouché [1, §5.2], para toda una clase de funciones de referencia [23]. Si llamamos  $R(u)$  a una función de referencia que cumpla las condiciones:

- a) ser regular en el SPI;
- b) no tener ningún cero en el SPI;
- c)  $|R(z)| > |E_r(z)|$  en el eje real y en cualquier semicírculo del SPI, de radio tendiente a infinito.

Entonces, según el teorema de Rouché, la función  $\ln\{E(z)\}=\ln\{E_r(z)+R(z)\}$  es regular en el SPI y carece aquí de ceros. Aplicando cálculo de residuos se llega a la relación de dispersión [23; 44]:

$$\arg\{E(u)\} = \sum_{k=0}^n \frac{u^k}{k!} \operatorname{Im} \left[ \frac{\partial^k}{\partial u^n} \{\ln\{E(u)\}\} \right]_{u=0} - \frac{u^{n+1}}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log |E(u')| - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{u'^k}{k!} \operatorname{Re} \left[ \frac{\partial^k}{\partial u^n} \{\ln\{E(u)\}\} \right]_{u=0}}{u'^{n+1}(u'-u)} du' \tag{3-80}$$

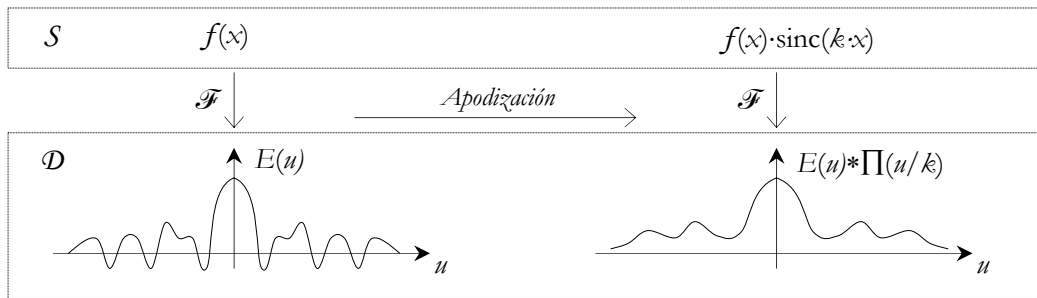
Donde  $P$  es el valor principal de Cauchy y  $n$  es el grado del término asintótico de  $E(z)$ . Obsérvese que el primer término de la derecha sólo puede evaluarse si se conoce la fase de la función de campo. En caso de que  $n$  sea 1, su eliminación solo repercutiría en un término de fase lineal y como hemos visto, podría corregirse si se conociera el soporte. Por otra parte para  $n>1$  el segundo término implicaría el cálculo numérico de derivadas con su consabida imprecisión. Por estas razones, este procedimiento sólo suele aplicarse para  $n \leq 1$ . Al igual que se decía antes, como estos métodos están a expensas de conseguir una oportuna radiación de referencia, lo normal es que ésta sea observada en zona lejana respecto al radiador de referencia, que a su vez puede ser compatible con el campo próximo de la radiación bajo estudio.

**b) Manipulación de la distribución de fuentes**

Hasta ahora todos los intentos considerados para doblegar la posición de los ceros de la distribución de campo han consistido en manipular directamente el campo observado añadiendo otro que conocemos bien. Pero también podría pretenderse la manipulación de la distribución de fuentes para conseguir efectos deseados sobre la colocación de los ceros.

*i. Apodización*

Como es de esperar, uno de los objetivos más recurrentes cuando se procura el desplazamiento de los ceros es permitir el uso de la transformada logarítmica de Hilbert. Cuando el intento consiste en multiplicar la distribución original por una función para lograr ese objetivo, a esta técnica se le denomina, con cierto humor, *apodización* (obsérvese que si la distribución carece de ceros en el eje real la representación gráfica de su módulo nunca tocaría el eje. Es por tanto algo así como quitarle los pies).



**Figura 3-10.** Apodización usando una *sinc* en el dominio de las fuentes. Su efecto es eliminar los ceros en el dominio del campo para poder usar la transformada logarítmica de Hilbert.

Normalmente, cuando nos hemos referido a la posición genérica de los ceros, hemos considerado su distribución asintótica y respecto a ella se han dilucidado no pocas cosas. Pero Ross y *cols.* [135; 136] hicieron notar que si la distribución de fuentes se multiplica por una función adecuada se puede crear una zona libre de ceros en torno al origen. Una de estas funciones –y la más comúnmente utilizada– es la *sinc*. (La figura 3-10 ofrece una idea intuitiva de cómo la apodización por una *sinc* actúa eliminando los ceros en el dominio de interés). Pero obsérvese que la verdadera practicidad de esta técnica radica en que no es necesario manipular las verdaderas distribuciones sino que, en realidad, basta con controlar los dispositivos de medida. Supongamos que el campo lo percibimos por medio de una sonda puntual, bastaría con aplicarle un filtro adecuado para obtener el efecto deseado. Pero, lo que es más, en lugar de sondas ideales lo que en realidad se utiliza son aperturas con una cierta extensión que hacen que la convolución aparezca de forma natural (de hecho si se tratara de aperturas de iluminación constante, la observación a lo largo del dominio equivaldría a una convolución con una función rectangular). Por tanto, esta técnica puede considerarse, hasta cierto punto, emparentada con la corrección de sonda [168].



Si la apodización fuera exitosa, entonces los ceros quedarían desplazados hacia uno de los semiplanos, y lo que obviamente nos depararía la transformada logarítmica de Hilbert sería la distribución de fuentes modificada por la función *sin*. El proceso concluiría, por tanto, al multiplicar por la inversa de la *sin* la distribución modificada. Sin embargo, el hecho de que no podamos garantizar en todos los casos que ese haya sido, en efecto, el destino de los ceros, hace que esta técnica no sirva de solución general, aunque sus beneficios como técnica auxiliar sean de interés [88-92; 168].

### *ii. Propuesta de Greenaway*

En el marco de la discusión sobre el efecto de la conmutación de los ceros de la distribución de campo (§3.3.1.6) podría haberse ilustrado cómo la aparición de una parte interior del dominio de fuentes en el que su magnitud sea nula es incompatible con la conmutación de alguno de los ceros por sus recíprocos conjugados<sup>31</sup>. En muchos casos la consideración de esa zona interior nula es suficiente, pero como se discutió en (§3.3.1.6) pueden darse ciertas condiciones en la ubicación de los ceros de modo que, al conmutarse alguna combinación de ceros por recíprocos conjugados, pueda satisfacerse la igualdad de módulo en algún subdominio de la distribución de fuentes, aunque ésta sea en general diferente sobre el dominio entero. No obstante, a tenor de las conclusiones llegadas por Hoenders a raíz de su teorema, podría decirse que la inclusión de una zona interior nula asimétrica sería sólo compatible con una de las soluciones. En esto consistía la propuesta de Greenaway [55], que según Ferwerda [44] y Taylor [153] tiene el mérito de no tener que recurrir al conocimiento de la ubicación de los ceros, pero que choca con dificultades para su aplicación práctica. Sin embargo, a parte de la dificultad de realizar una buena pantalla interior (aunque en ciertos ámbitos, como puede verse en [93], su realización no es tan compleja), podría aplicarse al problema inverso mediante un algoritmo iterativo, del estilo al de Geschberg-Saxton, que impusiera recurrentemente la condición de “oscuridad interior” (De hecho, las técnicas de reconstrucción de imagen propuestas por Fienup, Hayes, o Ivanov guardarían un estrecho parecido con esta técnica, ya que las condiciones que se imponen sobre el dominio del objeto son sólo una parte de las que se han considerado suficientes). Desde el punto de vista de la teoría de unicidad expuesta en §3.3.1, la limitación de esta propuesta es clara: no garantiza en todos los casos la unicidad de solución. Sin embargo, en §4.2.4.2.b se observará la utilidad de este procedimiento para un problema superficial.

---

<sup>31</sup> Considérese, por ejemplo, la distribución  $\{1/32, 0, 0, 0, 0, 1\}$ . Sus ceros están equidistribuidos sobre una circunferencia de radio 2. Naturalmente, cuando se considera que  $f = f_{z_1} * f_{z_2} * \dots * f_{z_6}$  (donde  $f_{z_i}$  representa la distribución correspondiente al cero  $i$ -ésimo) aparece la zona interior nula. Sin embargo, puede observarse fácilmente que cualquier combinación de una parte de los ceros originales con los restantes ceros recíprocos conjugados hace que el resultado de la convolución en la zona interior sea distinto de cero.

*iii. Manipulación de la simetría*

De las ya comentadas conclusiones de Hoenders, al hilo de su teorema (§3.3.1.3), se seguía que en caso de conocer la parte de la distribución de fuentes de mayor magnitud desaparecería la ambigüedad. Según afirmaba Hoenders [65] (pero también Ferwerda [44], Taylor [153] y Sali [137]) sólo hay dos soluciones válidas –simétrico conjugadas–. En consecuencia, bastaría con emplear un procedimiento numérico en el que el punto de partida se encontrara más cerca de la solución buscada, cuya antisimetría sabemos hacia qué lado se inclina. Inmediatamente este autor propone un procedimiento manipulador que consiste en hacer que la distribución de fuentes sea mayor en un lado que en otro (en el caso óptico se logra mediante variación del ángulo de incidencia y en el caso de metrología de antenas reflectoras eligiendo una fuente de radiación asimétrica). Los resultados, sin embargo, han tenido el mismo destino que su teoría, no han ido mucho más allá de ser comentados como una posible solución, pero no hay manera de encontrar resultados conclusivos en la literatura.

No obstante, Sali [137] propone un procedimiento –más emparentado con la propuesta de Hoenders de lo que sus confusas explicaciones pueden dar a entender– que obtiene eventualmente buenos resultados. Este método, ya referido en §3.3.1.4, consiste en apantallar la mitad de la distribución de fuentes (en el caso de antenas de apertura basta con poner una lámina conductora), y reconstruir iterativamente cada una de las dos mitades en que se ha dividido la distribución de corrientes. La iteración es del estilo a la del algoritmo de Gerchberg-Saxton aunque imponiendo en el dominio de las fuentes sólo la restricción de soporte finito. Si se consideran las distribuciones que según el autor se reconstruyen con éxito, se observa que todas son simétricas pero su módulo es máximo en el medio. Por tanto, al dividir las lo que se consigue son dos distribuciones cuya antisimetría se conoce. De acuerdo a los resultados obtenidos mediante la implementación que el autor ha realizado de este algoritmo, lo que Sali no confiesa es la dependencia de la hipótesis de partida, ya que se ha constatado no sólo la convergencia hacia la solución simétrica cuando se parte de una hipótesis cuya antisimetría es acusada en sentido contrario, sino que además el procedimiento ha deparado soluciones distintas de la esperada cuando se parte de ciertas hipótesis aunque la antisimetría corresponda con la original.

En el ámbito de la reconstrucción de imágenes a partir del módulo de su transformada Fienup [46; 47] propone también el recurso a la antisimetría. En este caso se trata de evitar los estancamientos que se observan en el proceso de reconstrucción al partir de una hipótesis neutra. Su solución consiste en comenzar con una hipótesis cuya antisimetría coincida con la de la distribución original. No obstante, las restricciones que pueden imponerse en el ámbito de la reconstrucción de imágenes (distribución de números reales) es mucho más exigente y generalmente sólo hay dos soluciones válidas: la original y su simétrica.

Desde el punto de vista de la disposición de los ceros, la antisimetría está, de hecho, relacionada con el problema de la ambigüedad de Walter [160]. Si se observa la relación (3-62) puede deducirse

que una distribución cuyos ceros asociados se encuentren fuera del círculo unidad es creciente en módulo; mientras que si se encuentran en la parte interior la distribución correspondiente será decreciente. Siguiendo a Walter, si pudiéramos asegurar que los ceros se encuentren fuera o dentro la ambigüedad estaría así resuelta. Como por otra parte el tener todos los ceros a un lado u otro supone una transformada de fase mínima, para poder llegar a la solución podría usarse un procedimiento numérico que partiera de una hipótesis antisimétrica (con la declinación conocida) y cuya distribución de campo sea de fase mínima.

No obstante, para el caso que nos ocupa, las condiciones que este método impone y la multiplicidad que puede esperarse en las distribuciones de fuentes hacen que, al no garantizarnos la unicidad de solución, carezcan de practicidad, aunque su consideración no deje de tener interés teórico.

### 3.3.2.2 Procedimientos observadores

Como ya se indicó en la discusión de la unicidad de solución, si no se imponen condiciones sobre la distribución de fuentes o sobre la de campo: es menester observar el módulo sobre dos dominios diferentes (la única ambigüedad que prevalece sería la de una constante de fase, que hemos tildado de inessential y que, en realidad, no nos importa). Si nos decantamos por esta opción podremos dirigirnos hacia una mayor cantidad de problemas, ya que por razones prácticas las condiciones requeridas por los procedimientos manipuladores a menudo son inaccesibles, mientras que en caso de poder observar sobre un cierto dominio generalmente pueden adaptarse los instrumentos de medida para observar sobre otro.

La esencia de estos procedimientos es, por tanto, clara: se debe observar el módulo del campo sobre dos dominios y buscar la solución que sea compatible con esa pareja de observaciones. La principal diferencia que existe entre los métodos de este tipo, radicará en ir buscando soluciones en cada uno de los dominios alternativamente o bien imponer las observaciones a un funcional y tratar de minimizarlo. Las propuestas más tempranas pertenecen al primer tipo [52; 53; 54; 114; 115; 116], aunque no tardó mucho en emplearse *métodos de optimización* [142; 45]<sup>32</sup>, así como otros *directos* en los que se plantea la relación integral –en términos de una suma de Riemann– entre la distribución de fuente –que desea saberse– y las dos distribuciones de módulo al cuadrado, a modo de un conjunto de ecuaciones algebraicas que se resuelven en conjunto. No obstante, la vulnerabilidad al ruido y a

---

<sup>32</sup> De hecho, en la primera formulación del algoritmo de Gerchberg-Saxton [52] ya se indica la posibilidad, aunque no se ponga en práctica, de emplear el método de la mínima pendiente sobre el conjunto de los datos. También en la formulación del algoritmo de Misell puede encontrarse delineada esta posibilidad [115].

la precisión ha hecho que estos métodos directos hayan quedado prácticamente desatendidos [38; 67; 68; 69; 44; 11; 121]<sup>33</sup>.

### **a) Proyecciones sucesivas**

Según se indicó en §3.3.1.5 el intento más remoto de reconstrucción de la función completa de onda a partir de dos observables fue el de Reichenbach, pero después de que incluso él mismo abandonara la idea transcurrieron unos treinta años hasta que *Gerchberg* y *Saxton* desarrollaran su conocido y exitoso procedimiento.

#### *i. Método de Gerchberg-Saxton*

En éste se adquieren las distribuciones de módulo en el dominio del campo y en el de las fuentes, y las soluciones que se encuentran en uno de los dominios se propagan sobre el otro. En muchos campos de aplicación, como es el caso de microscopía óptica y electrónica<sup>34</sup>, radioastronomía y metrología de alta frecuencia, la relación que existe entre los dos dominios es una transformada de Fourier, que naturalmente puede calcularse numéricamente mediante su transformada rápida (encontrada a mediados de los años 60). Por tanto, el paso de un dominio a otro es sencillo a la vez que rápido. En la figura 3-11 se representa el algoritmo, que como puede observarse, se trata de una particularización del esquema general planteado al principio de este capítulo (fig. 3-1) en el que la restricción aplicada a las fuentes,  $\mathcal{R}_{\{o\}}$ , consiste en la imposición de la distribución de módulo medida sobre el dominio de las fuentes. Los operadores de imposición de las medidas consisten aquí en el mantenimiento de la fase y la modificación del módulo, es decir:

$$\begin{aligned}\underline{E}_{k+1} &= \mathcal{M}_E \{ \underline{E}_k \} = \left| \underline{E} \right|_{\text{med}} \cdot e^{j \arg \{ \underline{E}_k \}} \\ \underline{f}_{k+1} &= \mathcal{M}_f \{ \underline{f}_k \} = \left| \underline{f} \right|_{\text{med}} \cdot e^{j \arg \{ \underline{f}_k \}}\end{aligned}\tag{3-81}$$

Puesto que en *tratamiento de imagen* el hecho de que la distribución original sea real, incluso positiva, junto con el soporte suele ser lo suficientemente restrictivo como para asegurar la unicidad de solución al algoritmo que impone iterativamente el módulo de la transformada y las restricciones sobre el objeto se denomina también de Gerchberg-Saxton.

El éxito obtenido por este método renovó el interés de los métodos genéricos de recuperación de la fase de una distribución a partir de solamente medidas de módulo. No obstante, el procedimiento

---

<sup>33</sup> Curiosamente las propuestas de estos métodos comienzan reprochando la falta de transparencia matemática de los algoritmos de proyecciones sucesivas (tanto el de Gerchberg-Saxton como el de Misell) y terminan llamando la atención sobre la vulnerabilidad numérica de los directos, que en general consiste en la propagación de errores procedentes tanto del ruido de medida como del truncamiento numérico.

<sup>34</sup> Aquí se habla de plano imagen y de difracción [52; 142].

aunque fácilmente aplicable a microscopía (y otras disciplinas), no es muy atractivo para la caracterización de sistemas radiantes, aunque se tratara de antenas de apertura, debido a la inherente imprecisión de una exploración sobre el dominio de las fuentes (Aún así este método, utilizando restricciones conocidas en lugar de medidas sobre el dominio de las fuentes, ha sido recurrentemente empleado [7; 8; 137]).

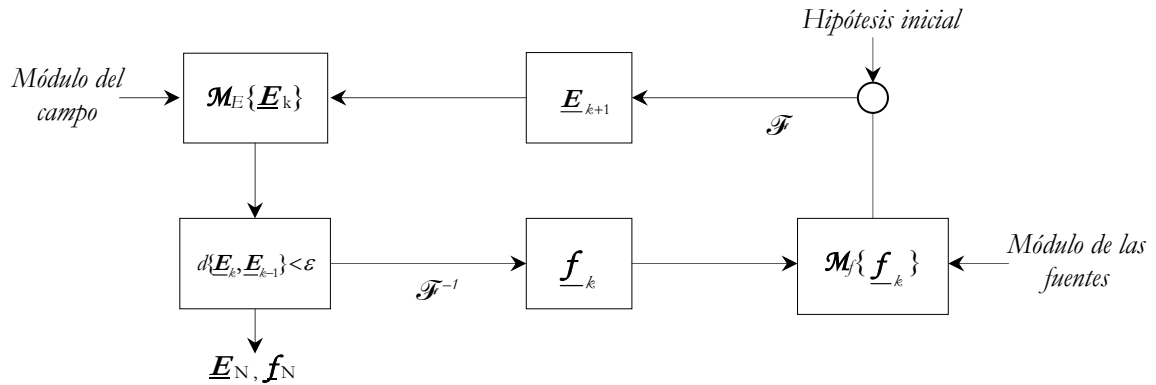


Figura 3-11. Algoritmo de Gerchberch-Saxton.

ii. Método de Misell

Afortunadamente en 1973 Misell propuso un procedimiento [114; 115; 116] inspirado en el de Gergberg-Saxton que, aunque fuera inicialmente formulado para microscopía, desde la década de 1980 pudo aplicarse con éxito a la caracterización de antenas parabólicas [41; 119]. Al igual que con el procedimiento anterior, su éxito práctico espoleó el interés por la técnica de Misell, especialmente una vez que las demostraciones de Hoenders y Drendth aportaron la evidencia matemática de su unicidad de solución<sup>35</sup>. En este caso el par medidas de módulo que se emplean son dos distribuciones de campo lejano desenfocadas. Naturalmente con distinto grado de desenfoco. Si estuviéramos interesados en caracterizar una antena de relector, entonces se trataría de colocar en dos posiciones el alimentador. La relación que existe entre las dos distribuciones es nuevamente sencilla si consideramos que la distribución de campo lejano para una distancia focal axial,  $\Delta_d$ , puede determinarse como [115]:

$$E_d(u) = \mathcal{F}\{f(x) \cdot e^{j\Delta_d x^2}\} \tag{3-82}$$

Cuya inversión es inmediata:

---

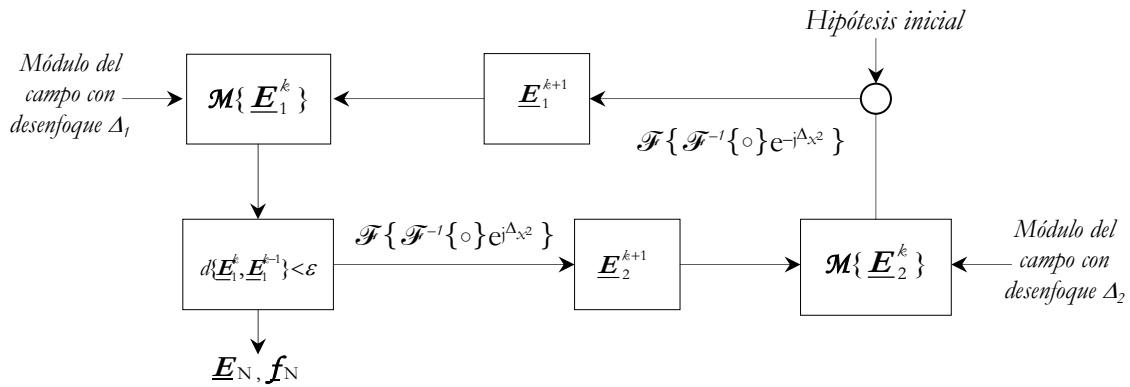
<sup>35</sup> Curiosamente se demostró antes la unicidad de solución del algoritmo de Misell –casi simultáneamente por los dos investigadores mencionados– y un año después el de Gerchberg-Saxton, por Huiser [67; 68].

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}\{E_d(u)\} \cdot e^{-j\Delta_d x^2} \tag{3-83}$$

Así pues, llamando  $\Delta_1, \Delta_2$ , a las distancias focales de los desenfoces, y  $\Delta = \Delta_2 - \Delta_1$ , a la diferencia entre ambas:

$$\begin{aligned} E_1(u) &= \mathcal{F}\{f(x) \cdot e^{j\Delta_1 x^2}\} = \mathcal{F}\{\mathcal{F}^{-1}\{E_2(u)\} \cdot e^{-j\Delta x^2}\} \\ E_2(u) &= \mathcal{F}\{f(x) \cdot e^{j\Delta_2 x^2}\} = \mathcal{F}\{\mathcal{F}^{-1}\{E_1(u)\} \cdot e^{j\Delta x^2}\} \end{aligned} \tag{3-84}$$

Donde, de nuevo el recurso a las transformadas rápidas hacen que el procedimiento sea ágil<sup>36</sup>. No obstante, la aplicabilidad de este procedimiento a la caracterización genérica de sistemas radiantes es naturalmente limitada, aunque su generalización al caso de observación en campo próximo, como se demostró en §3.3.1.8, es bastante directa.



**Figura 3-12.** Algoritmo de Misell.

*iii. Método de Anderson generalizado*

En 1985 Anderson propuso la mencionada generalización del algoritmo de Misell a medidas en campo próximo [6] que posteriormente fue puesta en práctica por muchos investigadores [9; 167; 76; 94; 128]. Aunque la formulación que éste propone es para geometrías planas, puede fácilmente generalizarse. Supongamos que los dominios de medida se atienen a alguna de las geometrías canónicas, entonces según se vio en §2.3.6 el campo puede describirse en término de unos modos constantes y unas funciones modales que dependen de la posición del dominio. Así podrá generalizarse:

---

<sup>36</sup> Morris [118; 119] estudia la vulnerabilidad al ruido, llegando a la conclusión de que el algoritmo de Misell, en el peor caso, requiere una relación señal a ruido aproximadamente igual al cuadrado (en escala natural) que la requerida cuando se mide directamente la fase.

$$\underline{\mathbf{E}}_i = \underline{\mathbf{H}}_i \cdot \underline{\mathcal{M}} \quad \text{sobre } \mathcal{D}_i \quad (3-85)$$

Donde  $\underline{\mathbf{E}}$  representa un arreglo de vectores sobre el dominio de medida;  $\underline{\mathbf{H}}$  una matriz de funciones diádicas modales particularizadas en los puntos del dominio; y  $\underline{\mathcal{M}}$  un arreglo de todos los vectores modales necesarios para la representación del campo.

$$\left. \begin{aligned} \underline{\mathbf{E}}_1 &= \underline{\mathbf{H}}_1 \{ \underline{\mathbf{H}}_2^{-1} \cdot \underline{\mathbf{E}}_2 \} = \underline{\mathcal{P}}_{21} \cdot \underline{\mathbf{E}}_2 \\ \underline{\mathbf{E}}_2 &= \underline{\mathbf{H}}_2 \{ \underline{\mathbf{H}}_1^{-1} \cdot \underline{\mathbf{E}}_1 \} = \underline{\mathcal{P}}_{12} \cdot \underline{\mathbf{E}}_1 \end{aligned} \right\} \text{ donde } \begin{cases} \underline{\mathbf{H}}_i^{-1} = [ \underline{\mathbf{H}}_i^+ \cdot \underline{\mathbf{H}}_i ]^{-1} \underline{\mathbf{H}}_i^+ \\ \underline{\mathcal{P}}_{ij} = \underline{\mathbf{H}}_j [ \underline{\mathbf{H}}_i^+ \cdot \underline{\mathbf{H}}_i ]^{-1} \underline{\mathbf{H}}_i^+ \end{cases} \quad (3-86)$$

Así definido el operador de proyección  $\mathcal{P}_{ij}$  (del dominio  $i$  al  $j$ ) equivale a la aproximación mínimo cuadrática del campo  $\mathbf{E}_i$  sobre el espacio modal y a su posterior propagación al dominio  $j$ .

Teniendo en cuenta el isomorfismo entre la distribución superficial de corrientes y la representación modal (§2.3.6.c), la generalización a cualquier geometría es inmediata cambiando funciones modales por funciones de Green y modos por fuentes (corrientes). Por tanto, empleando la terminología del capítulo 2º (ver 2-91):

$$\left. \begin{aligned} \underline{\mathbf{E}}_1 &= \underline{\mathcal{T}}_1 \{ \underline{\mathcal{T}}_2^{-1} \cdot \underline{\mathbf{E}}_2 \} = \underline{\mathcal{P}}_{21} \cdot \underline{\mathbf{E}}_2 \\ \underline{\mathbf{E}}_2 &= \underline{\mathcal{T}}_2 \{ \underline{\mathcal{T}}_1^{-1} \cdot \underline{\mathbf{E}}_1 \} = \underline{\mathcal{P}}_{12} \cdot \underline{\mathbf{E}}_1 \end{aligned} \right\} \text{ donde } \begin{cases} \underline{\mathcal{T}}_i^{-1} = [ \underline{\mathcal{T}}_i^+ \cdot \underline{\mathcal{T}}_i ]^{-1} \underline{\mathcal{T}}_i^+ \\ \underline{\mathcal{P}}_{ij} = \underline{\mathcal{T}}_j [ \underline{\mathcal{T}}_i^+ \cdot \underline{\mathcal{T}}_i ]^{-1} \underline{\mathcal{T}}_i^+ \end{cases} \quad (3-87)$$

Puesto que tanto en (3-86) como en (3-87) hemos designado por  $\mathcal{P}_{ij}$  al operador de proyección, la figura 3-13 generaliza para cualquier tipo de geometría el algoritmo de Anderson. Naturalmente la definición de los operadores inversos  $\underline{\mathcal{T}}^{-1}$  sería distinta si sobre el espacio  $\mathcal{E}$  se usara el producto interno y la métrica descrita en (3-3) y (3-4). Su definición, por analogía con (3-15) es directa.

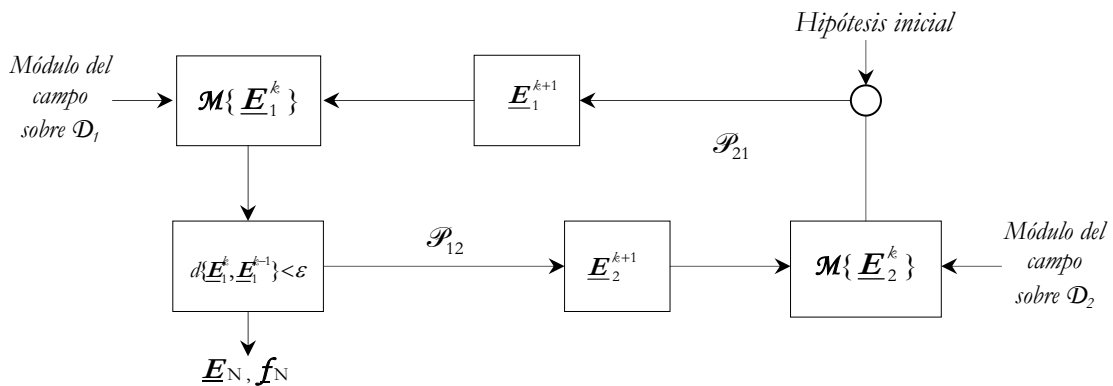
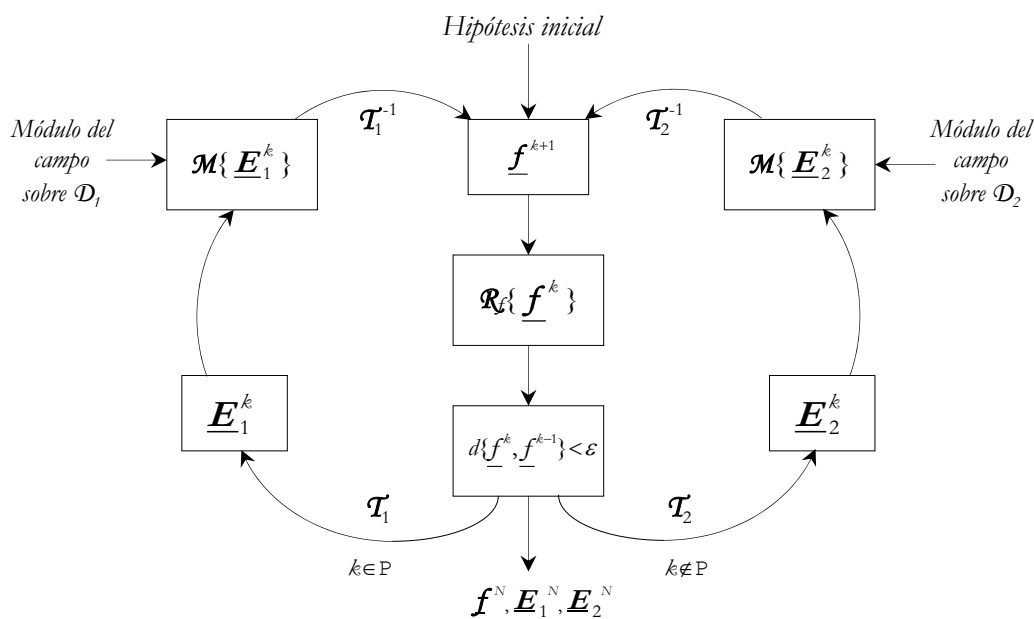


Figura 3-13. Algoritmo de Anderson generalizado.

*iv. Método generalizado de proyecciones sucesivas*

Supongamos que de las fuentes tenemos un cierto conocimiento, como puede ser su soporte o ciertas condiciones de su distribución de módulo o fase. En este caso podríamos combinar el método de Gerchberg-Saxton con el de Anderson para obtener uno que fuera aun más general<sup>37</sup>. En la figura 3-14 se representa gráficamente este algoritmo que podría completarse al igual que los de las figuras 3-11 a 3-13 con la aplicación de la restricción de ancho de banda sobre las distribuciones de campo,  $\mathcal{R}_E\{\circ\}$ .

Si finalmente se tiene en cuenta que un aumento de los dominios de observación conlleva una mayor calidad en los resultados (es decir, un menor ruido en la solución alcanzada) [78; 75; 77], podría aún considerarse un método más completo, que podríamos simplificar definiendo un operador de restricción  $\mathcal{R}_{E_i}\{\circ\}$  en cada dominio que englobara simultáneamente la imposición de medidas y la limitación de ancho de banda. En la figura 3-15 se representa esta última generalización.



**Figura 3-14.** Algoritmo generalizado de proyecciones sucesivas.

<sup>37</sup> Aunque particularizado para geometrías planas [166; 163] Yaccarino y Rahmat-Samii aplicaron en 1995 precisamente este procedimiento [167].



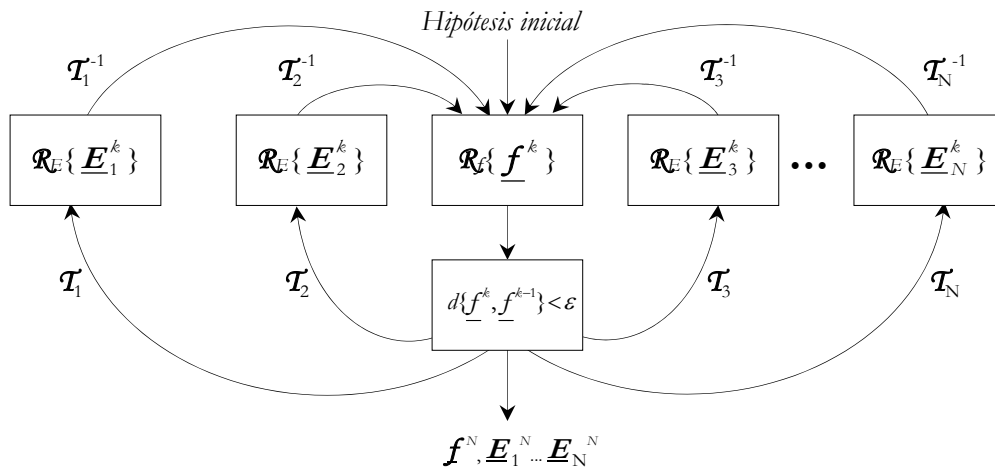


Figura 3-15. Algoritmo generalizado de proyecciones sucesivas para múltiples dominios de medida.

**b) Métodos de optimización**

Tanto Gerchberg y Saxton [52] como Misell [115] cuando formularon los procedimientos arriba descritos propusieron la utilización de métodos de optimización, aunque en principio no los pusieran en práctica<sup>38</sup>. En general, los métodos anteriores tienen la ventaja de que al utilizar relaciones lineales para la propagación entre dominios y aplicar en cada uno condiciones que sólo son satisfechas por una solución, el teorema de la convergencia global [105] asegura que la sucesión de soluciones parciales converge hacia la solución única. Sin embargo, presentan la desventaja de que su convergencia es lenta [46]. Una manera de evitar esta lentitud de convergencia es recurrir a métodos numéricos aplicados sobre un funcional definido en términos de la distribución compleja que pretende dilucidarse y de las medidas disponibles sobre las dos superficies simultáneamente. Puesto que sólo se cuenta con información de módulo del campo, cualquier funcional que pretenda definirse para minimizar la distancia entre las predicciones y los datos será naturalmente no cuadrático. En consecuencia, podrán aparecer mínimos locales que en la práctica se hacen patentes en términos de distribuciones no óptimas en las que se estancan los algoritmos. Para evitar este problema se puede recurrir a varias tácticas:

- 1) Definir un funcional cuya alinealidad sea de mínimo orden –así la diferencia de módulos supone un funcional de orden superior que la diferencia de cuadrados– ;
- 2) Evitar los métodos de optimización que hagan inversiones directas de las aproximaciones cuadráticas (como ocurre con el método de Newton) ;

---

<sup>38</sup> Saxton en 1978 [142] y Fienup en 1982 [46] hacen una extensa comparación –aplicada a sus respectivos objetos de investigación– entre los métodos de proyecciones sucesivas y los de optimización, lo cual demuestra que en realidad ambos procedimientos se desarrollaron a la par.

- 3) Observar en más dominios; lo que según Isernia [75; 77] tiene la consecuencia matemática de aumentar la convexidad del funcional y disminuir la posibilidad de mínimos locales.

En virtud de la primera pauta parece razonable recurrir a algún funcional relacionado con la distancia media entre el *cuadrado del módulo de campo* medido y el predicho [72; 73; 74; 75; 98; 99; 100 34]<sup>39</sup>. Una manera de esquivar la segunda dificultad consistiría en recurrir al método de la máxima pendiente. Sin embargo, su relativa lentitud de convergencia en comparación con otros métodos posiblemente no compense el riesgo de haber hecho que nuestro problema no sea cuadrático. Con lo cual, estaría más justificado el amparo a algún método que haga una búsqueda no demasiado fina cuando se encuentre lejos del mínimo absoluto, por ejemplo, en la dirección de la máxima pendiente, pero que se encauce más directamente hacia el mínimo cuando detecte mayor curvatura. Este es el principio de los métodos *cuasi-Newton*, como el de Levenberg-Marquardt [131], pero también el método del gradiente conjugado (§3.2.1.3.b) presenta un comportamiento similar [105].

Usando como magnitud a optimizar el *cuadrado del módulo del campo* puede definirse un funcional que refleje la distancia cuadrática entre la magnitud medida y la predicha sobre los múltiples dominios de observación (normalmente dos). Puesto que nuestro objetivo es el de determinar la distribución de fuentes entonces un funcional apropiado sería:

$$\begin{aligned}
 \xi(\underline{f}) &= \sum_{\substack{\{l\} \text{ dominios} \\ \text{de observación}}} \sum_{i=1}^{M_k} \left| |E_{mli}|^2 - E_{li}(\underline{f}) \cdot E_{li}^*(\underline{f}) \right|^2 = \sum_{\{l\}} \left\| |E_m|_{\cdot l}^2 - |E(f)|_{\cdot l}^2 \right\|^2 = \\
 &= \left\{ \underline{E}_m^+ \text{diag}(E_m) - \underline{E}_f^+ \text{diag}(E_f) \right\} \cdot \left\{ \text{diag}(E_m^*) \cdot \underline{E}_m - \text{diag}(E_f^*) \cdot \underline{E}_f \right\} = \\
 &= \underline{E}_m^+ \text{diag}(E_m) \cdot \text{diag}(E_m^*) \cdot \underline{E}_m - 2 \text{Re} \left\{ \underline{E}_m^+ \text{diag}(E_m) \cdot \text{diag}(E_f^*) \cdot \underline{E}_f \right\} \\
 &\quad + \underline{E}_f^+ \text{diag}(E_f) \cdot \text{diag}(E_f^*) \cdot \underline{E}_f
 \end{aligned} \tag{3-88}$$

Donde  $\{l\}$  representa el conjunto de los dominios de observación;  $\underline{E}_m$  las medidas sobre los dominios de observación yuxtapuestos y  $\underline{E}_f$  el campo correspondiente a una distribución de corrientes  $\underline{f}$  sobre los mismos puntos. Como puede observarse, es evidente que  $\xi(\underline{f})$  no es una forma cuadrática en  $\underline{f}$  sino de orden cuatro. No obstante, con objeto de utilizar un procedimiento

---

<sup>39</sup> De hecho así lo proponen Gerchberg, Saxton y Misell en un primer momento [52; 115], sin embargo, Fienup utiliza el módulo [46]. Isernia [74; 75] invoca tres razones para la utilización del *cuadrado de la amplitud de campo* en lugar del módulo: 1) el *cuadrado de la amplitud de campo* es de espectro espacial limitado, mientras que no puede decirse lo mismo del *módulo* (por tanto, el *cuadrado de la amplitud del campo* puede representarse mediante muestras pero no el *módulo*); 2) la no linealidad del *cuadrado de la amplitud* es simple frente a la más compleja del *módulo*; 3) puede definirse un espacio vectorial para el *cuadrado de la amplitud de campo* que permitiría acotar el espacio de funciones válidas. Dejando esto último de lado las otras dos razones son bastante juiciosas.

de optimización ágil, resulta conveniente aproximarlo por una forma cuadrática, que, estará bien adaptado a  $\xi(f)$  en las cercanías del mínimo:

$$\xi(\underline{f}) \approx k - (\underline{b}^+ \cdot \underline{f} + \underline{f}^+ \cdot \underline{b}) + \underline{f}^+ \cdot \underline{\zeta} \cdot \underline{f} \quad (3-89)$$

donde  $k$  es una constante;  $\underline{b}$  una matriz  $(M_1 + \dots + M_k) \times 1$ ; y  $\underline{\zeta}$  la matriz de curvatura (es decir, la mitad del Hessiano de  $\xi$ ). Como puede observarse, la relación (3-89) se trata de la misma forma matemática que (3-9) y como se vio allí, su mínimo corresponde con  $\underline{\zeta}^{-1} \cdot \underline{b}$  (véase 3-14). Sin embargo, esta solución sólo será aquí apropiada si nos encontramos en las proximidades del mínimo, es decir, allí donde la aproximación (3-89) sea aceptable. En general, puesto que para cada distribución  $\underline{f}$  la aproximación es diferente, la manera de llegar hasta el mínimo será mediante un procedimiento iterativo [105]:

$$\underline{f}^{(i+1)} = \underline{f}^{(i)} + \lambda^{(i)} \underline{\underline{S}}^{(i)} \cdot \underline{\nabla} \xi^{(i)} \quad (3-90)$$

Donde  $\underline{\underline{S}}^{(i)}$  es una matriz  $N \times N$  que depende del método elegido. Así, si se tratara del método de Newton,  $\underline{\underline{S}}$  sería el inverso de la matriz de curvatura (aunque según hemos argumentado huimos de este método) o la matriz identidad en caso de emplear la *mínima pendiente*. En cualquier caso, es menester definir el gradiente, y si se emplean métodos cuasi-Newton –como el mencionado de Levenberg-Marquardt [131]– también la matriz de curvatura. Para ello deben definirse antes las derivadas primeras y segundas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi(\underline{f})}{\partial f_k} &= -2 \cdot \sum_{\{l\}} \sum_{i=1}^{M_k} \left\{ |E_m|_{li}^2 - |E_f|_{li}^2 \right\} \cdot \frac{\partial |E_f|_{li}^2}{\partial f_k} \\ \frac{\partial^2 \xi(\underline{f})}{\partial f_k \partial f_j} &= 2 \cdot \sum_{\{l\}} \sum_{i=1}^{M_k} \left\{ \frac{\partial |E_f|_{li}^2}{\partial f_k} \frac{\partial |E_f|_{li}^2}{\partial f_j} - \left[ |E_m|_{li}^2 - |E_f|_{li}^2 \right] \frac{\partial^2 |E_f|_{li}^2}{\partial f_k \partial f_j} \right\} \end{aligned} \quad (3-91)$$

Pero desafortunadamente, puesto que  $|E(\underline{f})|^2$  no es analítico en  $\underline{f}$ , su derivada no existe, con lo que no podrá definirse al gradiente. Por tanto, para poder acometer el problema debe utilizarse alguna de las siguientes estrategias:

- 1) Optimizar considerando independientes las partes real e imaginaria de las fuentes, de modo que el gradiente de  $\xi(f)$  quedará definido por la yuxtaposición de los gradientes respecto a las partes real e imaginaria de las fuentes.
- 2) Recurrir a una función analítica –como es el caso de  $E(\underline{f}) \cdot E^*(\underline{f}^*)$ – que sea lo suficientemente parecida a  $E(\underline{f}) \cdot E^*(\underline{f})$  como para poder intercambiarlas.

- 3) Definir una derivada que corresponda con la de  $|E(\underline{f})|^2$  cuando las fuentes sean reales o imaginarias.

La utilización de la primera estrategia se ha experimentado numéricamente y sólo ha deparado buenos resultados cuando las corrientes se encontraban sometidas a restricciones [34]. En lo que respecta a la segunda, es evidente que  $E(\underline{f}) \cdot E^*(\underline{f}^*)$  (es decir, la continuidad analítica de  $E(\underline{f}) \cdot E^*(\underline{f})$  para fuentes reales) no puede servirnos, y no se ha encontrado otra que cumpla las citadas condiciones. Con lo cual, sólo queda la posibilidad de definir una derivada relacionada con la de  $|E(\underline{f})|^2$ . Pueden encontrarse varias propuestas en [142; 46; 73; 75; 76; 103], pero una solución juiciosa para la definición del gradiente puede encontrarse sustituyendo (3-90) en (3-88). Así, se obtiene como aproximación a la derivada:

$$\frac{\partial |E_f|_{li}^2}{\partial f_k} \equiv \frac{\partial |E_f|_{li}^2}{\partial a_k} + j \frac{\partial |E_f|_{li}^2}{\partial b_k} \quad (3-92)$$

Aplicando la definición del campo en términos de las funciones de onda básicas debidas a los dipolos de Hertz unitarios (2-92):

$$\underline{E}(\underline{f}) = \sum_{i=1}^N \underline{\Psi}_i \cdot \underline{f}_i = \sum_{i=1}^N \underline{\Psi}_i \cdot (a_i + j \cdot b_i) \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial |E(\underline{f})|^2}{\partial a_k} = 2 \operatorname{Re} \{ \underline{\Psi}_k^* \cdot E(\underline{f}) \} \\ \frac{\partial |E(\underline{f})|^2}{\partial b_k} = 2 \operatorname{Im} \{ \underline{\Psi}_k^* \cdot E(\underline{f}) \} \end{cases} \quad (3-93)$$

Usando ahora la definición (3-92):

$$\frac{\partial |E(\underline{f})|^2}{\partial f_k} = 2 \cdot \underline{\Psi}_k^* \cdot E(\underline{f}) \quad (3-94)$$

Y finalmente aplicando las relaciones (3-91):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi(\underline{f})}{\partial f_k} &= -4 \cdot \sum_{\{l\}} \sum_{i=1}^M \left\{ |E_m|_{li}^2 - |E_f|_{li}^2 \right\} \cdot \underline{\Psi}_{k li}^* \cdot E_{li}(\underline{f}) \\ \frac{\partial^2 \xi(\underline{f})}{\partial f_k \partial f_j} &\approx 2 \cdot \sum_{\{l\}} \sum_{i=1}^M \frac{\partial |E_f|_{li}^2}{\partial f_k} \frac{\partial |E_f|_{li}^2}{\partial f_j} = 8 \cdot \sum_{\{l\}} \sum_{i=1}^M \underline{\Psi}_{k li}^* \underline{\Psi}_{j li}^* \cdot E_{li}^2(\underline{f}) \end{aligned} \quad (3-95)$$

Donde en (3-91b) se ha despreciado la derivada segunda respecto al producto de las derivadas primeras por dos razones: 1) generalmente es menor; 2) la derivada segunda está ponderada por  $\{|E|_{m}^2 - |E|_{l}^2\}$ , y así cuando la aproximación (3-89) es buena se confunde con el error aleatorio

de medida, que al estar incorrelado con el modelo numérico, tiende a cancelarse cuando se efectúa la suma sobre todos los puntos del dominio.

Usando (3-95) la definición del gradiente y de la matriz de curvatura es inmediato:

$$\begin{aligned} \underline{\nabla}\xi(\underline{f}) &= -4 \cdot \underline{\mathcal{T}}^+ \cdot \text{diag}\{E_f\} \cdot \{\text{diag}(E_m^*)\underline{E}_m - \text{diag}(E_f^*)\underline{E}_f\} \\ \underline{\zeta}(\underline{f}) &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \xi(\underline{f})}{\partial f_k \partial f_j} = 4 \cdot \underline{\mathcal{T}}^+ \cdot \text{diag}\{E_f\} \cdot \text{diag}\{E_f\} \cdot \underline{\mathcal{T}}^* \end{aligned} \quad (3-96)$$

A partir de estas definiciones puede aplicarse el método del gradiente conjugado descrito en §3.2.1.3.b o bien ir más directamente al mínimo cuando la curvatura sea aguda por medio del método de *Levenberg-Marquardt-LM-* [131]. En éste se progresa siguiendo la dirección de la mínima pendiente cuando el mínimo está alejado e invirtiendo el Hessiano en sus inmediaciones. El algoritmo adaptado a nuestro problema consiste en las siguientes etapas:

- 1) Se hace una hipótesis de partida respecto a la distribución de fuentes  $\underline{f}^{(0)}$  y se fija

$$\lambda^{(0)} = 0.001; \quad \xi^{(0)} = \left\| |E_m|^2 - |E(\underline{f}^{(0)})|^2 \right\|^2$$

- 2) Se calcula:  $\underline{b} = -\frac{1}{2} \underline{\nabla}\xi(\underline{f}) = 2 \cdot \underline{\mathcal{T}}^+ \cdot \text{diag}\{E_f\} \cdot \{\text{diag}(E_m^*) \cdot \underline{E}_m - \text{diag}(E_f^*) \cdot \underline{E}_f\};$

- 3) Se calcula:  $\underline{\zeta}(\underline{f}) = 4 \cdot \underline{\mathcal{T}}^+ \cdot \text{diag}\{E_f\} \cdot \text{diag}\{E_f\} \cdot \underline{\mathcal{T}}^*;$

- 4) Se define:  $\underline{\zeta}' = \underline{\zeta}; \quad \text{diag}\{\zeta'\} = \text{diag}\{\zeta\} (1 + \lambda);$

- 5) Se resuelve:  $\underline{\zeta}' \cdot \underline{\delta} = \underline{b}$  (usando, por ejemplo, eliminación gaussiana).

Se calcula:  $\underline{E}'_f = \underline{\mathcal{T}} \cdot (\underline{f}^{(n)} + \underline{\delta}); \quad \gamma = \left\| |E_m|^2 - |E(\underline{f}^{(n)})|^2 \right\|^2$

- a. Si  $\gamma \geq \xi^{(n)}$ :  $\lambda^{(n+1)} = 10 \cdot \lambda^{(n)}; \quad \underline{f}^{(n+1)} = \underline{f}^{(n)};$

- b. De lo contrario:  $\xi^{(n)} = \gamma; \quad \lambda^{(n+1)} = \lambda^{(n)} / 10; \quad \underline{f}^{(n+1)} = \underline{f}^{(n)} + \underline{\delta}; \quad \underline{E}'_f^{(n+1)} = \underline{\mathcal{T}} \cdot \underline{f}^{(n+1)}$

- c. Mientras:  $\xi^{(n)} \leq \varepsilon$  volver a (2)

Fácilmente puede comprobarse que, en efecto, el algoritmo se comporta al modo de la mínima pendiente cuando estamos lejos del mínimo  $\lambda \gg 1$  ( $\zeta'$  es cuasi-diagonal) y como el de Newton en su proximidad  $\lambda \ll 1$  ( $\zeta' \approx \zeta$ ).

De acuerdo a los corolarios de unicidad (§3.3.1.8) basta el conocimiento del módulo del campo sobre dos superficies para garantizar la unicidad de solución, con lo cual lo normal será que los dominios de observación sean dos. Así, la matriz que agrupa a las distribuciones de campo, que según se indicó antes se forman por yuxtaposición de los valores en los dos dominios:

$$\underline{E}_m = \begin{bmatrix} E_{m1} \\ \vdots \\ E_{m2} \end{bmatrix} = [E_{m1}; E_{m2}] \quad (3-97)$$

De modo análogo, los operadores lineales  $\underline{\mathcal{T}}$ :

$$\underline{\underline{\mathcal{T}}} = \begin{bmatrix} \underline{\mathcal{T}}_1 \\ \vdots \\ \underline{\mathcal{T}}_2 \end{bmatrix} = [\underline{\underline{\mathcal{T}}}_1; \underline{\underline{\mathcal{T}}}_2] \quad (3-98)$$

Donde  $\underline{\mathcal{T}}$  es el operador directo sobre el dominio  $\mathcal{D}$ .

En suma, si bien la utilización de los procedimientos de optimización podría conducirnos más rápidamente a la solución, deben señalarse algunas limitaciones: a) pueden aparecer mínimos locales en los que el método se estanque; b) cada iteración es operativamente costosa ya que debe calcularse el gradiente en cada etapa (incluso a veces –como en *LM*– solucionar un sistema lineal en cada iteración, especialmente en las proximidades del óptimo); c) no se ha podido definir rigurosamente el gradiente del funcional a minimizar, lo cual dificulta la transparencia matemática del método.

### **c) Solución en el espacio del cuadrado del módulo**

Se trata de una solución propuesta por Isernia [74; 75] (ver nota 39), consistente en ortogonalizar el espacio del cuadrado del módulo. No obstante, aquel no muestra resultados ni la mención de haber sido intentado, y como puede fácilmente comprobarse se trata de una posibilidad inviable. En efecto, consideremos la expresión del campo en términos del espacio  $\mathfrak{E}$ :

$$E(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^N \Psi_n(\mathbf{r}) f_n \quad / \quad \Psi_n(\mathbf{r}) \in \mathfrak{C}; f_n \in \mathfrak{C}; \mathbf{r} \in \mathcal{D} \quad (3-99)$$

Con lo cual el cuadrado del módulo se expresa como:

$$E(\mathbf{r}) \cdot E^*(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^N \Psi_n(\mathbf{r}) f_n \sum_{m=1}^N \Psi_m^*(\mathbf{r}) f_m^* = \sum_{n=1}^N |\Psi_n(\mathbf{r})|^2 |f_n|^2 + \sum_{n=1}^N \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^N \Psi_n(\mathbf{r}) \Psi_m^*(\mathbf{r}) f_n f_m^* \quad (3-100)$$

Que a su vez puede escribirse como:

$$E(\mathbf{r}) \cdot E^*(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^N \Omega_n(\mathbf{r}) \cdot \alpha_n + \sum_{n=1}^{N'} \Lambda_n(\mathbf{r}) \cdot \beta_n \quad \text{donde} \quad \begin{cases} \Omega_n(\mathbf{r}) = |\Psi_n(\mathbf{r})|^2 \in \mathfrak{R}^+ \\ \alpha_n = |f_n|^2 \in \mathfrak{R}^+ \\ \Lambda_n(\mathbf{r}) = \Psi_n(\mathbf{r}) \Psi_n^*(\mathbf{r}) \in \mathfrak{C} \\ \beta_k = f_n f_m^* \in \mathfrak{C} \quad / \quad k = 1..(N^2 - N) \end{cases} \quad (3-101)$$

Expresión a partir de la cual pudiera intentarse una ortogonalización por medio de una conveniente elección de funciones base a partir del conjunto  $\{\Omega_n\}$  y  $\{\Lambda_n\}$ . Puesto que el ancho de banda del campo es limitado,  $\beta'$ , el del módulo al cuadrado será el doble. De modo que si la extensión del dominio es finita cabrá esperarse una dimensión [146]  $2\beta'S$  (donde  $S$  representa la extensión), que correspondería con el número de funciones base ortogonales para la descripción del campo. Supongamos, que a partir de  $\{\Omega, \Lambda\}$  se definiera un conjunto de funciones ortogonales  $\{\Gamma\}$ . Considerando un dominio discretizado ( $M$  puntos):

$$\sum_{n=1}^M \Gamma_i[n] \cdot \Gamma_j^*[n] = \delta_{ij} \quad (3-102)$$

Con lo que el cuadrado del módulo del campo se representará como:

$$|E(\mathbf{r})|^2 = \sum_{n=1}^N \Gamma_n(\mathbf{r}) \cdot \gamma_n \quad (3-103)$$

Sin embargo, cuando nos preguntamos qué representa cada una de las funciones ortogonales, se observa, que sólo una (acaso  $\Omega_i$ ) puede representar una distribución válida; ya que las restantes al presentar valores positivos y negativos carecen de sentido físico. Por otra parte, si la primera función es definida positiva, pero  $\gamma_1 < 0$ , también carece de sentido físico. Podríamos decir que  $\gamma > 0$  pero si  $\Gamma_2 \propto \langle \Omega_1, \Omega_2 \rangle - \beta \Gamma_1$ , fuese principalmente negativa, entonces  $\gamma \cdot \Gamma_2$  tampoco tendría sentido físico, para cualquier valor positivo de  $\gamma$ . En general,  $\Gamma_i$  tendrá valores negativos y ocurrirá, en suma, que sólo ciertas distribuciones de  $\{\gamma\}$  corresponderán con funciones (3-103) de cuadrado de módulo del campo válidas. Podría definirse quizá un cuerpo de números para  $\{\gamma\}$  que recogiera precisamente esas distribuciones, pero es evidente que no puede, en general determinarse y que carece de practicidad.

Se ha intentado la aplicación de este espacio definido sobre un cuerpo de números reales con la intención de eliminar ruido de medida. Como era de esperar se obtienen distribuciones de campo aun más distantes de las deseadas que las directamente contaminadas con ruido. Así, tanto por evidencia teórica como por los resultados prácticos se hace palpable la inviabilidad de esta solución apuntada por Isernia [74; 75].

### 3.4 SUMARIO

Como se ha visto, el planteamiento del problema inverso en sus diferentes vertientes ha sido íntegramente formulado en términos del espacio vectorial  $\mathfrak{E}$  (§2.4.5), de modo que su solución nos provee una distribución discretizada de fuentes (corrientes eléctricas y magnéticas) capaz de engendrar con una precisión dada el campo electromagnético sobre cualquier punto exterior a las fuentes y en particular sobre el dominio de observación.

Puesto que en general se ha considerado que la observación se refiere al campo eléctrico tangencial sobre una superficie que engloba a las fuentes, la primera cuestión que se ha abordado es la de la suficiencia de dicha distribución para la resolución del problema electromagnético completo (§3.1.1). Y a continuación se han distinguido tres grandes tipos de problemas inversos: 1) el de la *observación completa*, es decir, aquel en el que, según el teorema de unicidad (§2.2), se cuenta con toda la información necesaria para su resolución (§3.2.1). 2) El de una *observación incompleta*, de modo que el dominio de medida no englobe completamente a las fuentes (§3.2.3). 3) El *problema inverso sin fase*, en el que sólo se conoce el módulo de la distribución de campo, y como ha podido observarse es el más complejo de los tres (§3.3).

Para el caso de la *observación completa* el teorema 1 nos prueba la unidad de solución (§3.2.1.1), que puede alcanzarse analíticamente (§3.2.1.2) o de forma numérica (§3.2.1.3) mediante: a) solución numérica de la ecuación lineal; b) reducción numérica del residuo, o c) mediante toda una familia de algoritmos iterativos cuyas propiedades se han impuesto bajo la perspectiva del teorema global de la convergencia. En §3.2.2 se han atendido dos casos particularmente sencillos: los de observación plana cercana y observación lejana.

Para la *observación incompleta* se ha propuesto una solución iterativa (§3.2.3) en la que se recurre a la información adicional del soporte finito de las fuentes y del ancho de banda del campo, que en dominios lejanos (3.2.3.1) se hace formalmente equivalente al algoritmo de Gerschberg-Papoulis.

Una vez considerados los problemas en los que se dispone de fase el resto del capítulo, que es su mayor parte, se dedica al estudio del *problema sin fase* (§3.3), cuya solución radica en la extensibilidad analítica de las distribuciones de campo. Esta característica que puede garantizarse a tenor del ancho de banda finito de las distribuciones de campo establece una coherencia interna entre su módulo y su fase (3-39), relación que por desgracia no es suficiente para la resolución del problema. La factorización de la extensión analítica permite determinar una relación de dispersión (§3.3.1.1), sin los inconvenientes de la (3-39), a partir de la cual puede discutirse la ambigüedad (§3.3.1.2) y las condiciones que deben cumplir las distribuciones para que la solución sea única. Pero para buscar condiciones de unicidad independientes de las distribuciones bajo estudio se tuvo en consideración el teorema de Hoenders (§3.3.1.3) y se mostró su incapacidad para sacar conclusiones. Con lo cual fue menester hacer crítica de diversas teorías sobre la ambigüedad (§3.3.1.4 y §3.3.1.5) para después plantear el problema de la unicidad desde una perspectiva diferente: el problema discretizado (§3.3.1.6), que a su vez corresponde a su expresión en términos del espacio  $\tilde{\mathcal{E}}$ .

Los teoremas 2 y 3 muestran, para los casos de campo lejano y cercano respectivamente, la multiplicidad de solución para observaciones de módulo sobre una única distribución. De acuerdo con los corolarios 1 a 4 la solución es única cuando se cuenta con dos distribuciones, ya sean de campo y fuentes; de campo sobre dos superficies o de campo eléctrico y de campo magnético sobre una única superficie.



Finalmente, las *soluciones* que se proponen para el problema sin fase (§3.3.2) se clasifican según se trate de *procedimientos manipuladores* (§3.3.2.1), o *procedimientos observadores* (§3.3.2.2). En los primeros se modifica la distribución de campo o de fuentes para que el campo cumpla ciertas condiciones analíticas que faciliten la aplicación de algún tipo de relación entre el módulo y la fase (dominios causales; holografía; desplazamiento de los ceros), o que sin más faciliten la unicidad de solución (apodización; propuesta de Greenaway; imposición de simetría). Dentro de los métodos observadores, en los que el conjunto de la información de que se dispone sólo es compatible con una solución, se distinguen: a) Los de *proyecciones sucesivas*, en los que la información relativa a cada dominio se incorpora secuencialmente y las soluciones se van proyectando de unos dominios a otros (entre ellos se encuentran los métodos de Gerchberg-Saxton, Misell, Anderson y los generalizados). b) Los métodos de *optimización* en los que se intenta optimizar un funcional que incorpora a la vez toda la información sobre dos o más dominios. Para finalizar se muestra la inviabilidad de una propuesta de solución sobre el espacio del cuadrado del módulo.

En suma, se han probado las condiciones que garantizan la unicidad de solución de los tres tipos de problema inverso mencionados y se han presentado diversas formas de alcanzar dicha solución, cuya pertinencia depende de las condiciones particulares de cada problema y en especial de su dimensión.





*“La mejor demostración es,  
sin comparación, la  
experiencia, siempre que se  
atenga estrictamente a las  
observaciones”*

*Francis Bacon.. Libro  
primero del “Novum  
Organum”*

## **IV. VALIDACIÓN EXPERIMENTAL**



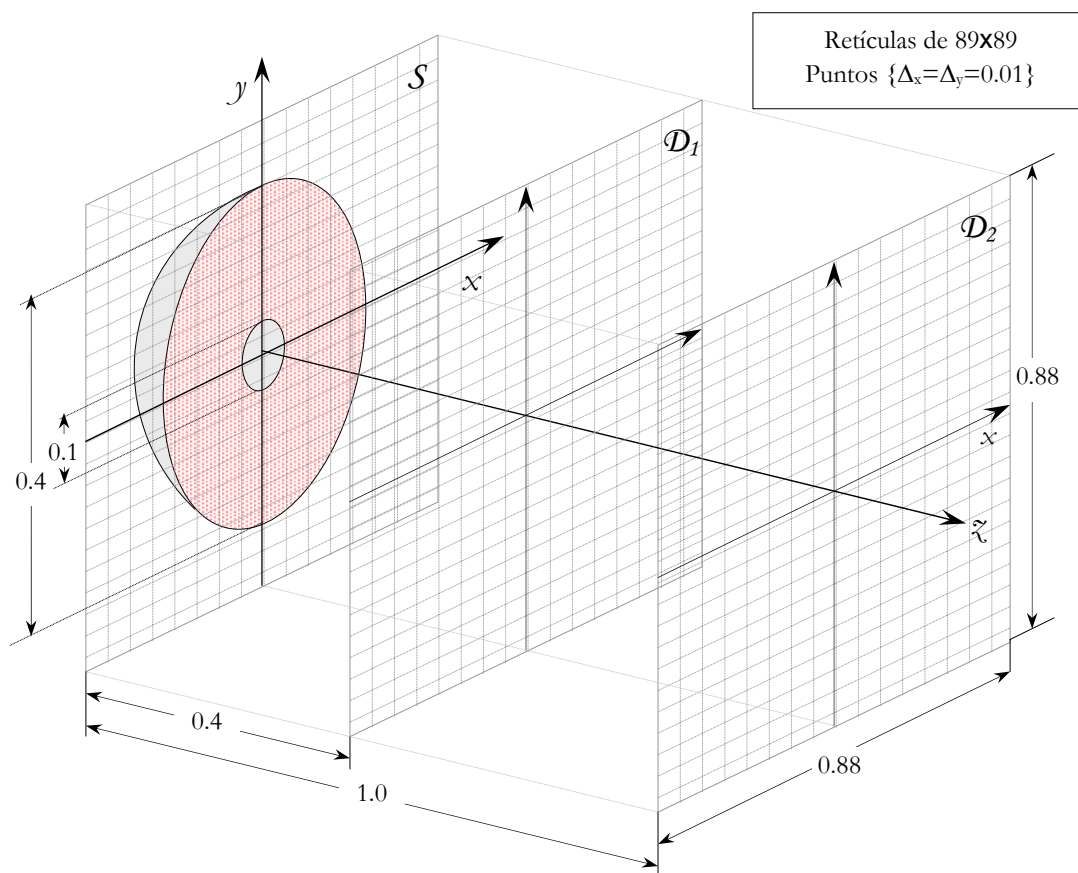
## 4.1 PRUEBAS EXPERIMENTALES

Una vez que se han recorrido los caminos teóricos que desde las fuentes van al campo electromagnético y desde éste vuelven a las fuentes, hagamos ahora ya no un trayecto teórico sino uno en efecto recorrido. Naturalmente la cantidad de pormenores que entonces se estudiaron no podrán considerarse en un número moderado de ejemplos, pero al menos sí podrán probarse los aspectos más fundamentales. Nos limitaremos a comprobar las virtudes del recorrido inverso ya que, en esencia, éstas son inseparables de las del directo. Es evidente que el problema directo se encuentra implícito en el inverso, pero incluso en la práctica, como se ha visto en el planteamiento de los métodos inversos, los directos están activamente implicados en los procesos de reconstrucción interactiva.

Para no extender en exceso el volumen de las pruebas, éstas se restringirán a tres problemas reales considerablemente distintos. Aunque en todos los casos el sistema radiante bajo estudio es una antena, se cuenta también con medidas de las componentes de campo no intencionadas (la componente contrapolar) que nos permiten aproximarnos al caso de un radiador arbitrario. Sólo el primero de los problemas puede considerarse en esencia superficial, ya que la distribución de corrientes no es separable. Se trata de una antena de *apertura circular* cuyo diámetro es de unos  $17\lambda$  observada desde dominios planos, con una interesante característica para la validación de alguna de las consideraciones hechas a tenor de la unicidad de solución del problema sin fase: tiene una parte metálica en medio de la apertura que nos permite considerar nula la distribución de corrientes equivalentes en esta zona. El segundo de los problemas —relativo a una *antena plana de satélite*— aunque en la práctica sea superficial, en esencia, debido a la separabilidad de la distribución de corrientes, puede considerarse como la superposición de dos problemas unidimensionales. El tamaño eléctrico es de nuevo parecido, pero al poderse separar las distribuciones de fuentes, la dimensión del problema analítico es muy inferior. El último de los problemas ya ha sido considerado en los ejemplos del capítulo segundo, se trata de la *antena de radar secundario* sobre la cual volveremos a hablar en el próximo capítulo al aplicar precisamente a esta antena la arquitectura general de sistemas de medida adaptados que allí se propone. En este caso la dimensión del radiador es de unos  $28\lambda$ , que aun ya empezando a ser considerable, no es ni mucho menos la que atañe a los grandes radiotelescopios. Para darle una mayor practicidad a este último problema uno de los aspectos en los que se centrará es el de la capacidad de detección de fallos en alguna de las columnas de alimentación, ya que esto a menudo ocurre y al degradarse la directividad de la radiación: se pone en riesgo la eficiencia del sistema de radar secundario en su asistencia al tráfico aéreo.

## 4.2 ANTENA DE APERTURA CIRCULAR

Como ya se ha dicho, el primero de los casos experimentales consiste en la caracterización de una antena de apertura circular y polarización lineal (horizontal), diseñada para ser utilizada para ser utilizada como terminal remoto de un sistema satelital de acceso múltiple CDMA que opera a 14,125 en transmisión y 12'625 GHz en recepción [32]. En la figura 3.1 se representa la geometría esencial de la antena así como la de los dominios de observación, que –como puede verse– consisten en retículas planas paralelas a la apertura, cuya longitud y anchura es doble que a de la antena.



**Figura 4-1.** Geometría de la antena y de los dominios de observación (distancias expresadas en metros).

Las *medidas*, realizadas en el Laboratorio de Ensayos de la Secretaría General de Comunicaciones de El Casar, permitieron la adquisición del *campo complejo* a la frecuencia de recepción (12'625 GHz), de modo que podrá observarse la capacidad de resolución del problema inverso sin fase cuando se prescindiera de ella. Por otra parte, la geometría del problema facilita considerablemente el coste operacional al admitir la aplicación directa de las transformadas rápidas de Fourier (§3.2.2), de lo

contrario el gasto operacional del cálculo de los operadores directos  $\mathcal{T}$  supone un coste excesivo<sup>1</sup>. Así el planteamiento del problema directo se hará de acuerdo a §2.4.4.1.

### 4.2.1 Frecuencia espacial sobre los dominios de observación

Una de las primeras cuestiones que deben abordarse para el acondicionamiento del problema, con objeto de distinguir la información que sea esencial, es el de la verdadera dimensión del campo sobre los dos dominios de observación (o en general, sobre el espacio que circunda la antena). Para ello podemos recurrir al estudio que sobre este asunto se hizo en el capítulo 2. Si el problema lo abordáramos en términos del operador directo  $\mathcal{T}$ , entonces el cálculo de la dimensión esencial nos proporcionaría el número de dipolos de Hertz que debemos situar en la superficie que engloba las fuentes. En nuestro caso, al recurrir al uso de las transformadas de Fourier no podemos limitar directamente la dimensión del problema, pero mediante el uso de filtros podemos eliminar aquellas componentes que no pertenezcan a su espacio espectral. Es decir, debemos considerar la frecuencia espacial que en cada dominio cabe esperarse. Para empezar, vemos que el muestreo ha sido respetuoso con el *teorema 1* de muestreo, que es el menos exigente, ya que la distancia entre las muestras, 1 cm, es menor que la distancia entre intensidades de campo independientes,  $\lambda/2 = 1,1881$  cm. En lo que respecta a los modos evanescentes (§2.4.3, fig.2-11), es evidente que el sobremuestreo ( $\sim 1,2$ ) es más que suficiente para que el error de truncamiento sea insignificante. No obstante, si se considera la dimensión finita de la antena, según se vio allí, la frecuencia espacial que cabe observarse puede limitarse aún más.

De acuerdo al *teorema 3* la distancia entre puntos independientes es  $\lambda d/2a\chi$ . Donde  $d$  es la distancia a las fuentes,  $a$  es el radio de la esfera que engloba las fuentes, y  $\chi$  el factor de sobremuestreo sobre la esfera que engloba las fuentes. En §2.4.3 se vio que una forma práctica de encontrar el sobremuestreo necesario consistía en la ampliación de la esfera mínima hasta encontrar la dimensión óptima. Los nomogramas de la figura 2-15 nos permiten encontrar estos valores:

- exceso del radio:  $\delta(a/\lambda) = \delta(8,5 \lambda) = 2,6\lambda$

---

<sup>1</sup> Teniendo en cuenta las conclusiones llegadas en el estudio de los modos evanescentes, si se pretende una precisión de 30 dB ( $\epsilon_t < 10^{-3}$ ), la esfera ampliada será:  $a' = a + \delta(a/\lambda) = (8,5 + 2,6) \cdot \lambda$  y el factor de sobremuestreo  $\chi(a/\lambda) = 1,2$ . Por tanto, puede tomarse por dimensión del problema el número de dipolos de Hertz distribuidos sobre la apertura extendida, de radio  $a'$ , con un sobremuestreo  $\chi$ .

$N = \pi(a')^2/(\lambda/2\chi)^2 = 2190$ , que en efecto es una dimensión elevada para el uso de los métodos inversos directos. Si además se tiene en cuenta que en cada plano de observación hay  $89 \times 89$  puntos entonces, para el cálculo del operador directo en campo cercano, se requieren del orden de  $10^{10}$  productos. Que no obstante, podrían reducirse habida cuenta de las propiedades de simetría de la función de Green sobre  $\mathcal{D}$ .

- radio ampliado:  $a' = a + \delta = 11,1\lambda$
- sobremuestreo:  $\chi(a/\lambda) = \chi(8,5/\lambda) = 1,2$

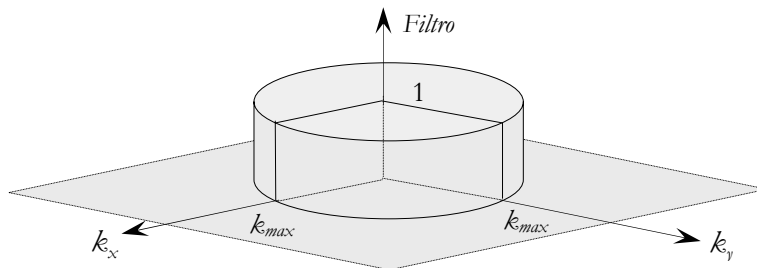
Nótese que al muestrearse cada centímetro, se está realizando un sobremuestreo respecto a  $\lambda/2$  de  $1.1881 \cong 1.2$ , que prácticamente corresponde con el sobremuestreo necesario sobre la superficie ampliada de las fuentes  $\chi$ . Por tanto, la frecuencia espacial discreta<sup>2</sup>  $k$ , equivaldrá a  $N/2$  para las frecuencias espaciales  $1,2 \cdot 2/\lambda$  (que según sabemos no puede corresponder al campo engendrado por la antena). Aplicando el teorema 3 al dominio discreto de Fourier, la frecuencia espacial máxima que cabe esperarse sobre un dominio de observación que se encuentre a una distancia  $d$  de la apertura será:

$$k_{\max} = \frac{N}{2} \cdot \frac{a'}{d}$$

Que particularizada sobre los dominios de observación (ver figura 4-3) será:

$$\begin{array}{ll} - \text{En } \mathcal{D}_1: k_{\max} = \frac{N}{2} \cdot 0.66 & - \text{En } \mathcal{D}_2: k_{\max} = \frac{N}{2} \cdot 0.26 \end{array}$$

Así, una manera de eliminar información que sea ajena al espacio del campo será la de emplear un filtrado, en el dominio discreto de Fourier, como el representado en la figura 4-2.



**Figura 4-2.** Representación gráfica del filtrado óptimo para la intensidad de campo.

## 4.2.2 Problema inverso con fase

Una primera aproximación al problema, teniendo en cuenta que disponemos de las distribuciones de campo complejas, consistiría en encontrar la distribución de fuentes que mejor aproxima las distribuciones de campo medidas. Si se aplica el equivalente conductor eléctrico sobre el plano de la apertura la distribución de fuentes se reduce a sólo corrientes equivalentes magnéticas. Por tanto, usando (2-32) y (2-94):

---

<sup>2</sup> Puesto que el problema es bidimensional la frecuencia espacial tendrá dos componentes:  $(k_x, k_y)$ , cuyo valor máximo es  $(N, N)$  –siendo  $N$  el número de muestras horizontales y verticales-. La frecuencia máxima representable corresponderá a  $(N/2, N/2)$ , aunque en nuestro caso sabemos que  $k_x^2 + k_y^2 < N/2$ .

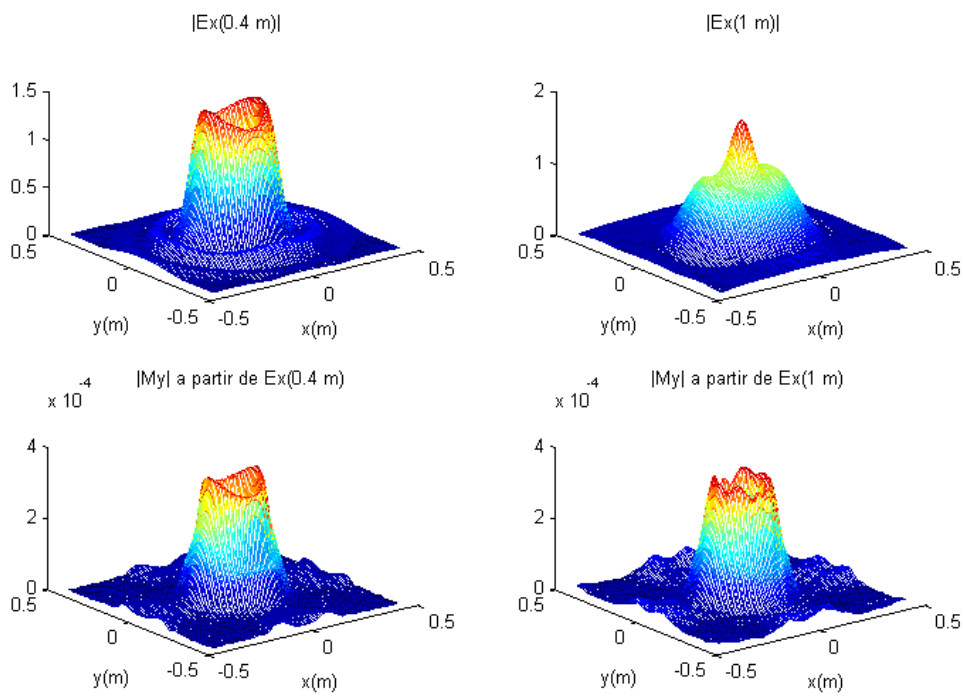


$$\tilde{\mathbf{E}} = \tilde{\Psi}_o \cdot \tilde{\mathbf{f}} = \begin{cases} \tilde{E}_x = \tilde{\Psi}_o \cdot \tilde{M}_y \\ \tilde{E}_y = -\tilde{\Psi}_o \cdot \tilde{M}_x \end{cases} \quad (4-1)$$

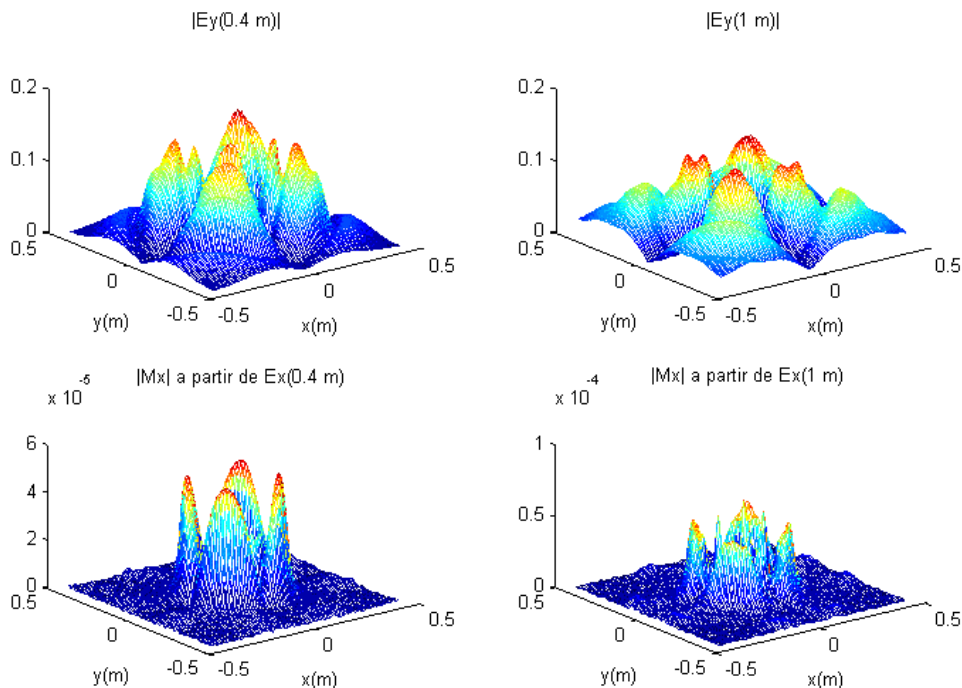
Según se discutió en §3.2, definida una métrica en  $\mathfrak{E}$ , existe una única solución a partir de una determinada distribución de campo complejo y en caso de que ésta corresponda con la generalización de la euclídea entonces corresponde a la simple inversión de (4-1). Si además recurrimos, según hemos dicho antes, a un filtro como el de la figura 4-2, que representaremos por  $\tilde{H}_i$ , entonces la distribución de corriente que mejor aproxima el campo sobre el dominio  $D$ :

$$\begin{aligned} M_y &= \text{IFFT}\{\tilde{M}_y\} = \text{IFFT}\{\tilde{E}_x \cdot \tilde{H}_i / \tilde{\Psi}_o\} \\ M_x &= \text{IFFT}\{\tilde{M}_x\} = -\text{IFFT}\{\tilde{E}_y \cdot \tilde{H}_i / \tilde{\Psi}_o\} \end{aligned} \quad (4-2)$$

Las figuras 4-3 y 4-4 recogen gráficamente los resultados obtenidos al aplicar (4-2). En la figura 4-5 se agrupan las corrientes reconstruidas a partir de las cuatro distribuciones de campo medidas.



**Figura 4-3.** Distribuciones de campo horizontal y sus correspondientes distribuciones óptimas de corrientes equivalentes magnéticas sobre el plano de la apertura (obtenidas a partir de la distribución compleja de campo).

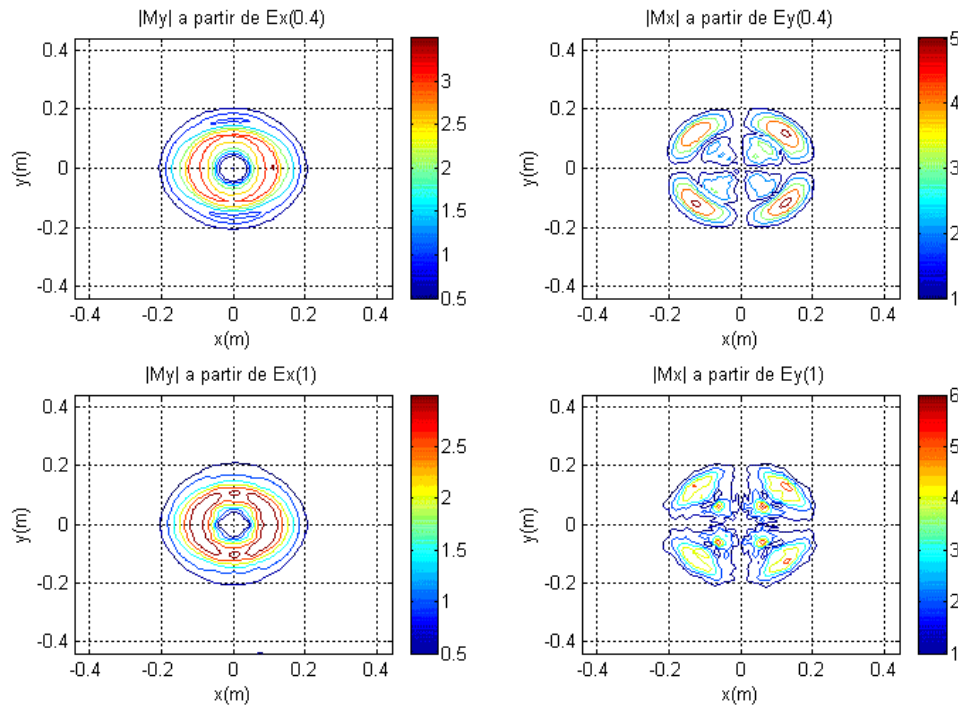


**Figura 4-4.** Distribuciones de campo vertical y sus correspondientes distribuciones óptimas de corrientes equivalentes magnéticas sobre el plano de la apertura (obtenidas a partir de la distribución compleja de campo).

En los resultados obtenidos puede apreciarse:

- En todos los casos se aprecia la extensión real de la apertura (con nulos en el interior y fuera de la circunferencia de radio 0.2. Véase la fotografía de la figura 4-6).
- La cadencia intencionada, acorde con el gálibo de la figura 4-6 de la distribución de corrientes magnéticas verticales para la generación de la radiación directiva.
- Una estrecha correlación entre las distribuciones de corriente obtenidas a partir de las medidas en las dos superficies; aunque también una relativa discrepancia.

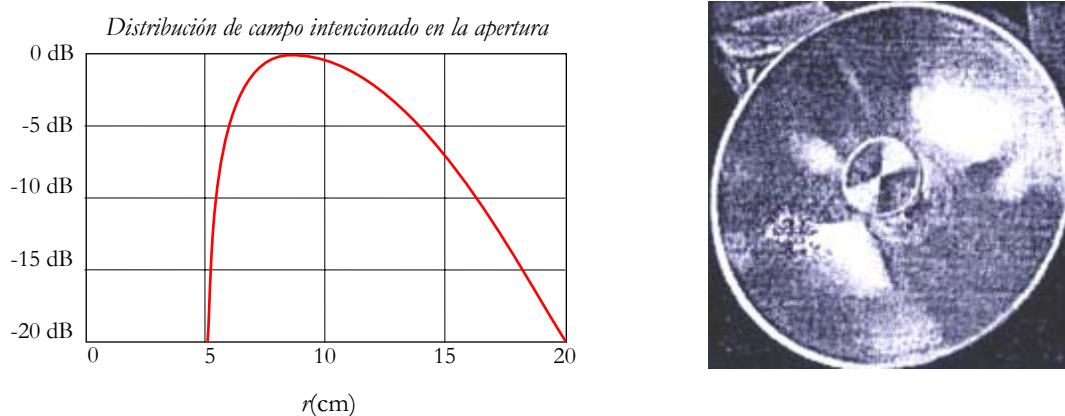
Para evaluar cuantitativamente la convergencia de los resultados a partir de cada conjunto de medidas, puede considerarse el campo engendrado en un dominio por las corrientes reconstruidas a partir del campo sobre el otro dominio. Por ejemplo, la *diferencia cuadrática media* entre el *módulo* del campo medido en la segunda superficie,  $E_x(1)$ , y el obtenido con las corrientes reconstruidas a partir de las medidas en la primera,  $M_y\{E_x(0.4)\}$  es de  $-15$  dB. Naturalmente puede haber una diferencia constante de fase, que es inessential, debida a la impracticidad de la sincronización en las medidas sobre ambas superficies. Sin embargo, si se corrige la distribución de corrientes, con una constante compleja, para que el máximo del campo generado coincida con el valor medio, entonces el error cuadrático medio de la distribución compleja es de  $-11,5$  dB (para lo cual se ha empleado una constante  $\epsilon=0.969e^{j1.944}$ ).



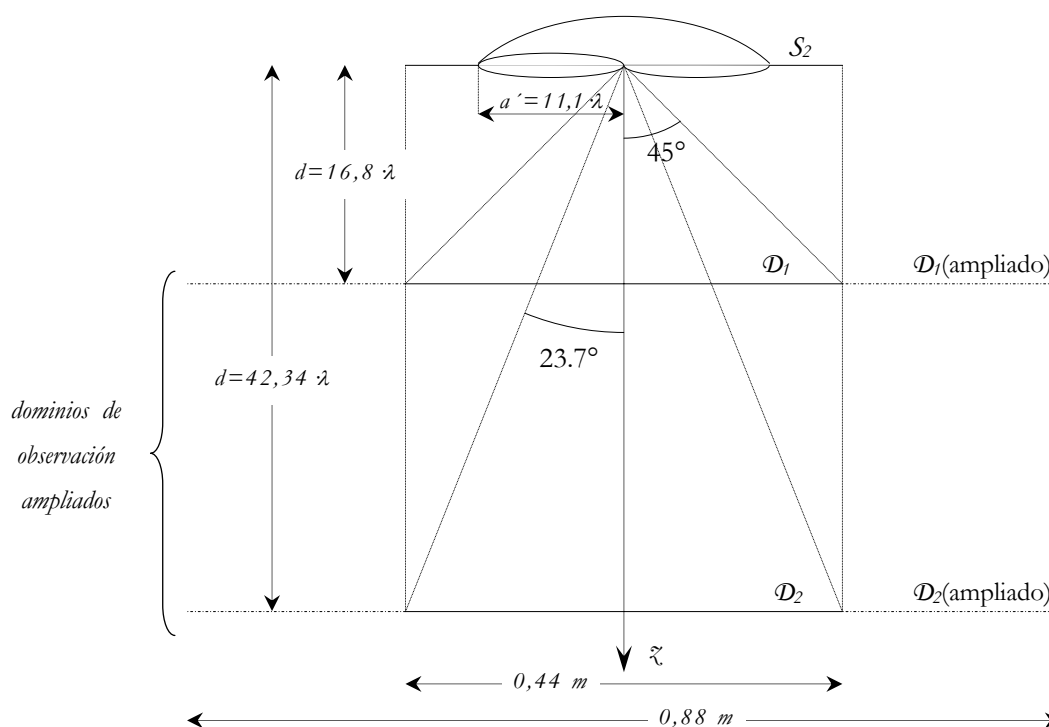
**Figura 4-5.** Distribuciones de corrientes equivalentes reconstruidas directamente a partir de las distribuciones de campo eléctrico horizontal y vertical en los dos dominios de observación.

Para la explicación de las discrepancias debe tenerse en cuenta dos diferencias entre las distribuciones de campo en los dos dominios de observación: 1) el primer dominio tiene una mayor visibilidad de la antena ( $\pm 45^\circ$  frente a  $\pm 23.7^\circ$ , ver figura 4-7); 2) la frecuencia espacial del campo sobre el segundo dominio es menor.

En suma, ocurre que la segunda superficie cuenta con menos información que la primera para la reconstrucción de las fuentes, que se traduce en distribuciones de corriente con menor ancho de banda (obsérvese cómo en la figura 4-5 los límites de la apertura se rebasan en las distribuciones obtenidas a partir de las medidas en el 2º dominio). Una manera para intentar reducir esta diferencia es aumentar artificialmente el dominio de observación empleando el procedimiento descrito en §3.2.3.



**Figura 4-6.** Iluminación nominal de la antena según fue diseñada y fotografía frontal de ésta.



**Figura 4-7.** Geometría del problema de ampliación del dominio de observación.

### 4.2.3 Aumento del dominio de observación

Según se indicó en §3.2.3 una manera de extender el dominio de observación consiste en añadir información a priori de las fuentes, aplicando alternativamente las medidas de campo eléctrico y la información disponible a cerca de las fuentes (que comúnmente, y en nuestro caso, se trata de la extensión efectiva de éstas). De esta forma puede reconstruirse parte de la radiación que quedará fuera del dominio de visibilidad. Como puede observarse en las figuras 4-3 y 4-4, la porción de radiación mutilada es más importante en el campo vertical (no intencionado), ya que éste es menos

directivo, siendo peor el caso del segundo dominio. Sin embargo en el campo eléctrico horizontal, debido a la directividad de la antena, la segunda superficie no parece dejar fuera demasiada proporción de radiación.

La aplicación del algoritmo de la figura 3-3 con una restricción de fuente que anula las corrientes allí donde:  $\{[x^2+y^2 > (0.205)^2] \mid [x^2+y^2 < (0.045)^2]\}$ , condujo a las distribuciones ampliadas de la figura 4-8 con los siguientes resultados de convergencia ( $\mathcal{E}_{\text{conv}}$ : diferencia cuadrática media entre iteraciones):

Campo	$\ E_{\text{ampl}} - E_m\ ^2 / \ E_m\ ^2$ (dB)	Nº de iteraciones	$\mathcal{E}_{\text{convergencia}}$	$\Delta\mathcal{E}_{\text{convergencia}}$
$E_x(0.4)$	-39,0	4	$3,0 \cdot 10^{-4}$	$9,9 \cdot 10^{-6}$
$E_x(1.0)$	-28,7	4	$3,0 \cdot 10^{-3}$	$8,8 \cdot 10^{-6}$
$E_y(0.4)$	-29,1	6	$2,4 \cdot 10^{-3}$	$7,5 \cdot 10^{-6}$
$E_y(1.0)$	-18,2	5	$3,6 \cdot 10^{-2}$	$4,7 \cdot 10^{-6}$

Tabla 4.1

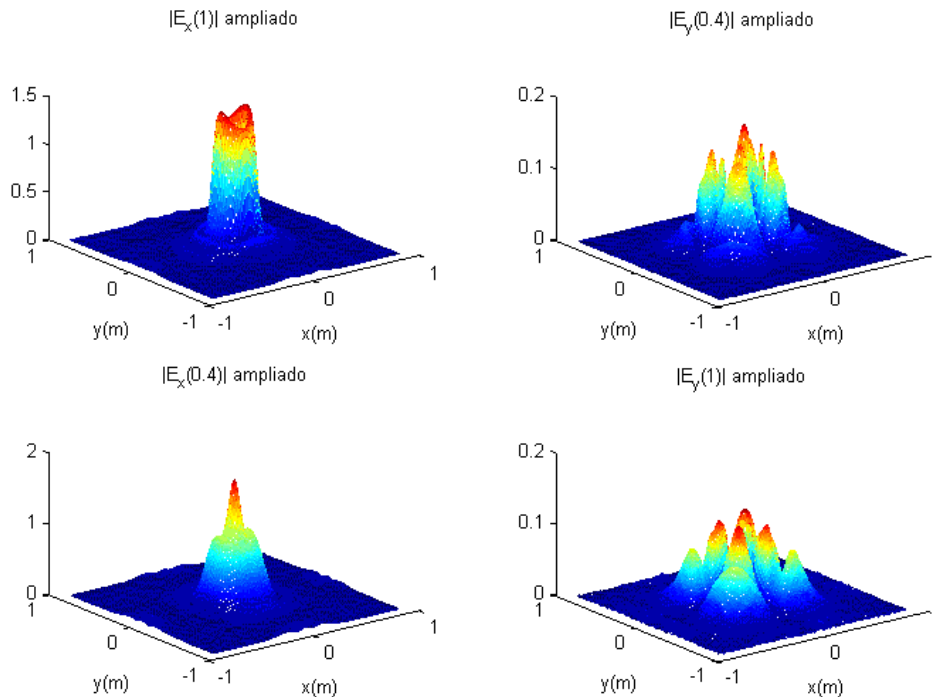


Figura 4-8. Dominios de observación ampliados artificialmente imponiendo reiteradamente las medidas y la extensión efectiva de la apertura.

Las distribuciones de corrientes asociadas a los campos eléctricos extendidos, empleando (4-2), se representan en las figuras 4-9 y 4-10. Aquí puede apreciarse una mayor proximidad cualitativa entre las distribuciones obtenidas a partir de cada uno de los dominios. Sin embargo, de nuevo se constata una diferencia que ahora –con más claridad– parece radicar en una mayor suavidad de la distribución obtenida a partir de las medidas en la segunda superficie que la obtenida a partir de las

medidas de la primera. Efecto que, naturalmente, está en relación con la diferencia entre los contenidos frecuenciales en Cada dominio de observación.

Desde un punto de vista cuantitativo podemos, de nuevo, evaluar la convergencia de cada pareja de distribuciones de fuentes en términos de la diferencia entre el campo medido en un dominio y el generado por las corrientes reconstruidas a partir de las medidas en el otro dominio. Para la misma pareja considerada en §4.2.2 se obtiene una aproximación en el módulo del campo de  $-17,6$  dB, que es un resultado notablemente mejor. La tabla 4.2 contiene el resto de los resultados de convergencia, que –como puede observarse- es óptimo en la predicción de la primera distribución de campo según las fuentes reconstruidas a partir de la distribución de campo sobre el segundo dominio ampliado.

Campo	$\ E_{\text{ampl}} - E_m\ ^2 / \ E_m\ ^2$ (dB)
$E_{x,1.0}\{M_x\{E_x(0.4)\}\}$	-17,6
$E_{x,0.4}\{M_x\{E_x(1.0)\}\}$	-19,8
$E_{y,1.0}\{M_x\{E_x(0.4)\}\}$	-12,6
$E_{y,0.4}\{M_x\{E_x(1.0)\}\}$	-12,1

Tabla 4.2

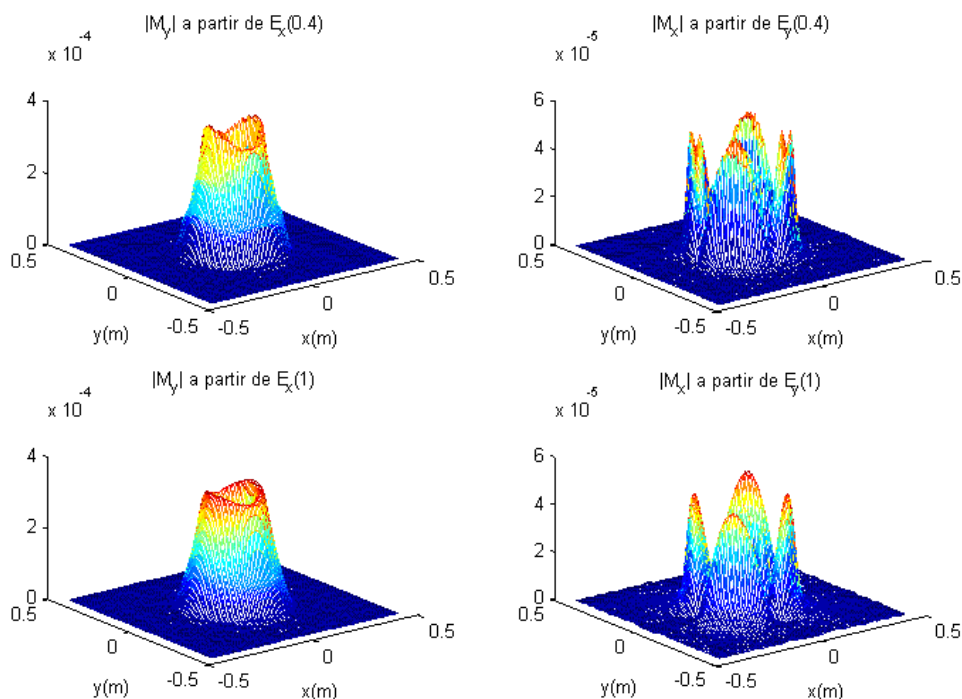
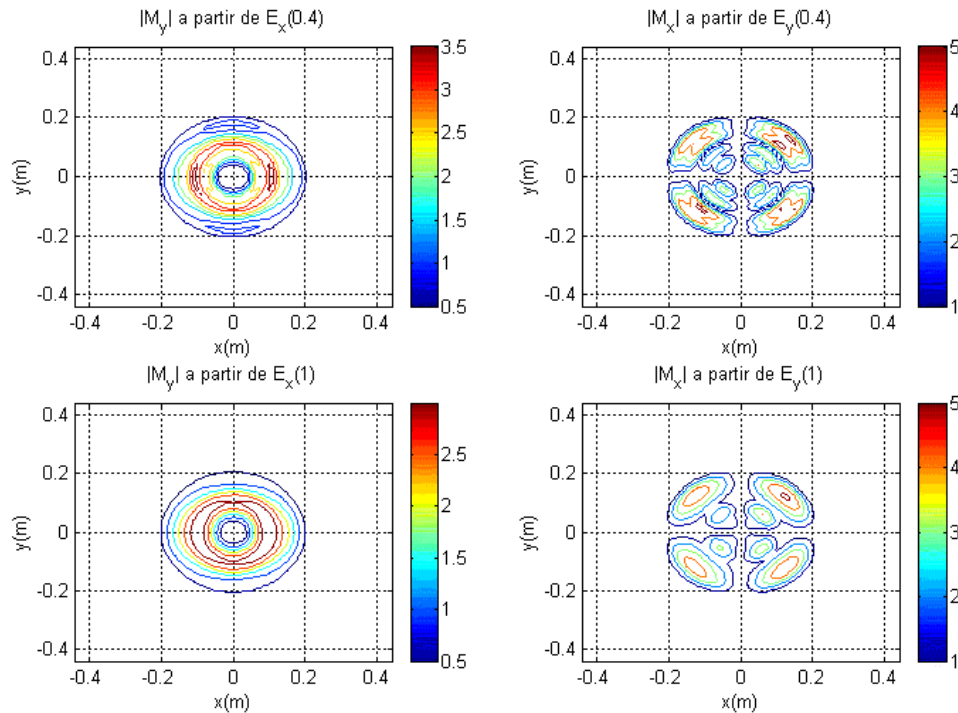


Figura 4-9. Corrientes magnéticas reconstruidas sobre la superficie de la apertura a partir del campo ampliado complejo (fig 4-8) sin imposición de restricciones. Equivalente a la figura 4-10.



**Figura 4-10.** Corrientes magnéticas reconstruidas sobre la superficie de la apertura a partir del campo ampliado complejo (fig. 4-8) sin imposición de restricciones. Equivalente a la figura 4-9.

#### 4.2.4 Problema inverso sin fase

Según se discutió en el capítulo tercero la unicidad de solución a partir de distribuciones de módulo del campo sólo puede garantizarse bajo ciertas condiciones. Veíamos allí que a tenor de la posición de los ceros, cuando se trata de distribuciones unidimensionales, o de la simetría de los polinomios irreducibles, cuando se habla de distribuciones superficiales, puede llegar a garantizarse la unicidad de solución a partir de una sola distribución de módulo del campo fijando un determinado soporte. No obstante, como allí se argumentaba, eso es algo que a no ser que manipulemos la distribución de campo agregando otra conocida, a priori no podemos garantizar. Dicho de otra manera, saber eso de antemano es más de lo que nuestro conocimiento empírico puede aportarnos. Se veía, en suma, que una condición suficiente para la unicidad de solución era el conocimiento sobre dos superficies de la distribución de módulo. Aunque en muchos casos podría bastar el módulo sobre un único dominio junto con alguna restricción adicional sobre otro, teniendo que ser ésta –por lo general– más restrictiva que la sola consideración del soporte exterior de las fuentes.

Se demostró allí que aunque el teorema de Hoenders formalmente fuera correcto, las conclusiones a las que se había llegado, por desgracia, no lo eran (podría decirse que fueron precipitadas) a pesar de haber ejercido una considerable influencia sobre otros investigadores [44; 153; 6; 137; 74; 75]. Se probó entonces que puede haber varias distribuciones del módulo de fuentes compatibles con una

cierta distribución de módulo de campo (de hecho, si la distribución es de extensión  $N$ , el número de éstas podría llegar a ser  $2^{N-1}$ ) y aquí veremos experimentalmente que en efecto es así.

Se emplearán los procedimientos iterativos de proyecciones sucesivas descritos en §3.3.2.1.a, en los que el criterio esencial de convergencia ha sido la distancia cuadrática (definida en 2-98) entre las distribuciones de campo (o de fuentes<sup>3</sup>) de las dos últimas iteraciones, normalizada respecto a la norma cuadrática de la última distribución. A este valor cuadrático se le ha denominado *error de predicción* aunque, en realidad, nos proporciona una medida de la coherencia entre la solución obtenida y los datos empleados para alcanzarla. Su evolución está representada junto con los resultados gráficos. Adicionalmente, para poner fin al proceso iterativo, se ha impuesto un límite inferior a la variación de dicho error y uno superior par el número de iteraciones. No obstante, para valorar de forma cuantitativa la convergencia hacia la verdadera solución se ha evaluado el *error cuadrático* de las dos distribuciones de módulo del campo predichas respecto a las medidas, habida cuenta que, según se demostró en § 3.3.1., sólo hay una solución compatible con dos distribuciones de módulo.

Se considerará primero el caso de una sola distribución de módulo partiendo de varias hipótesis y a continuación se irá añadiendo más información hasta acabar en el procedimiento de proyecciones sucesivas generalizado. En los últimos casos se evaluará además la calidad de la reconstrucción de la distribución de fase sobre los tres dominios.

#### 4.2.4.1 No unicidad de solución a partir de una distribución de módulo

El procedimiento iterativo que aquí se usa consiste en una reducción extrema del generalizado en la figura 3-15, considerando sólo medidas en un dominio,  $|E(0.4)|$ ; ninguna restricción para las fuentes y la restricción de ancho de banda antes descrita para el dominio del campo (§4.2.1). Puesto que según se argumentó en §4.2.2 el primer dominio contiene más información acerca de las fuentes, se ha escogido éste para realizar la inversión.

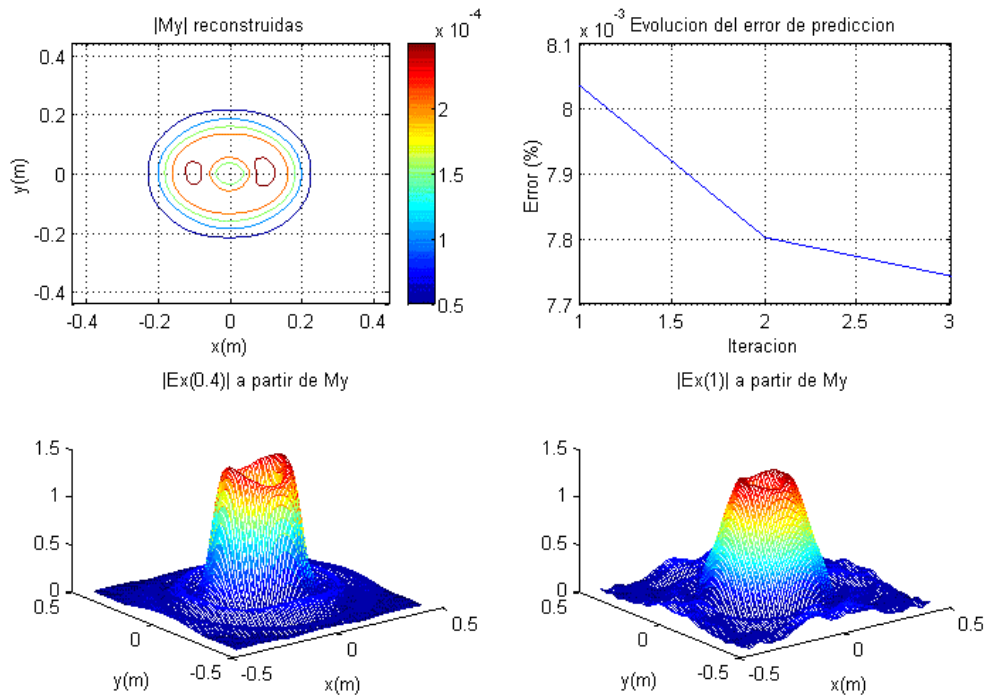
Si como se dijo en el capítulo 3º, este problema carece de solución única, entonces la solución alcanzada dependerá de la hipótesis de partida y debiera además conseguirse una buena coherencia entre la distribución de módulo predicha y la medida. Las figuras 4-11 a 4-13 recogen los resultados correspondientes a tres hipótesis iniciales diferentes:

- Distribución homogénea sobre todo el dominio de fuentes,  $\{|x| < 0.44\} \cap \{|y| < 0.44\}$ ;
- Distribución homogénea sobre la apertura de la antena,  $x^2 + y^2 < 0.205^2$ ;
- Distribución homogénea sobre la apertura efectiva,  $\{x^2 + y^2 < 0.205^2\} \cap \{x^2 + y^2 > 0.045^2\}$ ;

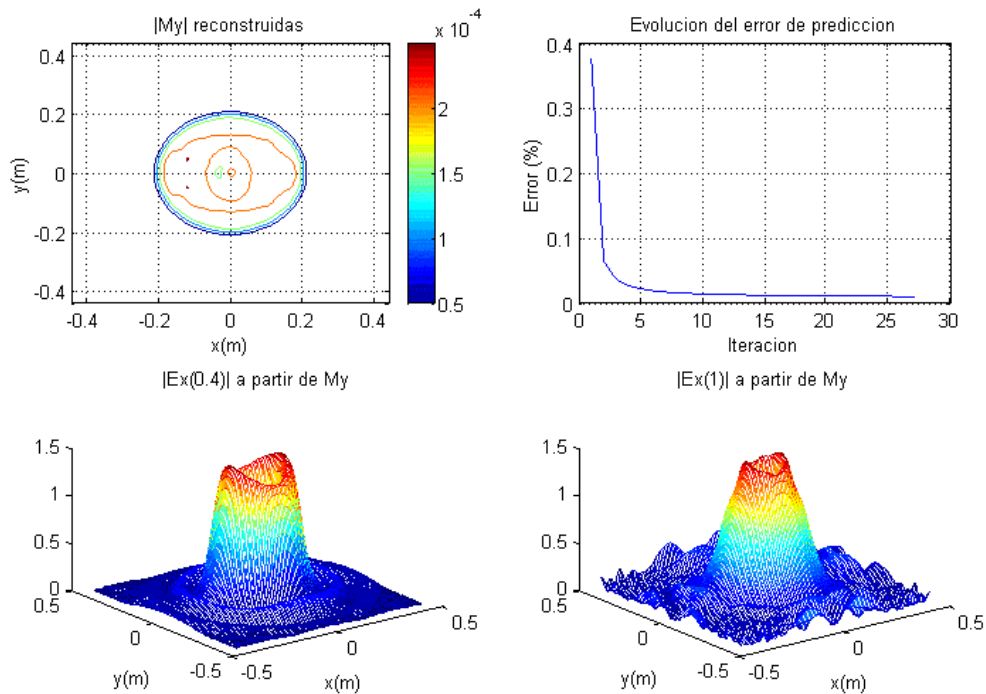
---

<sup>3</sup> Obsérvese que para distribuciones de campo lejano, en virtud del teorema de Parseval, las distancias cuadráticas en el dominio de las fuentes y en el dominio del campo deben ser idénticas.

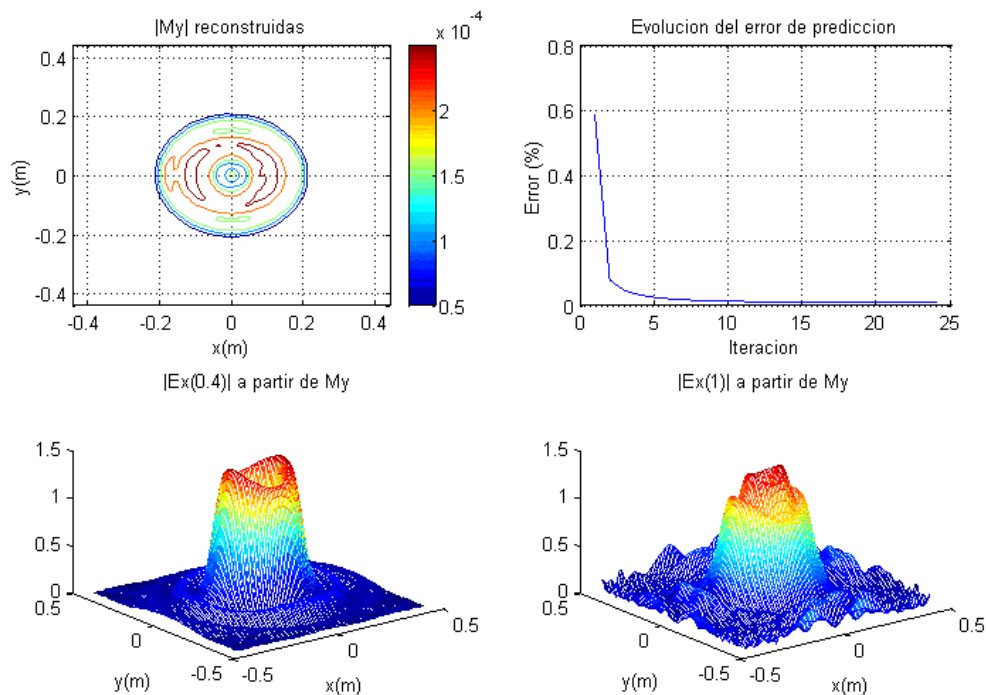




**Figura 4-11.** Reconstrucción de corrientes equivalentes a partir de *una sola distribución* de módulo ( $|E_x(0.4)|$ ); *sin aplicar restricciones* sobre el dominio de la antena y partiendo de una hipótesis de distribución homogénea sobre todo el dominio de la antena,  $\{|x| < 0.44\} \cap \{|y| < 0.44\}$ .



**Figura 4-12.** Reconstrucción de corrientes equivalentes a partir de *una sola distribución* de módulo ( $|E_x(0.4)|$ ); *sin aplicar restricciones* sobre el dominio de la antena y partiendo de una hipótesis de distribución homogénea en la *apertura*,  $x^2 + y^2 < 0.205^2$ , y nula fuera.



**Figura 4-13.** Reconstrucción de corrientes equivalentes a partir de *una sola distribución* de módulo ( $|E_x(0.4)|$ ); *sin aplicar restricciones* sobre el dominio de la antena y partiendo de una *hipótesis* homogénea en la *apertura efectiva*,  $\{x^2+y^2 < 0.205^2\} \cap \{x^2+y^2 > 0.045^2\}$ , y nula fuera.

Desde un punto de vista cuantitativo los errores cuadrático medios obtenidos en la aproximación de la distribución de módulo sobre ambos dominios:

Hipótesis de partida: $f_0$	$\epsilon^2\{ E_x(0.4) \}$ (dB)	$\epsilon^2\{ E_x(1.0) \}$ (dB)
Homogénea en $S$	-41, 0	-11, 3
Homogénea en la <i>apertura</i>	-39, 7	-9, 5
Homogénea en la <i>apertura efectiva</i>	-40, 0	-10, 5

**Tabla 4.3**

Tanto si nos fijamos en estos resultados como si comparamos las figuras anteriores con las distribuciones originales de la figura 4-3, resulta evidente que aunque la distribución sobre el primer dominio es claramente discrepante y en los tres casos distinta. Lo mismo ocurre con la distribución de fuentes. En definitiva, es del todo evidente que se trata de soluciones diferentes para una misma distribución de módulo sobre una sola superficie. Así, podremos hablar de toda una multiplicidad de soluciones compatibles con una única distribución de módulo, y no sólo dos como sostenía Hoenders.<sup>4</sup>

<sup>4</sup> Aunque Sanz [138], en su teorema 7º sostenga acertadamente que en el caso N-dimensional ( $N \geq 2$ ) prácticamente todas las distribuciones tienen solución única a partir del módulo de su transformada. Debe

#### 4.2.4.2 Métodos cuasi-Gerchberg-Saxton

En los siguientes ejemplos se consideran restricciones cada vez más exigentes sobre el dominio de las fuentes. En lo que respecta al campo, además de la distribución de módulo sobre el primer dominio, se sigue imponiendo la restricción de ancho de banda. Si estuviéramos aportando, en el proceso de reconstrucción, la distribución de módulo de las fuentes entonces el algoritmo correspondería con el de *Gerchberg-Saxton*. En nuestro caso aportamos menos información, por esta razón se han denominado *cuasi-Gerchberg-Saxton*.

Según se discutió en §3.3.1.5 un soporte de las fuentes finito y compacto no es suficiente para garantizar la unicidad de solución, sin embargo, cuando el soporte en lugar de ser compacto tiene una frontera interior (dentro de la cual la distribución es nula), entonces para la mayoría de los casos la solución es única (véase nota 31 de §3). Precisamente en esta propiedad consistía la propuesta de Greenaway para la resolución del problema inverso (§3.3.2.1 [55]).

##### a) Restricción de soporte finito exterior

Al igual que decíamos antes, si en efecto la solución no fuera única cuando sólo se impone la condición de un soporte finito compacto, entonces partiendo de diferentes hipótesis debería llegarse a soluciones distintas. En este caso partiremos de dos hipótesis diferentes: a) distribución homogénea sobre la apertura,  $\{x^2+y^2 < 0.205^2\}$ ; b) distribución homogénea sobre la apertura efectiva,  $\{x^2+y^2 < 0.205^2\} \cap \{x^2+y^2 < 0.045^2\}$

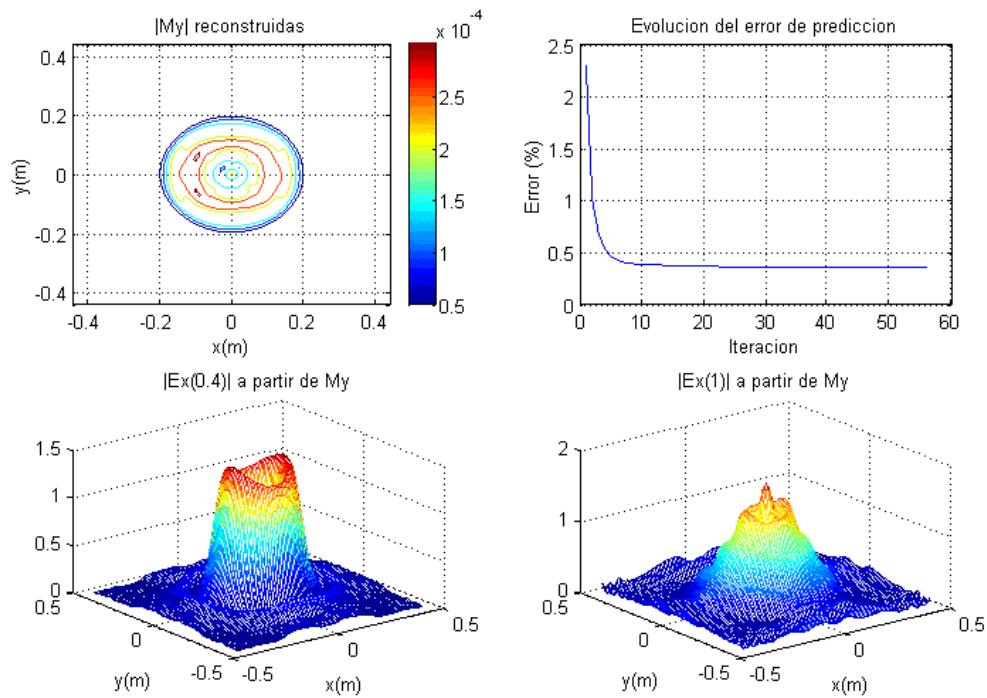
Hipótesis de partida: $f_0$	$\varepsilon^2\{ E_x(0.4) \}$ (dB)	$\varepsilon^2\{ E_x(1.0) \}$ (dB)
Homogénea en la <i>apertura</i>	-24,5	-13,5
Homogénea en la <i>apertura efectiva</i>	-24,4	-15,0

**Tabla 4.4**

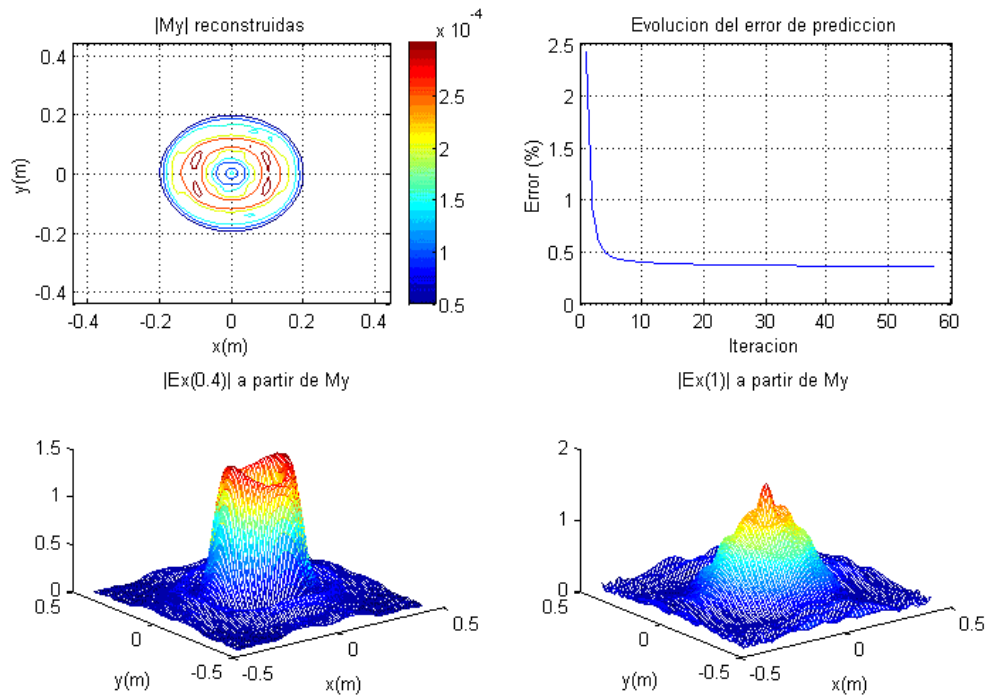
En las figuras 4-14 y 4-15 se representan los resultados obtenidos para estas dos hipótesis iniciales. El error cuadrático de convergencia de la solución obtenida con las medidas está recogido en la tabla 4.4. Si comparamos estos resultados con las distribuciones originales de la fig.4-3 se observa un mayor parecido que las obtenidas anteriormente. El error en el primer dominio es mayor y en el segundo menor, con lo que el error neto es inferior, pero desde un punto de vista cualitativo resulta

entenderse que ese “prácticamente” está en relación con el grado máximo de ambigüedad que resultaría de la extensión al caso n-dimensional de la teoría de Walter (§3.3.1), que para distribuciones superficiales sería  $2^{M_1+M_2}$ , donde  $M_1, M_2$  es el orden de la distribución, en nuestro caso:  $89 \times 89$ . Es decir, aun nos queda un gran margen para no poder hablar, en la práctica, de solución única.

aun evidente que se trata de soluciones distintas a la búsqueda. Lo cual nuevamente corrobora la no unicidad de solución a partir de una sola distribución de módulo.



**Figura 4-14.** Reconstrucción de corrientes equivalentes a partir de una sola distribución de módulo una hipótesis de distribución homogénea en la apertura y nula fuera. ( $|E_x(0.4)|$ ); imponiendo la restricción exterior de soporte finito,  $f \neq 0 / \{x^2 + y^2 < 0,205^2\}$ . A partir de

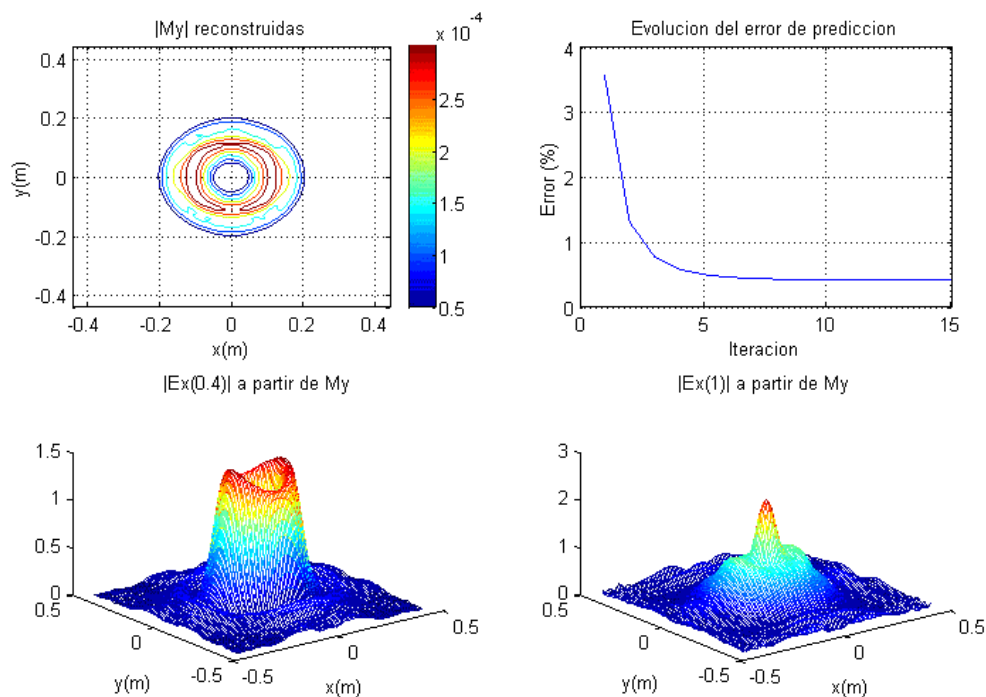


**Figura 4-15.** Reconstrucción de corrientes equivalentes a partir de *una sola distribución* de módulo ( $|E_x(0.4)|$ ); imponiendo la restricción exterior de soporte finito,  $f(x,y) \neq 0 / \{x^2+y^2 < 0,205^2\}$ . A partir de una hipótesis de distribución homogénea en la *apertura efectiva*,  $\{x^2+y^2 < 0,205^2\} \cap \{x^2+y^2 > 0,045^2\}$ , y nula fuera.

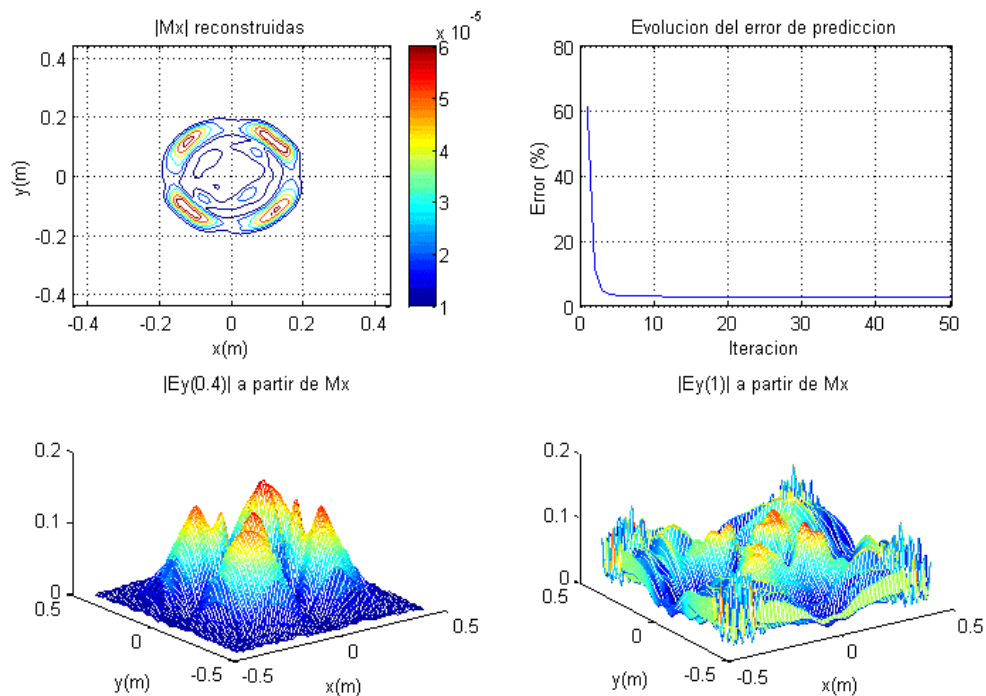
*b) Restricción de soporte finito exterior e interior (Greenaway)*

Cuando el soporte de las fuentes no es compacto, como es el caso, entonces su conocimiento a priori puede conducirnos a la solución en la mayor parte de los casos. La figura 4-16 muestra el resultado obtenido partiendo de una distribución homogénea, que es muy parecido al que se alcanza con otros puntos de partida. Cuantitativamente el error cometido sobre la primera superficie es de  $-24$  dB y sobre la segunda  $-16$  dB, que es mejor que los resultados anteriores. Pero es aun más importante la diferencia cualitativa con estos, que es observada entre las figuras 4-15 (y anteriores) y 4-16 respecto a las distribuciones originales. Se ve ahora que la solución obtenida, salvo errores sí se corresponde con la deseada.

Cuando la reconstrucción se intenta sobre el campo vertical, más ruidoso y del que –por ser menos directivo– contamos con menos información efectiva, se obtienen los resultados de la figura 4-17 a los que corresponden un error cuadrático de  $-15,5$  dB sobre la primera superficie  $-8$  dB sobre la segunda. También, en este caso a pesar de los malos resultados cuantitativos se observa cómo las formas de la distribución, así de las corrientes como del campo sobre la segunda superficie (salvo en los bordes), tienden a las originales (fig. 4-4 y 4-5).



**Figura 4-16.** Reconstrucción de corrientes equivalentes a partir de *una sola distribución* de módulo ( $|E_x(0.4)|$ ); imponiendo la *restricción de soporte finito* sobre la *apertura efectiva*,  $f(x,y) \neq 0 / \{x^2+y^2 < 0,205^2\} \cap \{x^2+y^2 < 0,045^2\}$ .



**Figura 4-17.** Reconstrucción de corrientes equivalentes a partir de *una sola distribución* de módulo ( $|E_y(0.4)|$ ), imponiendo la *restricción exterior de soporte finito*,  $f(x,y) \neq 0 / \{x^2+y^2 < 0,205^2\}$ .

#### 4.2.4.3 Métodos generalizados de Proyecciones Sucesivas

Finalmente cuando se usan dos distribuciones de módulo del campo eléctrico la solución ha de ser única, según el corolario 3 de §3.3.1. Se probará primero la imposición de solamente las medidas de módulo, para acabar imponiendo por añadidura la restricción del soporte compacto de las fuentes, completando así el método generalizado de proyecciones sucesivas (MPS).

Al igual que ocurría en el último caso las hipótesis iniciales deparan resultados casi idénticos a los representados, variando fundamentalmente la evolución del error en las primeras iteraciones (por esta razón no se indica a pie de figura la hipótesis de partida, aunque en los casos representados se haya partido de una distribución uniforme). Los errores cuadráticos de las distribuciones de campo alcanzados en cada caso se recogen en la tabla 4.5.

Método	Campo	$\varepsilon^2\{ E_x(0.4) \}$ (dB)	$\varepsilon^2\{ E_x(1.0) \}$ (dB)	$\varepsilon^2\{ M \}$ (dB)
Sin restricción de fuentes	$E_x$	-42,8	-22,8	-14,8
	$E_y$	-32,5	-15,7	-4,0
Con restricción de fuentes	$E_x$	-22,3	-19,0	-20,5
	$E_y$	-13,3	-12,4	-8,0

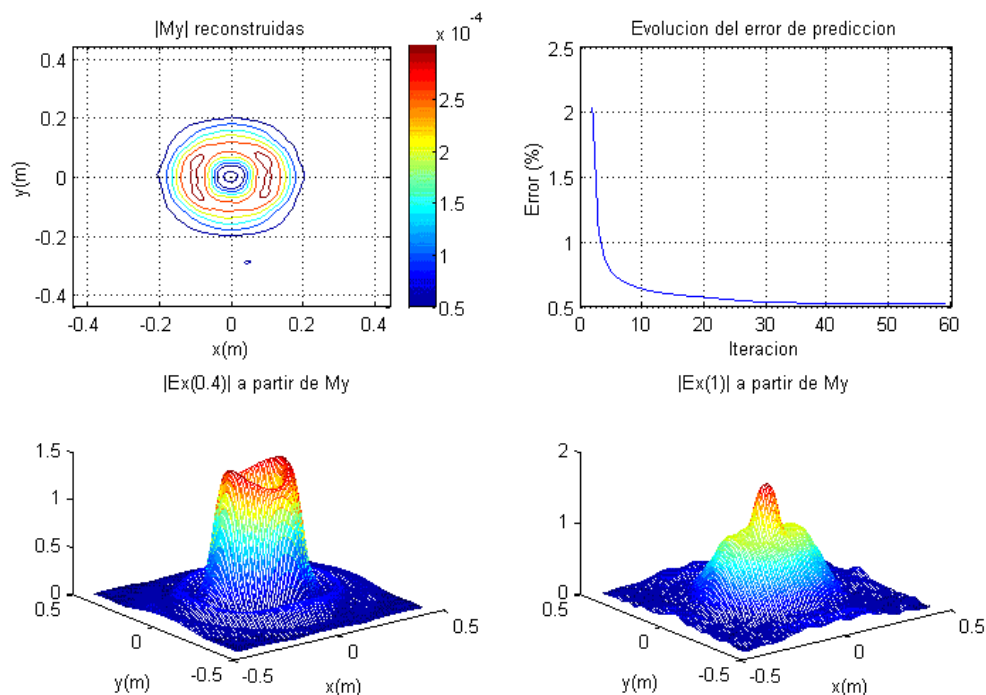
Tabla 4.5

Si bien según los errores de las distribuciones de campo pudiera llegar a decirse que en balde, o en perjuicio, hemos introducido la restricción de fuentes, se observa por una parte, que las diferencias con las distribuciones reconstruidas a partir de módulo y fase en §4.2.3. son menores cuando se imponen la restricciones, por otra parte, se verá que cualitativamente la solución es mejor en este caso, quedando de hecho sus límites cuantitativos ajustados a los que cabe esperarse en la convergencia entre las dos distribuciones (véase la tabla 4.2). La prueba de ello la encontramos cuando se compara la distribución de fase predicha con la medida, obteniéndose una mayor proximidad cuando se aplican las restricciones que cuando no se hace (figuras 4-18 y 4-22), en otras palabras la reconstrucción de la fase ha sido mejor y con ella la de las distribuciones complejas.

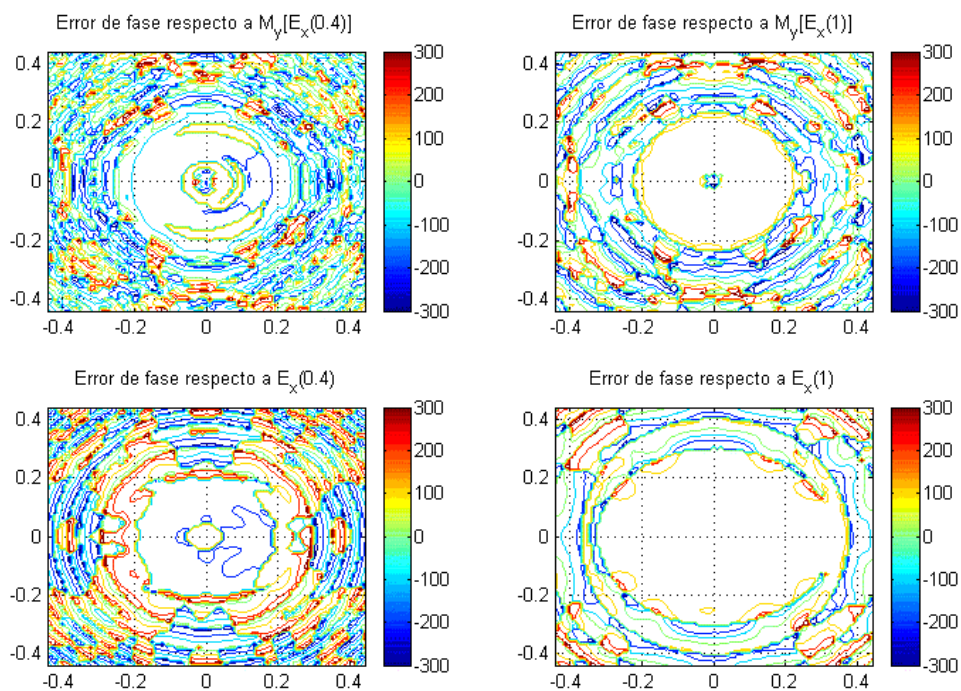
##### a) Sin restricción sobre las fuentes (método de Anderson)

A la luz de los resultados reunidos en las figuras 4-18 a 4-20 puede decirse sin ambages que las distribuciones alcanzadas por este procedimiento tienden hacia la solución deseada. El error de fase, representado en la figura 4-19, es moderado para las fuentes sobre su soporte (es decir, allí donde es significativo) y en el campo para un ángulo de observación de  $\pm 26,5^\circ$  sobre el primer dominio y de  $\pm 19^\circ$  sobre el segundo.

Inclusive en el campo vertical, fig.4-20, del cual no cabe esperarse una buena convergencia entre las dos distribuciones, se obtiene un resultado en el que pueden reconocerse las distribuciones originales.

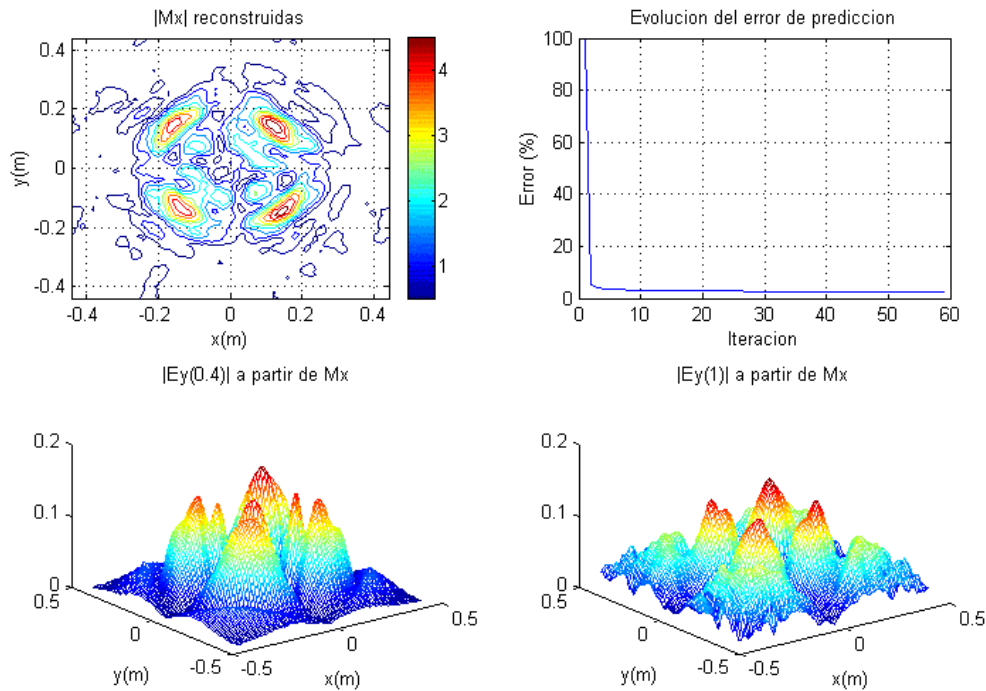


**Figura 4-18.** Reconstrucción de corrientes equivalentes a partir de *dos distribuciones* de módulo del campo eléctrico horizontal, sin aplicar restricción de soporte finito.



**Figura 4-19.** Error de fase correspondiente a la reconstrucción de la figura 4-18. Donde la distribución de corrientes se compara con las distribuciones de la figura 4-10; y la distribución de campo con las medidas de campo complejo.



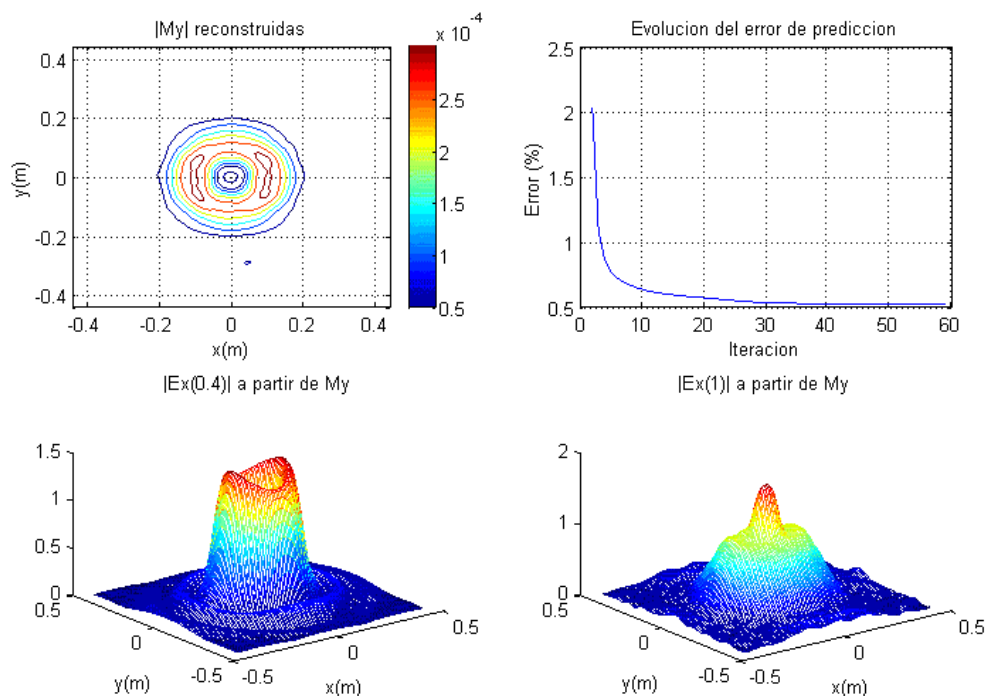


**Figura 4-20.** Reconstrucción de corrientes equivalentes a partir de *dos distribuciones* de módulo del campo eléctrico vertical, sin aplicar restricción de soporte finito.

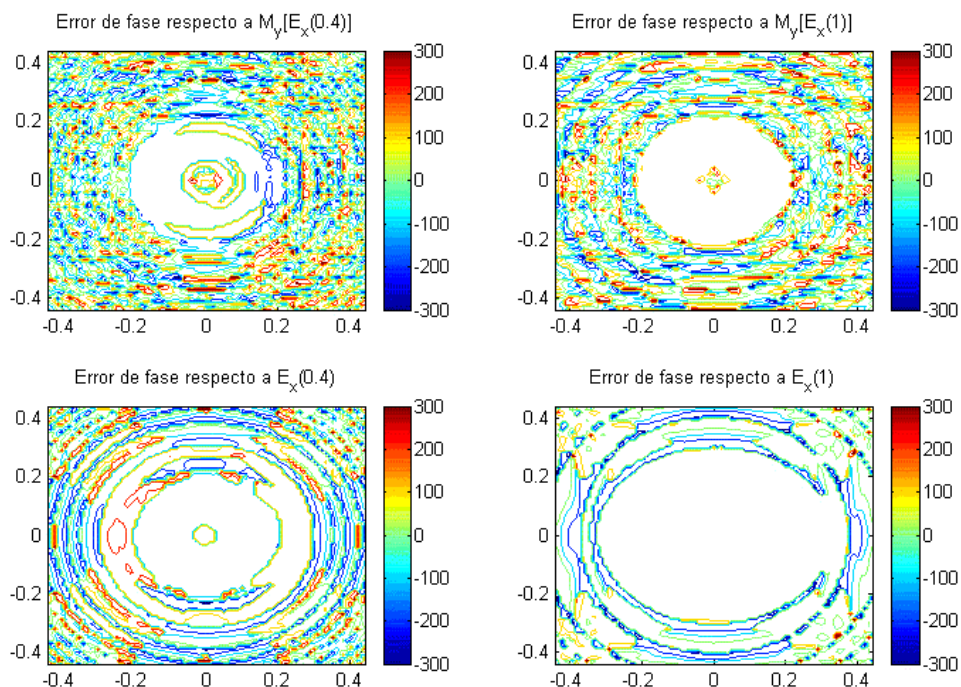
*b) Con restricción sobre las fuentes (MPS)*

Cuando finalmente se imponen restricciones sobre el dominio de las fuentes se observa que las distribuciones reconstruidas tienden de forma óptima hacia la solución deseada, ya que por una parte las distribuciones de fase, como puede observarse en las figuras 4-22 y 4-23, son ahora más parecidas, y por otra parte las distribuciones de fuentes son más parecidas a las que se reconstruyeron a partir de módulo y fase §4.2.3.

De nuevo se observa que el error de fase es pequeño dentro de la apertura efectiva (es decir, allí donde tiene importancia), siendo ahora menor que en el caso anterior con una desviación típica de  $11.7^\circ$  respecto a  $M_y \{E_x(0.4)\}$  (corrientes reconstruidas a partir del campo en la primera superficie), y de  $8.9^\circ$  respecto a  $M_y \{E_x(1)\}$  (que según los resultados de la tabla 4.2 parece ser la mejor solución). Para un ángulo de observación menor que  $\pm 26,5^\circ$  en el primer dominio y  $\pm 19^\circ$  en el segundo, la desviación típica del error de fase es ahora menor que  $10^\circ$ .



**Figura 4-21.** Reconstrucción de corrientes equivalentes a partir de *dos distribuciones* de módulo del campo eléctrico horizontal; imponiendo la restricción exterior de soporte finito,  $f(x,y) \neq 0 / \{x^2+y^2 < 0,205^2\}$ .



**Figura 4-22.** Error de fase correspondiente a la reconstrucción de la figura 4-21. Donde la distribución de corrientes se compara con las distribuciones de la figura 4-10 y la distribución de campo con las medidas de campo complejo.

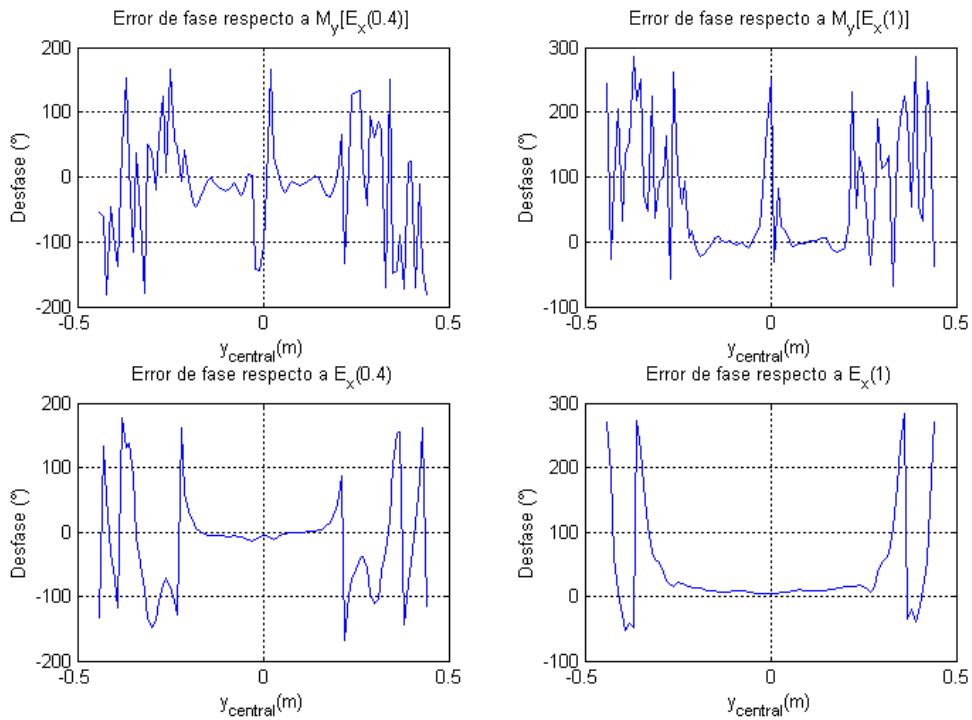


Figura 4-23. Error de fase de la figura 4-23 particularizado a lo largo de la recta  $y=0$  (diámetro horizontal de la antena).

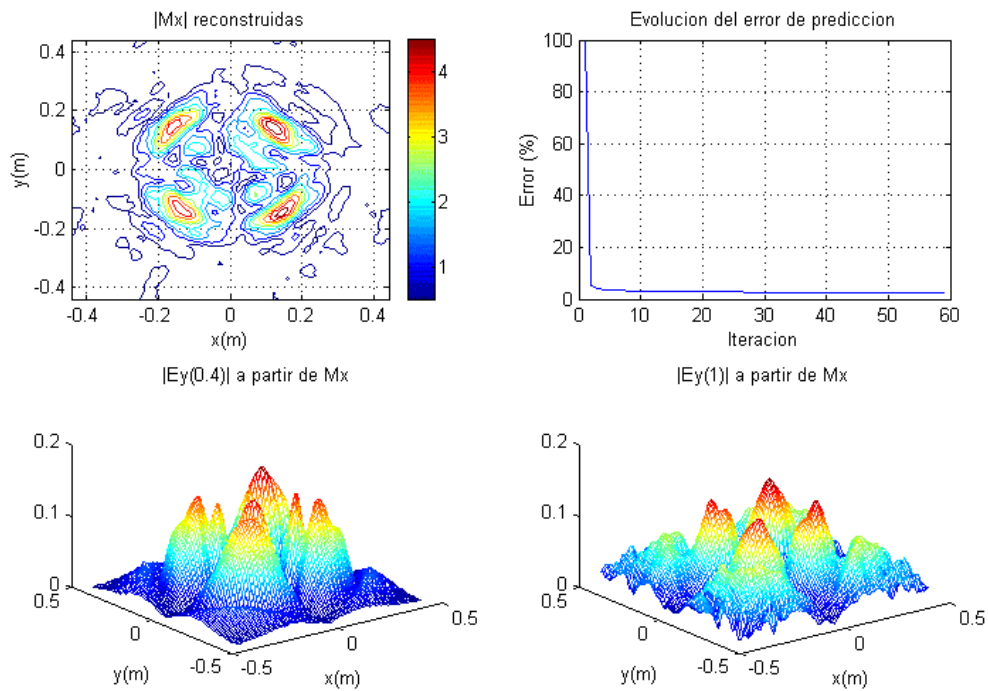


Figura 4-24. Reconstrucción de corrientes equivalentes a partir de *dos distribuciones* de módulo del campo eléctrico horizontal, imponiendo la *restricción exterior de soporte finito*,  $f(x,y) \neq 0 / \{x^2+y^2 < 0,205^2\}$ .

### 4.3 ANTENA DE AGRUPACIÓN DE RANURAS

El segundo ejemplo consiste en la caracterización de una antena de agrupación de, denominada ERS-1, diseñada para operar a 5308 MHz en polarización horizontal, cuya geometría está representada en la figura 4-25 a. Como puede observarse está constituida por tiras de ranuras desplazadas entre filas consecutivas (de modo que al reconstruir las corrientes en sentido horizontal no podrán distinguirse los espacios entre ranuras). Las medidas, realizadas en los laboratorios del Grupo de Radiación de la Universidad Politécnica, permitieron la adquisición esférica del campo complejo (tanto polar como contrapolar) a 5380 MHz, a una sola distancia y sobre dos direcciones acimutales ( $\varphi=0^\circ$  u horizontal,  $\varphi=90^\circ$  o vertical), tal y como se ilustra en la figura 4-25b. Gracias a que la distribución de corrientes es separable en las dos direcciones de agrupación, la utilización de esta pareja de medidas, horizontal y vertical, puede emplearse para reconstruir respectivamente la distribución de corrientes horizontal y vertical para ambas componentes del campo (polar y contrapolar).

La disponibilidad del diagrama de radiación lejano obtenido mediante expansión de modos esféricos (usando el programa TICRA), nos permite por una parte comparar la predicción de éste cuando se usa la distribución de fuentes reconstruidas, por otra, emplearla como medida ficticia a una distancia lejana para el uso de los algoritmos basados en medidas sobre dos dominios. No obstante, al igual que en el ejemplo anterior, primero se analizará la dimensión del problema electromagnético y a continuación se irán probando los principales métodos expuestos en el capítulo 3º: primero usando la fase; después una única medida de módulo; a continuación dos medidas de módulo sin restricciones ; y finalmente con restricciones.

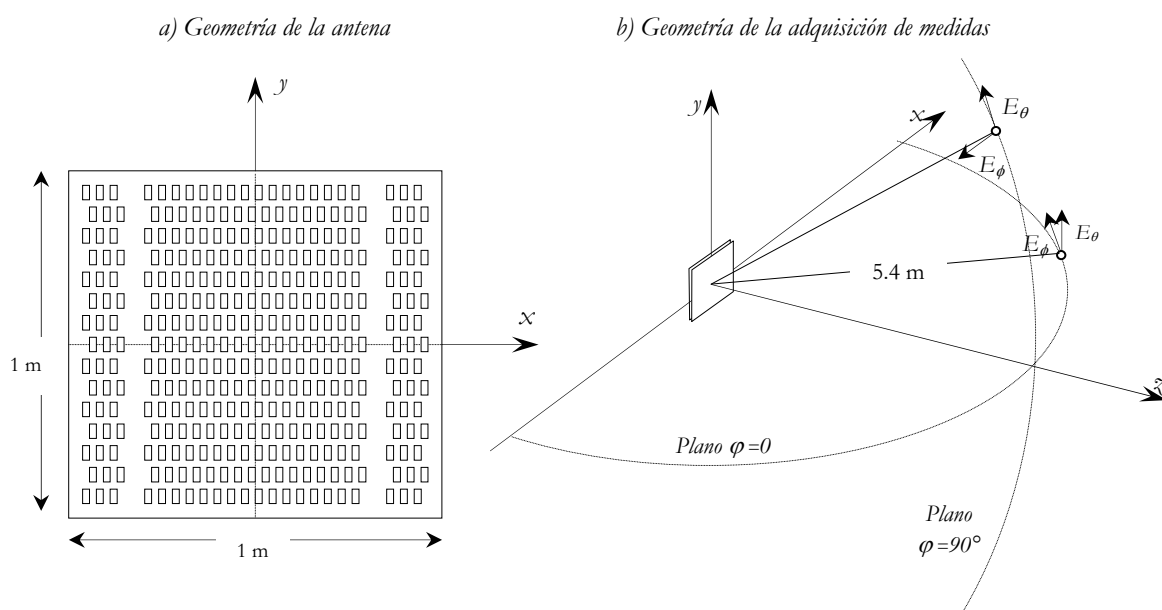


Figura 4-25. Geometría del problema inverso para la antena de agrupación de ranuras

### 4.3.1 Dimensión del problema electromagnético

Considerando que el problema es separable la dimensión del problema electromagnético dependerá esencialmente de la máxima dimensión eléctrica unidimensional, es decir  $17.7\lambda$ . Recurriendo a los resultados de las figuras 2-15 y 2-16, si se pretende un error de truncamiento inferior a  $10^{-4}$  (-40 dB), la esfera ampliada será de radio:  $a' = a + \delta(a) = (17,7/2 + 3,2)\lambda = 12 \cdot \lambda$ ; y el factor de sobremuestreo sobre la esfera ampliada (y para la aplicación del teorema 2):  $\chi(a) = 1,2$ .

#### 4.3.1.1 Distribución de dipolos hercianos

Al aplicar el teorema de equivalencia sobre la superficie  $z=0$  (conductor eléctrico), el problema directo se reduce a la caracterización sobre el hemiespacio  $z>0$  (que es el rango al que se restringen las medias), y el inverso a la determinación de las corrientes equivalentes magnéticas. Por tanto, la dimensión de estos problemas unidimensionales será (§2.4.1-teoremas 2 y 3):  $\pi \cdot 12 \cdot \lambda \cdot \chi / (\lambda/2) \cong 91$ , que corresponde con el mínimo número de muestras necesario para la caracterización del como con la precisión prefijada. Como en nuestro caso la geometría es plana, podemos plegar la distribución de los 91 dipolos magnéticos de Hertz a la superficie  $z=0$ , que naturalmente habrán de equiespaciarse y, en virtud de la simetría de la antena, disponerse simétricamente respecto al origen: sobre el eje  $x$  para el corte acimutal de  $0^\circ$ ; y sobre el eje  $y$  para el de  $90^\circ$ .

#### 4.3.1.2 Frecuencia espacial del campo radiado

A tenor del primer teorema de muestreo, la frecuencia espacial que cabe esperarse sobre los dominios de muestreo, habida cuenta que se encuentran a  $95,5 \lambda$  (donde los modos evanescentes pueden darse por extinguidos, fig. 2-11), será como máximo  $\beta$ . Es decir, la distancia entre valores independientes del campo será como poco  $\lambda/2$ , que corresponde con una separación angular de  $\lambda/(2 \cdot 5,41) = 0,00523 \text{ rad} = 0,300^\circ$  (de modo que en una semivuelta bastarían 600 muestras). Como en las medidas realizadas se recogieron 1000 muestras, ahora se ve que es más de lo necesario, y que por tanto conviene filtrarse de acuerdo a los límites sugeridos por el teorema 3:  $\Delta_{\min} = \lambda d/2$   $a' \chi = \lambda \cdot 95,5 / (2 \cdot 12 \cdot 1,2) = 0,187 \text{ m} |_{\text{esfera}} \cong 0,0346 \text{ rad} = 1,98^\circ$ . Con lo cual, la frecuencia espacial discreta (respecto al número total de muestras, 1000) de la distribución de campo procedente de la antena  $k_{\max} = (N/2) / (n^\circ \text{ muestras suficientes}) = 500 / (180/1,98) = 5,5$ .

### 4.3.2 Problema inverso con fase

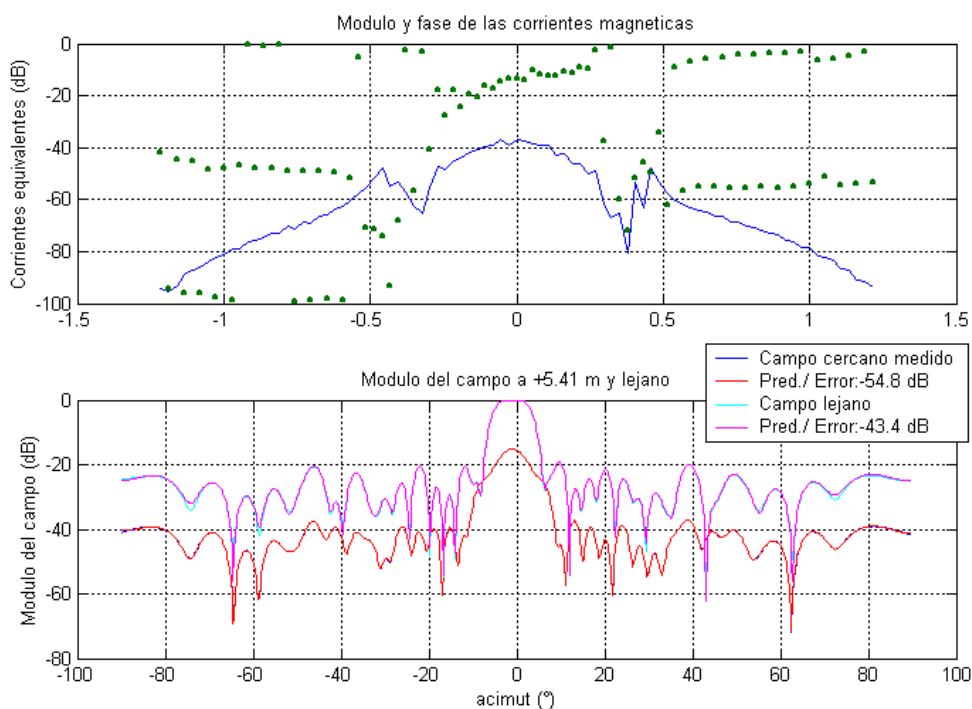
Según se indicó, se comienza considerando el problema inverso a partir de las distribuciones de campo complejo. Dado el paralelismo de los dominios de observación actuales con los del ejemplo segundo del capítulo 2, la definición del operador directo es idéntica a la allí indicada. El procedimiento inverso se reducirá a la inversión de dicho operador, tal y como se expuso en §3.2,

que de acuerdo con la dimensión del problema (se han empleado 91 dipolos de Hertz con un sobremuestreo  $\chi=1.05$ ), no es menester el recurso a los métodos numéricos. Los resultados ilustrados en las figuras indican:

- La distribución de corrientes reconstruidas (en *azul* y trazo *continuo*: el *módulo*; en *verde* y *discontinuo*: la *fase*).
- Las distribuciones de campo próximo (a 5,41m) medida, en *azul*; correspondiente a la distribución de fuentes reconstruida, en *rojo*; lejano obtenido mediante expansión modal, en *cian*; y correspondiente a las fuentes, en *violeta*.
- Los errores cuadráticos medios, en dB: del campo reconstruido respecto al medido; y del campo lejano respecto al obtenido por expansión modal (usando el programa de Ticra [156]).

En la reconstrucción a partir de las medidas copolares, fig. 4-26 y 27, puede observarse el decaimiento fuera de la superficie de la antena  $\{-0,5\dots 0,5\}$ , y en el caso horizontal pueden también apreciarse dos mínimos simétricos respecto al origen antes del borde de la antena, correspondientes a las franjas verticales libres de ranuras (que pueden verse en la figura 4-25<sup>a</sup>). En el problema vertical, como era de esperar, pueden distinguirse las posiciones de las ranuras.

Para la radiación contrapolar, fig. 4-28 y 29, la relación señal a ruido de las medidas es bastante peor, y naturalmente esto afecta a la calidad de las reconstrucciones efectuadas, cuyo error cuadrático aumenta varios órdenes de magnitud, sobretodo en el corte horizontal. En el vertical puede distinguirse aún la extensión de la antena real.



**Figura 4-26.** Reconstrucción a partir del campo complejo  $E_\theta$  sobre  $\varphi=0$ .

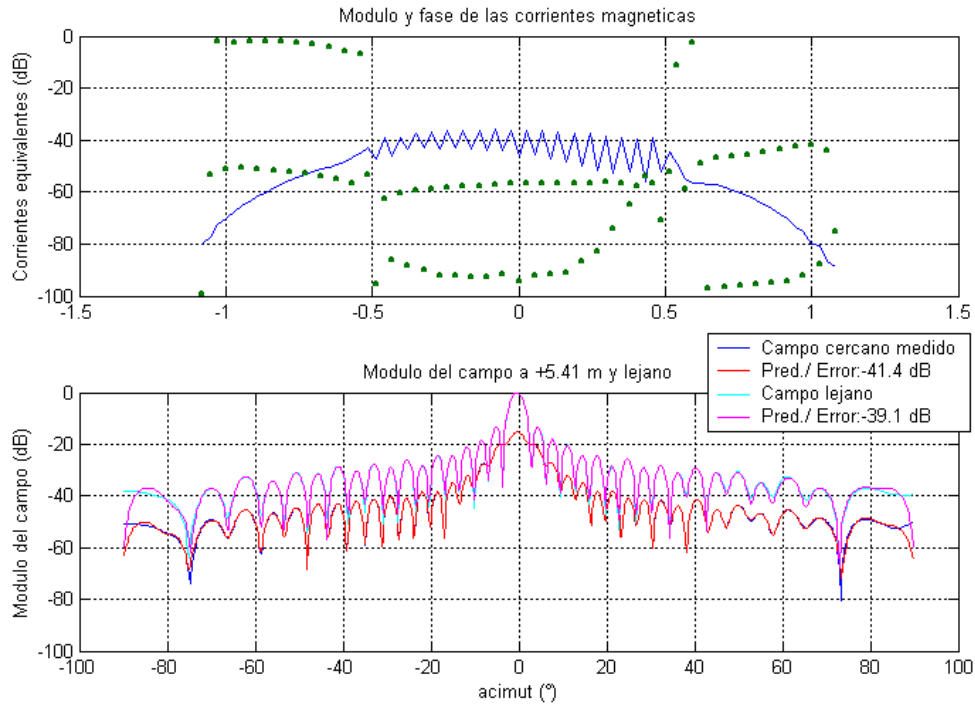


Figura 4-27. Reconstrucción a partir del campo complejo  $E_\varphi$  sobre  $\varphi=90^\circ$ .

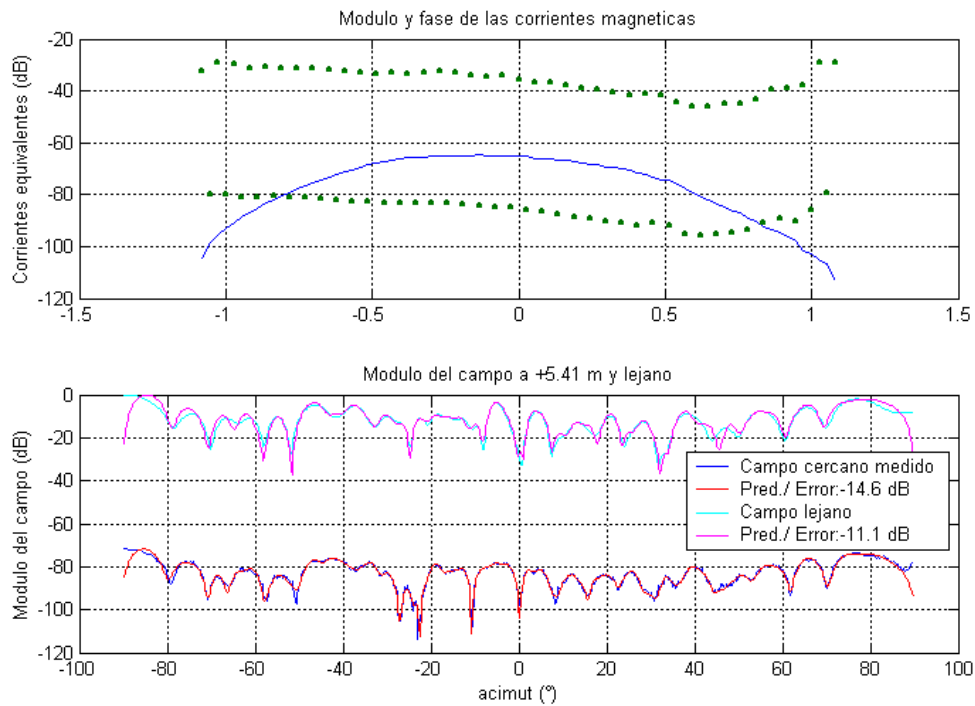
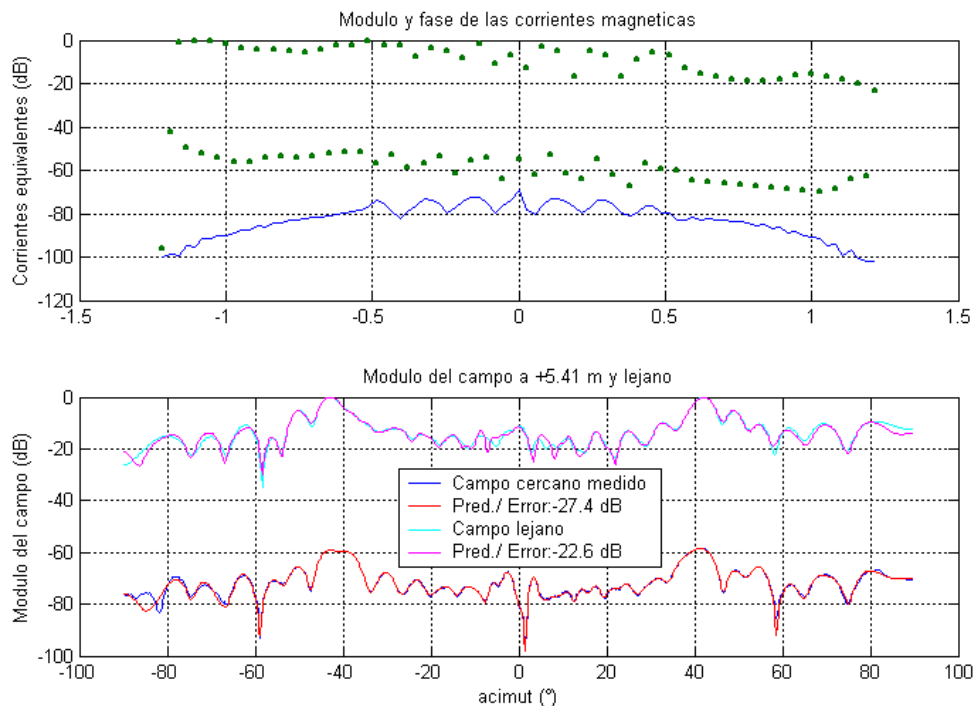


Figura 4-28. Reconstrucción a partir del campo complejo  $E_\varphi$  (componente contrapolar) sobre  $\varphi=0^\circ$ .



**Figura 4-29.** Reconstrucción a partir del campo complejo  $E_\theta$  (componente contrapolar) sobre  $\varphi = 90^\circ$ .

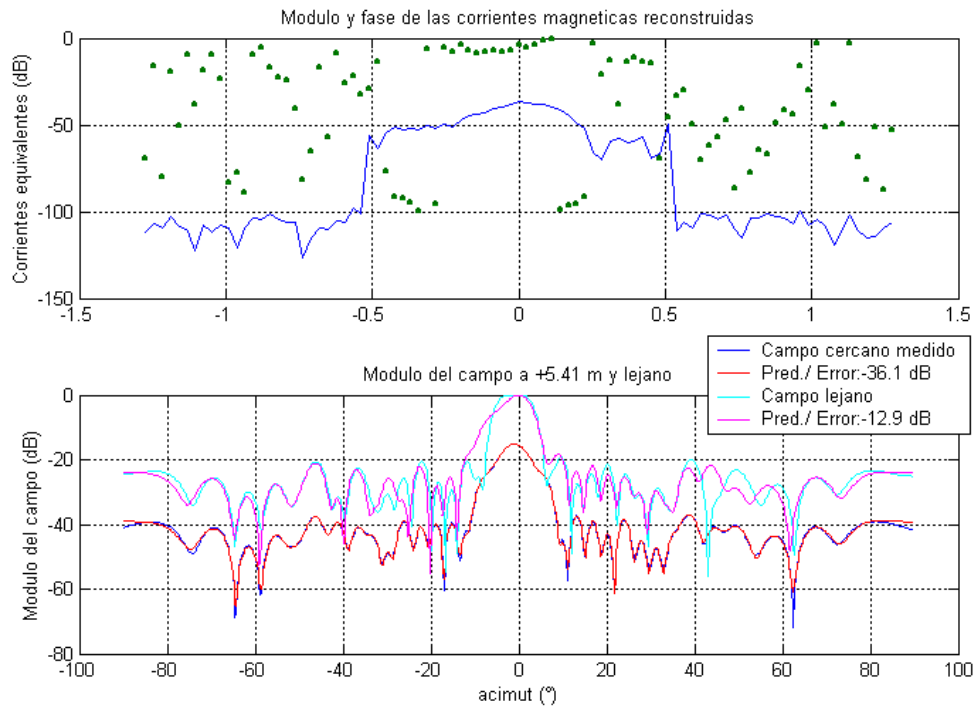
### 4.3.3 Problema inverso sin fase

Como en el caso de la antena de reflector consideraremos primero algunos casos de intento de reconstrucción a partir de una única distribución de módulo, que allí se demostró en consonancia con los resultados teóricos, inviable y que aquí se ilustra de nuevo. Es decir, se verán soluciones compatibles con una distribución de módulo y claramente no corresponden con la solución deseada. Se ve después la posibilidad de reconstrucción válida usando dos distribuciones de módulo.

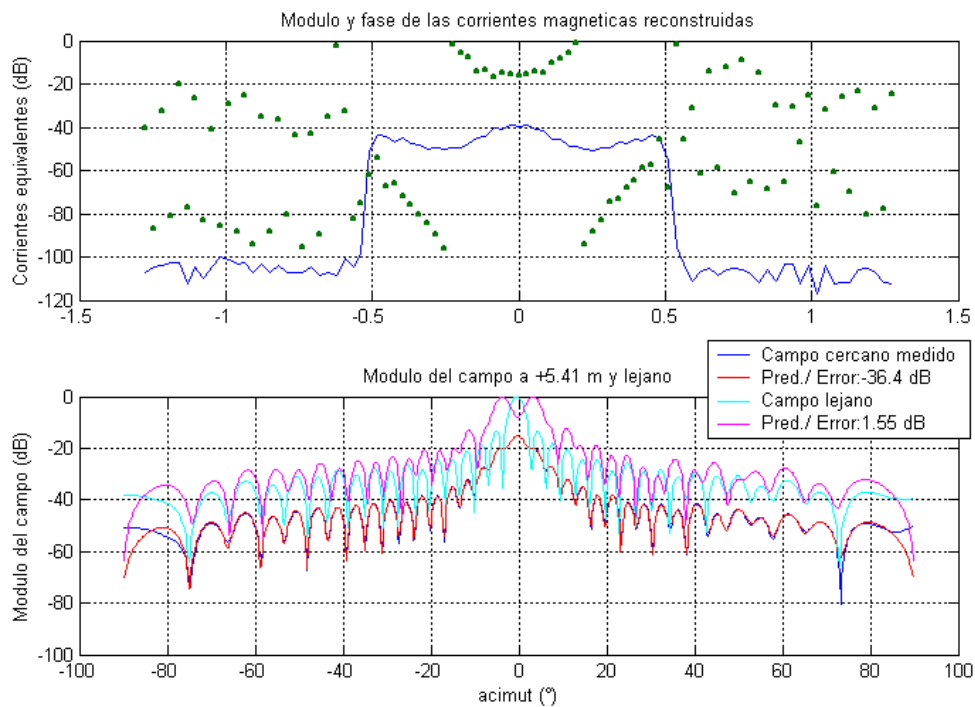
#### 4.3.3.1 Acerca de la unicidad de solución

Al igual que se hizo en el problema anterior podrá probarse la falta de unicidad de solución a partir de una única distribución de módulo empleando una reducción del algoritmo de Gerchberg-Saxton, en el que en lugar de emplear medidas sobre el dominio de fuentes se impone aquí la restricción de soporte finito. A este método, según el criterio de §4.2.4.2, podemos denominarlo cuasi-Gerchberg-Saxton. Según puede observarse en las figuras 4-30 y 4-31 el algoritmo llega a soluciones que no pueden darse por válidas a la vez que demuestran una estrecha coherencia con la distribución de módulo considerada. Por una parte se observa que la radiación lejana es muy diferente y por otra se advierte que la distribución de fuentes tanto en módulo como en fase es muy distinta a la de las figuras 4-26 y 4-27. Con lo que nuevamente se hace patente la falta de unicidad a partir de una única distribución de módulo.





**Figura 4-30.** Reconstrucción a partir de una sola distribución de módulo del campo  $E_\theta$  sobre  $\varphi=0$ . Imponiendo la condición de soporte finito (cuasi-Gerchberg-Saxton).



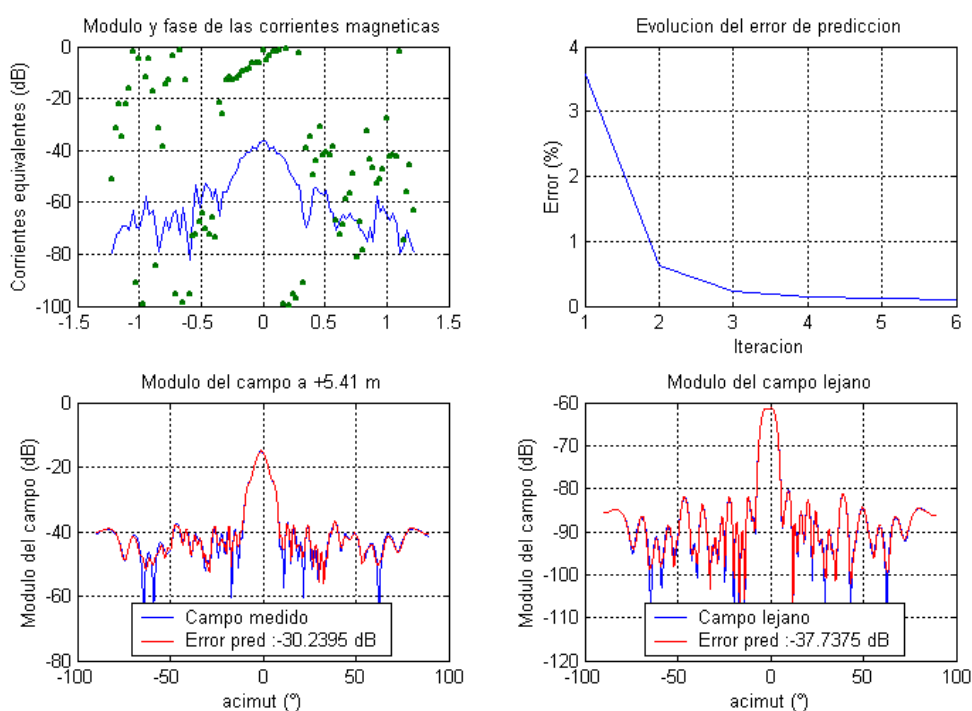
**Figura 4-31.** Reconstrucción a partir de una sola distribución de módulo del campo  $E_\varphi$  sobre  $\varphi=90^\circ$ . Imponiendo la condición de soporte finito (método cuasi-Gerchberg-Saxton).

### 4.3.3.2 Métodos generalizados de Proyecciones Sucesivas

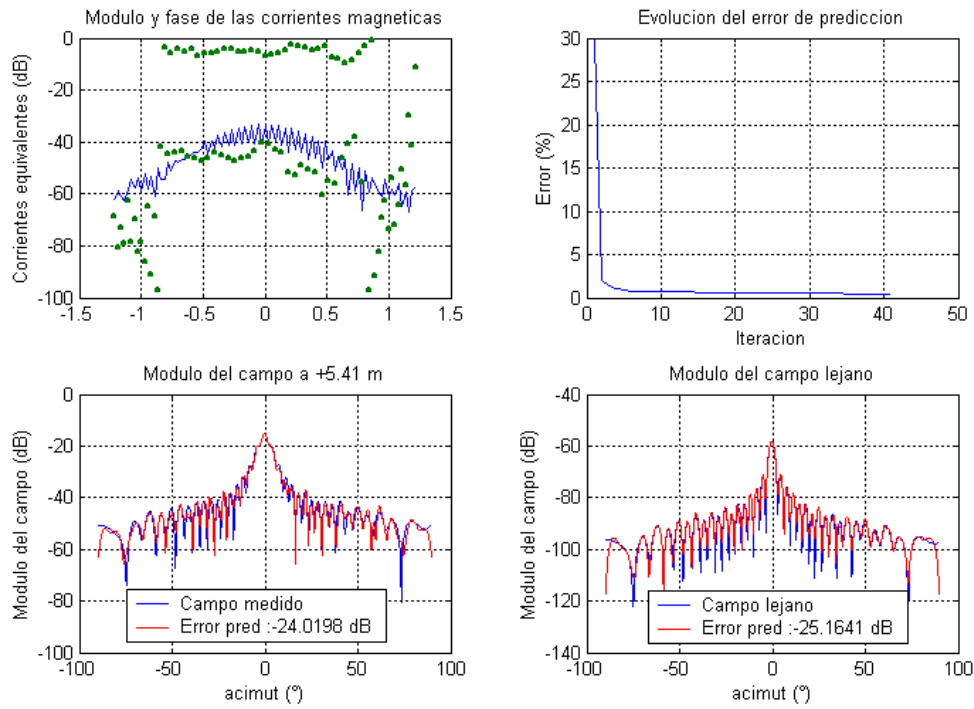
Según se indicó arriba se pueden considerar conocidas dos distribuciones de módulo tomando las distribuciones de campo lejano de las figuras 4-26 a 29 (obtenidas mediante expansión modal esférica) como si éstas se trataran de una medida más. Se demostrará de nuevo la capacidad de los métodos iterativos descritos en §3.3.2.1: primero sin restricciones sobre el dominio de fuentes (método generalizado de Anderson §3.3.2.1.iii), después añadiendo la restricción de soporte finito (MPS generalizado §3.3.2.1.iv).

#### a) Sin restricción de fuentes (método de Anderson generalizado)

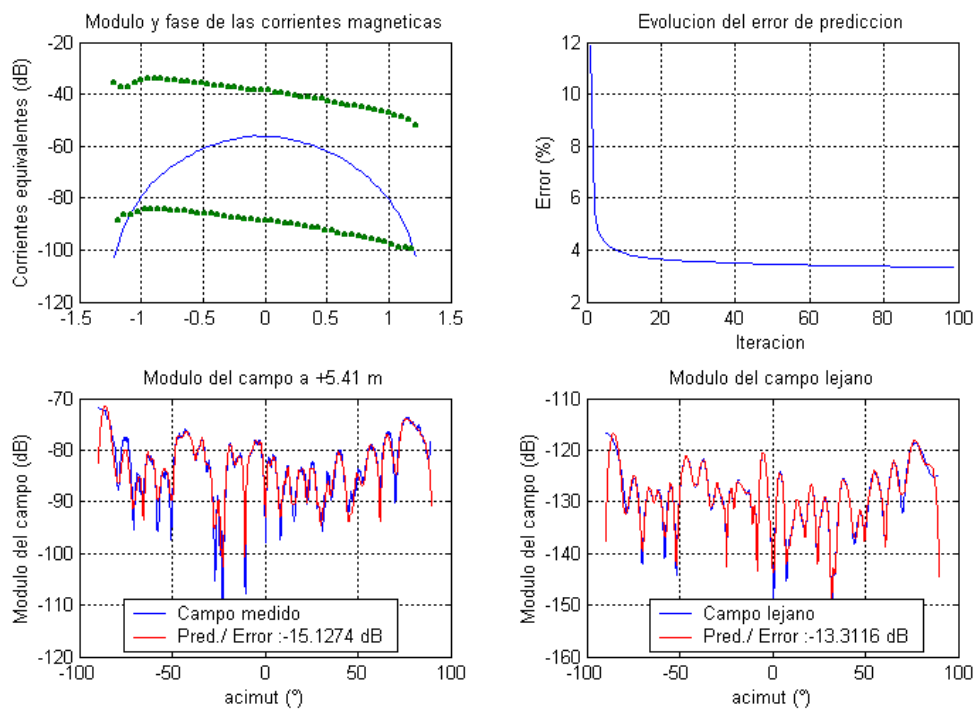
Como puede observarse en las figuras 4-32 a 35 se obtienen resultados que demuestran encontrarse en las proximidades de la solución deseada, evidenciándose de nuevo la unicidad de solución. Especialmente interesante es el caso de las componentes contrapolares, ya que aquí se observan unos errores del mismo orden o incluso menores que en el caso de la reconstrucción directa. Debe señalarse que en parte las discrepancias observadas entre las distribuciones reconstruidas actuales y las obtenidas usando la fase de campo, se deben a que se empleó allí un muestreo un poco más fino (1,05 frente a 1,0 en el problema sin fase).



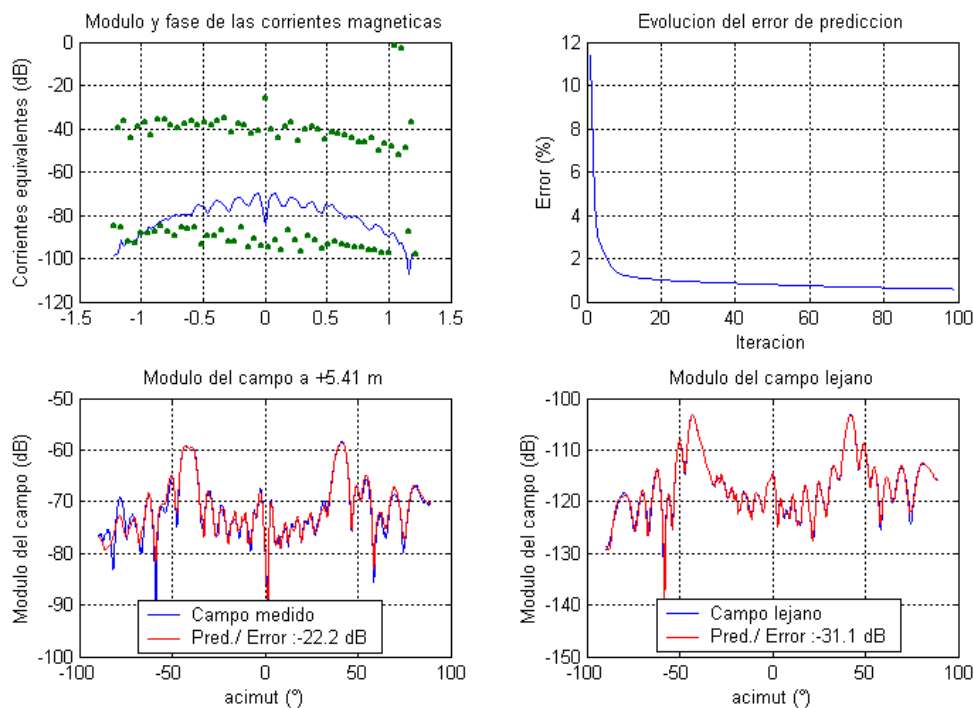
**Figura 4-32.** Reconstrucción a partir de dos distribuciones de módulo del campo  $E_\theta$  sobre  $\varphi=0^\circ$ . Sin imposición de condiciones sobre el dominio de las fuentes (MPS).



**Figura 4-33.** Reconstrucción a partir de dos distribuciones de módulo del campo  $E_\varphi$  sobre  $\varphi=90^\circ$ . Sin imposición de condiciones sobre el dominio de las fuentes (MPS)



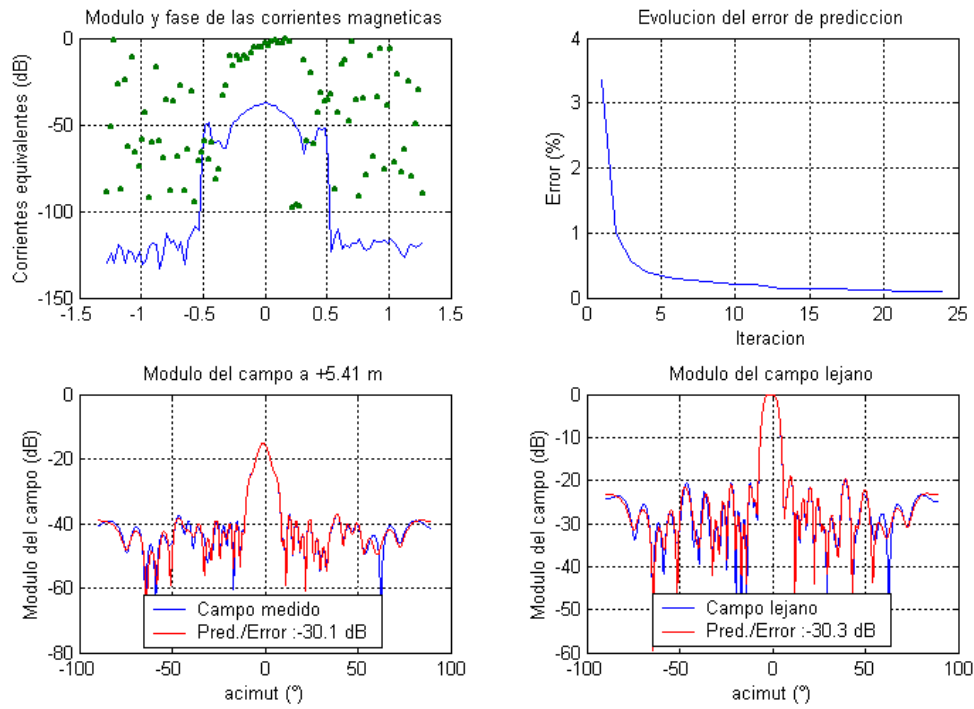
**Figura 4-34.** Reconstrucción a partir de dos distribuciones de módulo del campo  $E_\varphi$  (componente contrapolar) sobre  $\varphi=0^\circ$ . Sin imposición de condiciones sobre el dominio de las fuentes (MPS).



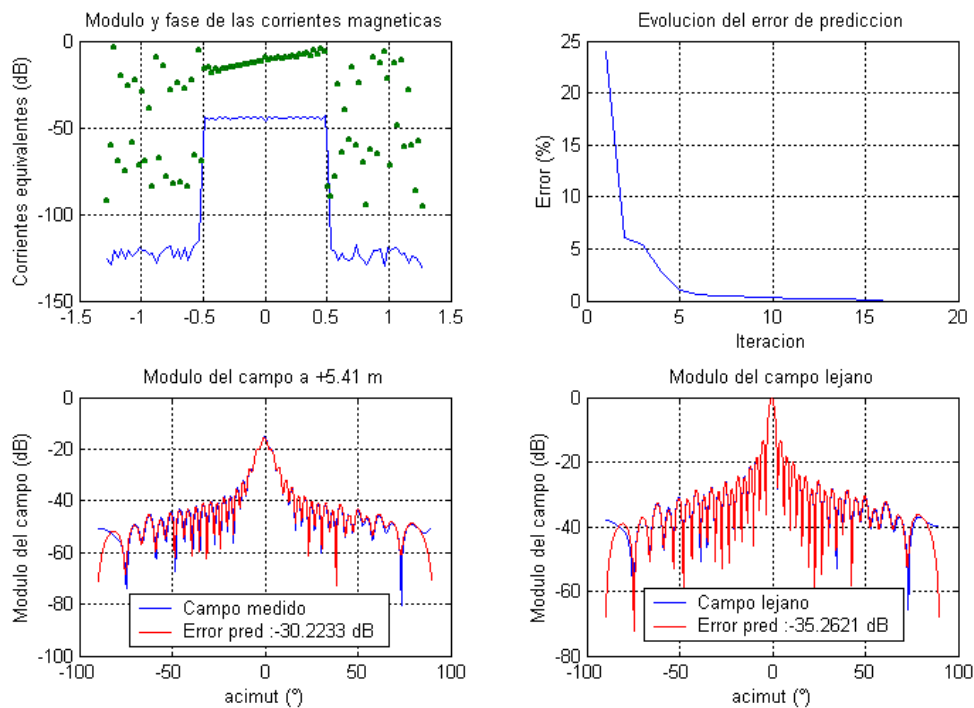
**Figura 4-35.** Reconstrucción a partir de dos distribuciones de módulo del campo  $E_\theta$  (componente contrapolar) sobre  $\varphi=90^\circ$ . Sin imposición de condiciones sobre el dominio de fuentes (MPS).

*b) Con restricción sobre las fuentes (Método de las Proyecciones Sucesivas generalizado)*

La imposición del soporte finito al área de la antena sólo se aplica a las componentes copolares, ya que para las otras no es tan nítido el descenso de la distribución de corrientes fuera de la antena. Se observa aquí, respecto a la no imposición de restricciones, un cierto parecido en el problema horizontal y una notable mejora en el vertical.



**Figura 4-36.** Reconstrucción a partir de dos distribuciones de módulo del campo  $E_\theta$  sobre  $\varphi = 0^\circ$ . Aplicando la restricción de soporte finito sobre el dominio de las fuentes,  $M(y) \neq 0 / |y| < 0.5\text{m}$  (MPS generalizado), con  $\chi=1$ .



**Figura 4-37.** Reconstrucción a partir de dos distribuciones de módulo del campo  $E_\varphi$  sobre  $\varphi = 90^\circ$ . Aplicando la restricción de soporte finito sobre el dominio de las fuentes,  $M(y) \neq 0 / |y| < 0.5\text{m}$  (MPS generalizado), con  $\chi=1$ .

## 4.4 ANTENA DE AGRUPACIÓN DE DIPOLOS PARA RADAR SECUNDARIO

Vamos a considerar ahora un caso que reviste un notable interés práctico. Según se mencionó arriba está relacionado con la antena estudiada en el último ejemplo del capítulo segundo (§2.5.2, véase figura 2-26). Estas antenas, como es bien sabido, junto con el resto del sistema de Radar Secundario cumplen una importante misión en la seguridad del tráfico aéreo. Sin embargo, puede ocurrir que las características de radiación de la antena se degraden de manera que el sistema, aunque aparentemente operativo, no pueda cumplir su función. En las antenas que aquí se consideran –muy frecuentes en los aeropuertos españoles e hispanoamericanos- a menudo ocurre que una de las columnas de agrupación de dipolos falla, lo cual puede tener graves consecuencias en la directividad de la antena y el nivel de los lóbulos secundarios. Si esto ocurre, en el mejor de los casos el sistema sólo pierde definición al determinar direcciones, pero en otros puede llegar a detectarse aeronaves ficticias. Por tanto, es menester hacer un mantenimiento para controlar las prestaciones de la antena y en caso de degradación repararlo lo antes posible [87; 35; 36; 37].

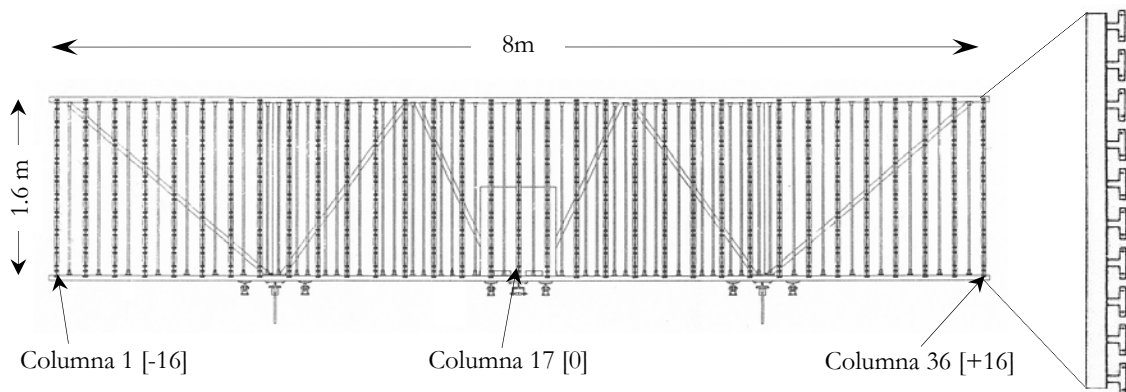
Mediante la aplicación de los métodos inversos investigados aquí, se probará que a partir de unas medidas sencillas puede resolverse de forma eficiente este grave problema. Por una parte, el giro continuo de la antena junto con el determinismo de las señales transmitidas permiten realizar una adquisición, prácticamente pasiva, de un corte cilíndrico horizontal, sin entorpecer el funcionamiento del Radar Secundario. Para ello basta con que el medidor se sitúe sobre el suelo y en las proximidades de la antena. Por otra parte, la simplicidad de uso de los amplificadores logarítmicos para la adquisición de módulo hacen que el aparato de medida pueda ser considerablemente sencillo. En el siguiente capítulo se tratará la arquitectura del sistema de medida, como un caso particular de *sistema adaptado*, mientras que aquí se abordará el problema electromagnético a partir de unas medidas sintetizadas, donde el principal objetivo será la capacidad de detección de fallos de las columnas.

### 4.4.1 Síntesis de la distribución de campo

#### 4.4.1.1 Justificación del dominio de medida

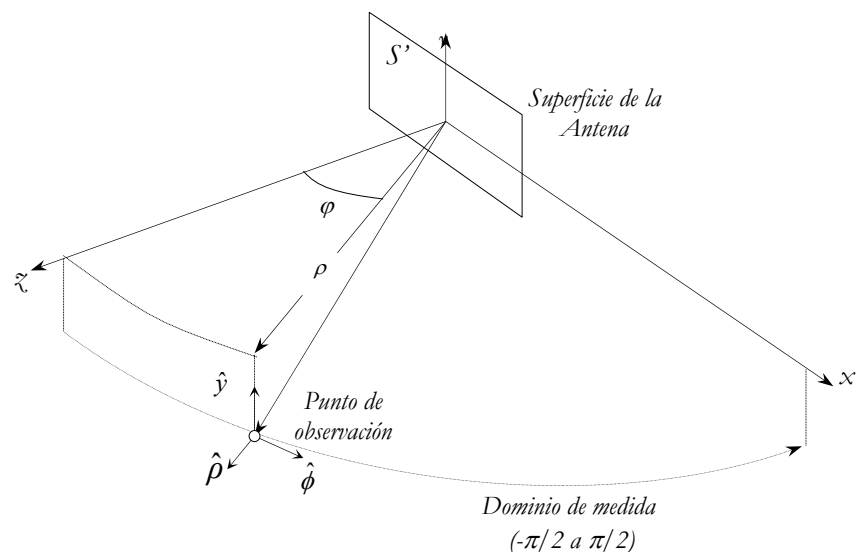
En estas antenas, ilustradas en la figura 4-38, la red de alimentación de los dipolos está constituida por una agrupación de distribuidores y líneas de transmisión que reparten la potencia hacia cada una de las columnas de dipolos (distribución horizontal de corrientes), seguido de un circuito de distribución compacto e impreso que hace llegar la corriente a cada uno de los dipolos (distribución vertical de corrientes). Esta arquitectura hace que la distribución de corrientes dentro de las columnas sea homogénea e incierta entre ellas. Por tanto, cuando se desea saber si una de estas

antenas está radiando adecuadamente lo que está en tela de juicio es en realidad la corriente que llega a cada una de las columnas.



**Figura 4-38.** Vista frontal de la antena bajo estudio, principales dimensiones y detalle lateral de una columna.

Teniendo en cuenta la separabilidad de la distribución de corrientes (2-102), resulta evidente que las distribuciones horizontales de campo sobre el dominio de medida cilíndrico no presentarán diferencias significativas entre cortes horizontales (a parte de alguna constante compleja), de modo que podemos considerar que éstas distribuciones han sido esencialmente causadas por la relación de excitaciones horizontales. Puesto que ésta es incierta, entonces el conocimiento de la radiación sobre dominios horizontales cilíndricos como los representados en la figura 4-39, puede proveernos la información necesaria para la averiguación de la relación efectiva de excitaciones horizontales. Como por otra parte, las variaciones verticales del campo se deben fundamentalmente a la relación de corrientes verticales, que conocemos, esta información no nos aporta nada nuevo y en consecuencia, podemos restringir nuestro dominio de medida al mencionado.

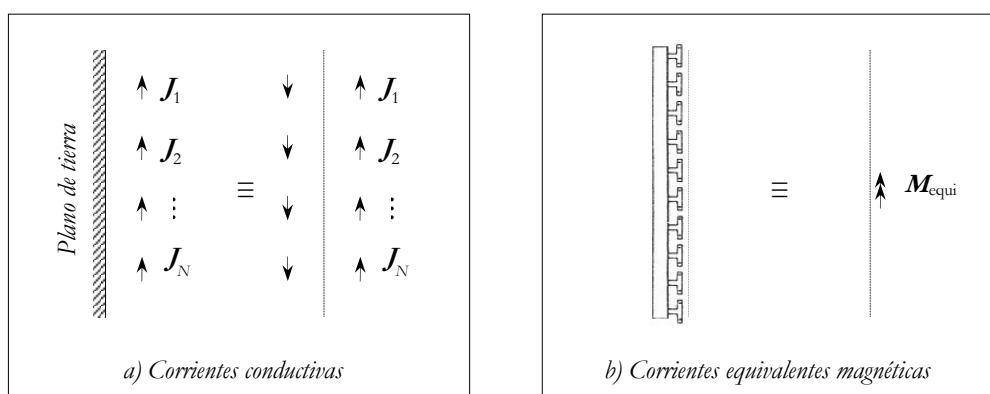


**Figura 4-39.** Dominio de medida de las antenas de Radar secundario (véase figura 1-26).

#### 4.4.1.2 Particularización del problema directo

Puesto que se conoce en detalle la antena puede determinarse con precisión la radiación generada por ésta sobre los mencionados dominios de medida. La presencia de un plano de masa (constituido por varillas verticales suficientemente cercanas, fig. 4-38) puede tenerse en cuenta modelándolo por medio de un plano infinito y aplicando teoría de imágenes, tal y como ilustra la figura 4-40a. Para la distribución de estas corrientes se considera, por una parte, las excitaciones nominales sobre las que se añadirán fallos de columnas (gráficamente representadas en la figura 2-26b), por otra, la fluctuación típica obtenida a partir de medidas reales sobre la antena [27]. De modo que la distribuciones empleadas en la síntesis de las medidas son estocásticas. Para determinar el campo engendrado por estas distribuciones se emplea la relación (2-104).

Evidentemente, para representar el mismo problema podemos aplicar sobre un plano anterior a la antena el principio de equivalencia (según se ilustra en la figura 2-28), de modo que éste estaría constituido por una retícula regular de dipolos magnéticos de Hertz. Teniendo en cuenta la independencia de la distribución horizontal de campo respecto a la distribución vertical de corrientes puede entonces simplificarse aún más la distribución, considerando todas las corrientes verticales agrupadas en un mismo punto (como se representa en la figura 4-40). Por otra parte, los resultados de §2.5.2 mostraban que la separación de los dipolos de Hertz de modo que queden enfrentados con las columnas, aunque insuficiente para una determinación precisa del campo, era suficiente para determinar la relación efectiva de excitaciones de la antena. Por tanto, la formulación en términos de corrientes magnéticas podrá reducirse a una retícula lineal anterior a la antena y coincidente con el punto medio de cada una de las columnas radiantes. El campo a partir de estas corrientes puede determinarse como particularización trivial de (2-105), y naturalmente éste sólo podrá ser de utilidad para su aplicación en el problema inverso.



**Figura 4-40.** Formulación del problema: a) mediante corrientes conductivas –geometría detallada de la antena–; b) mediante corrientes equivalentes magnéticas –véase figura 2-28, aproximación puntual de la columna–.



#### 4.4.1.3 Síntesis de medidas

Una vez determinado el campo según las consideraciones anteriores, las medidas se ha sintetizado de acuerdo con las características reales de los dispositivos de medida. Para ello se dispone de medidas parciales obtenidas con el sistema de detección que se describe en el capítulo siguiente, que han permitido determinar sus características más relevantes en cuanto a errores de medida. Se observa que el ruido dominante es debido a los detectores logarítmicos, y que finalmente éste queda subsumido por el proceso de conversión numérico haciendo que el error siga una distribución uniforme de  $\pm 0,25$  dB ( como se demostrará más adelante). No obstante, se ha considerado el doble de este ruido para evaluar los métodos inversos en condiciones aun más severas, al que se ha añadido una distorsión logarítmica de 0.02 dB/dB<sub>v</sub>.

Finalmente se considera el error debido a la determinación de la posición del punto de medida respecto a la antena, que tiene componente horizontal y vertical.

En suma, la síntesis de las medidas del campo radiado por la antena tiene en consideración:

- la geometría en detalle de la antena [27] y del dominio de medida;
- fallos intencionados de alguna columna;
- las excitaciones de la antena con sus fluctuaciones típicas (consideradas estocásticas);
- errores en la determinación de la posición de medida;
- el ruido captado por el sistema electrónico (predominantemente logarítmico) y la distorsión logarítmica.

Las medidas que a continuación se emplean para evaluar la capacidad de reconocimiento de fallos son siempre parejas de medidas tomadas a 30 y 80 metros de distancia respecto al eje de rotación de la antena y 20 metros por debajo de su base, en las siguientes condiciones:

1. fallo en la columna 8 (ó -9) con diferentes niveles de ruido de cuantificación:
  - a)  $\pm 0.5$  dB; b)  $\pm 0.25$  dB; c)  $\pm 0.05$  dB;
2. fallo en la columna 8 (ó -9) y la 17 (ó 0, central) con un error de cuantificación de  $\pm 0.5$  dB.

Con el primer grupo de medidas sintetizadas puede probarse la sensibilidad de la detección de fallos respecto al ruido; el segundo nos permite observar otra condición de fallo, verificando así la eficiencia en su identificación (para una condición de ruido más severa que la experimental).

#### 4.4.2 Comparación de métodos inversos sin fase

Para compara los métodos se proponen dos formulaciones del problema y dos modos de resolverlo. En cuanto a la expresión del problema se emplearán las aproximaciones de corrientes conductivas y de corrientes equivalentes magnéticas:

- a) La formulación de *corrientes conductivas* considera la geometría detallada de la antena (véase fig.4-40a), de modo que las fuentes queden expresadas como una distribución discreta de corrientes puntuales situadas sobre la posición geométrica de cada uno de los dipolos reales y sus imágenes:

$$J_y = \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \sum_{k=1,2} \alpha_{ijk} \delta(x' - x_i, y' - y_j, z' - z_k) \quad \text{donde:} \quad \begin{cases} \alpha_{ij1} = -\alpha_{ij2} \\ \alpha_{ij1} = \beta_i \cdot \gamma_j \\ z_k = z_{M,i} + (-1)^k d_{D-M} \end{cases} \quad (4-3)$$

Siendo  $z_{Mi}$  la coordenada  $z$  del plano de masa y  $d_{D-M}$  la distancia entre el plano de masa y los dipolos reales.

Si la componente de campo observada es la vertical, aplicando la relación (2-28), y teniendo en cuenta la separabilidad de la distribución de corriente, es inmediata la expresión del campo en términos de los coeficientes de excitación horizontal y un conjunto de funciones de campo  $\{\Psi_i\}$  en los que queda reflejado el campo generado por cada columna radiante:

$$E_y(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{N_x} \beta_i \sum_{j=1}^{N_y} (-1)^k \{G_1(R_{ijk}) + (y - y_j)^2 G_2(R_{ijk})\} = \sum_{i=1}^{N_x} \beta_i \cdot \Psi_i(\rho, \varphi, y) \quad (4-4)$$

$$\text{donde:} \quad \begin{cases} R_{ij1} = \sqrt{(\rho \cdot \sin \varphi - x_i)^2 + (y - y_j)^2 + (\rho \cdot \cos \varphi - z_{M,i} + d_{D-M})^2} \\ R_{ij2} = \sqrt{(\rho \cdot \sin \varphi - x_i)^2 + (y - y_j)^2 + (\rho \cdot \cos \varphi - z_{M,i} - d_{D-M})^2} \end{cases}$$

De esta forma el problema inverso se convierte en la indagación de los 33 coeficientes de excitación horizontal.

- b) La formulación de corrientes equivalentes magnéticas, a diferencia de la anterior no considera la estructura particular de la antena (véase la figura 4-40) y toda la contribución correspondiente a cada columna se asume que se encuentra concentrada en un solo punto. Consideración que hace acopio de la independencia entre la distribución vertical de corrientes y el campo observado sobre el domino horizontal. Usando (2-23) y teniendo en cuenta que sólo nos fijamos en la componente vertical del campo, será suficiente la consideración de las corrientes magnéticas horizontales:

$$M_x = \sum_{i=1}^{N_x} M_{ij} \delta(x' - x_i, y' - y_j, z' - z_i) \quad (4-5)$$

$$E_y(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{N_x} M_i \cdot G_3(R_i) = \sum_{i=1}^{N_x} M_i \cdot \Psi_i(\rho, \varphi, y)$$

Es evidente que la utilización de la primer formulación, al incorporar un máximo de información acerca del sistema radiante, sea más precisa en la descripción del campo, sin embargo, es más sensible a los posibles errores que se puedan cometer en la determinación de la posición relativa de los puntos de observación. Como se vio en §2.5.2, la descripción del campo en términos de las corrientes magnéticas situadas sobre un punto intermedio de cada columna, y por tanto distanciadas más de  $\lambda/2$ , es una solución relativamente imprecisa para la determinación del campo (fig. 2-35). Sin embargo, como allí se observó es suficiente para identificar la verdadera distribución de corrientes (fig. 2-37). Por tanto, según esta aproximación y a la luz de los resultados alcanzados en §2.5.2, podremos darnos por satisfechos si nos permite la identificación de los fallos, que a fin de cuentas es el objetivo de nuestro problema.

Puesto que uno de los requisitos del sistema de medida es que éste sea transparente a la operación del Radar secundario, para la solución del problema inverso sin fase no pueden emplearse procedimientos manipuladores, con lo que nuevamente estos quedan restringidos a los observadores (§3.3.2.1). Pero dentro de estos se distinguían los métodos de *proyecciones sucesivas* (MPS, §3.3.2.1.a) y los de *optimización* de la distancia entre distribuciones del *cuadrado de la amplitud de campo eléctrico* (MOCA, §3.3.2.1.b). Por tanto, en cuanto a la manera de resolver el problema planteado se utilizarán estas dos soluciones.

Para su comparación se consideran:

- la capacidad de *identificación de fallos* que se observa a partir de las corrientes reconstruidas;
- la capacidad de *predicción del campo* que se observa:
  - cualitativamente en la comparación entre medidas y campo predicho, y
  - cuantitativamente en términos del error de predicción que pondera los errores cuadráticos sobre los dos dominios de medida (incluida en los resultados gráficos y en la tabla 4.5).
- Por otra parte, y al igual que en los problemas anteriores, se representa la *evolución del error de predicción* (como antes, entre las distribuciones de campo de iteraciones sucesivas) que permite evaluar la velocidad de convergencia y el coste operativo.

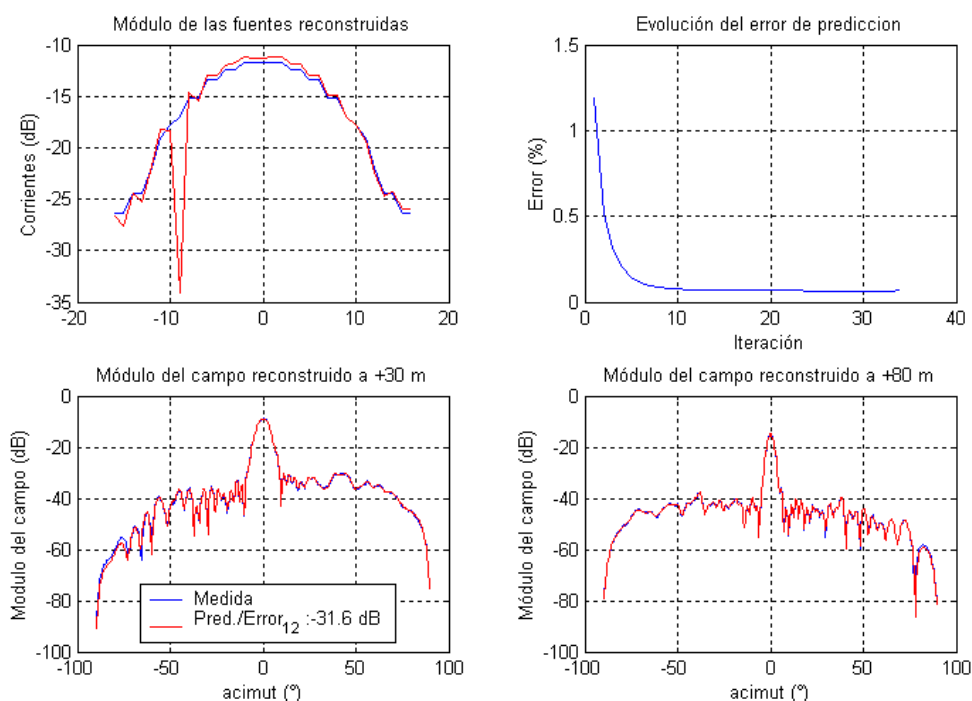
La tabla 4-6 resume los resultados, que a continuación se discutirán pormenorizadamente, de las tres aproximaciones consideradas en lo que respecta al error de predicción alcanzado en la reconstrucción del campo y a la habilidad en la identificación de fallos (MB: claramente; SI: suficientemente; NO: incapaz de distinguir el fallo verdadero).

<i>Método</i>	<i>Formulación</i>	Fallo: C8 $\pm 0.5$ dB	Fallo: C8 $\pm 0.25$ dB	Fallo: C8 $\pm 0.05$ dB	Fallo: C8, C17 $\pm 0.5$ dB
MPS	C	-31, 5/MB	-33, 3/MB	-38, 8/MB	-25, 1/MB
MOCA	C	-23, 0/NO	-28, 3/SI	-37, 2/MB	-27, 4/MB
MPS	M	-15, 0/SI	-15, 6/SI	-15, 5/SI	-15, 7/NO

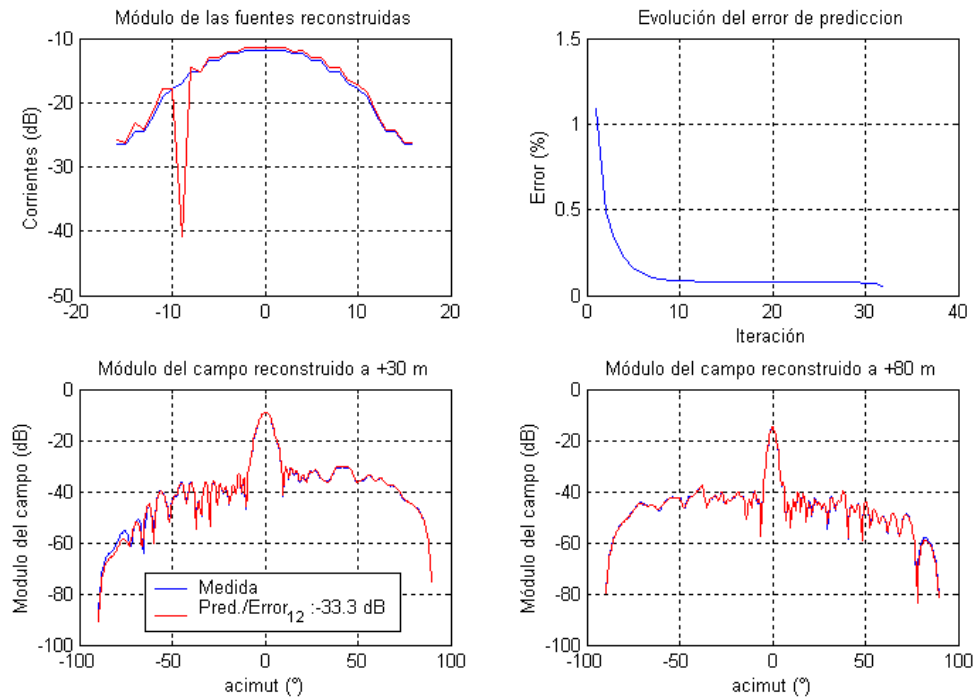
Tabla 4.5

#### 4.4.2.1 Método de Proyecciones Sucesivas con formulación de corrientes Conductivas (MPS-C)

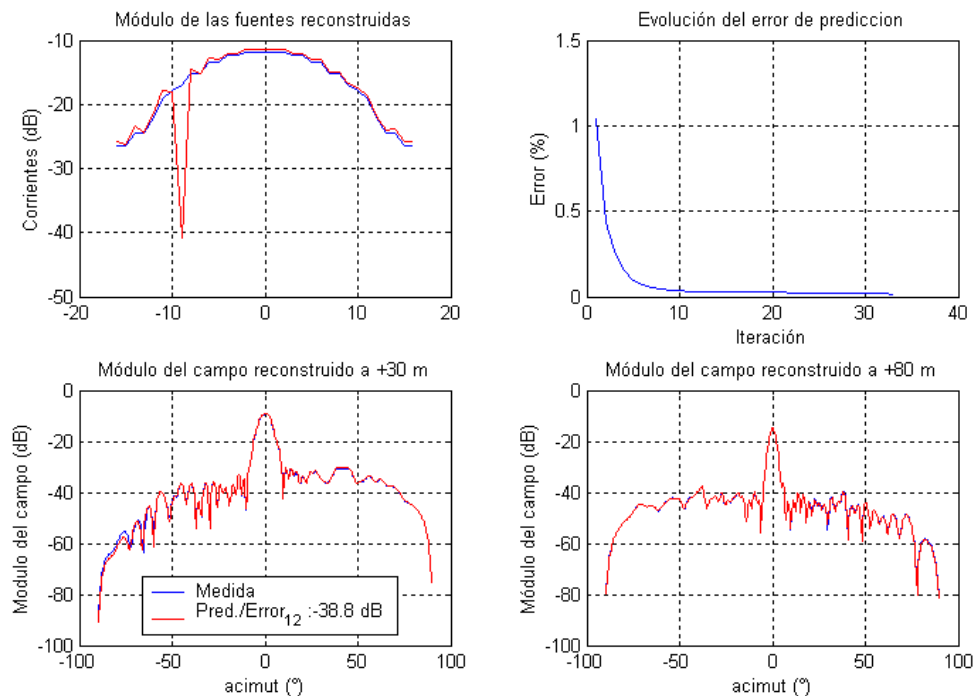
Las figuras 4-41 a 4-44 muestran los resultados obtenidos al aplicar el conjunto de 4 parejas de medidas arriba descrito: las tres primeras para los fallos en la columna  $-9$  y diferentes niveles de ruido; y la última para el fallo simultáneo de las columnas  $9$  y  $0$ . En todos los casos puede observarse una buena capacidad de detección de fallos e incluso una buena concordancia entre las distribuciones de campo observadas y las predichas, incluso a pesar del alto nivel de ruido de los casos primero y último,  $\pm 0.5$  dB (figuras 4-41 y 4-44). En lo que respecta a la sensibilidad al ruido puede apreciarse una más nítida identificación de fallos y una considerable mejora en la predicción del campo, especialmente cuando el ruido de cuantificación pasa de  $\pm 0.5$  dB a  $\pm 0.25$  dB.



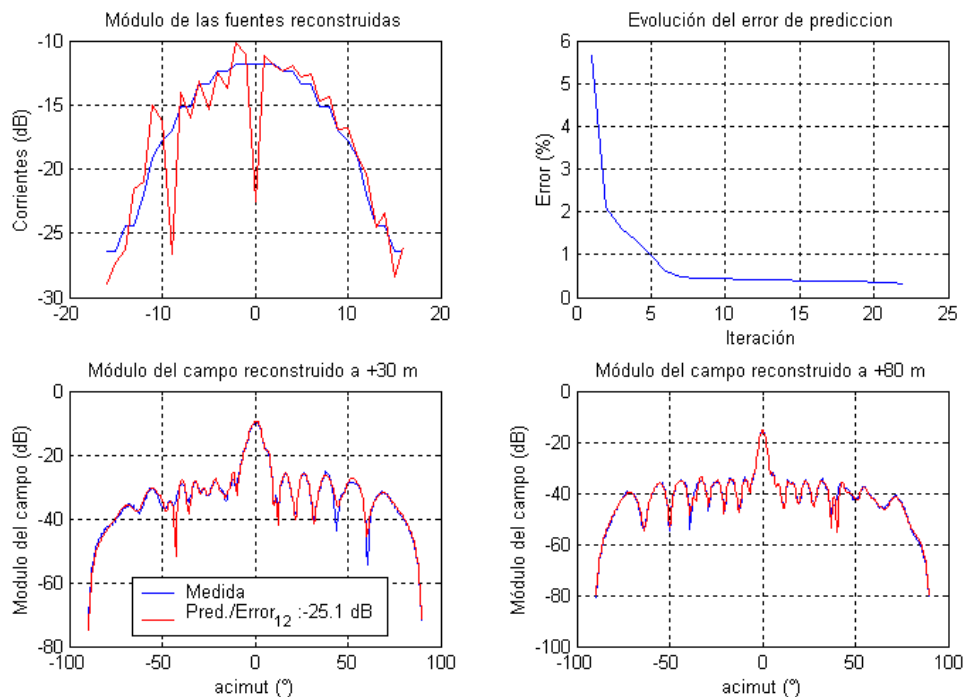
**Figura 4-41.** Reconstrucción a partir de dos distribuciones de módulo del campo  $E_y$  sobre el plano  $y=-20$ m. Formulación de corrientes conductivas. Fallo de la columna  $-9$ . Método de Proyecciones Sucesivas (MPS-C). Error logarítmico de medida:  $\pm 0.5$  dB.



**Figura 4-42.** Reconstrucción a partir de dos distribuciones de módulo del campo  $E_y$  sobre el plano  $y=-20\text{m}$ . Formulación de corrientes conductivas. Fallo de la columna  $-9$ . Método de Proyecciones Sucesivas (MPS-C). Error logarítmico de medida:  $\pm 0.25$  dB.



**Figura 4-43.** Reconstrucción a partir de dos distribuciones de módulo del campo  $E_y$  sobre el plano  $y=-20\text{m}$ . Formulación de corrientes conductivas. Fallo de la columna  $-9$ . Método de Proyecciones Sucesivas (MPS-C). Error logarítmico de medida:  $\pm 0.05$  dB.



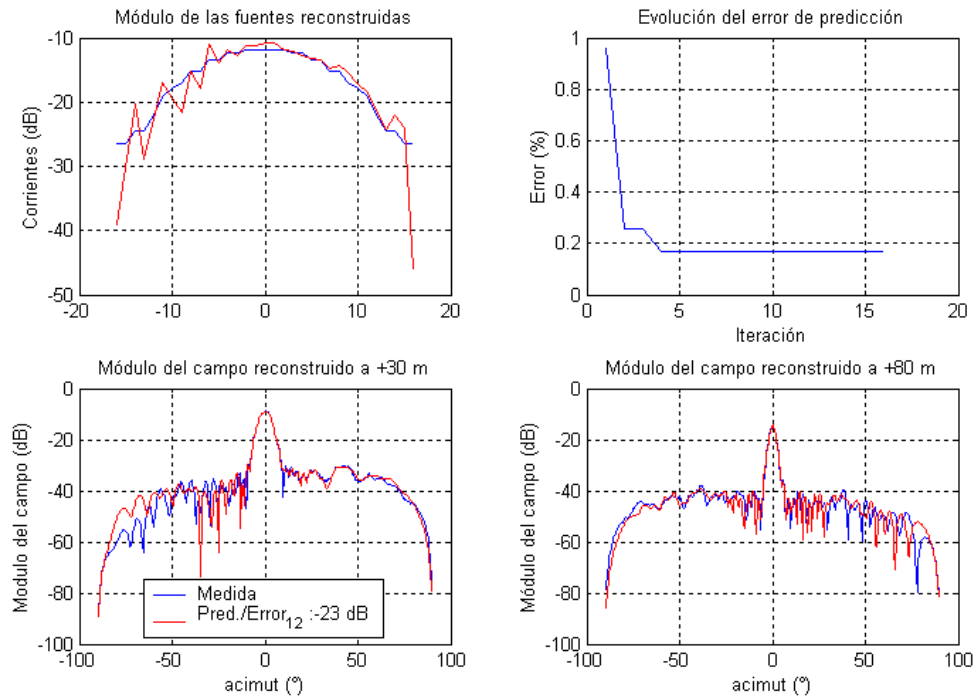
**Figura 4-44.** Reconstrucción a partir de dos distribuciones de módulo del campo  $E_y$  sobre el plano  $y = -20$  m. Formulación de corrientes conductivas. Fallo de la columna  $-9$  y  $0$ . Método de Proyecciones Sucesivas (MPS-C). Error logarítmico de medida:  $\pm 0.5$  dB.

#### 4.4.2.2 Método de Optimización sobre el Cuadrado de la Amplitud de campo eléctrico (MOCA)

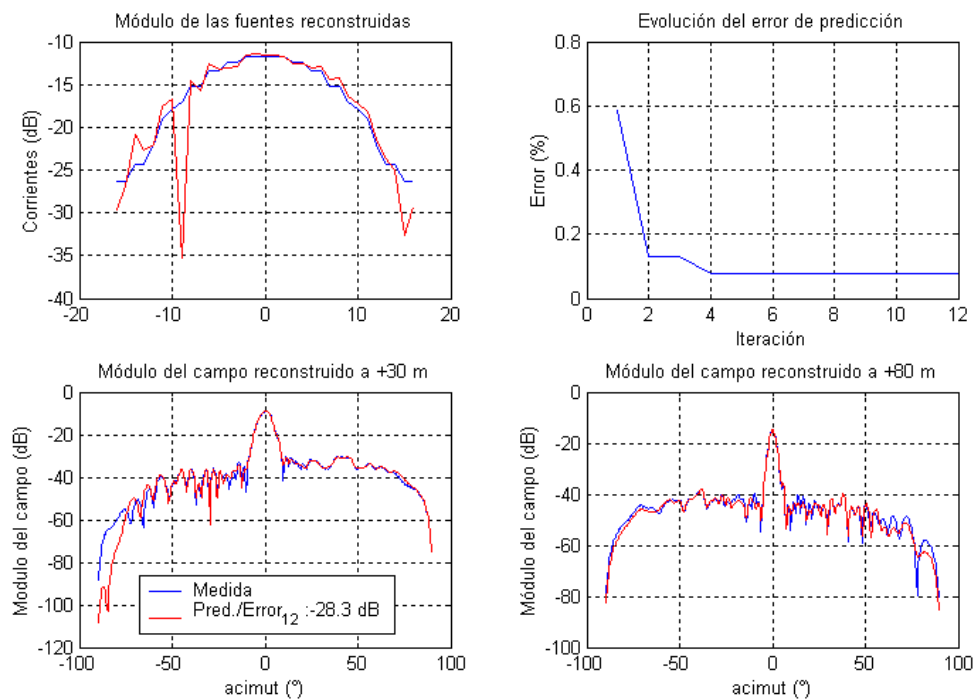
Si se aplica a la misma formulación del problema (corrientes conductivas) y para el mismo conjunto de medidas un método de optimización como el descrito en §3.3.2.1.b., se obtienen los resultados de las figuras 4-45 a 4-48. En general, se observa una peor capacidad de detección de fallos aunque con menos nitidez y mejor en el caso de dos fallos simultáneos que en el de uno. Por otra parte, el efecto de la reducción del ruido en la identificación de fallos se hace aquí más notable que en el caso anterior (4-47), aunque en cualquier caso, el error de predicción del campo es considerablemente inferior al conseguido mediante la aplicación del MPS.

En lo que respecta a la convergencia y el coste operativo se aprecia que en general es necesario un menor número de iteraciones, aunque en la práctica esta aparente rapidez queda compensada por el mayor coste operacional de los cálculos involucrados en cada iteración (determinación del gradiente, del Hessiano y la resolución de la correspondiente ecuación lineal), respecto a la aplicación reiterada de los operadores de proyección en el MPS.

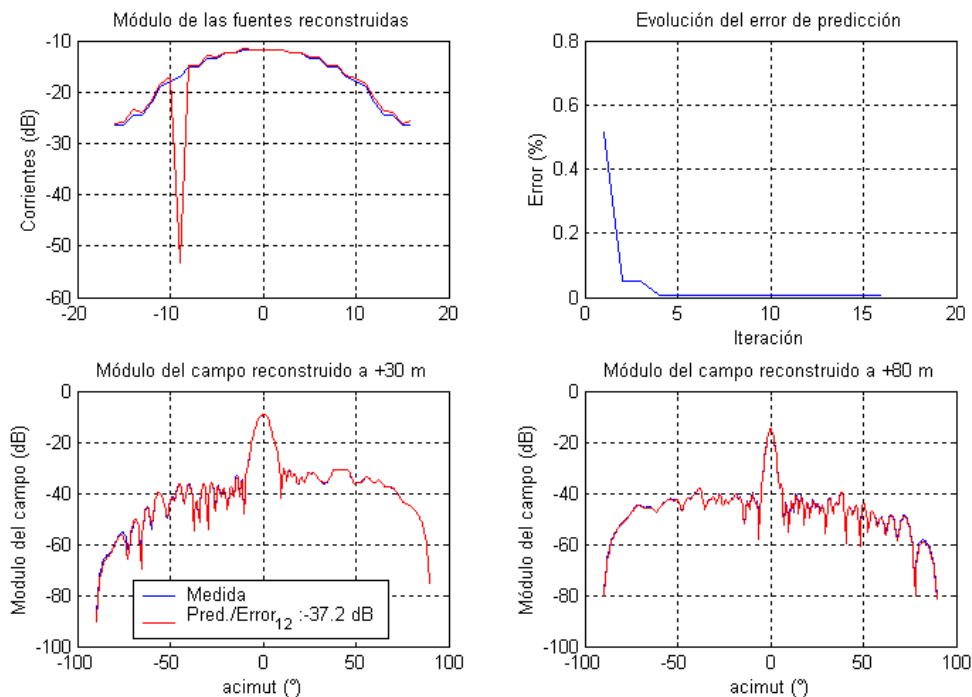
En suma, a tenor de los resultados obtenidos puede afirmarse la mejor competencia del MPS en la resolución del problema considerado.



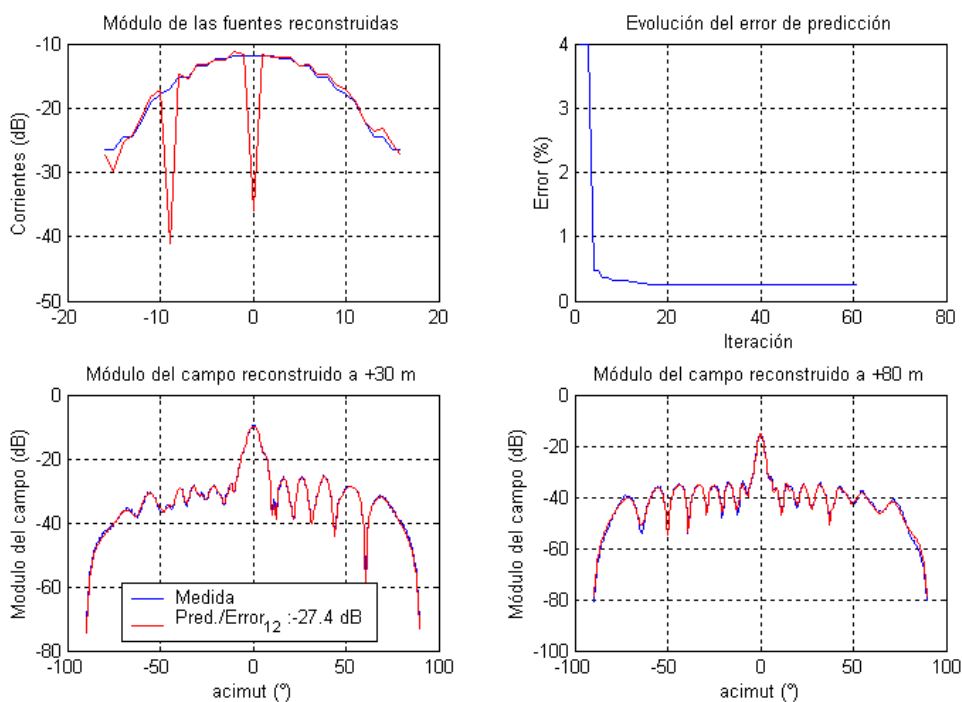
**Figura 4-45.** Reconstrucción a partir de dos distribuciones de módulo del campo  $E_y$  sobre el plano  $y = -20\text{m}$ . Formulación de corrientes conductivas. Fallo de la columna  $-9$ . Método de Optimización sobre el Cuadrado de la Amplitud de Campo (MOCA). Error logarítmico de medida:  $\pm 0.5\text{ dB}$ .



**Figura 4-46.** Reconstrucción a partir de dos distribuciones de módulo del campo  $E_y$  sobre el plano  $y = -20\text{m}$ . Formulación de corrientes conductivas. Fallo de la columna  $-9$ . Método de Optimización sobre el Cuadrado de la Amplitud de Campo (MOCA). Error logarítmico de medida:  $\pm 0.25\text{ dB}$ .



**Figura 4-47.** Reconstrucción a partir de dos distribuciones de módulo del campo  $E_y$  sobre el plano  $y = -20\text{m}$ . Formulación de corrientes conductivas. Fallo de la columna -9. Método de Optimización sobre el Cuadrado de la Amplitud de Campo (MOCA). Error logarítmico de medida:  $\pm 0.05\text{ dB}$ .



**Figura 4-48.** Reconstrucción a partir de dos distribuciones de módulo del campo  $E_y$  sobre el plano  $y = -20\text{m}$ . Formulación de corrientes conductivas. Fallo de la columna -9 y 0. Método de Optimización sobre el Cuadrado de la Amplitud de Campo (MOCA). Error logarítmico de medida:  $\pm 0.5\text{ dB}$ .

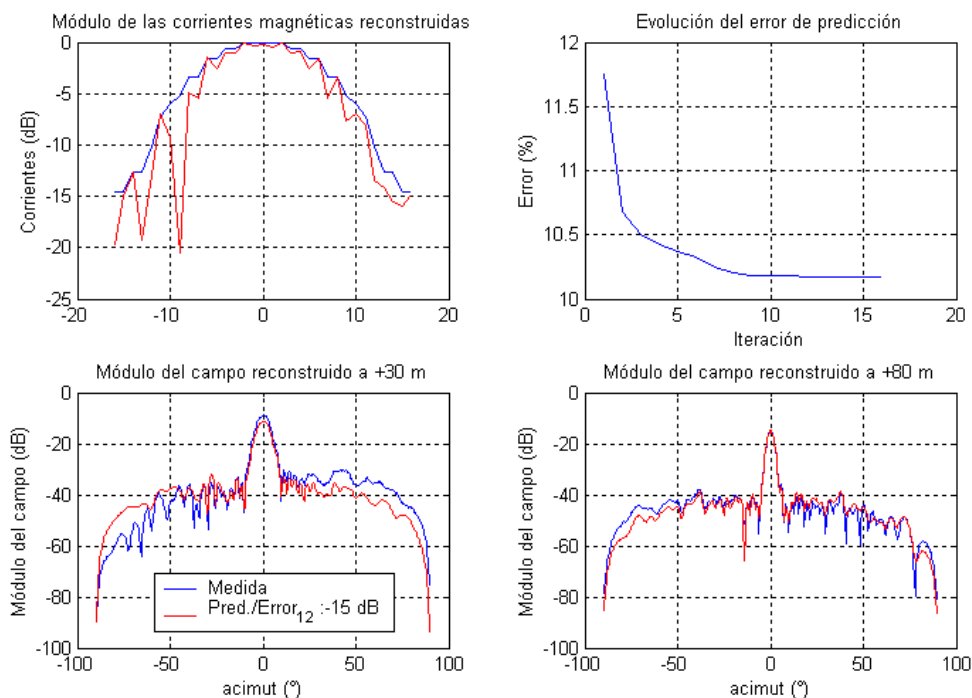


#### 4.4.2.3 Método de Proyecciones Sucesivas con formulación de corrientes Magnéticas (MPS-M)

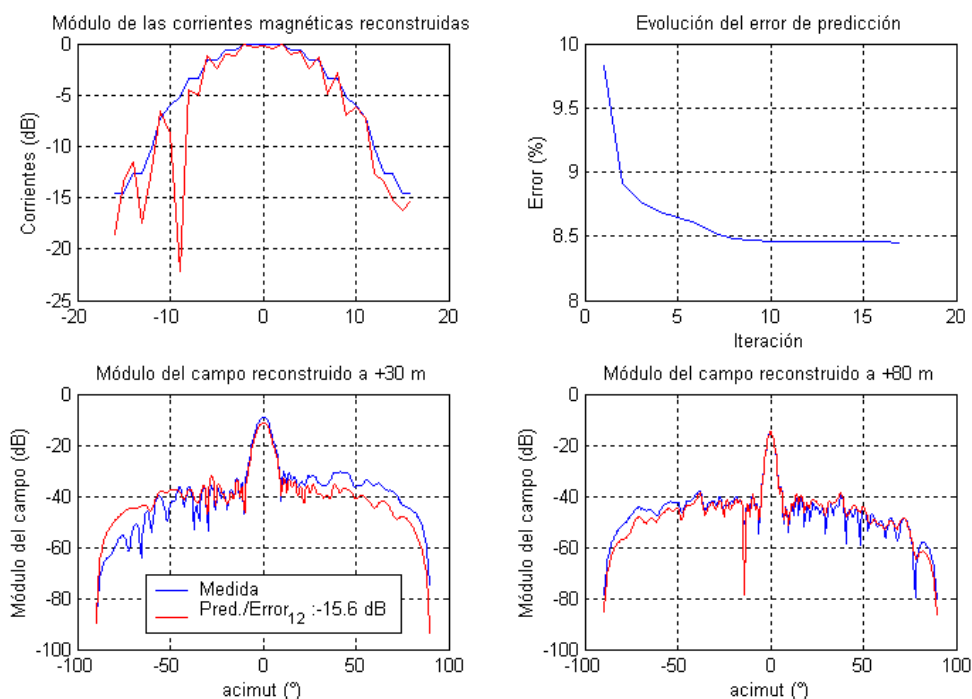
Una vez puestos en confrontación los métodos para la búsqueda de la solución, apliquemos el que ha resultado superior para la evaluación de la formulación del problema en términos de las corrientes magnéticas equivalentes, reducidas a una única por columna. Las figuras 4-49 a 4-52 recogen los resultados de la aplicación del MPS a esta formulación. Por una parte se observa una aceptable capacidad de identificación del fallo en los tres primeros casos, que es incluso mejor que la obtenida mediante el método de optimización anterior (MOCA-C), pero que se torna en incapacidad para el fallo simultáneo de dos columnas. En lo que respecta a la habilidad de predicción del campo se observa que a pesar de la reducción del ruido el error de predicción no mejora, manteniéndose en todos los casos mejor que  $-15$  dB.

La causa de las limitaciones observadas reside fundamentalmente en e incapacidad par representar las variaciones verticales: al considerar un único dipolo de Hertz por cada columna, las variaciones de radiación debidas al ángulo de observación desde cada una de las distancias de medida no puede ser tenida en cuenta, y en consecuencia, existe una inadaptabilidad esencial entre las medidas y el error infranqueable. De hecho, cuando el conjunto de medidas se hace a la altura de la antena, las mencionadas diferencias se reducen ( el diagrama vertical cambia con la distancia) y pueden distinguirse más fácilmente los fallos. Otra manera de resolver el problema es considerar una distribución de corrientes magnéticas también vertical con una relación de intensidad como la de los dipolos reales.

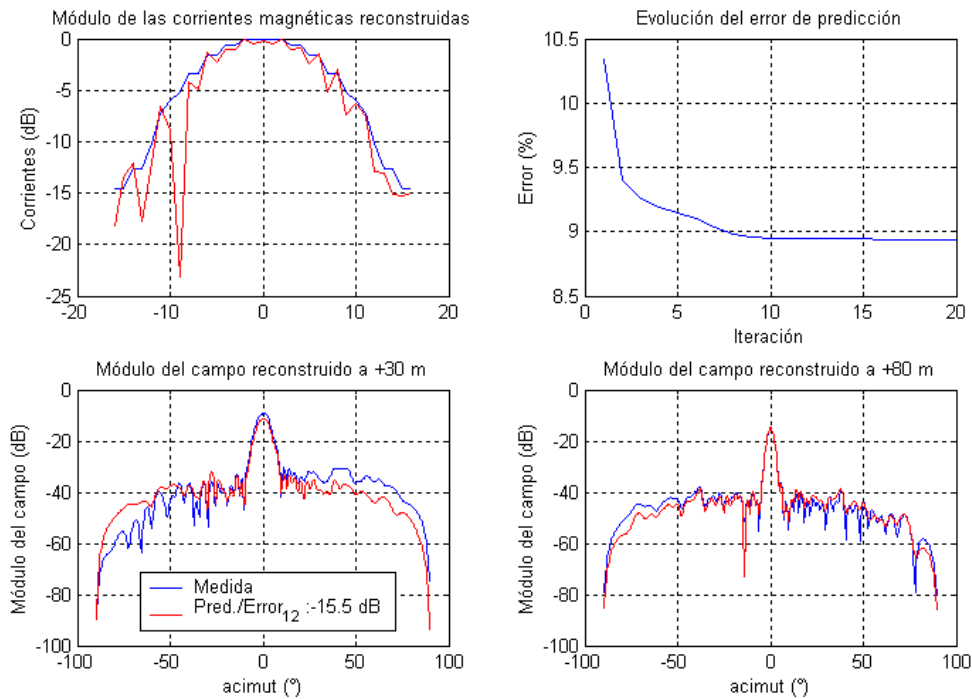
Debe no obstante señalarse cómo, a pesar de la poca información sobre la antena que esta aproximación considera, se llega a identificar fallos de una sola columna (se han probado un gran número de situaciones al margen de las aquí representadas), que de hecho, puede extenderse a más columnas si la distribución de corrientes magnéticas se extiende verticalmente (según se ha señalado). Además las distribuciones horizontales del campo pueden predecirse con un error de entorno al 3%.



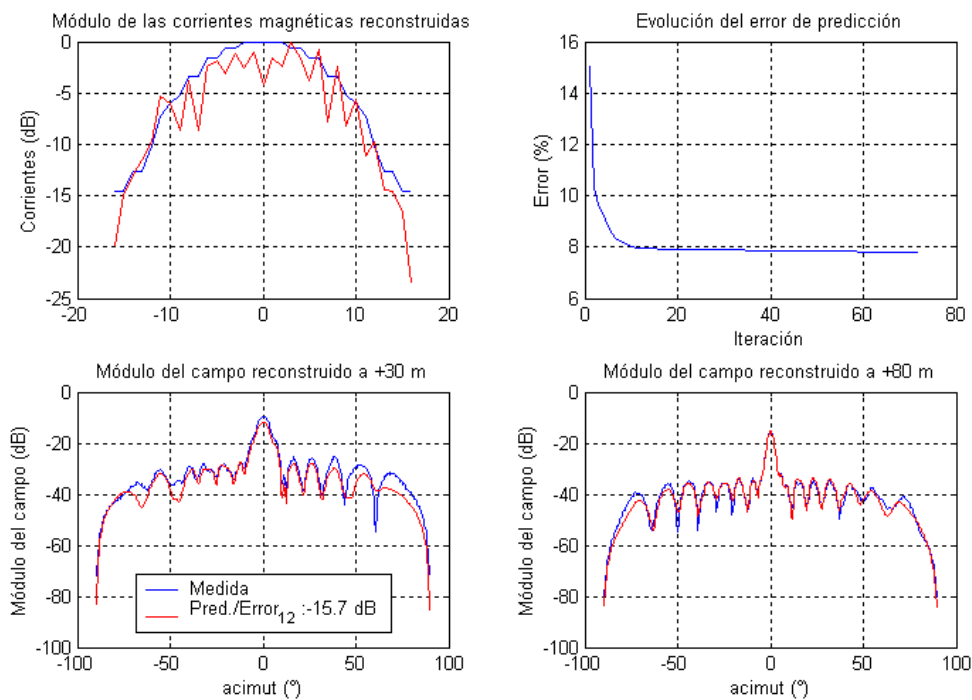
**Figura 4-49.** Reconstrucción a partir de dos distribuciones de módulo del campo  $E_y$  sobre el plano  $y = -20\text{m}$ . Formulación de corrientes equivalentes magnéticas. Fallo de la columna  $-9$ . Método de Proyecciones sucesivas (MSP-M). Error logarítmico de medida:  $\pm 0.5$  dB.



**Figura 4-50.** Reconstrucción a partir de dos distribuciones de módulo del campo  $E_y$  sobre el plano  $y = -20\text{m}$ . Formulación de corrientes equivalentes magnéticas. Fallo de la columna  $-9$ . Método de Proyecciones sucesivas (MSP-M). Error logarítmico de medida:  $\pm 0.25$  dB.



**Figura 4-51.** Reconstrucción a partir de dos distribuciones de módulo del campo  $E_y$  sobre el plano  $y = -20\text{m}$ . Formulación de corrientes equivalentes magnéticas. Fallo de la columna  $-9$ . Método de Proyecciones sucesivas (MSP-M). Error logarítmico de medida:  $\pm 0.05\text{ dB}$ .



**Figura 4-52.** Reconstrucción a partir de dos distribuciones de módulo del campo  $E_y$  sobre el plano  $y = -20\text{m}$ . Formulación de corrientes equivalentes magnéticas. Fallo de la columna  $-9$  y  $0$ . Método de Proyecciones sucesivas (MSP-M). Error logarítmico de medida:  $\pm 0.25\text{ dB}$ .





*“El conocer es un viaje de ida y vuelta: Primero tenemos que formarnos ideas de las cosas que es lo que se ha hecho hasta ahora; pero luego, para de verdad conocer, es preciso restar todo eso que se ha pensado, cayendo en la cuenta de que la realidad es siempre más o menos, distinta de lo pensado”*

*José Ortega y Gasset.*

*“Sobre la razón histórica”*

## **V. SOBRE LA OBSERVACIÓN DEL CAMPO ELECTROMAGNÉTICO**



## 5.1 INTRODUCCIÓN

Llegados hasta este punto podría darse por resuelto el problema que en un principio nos habíamos fijados, es decir, la identificación de las fuentes responsables de un campo electromagnético observado. Primero hemos investigado la forma en que el campo puede ser descrito por medio de un mínimo número de fuentes equivalentes; a continuación hemos visto cómo conocida la distribución de campo puede colegirse la relación de corrientes para ese número mínimo de fuentes, y al fin hemos valorado la eficiencia de esos métodos. Sin embargo, si no decimos nada acerca de la manera en que efectivamente puede observarse el campo, la pretendida realidad perseguida al principio se diluye en una solución hasta cierto punto ideal.

Sin poner en tela de juicio la realidad del campo electromagnético, es evidente que no nos es dado a priori su conocimiento y que de alguna manera debemos arreglárnoslas para estimar el campo que en efecto se da sobre un determinado dominio. Tenemos además la certeza de que cualquier intento de observación va a modificar intrínsecamente el campo radiado, según lo hemos definido en §2.1 (entre otras cosas estamos traicionando la hipótesis de homogeneidad circunstancial), también estamos seguros de que, muy a pesar de nuestros esfuerzos, las medidas siempre estarán más o menos contaminadas por ruido; y finalmente sabemos que cualquier dispositivo que utilicemos para medir va a incorporar una cierta proporción de alinealidad que no podamos predecir. Pero aun así es del todo evidente que las diferencias observadas en la excitación de cualquier dispositivo sensible a la radiación en cuestión, según este se desplaza sobre el dominio de observación, pueden ofrecernos un cierto conocimiento de la verdadera distribución de campo electromagnético. Nuestra aproximación a la realidad dependerá de las características del dispositivo empleado, y muy especialmente del conocimiento que dispongamos de ellas, así como de la circunstancia en que el objeto radiante se encuentre inmerso, y en especial de nuestra habilidad para eliminar todas aquellas variaciones que no sean debidas a la radiación que en efecto desea observarse.

Por este motivo, la práctica usual en la medida de los sistemas radiantes consiste en controlar sus condiciones ambientales y de operación, generalmente desplazándolos a entornos específicos y aislados que intentan modificar lo menos posible las características de radiación del objeto inmerso en un espacio idealmente homogéneo e isotrópico. Las ventajas de esta práctica son evidentes de acuerdo con lo que hemos dicho y podríamos considerarlas como una reducción de las variables estocásticas que afectan a las medidas. Sin embargo, hay muchos sistemas radiantes que bien por su inaccesibilidad, por su tamaño o por su función estratégica no pueden interrumpirse y trasladarse a tales ambientes. En ciertos casos el coste que suponen las medidas las excluye directamente de las rutinas de mantenimiento, aunque éstas pudieran ser de gran utilidad. Para paliar estos problemas se recurre frecuentemente a la utilización de aparatos de medidas diseñados para propósitos generales, considerablemente complejos y costosos, que se desplazan a lugares oportunos en los que las condiciones ambientales no modifican excesivamente la radiación. Esta práctica es costosa y el uso

de medidores de gran precisión no remedia la inevitable aparición de errores frecuentemente importantes. Por otra parte, para poder aplicar correctamente los aparatos de medida suele ser necesario controlar las señales radiadas, con lo cual el sistema bajo medida debe interrumpir sus funciones. En las situaciones en que esta interrupción es problemática a veces se recurre a la detección de las señales que la antena emite o recibe en condiciones normales.

En suma, las prácticas empleadas para la observación del campo radiado se agrupan en una de las tres categorías siguientes:

- 1) Medida en entornos cerrados (ya sean más o menos anecoicos);
- 2) Entornos abiertos gobernando las señales transmitidas o recibidas por el sistema radiante bajo estudio;
- 3) Entornos abiertos empleando las señales que el propio sistema radiante transmite;

Puesto que la mayoría de las prácticas pertenece a las dos primeras categorías, de las cuales puede encontrarse una gran cantidad de bibliografía [42; 24; 80; 104], vamos a profundizar aquí en la técnica tercera.

## **5.2 SISTEMAS OBSERVADORES DE MEDIDA**

Extendiendo la terminología usada en el capítulo tercero a propósito de los métodos inversos sin fase podríamos llamar a las dos primeras técnicas de medida antes mencionadas como *manipuladoras*; y *observadora* la que nos va a ocupar. La idea, en efecto, es la misma: en lugar de intervenir sobre el campo electromagnético efectivo, atenderemos a las condiciones de la observación para que esta pueda dar cuenta del campo que verdaderamente radia el sistema bajo estudio.

Si un sistema de este tipo se dedicara, sin más, a la detección de las señales que emergen de una antena (o que ésta capta y tenemos la posibilidad de observar), el problema de la identificación de la radiación generada por el sistema radiante dependería de la información que estas señales puedan portar. Si en efecto llevan información, las variaciones que detecte el sistema de medida, según se desplace sobre el dominio de observación, se deberán tanto a la información como a las variaciones espaciales de radiación. Sin embargo, habida cuenta que todo sistema de radio, además de las señales que puedan llevar información (más o menos contingente), emite también con cierta periodicidad señales determinísticas, podrá atenderse precisamente a éstas. En suma, un sistema de medida observador deberá dejar funcionar al sistema radiante en sus condiciones normales e irá captando las señales determinísticas que éste emita mientras el detector se desplaza a su alrededor, o bien mientras el radiador gira.

Podría argüirse que esto se trata de una práctica inveterada ya que los más remotos ensayos destinados a la observación del campo electromagnético como tal, es decir las experiencias de Hertz



[63] y las directamente inspiradas en él (como es el caso de las de Lodge, Fleming, Popov, Roghi, Marconi o Bose)<sup>1</sup>, eran propiamente observadoras y consistían en el desplazamiento geoméricamente controlado en torno al objeto radiante. Sin embargo, desde que Marconi y C.S. Franklin recurrieran en 1916 a un sistema rotatorio para la caracterización de las antenas [108; 109] y se observaran los beneficios de haber controlado el entorno (en particular sobre el trayecto de propagación), el sometimiento de éste ha ido desde entonces en aumento, especialmente desde la fundación de los primeros laboratorios de radiación en la década de 1940<sup>2</sup>. Evidentemente la progresiva tendencia hacia los entornos cerrados ha ido acompasado con la creciente contaminación electromagnética en todas las zonas del espectro útil. Sin embargo, el recurso a las técnicas de detección desarrolladas en el ámbito de la transmisión digital, como aquí se propone, pueden conducir a la eliminación de los efectos perturbadores de la polución electromagnética para un nivel de precisión finito.

Desde el punto de vista de la instrumentación, la tendencia al desarrollo de herramientas de propósito general, cuyos beneficios son indiscutibles, unida a su creciente complejidad y a la falta de transparencia de las prácticas industriales, ha conducido hacia: un progresivo distanciamiento del experimentador respecto del experimento; una dificultad de adaptación de la tecnología a circunstancias específicas; y el uso de instrumentación de muy elevado costo. En circunstancias como la mencionada en el tercer ejemplo del capítulo anterior, la imposibilidad de introducir los sistemas radiantes de grandes dimensiones en entornos cerrados hacen que los experimentos se vean materialmente complicados por el desplazamiento de los voluminosos aparatos de medida, mientras que la operación específica que estos realizan podría ser fácilmente desempeñada por algún dispositivo ligero, económico y fácilmente controlable. Es indiscutible que no sería práctico la construcción de sistemas de medida específicos para cada uno de los experimentos de radiación. Sin embargo, en ciertas circunstancias –como la mencionada– en que éstos deben reiterarse para realizar un mantenimiento de las características funcionales de los sistemas de radiación bajo

---

<sup>1</sup> Aunque en cierta manera puede hablarse de experiencias más remotas de detección de la radiación electromagnética (naturalmente al margen de la humanamente visible), como es el caso de los experimentos de Henry en 1842, o los de Loomis, Edison, Dolbear o Hughes en la segunda mitad del s.XIX [56] (pero anteriores a los resultados de Hertz e independientes de la teoría Maxweliana) no puede decirse que estos pretendieran la observación del campo electromagnético ya que ni tan siquiera se contemplaba su existencia. Se puede decir que en tales experiencias la realidad electromagnética participaba a modo de un actor invisible. De hecho, la interpretación de los fenómenos participantes era incompatible con la verdadera naturaleza del electromagnetismo.

<sup>2</sup> En los propios artículos de Marconi [108; 109] está ilustrada de primera mano la transición de las estrategias *observadoras* a las *manipuladoras*.

estudio, la disponibilidad de un sistema de medida específico puede convertirse en la solución más eficiente.

Se propone a continuación un modelo de sistema *observador* para la caracterización de los sistemas radiantes, que hemos convenido en llamar *sistema adaptado de medida* (por razones que se verán más adelante). Su objetivo es soslayar los problemas mencionados y serán de especial utilidad para el control y mantenimiento de sistemas radiantes voluminosos. Una vez planteada la arquitectura general del sistema se particularizará para el problema ya tratado en el capítulo anterior de diagnóstico de antenas de Radar Secundario (§4.4).

### 5.3 MODELO DE SISTEMA ADAPTADO DE MEDIDA

Si se pretende realizar un sistema de medida que permita observar las características de radiación de un determinado objeto activo en todas las direcciones de interés, a la vez que no se estorbe su libre funcionamiento, no queda otra posibilidad más que la de aprovechar las señales que dicho objeto transmita en circunstancias normales. Sin embargo, aquí puede llegarse a una dificultad esencial: si las señales transmitidas están a merced del envío de información, es evidente que éstas constituyen un proceso estocástico que, en consecuencia, imposibilita el discernimiento de las variaciones debidas a la orientación del sistema radiante. Por fortuna, esta dificultad puede evitarse gracias a que todo sistema de comunicaciones debe incluir una cierta proporción de señales determinísticas necesaria para el establecimiento, sincronización, mantenimiento y cierre de las comunicaciones. Serán, por tanto, estas señales determinísticas las que podrán emplearse para la caracterización del sistema radiante mediante el discernimiento de las diferencias observadas en cada una de las direcciones de interés (que podrán ajustarse de acuerdo con los teoremas de muestreo y el rango de observación pretendido). En el caso en el que estas señales sean continuas (como por ejemplo, en las modulaciones con portadora) o tengan una periodicidad suficiente, podrá llegar a dilucidarse a partir de su recepción la distribución de campo compleja sobre el dominio de observación. Sin embargo, en muchos casos la frecuencia de estas señales hace inviable la detección de la distribución compleja y debemos contentarnos con la distribución del módulo. Como se vio en el capítulo tercero, en tales condiciones se requiere:

- bien, la utilización de la distribución de módulo sobre *dos dominios* separados de observación;
- o la detección sobre el mismo dominio de las distribuciones de módulo del campo *eléctrico* y *magnético* (empleando un par de antenas);
- o bien, la incorporación de *información adicional* de la distribución de *fuentes* (que como se demostró no es suficiente con la geometría de su soporte, salvo que éste sea no compacto);

### 5.3.1 Arquitectura básica del sistema

Teniendo en cuenta que las señales que proceden del sistema radiante bajo estudio estarán moduladas a la frecuencia de su correspondiente canal de radiofrecuencia, la primera operación que el sistema de medida deberá hacer es inmediata: captar las señales del canal de radio en cuestión y rechazar las extrañas. Puesto que a continuación, según se ha argumentado, deben seleccionarse las señales determinísticas –que denominaremos *señalización*– esto podría hacerse de múltiples maneras, pero aquí se propone hacerlo de forma óptima. Es decir, deberá evitarse el ruido lo más eficientemente posible. Afortunadamente esta solución nos la brindó de forma general Kotel'nikov [83] en el marco de su teoría de la inmunidad óptima al ruido (1959): si conocemos las características formales de la señal a detectar debemos emplear un “filtro cuya respuesta impulsional sea la imagen especular de dicha forma, retrasada un tiempo igual a la diferencia entre el inicio de la señal y el instante de muestreo”.

Supongamos que logramos con éxito este propósito (cosa que se discutirá más adelante), el resultado será una secuencia de valores que equivaldrá a una réplica, escalada, del campo discretizado sobre el dominio de observación, y que a su vez estará ordenado a tenor de la trayectoria del receptor relativa al sistema radiante. Podrá hablarse de un número finito de puntos de medida sobre el dominio de observación, que denotaremos por  $M$ . En caso de que el sistema radiante rote de manera continua (como ocurre en algunos sistemas de radiodeterminación), la trayectoria es evidentemente circular con centro en el eje de rotación y con una geometría fácilmente determinable. Si ese no fuera el caso será menester controlar geométrica y eléctricamente la trayectoria<sup>3</sup>.

Desde el punto de vista de la dimensión finita del problema (§2.4) habrá de garantizarse que la distancia entre puntos de medida respeta al menos el tercer teorema de muestreo. Si fuera necesaria la regularización o el aumento artificial de muestras sobre el dominio de observación, ésta puede conseguirse mediante diversas técnicas de interpolación (§2.4.2, [18; 21; 22]). En caso de requerir la observación (a tenor de las condiciones de unicidad discutidas en el capítulo III) de varias componentes del campo eléctrico; de una combinación de campo eléctrico y magnético; o de uno de ellos sobre dos dominios: éstos podrán adquirirse de forma secuencial. De esta forma la observación puede considerarse ordenada en una secuencia de valores numéricos correspondiente a las necesarias distribuciones de campo, que podemos designar por:  $\{\underline{E}_1\}$  o  $\{|\underline{E}_1|, |\underline{E}_2|\}$  o bien  $\{|\underline{E}_1|, |\underline{H}|\}$ . Finalmente, empleando las expresiones (2-90) o (2-91) y los procedimientos inversos

---

<sup>3</sup> Es decir, determinar con suficiente precisión la posición relativa del emplazamiento de medida (podrá hablarse de  $M$  emplazamientos), a la vez que deberán intentar mitigarse las diferencias relativas entre los trayectos de propagación a cada uno de los emplazamientos.

detallados en el capítulo III podrá llegarse a la caracterización del sistema radiante bajo estudio en términos de una distribución de corrientes equivalentes.

De acuerdo a la anterior descripción en el *sistema de medida adaptado* pueden distinguirse tres nítidas partes:

- 1) la *detección* de las señales procedentes del radiador;
- 2) la *recepción óptima* de la señalización cuyos niveles están sólo matizados por la posición relativa entre radiador y medidor; y la adquisición del nivel correspondiente;
- 3) la agrupación de los datos en diagramas de radiación asociados a dominios de medida y la aplicación de métodos inversos para la reconstrucción de corrientes sobre la estructura del radiador.

Donde la agrupación de los valores recibidos  $\underline{E}_m$  tendrá una expresión asociada en el espacio  $\mathbb{E}$ :  $\underline{E} = \underline{T} \cdot \underline{f}$  que podrá determinarse con los métodos descritos en §3.2 o §3.1 (según sea el caso).

La figura 5-1 esquematiza la arquitectura básica descrita así como el procedimiento de medida.

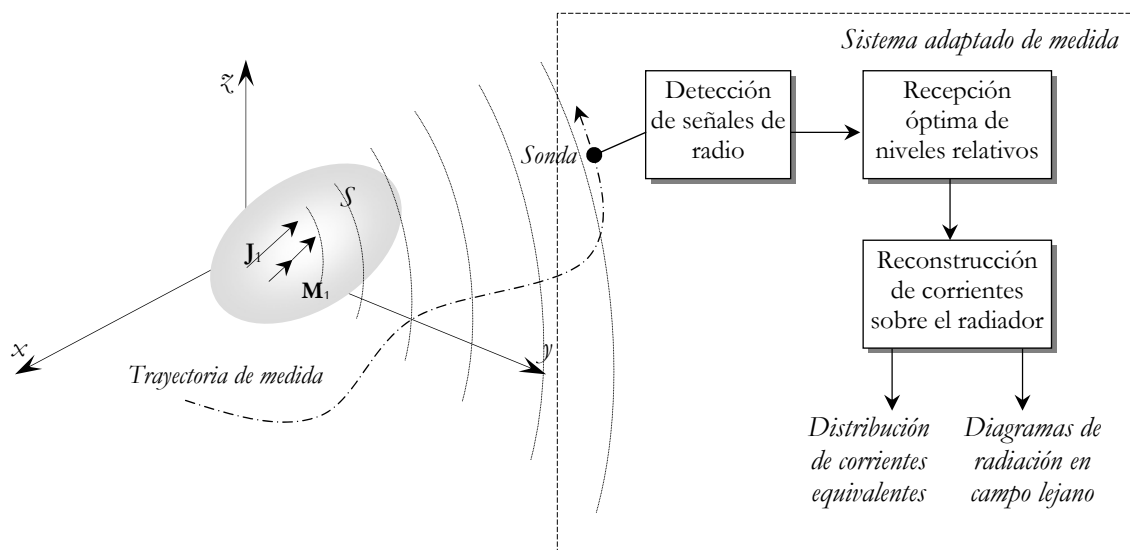


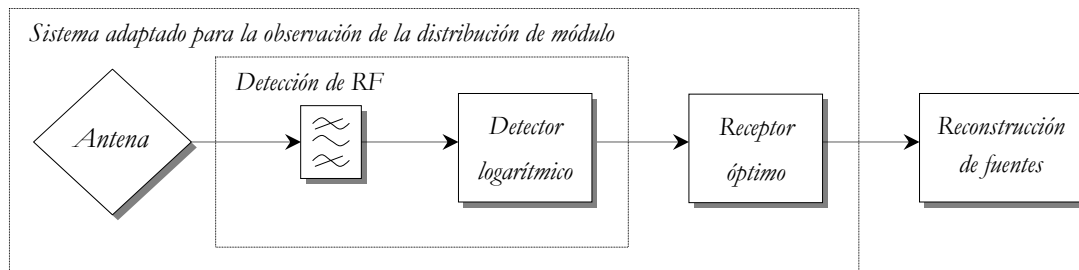
Figura 5-1. Arquitectura básica del sistema adaptado de medida

### 5.3.2 Detección de señales de radiofrecuencia

Como se indicó anteriormente el primer paso en la detección consiste en el filtrado del radiocanal empleado por el sistema radiante. Pero en virtud de la posibilidad de sincronización de la portadora se presentan dos situaciones claramente diferentes. Cuando la sincronización no es posible entonces debe detectarse la amplitud, para lo cual –dado el gran margen dinámico que cabe

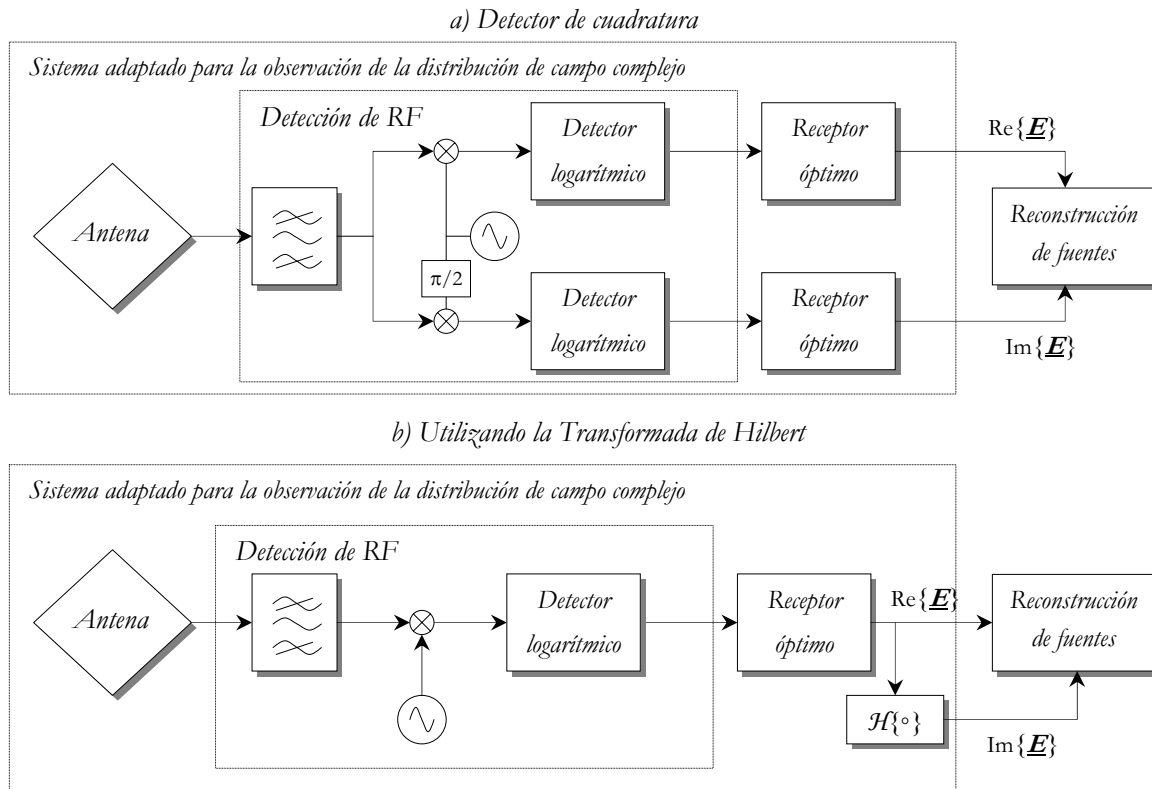
esperarse en el campo observado— puede recurrirse a detectores logarítmicos<sup>4</sup>. Evidentemente en estos casos ya sólo podrá llegar a conocerse directamente la distribución de módulo del campo. Sin embargo, en las circunstancias en que pueda sincronizarse la portadora, podrá también distinguirse la fase y así recoger la distribución compleja del campo. Para ello, y de acuerdo con la teoría de Kotel'nikov, bastará con reduplicar la estructura de recepción óptima para las señales recibidas, modulando una con la portadora en fase y otra con la portadora en cuadratura. La figura 5-2 muestra la estructura que debiera tener el detector en la situación en que no sea posible la sincronización de la portadora. Teniendo en cuenta la disponibilidad de detectores logarítmicos integrados con suficiente margen dinámico, se trata de una estructura extremadamente sencilla.

Para el caso en que si sea posible la sincronización de portadora puede recurrirse a una detección según se ha descrito, es decir, mediante un detector de cuadratura; o bien, de acuerdo con la propiedad de extensibilidad analítica de la distribución de campo (discutida en §3.3), usar la transformada de Hilbert según (3-38). En la figura 5-3 se representan estas dos posibilidades.



**Figura 5-2.** Detección adaptada de la amplitud de las señalización para la adquisición de distribuciones de módulo.

<sup>4</sup> En general, la detección logarítmica (por ejemplo, mediante amplificadores logarítmicos) es un requisito indispensable antes de realizar la cuantificación ya que de lo contrario el gran margen dinámico a que debe atender el sistema no podría representarse adecuadamente.



**Figura 5-3.** Detección adaptada de la señalización para la adquisición de distribuciones de campo complejo.

### 5.3.3 Recepción óptima de las distribuciones de campo

Según puede verse en las figuras 5-2 y 5-3 tanto si es posible la detección de la distribución compleja como si debemos arreglárnoslas con la de módulo, en ambos casos se recurrirá a una estructura de recepción óptima en el sentido de la teoría de Kotel'nikov (o de la recepción digital [148; 25]), que –como se indicó en §5.2.1– dependerá esencialmente de las características formales de la señalización usadas por el sistema radiante.

Si nos ceñimos a la solución de Kotel'nikov para la realización del receptor óptimo surgen dos nuevas dificultades: 1) la realización del filtro adaptado; 2) elegir el instante de muestreo apropiado. El segundo problema, al igual que en los receptores digitales, puede resolverse mediante uno o dos filtros adaptados seguidos de una comparación continua (o pseudo-continua), eligiendo como instante de muestreo aquel en el que se cumplan ciertas condiciones en las señales de los filtros adaptados [148]. La confrontación con la primera dificultad puede resultar compleja si se pretende la realización de un filtro continuo, pero acudiendo al teorema de muestreo de Nyquist [125; 146]

puede emplearse una realización discreta del receptor, que sería idéntico al primero para señales de banda limitada<sup>5</sup>.

En la figura 5.4 se representa la estructura ideal de recepción según las condiciones anteriores, donde  $\xi(t)$  representa la forma de la señalización (señal básica);  $T$  su periodo de repetición;  $\beta$  la distribución de amplitudes con que la señalización es detectada desde cada punto del dominio de observación, que a su vez refleja la distribución de campo (en módulo; su componente en fase...). En caso de tratarse de una detección de módulo: la secuencia emergente,  $\alpha$ , será proporcional a la distribución de módulo del campo, a lo que podemos considerar añadido un cierto ruido,  $\underline{n}$ , que podrá haber sido causado por el detector logarítmico, por múltiples fuentes de interferencia, o por razones térmicas:

$$\underline{\alpha} = k \cdot \ln \{ | \underline{E} | \} + \underline{n} \quad (5-1)$$

Donde  $k$  representa una constante de proporcionalidad que podrá ajustarse mediante calibrado (o haciendo caso omiso de ella, las distribuciones de corriente reconstruidas podrán aun determinarse aunque su amplitud sea ambigua). Naturalmente, la expresión anterior podemos también expresarla de modo que la distribución decibélica de amplitudes quede relacionada con la secuencia recibida. De esta forma en lugar de hablar de ruido podremos referirnos a una distribución de errores,  $\underline{\varepsilon}$ , respecto a la verdadera distribución decibélica del campo radiado:

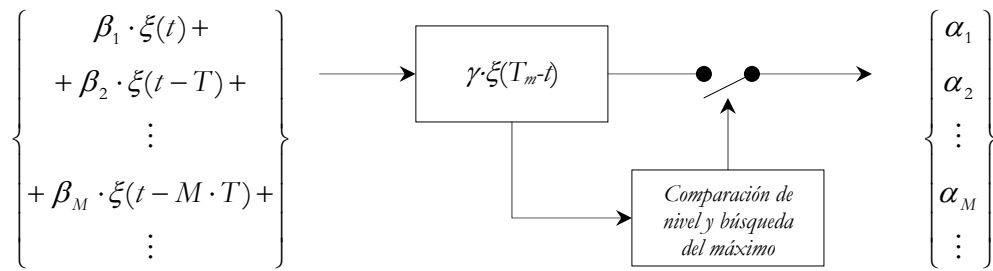
$$| \underline{E} | (dB) = k' \cdot \underline{\alpha} + \underline{\varepsilon} \quad (5-2)$$

El ruido, aunque podamos tomarlo en general como un variable estocástica estacionaria, sus características dependerán de la fuente que las haya causado. No obstante, siempre será posible encontrar un modelo conservador de ruido térmico cuyo efecto sea igual o peor que aquel que, en efecto, sea el caso. Por tanto, podremos considerar el error como una variable gaussiana, caracterizada por una cierta varianza, que dependerá esencialmente de la densidad espectral de ruido.

Si, verdaderamente, la recepción se ha realizado mediante filtrado adaptado (o mediante correlación con la forma de la señalización) y se ha muestreado en el instante oportuno, entonces de acuerdo a Kotel'nikov el error relativo:  $\{ \|\varepsilon\|^2 / \|E(dB)\|^2 \}$  será mínimo.

---

<sup>5</sup> Como en realidad se asumen dos características en principio inconciliables: ancho de banda finito y duración finita, y además al cuantificar se rompe la identidad absoluta entre la señal continua y la discreta, estrictamente podrá decirse –parafraseando a Shannon– que la solución numérica y la continua son idénticas “con una frecuencia de errores tan pequeña como deseemos”[146].



**Figura 5-4.** Recepción adaptada del nivel de las señalización para la adquisición de distribuciones de módulo.

### Muestreo y cuantificación

Habida cuenta que el instante óptimo de muestreo es aquel en el que la salida del filtro adaptado sea máxima, la búsqueda de este instante podrá hacerse mediante la indagación del máximo de dicha salida. Proceso que evidentemente habrá de ir acompañado de alguna comparación del nivel absoluto de la salida para evitar el muestreo de señales espurias (véase figura 5-4). Este nivel deberá fijarse en función de la varianza del ruido, que a su vez está en función de la densidad espectral del modelo de ruido térmico: fijando un objetivo de probabilidad de error, en la detección de señales válidas, habrá un valor mínimo detectable. Si el ruido puede considerarse gaussiano entonces podremos tomar ese valor como intervalo de cuantificación, que combinado con el margen dinámico a la salida del detector indica el número de intervalos de cuantificación necesarios para el muestreo (y así, el número de bits para su codificación).

Supongamos que dadas las características formales de la señalización sabemos que ésta tienen un ancho de banda  $B$ . De acuerdo con el teorema de muestreo [125; 146] si esa señal la muestreamos a una frecuencia superior a  $2B$ , entonces la señal original podrá reconstruirse plenamente. Por tanto, si en lugar de buscar una realización continua del esquema de Kotel'nikov pretendiéramos una discreta respetando los límites del teorema de muestreo, entonces el receptor óptimo podrá efectuarse por medio de procesado numérico, que tenderá asintóticamente al comportamiento del proceso continuo a medida que se reducen los errores de cuantificación. En la figura 5-5 se representan estas dos realizaciones paralelas. Donde  $Q$  representa la operación de cuantificación.



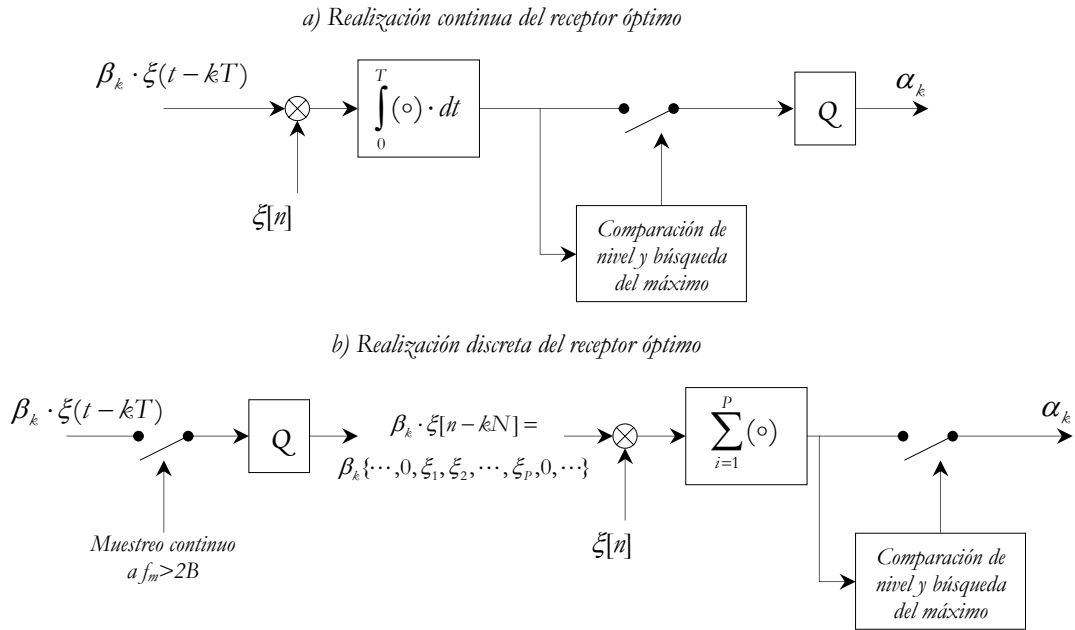


Figura 5-5. Recepción adaptada del nivel de la señalización para la adquisición de distribuciones de módulo.

**Modelo de error**

Si a la entrada del receptor el ruido puede modelizarse como gaussiano, con una densidad espectral de ruido unilateral  $\eta$ , y la señal básica  $\xi(t)$  alcanza al receptor con una energía  $E$ , entonces puede fácilmente demostrarse que la probabilidad de que ésta sea confundida con el ruido es [25, §A-C] (designando  $Q$  la función de distribución normal complementaria):

$$P_E = Q\left(\sqrt{\frac{E}{2\eta}}\right) \tag{5-3}$$

A una probabilidad de error máxima le corresponderá, según (5-3), una energía mínima de la señalización, o lo que es lo mismo un mínimo de amplitud que a su vez estará directamente relacionado con la intensidad de campo (eléctrico o magnético dependiendo de la antena utilizada). En caso de que pretendan distinguirse todos los niveles con la misma incertidumbre, esa amplitud mínima servirá para la definición de todos los umbrales de cuantificación. Si el discernimiento de las señales válidas fuese crítico para una acertada ubicación de las medidas sobre el dominio, entonces debería imponerse un criterio para la identificación del nivel más bajo y otro para valorar los errores entre niveles consecutivos. En algunas ocasiones, como se verá en la medida del campo radiado por el Radar Secundario, podrá usarse una parte de la señalización para asegurar su validez y otra para discernir niveles. No obstante, siempre podrá estimarse a partir de (5-3) la probabilidad de que al realizar la cuantificación ésta pueda confundirse en la asignación de un valor determinado. Si ésta es lo suficientemente pequeña (por ejemplo el 1%) está justificado la utilización de un modelo de error cuya distribución probabilística sea uniforme y comprendida entre el valor de medio intervalo de cuantificación y su inversa.

Si pudiera identificarse que en algún punto o zona del dominio de observación las medidas carecen de sentido físico, por ejemplo, por haber rebasado el umbral de sensibilidad del detector, entonces puede evitarse que estas medidas perjudiquen el proceso de caracterización mediante la aplicación de un factor de ponderación  $\pi_i=0$  (a dicha medida) en la matriz  $\underline{\pi}$  que define el producto interno en el espacio  $\mathfrak{E}$  (3-2).

## 5.4 SISTEMA DE DIAGNOSIS PARA ANTENAS DE RADAR SECUNDARIO

Un problema especialmente apropiado para el tipo propuesto de observación es el que compete a la caracterización de las antenas rotatorias de los sistemas de radiodeterminación, como es el caso de los radares primarios o secundarios. Atenderemos precisamente a este último caso, ya considerado en los capítulos anteriores: en el segundo capítulo, §2.5.2, considerábamos conocida la distribución de fuentes y se observó el campo generado así como la validez de la discretización en los dominios de fuentes y campo; en el capítulo anterior, §4.4, se valoró la posibilidad de detectar fallos sobre la estructura radiante a partir de medidas corruptas por un ruido de cuantificación de  $\pm 0.5$  dB (que a su vez encubre los otros ruidos) y por las alinealidades del detector. Veremos pues aquí la posibilidad de hacer una observación del campo eléctrico vertical con tales características, que a su vez nos servirá para ejemplificar la arquitectura de *sistema adaptado de medida* antes descrita.

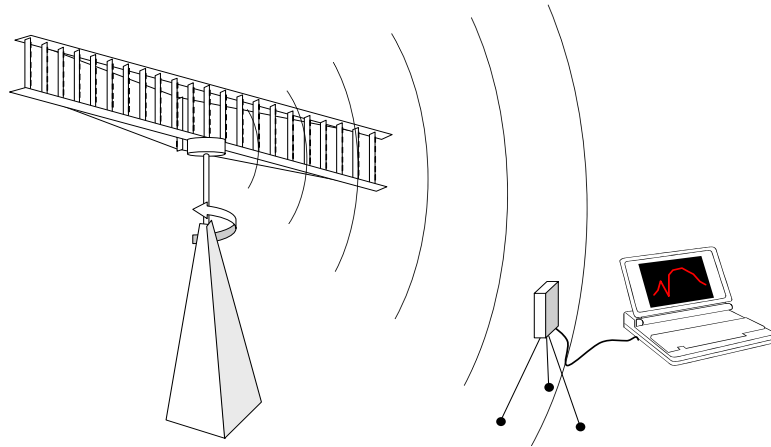
Si la solución de sistema diagnosis que aquí se propone se pone en contrapunto con la rutina empleada para el mantenimiento de las antenas, las virtudes de esta propuesta aparecen rotundamente resaltadas. Veamos, en primer lugar, con objeto de controlar la directividad de las antenas, el experimentador suele detener la operación normal y controlar las señales emitidas a través de la antena, a continuación, debe alejarse hasta la zona de campo lejano (en torno a 500 m) con un abultada y pesada instrumentación, que evidentemente debe alimentar y protegerla de la interperie. Con los resultados obtenidos se comprueba si en efecto se ha producido alguna degradación en las condiciones de radiación y valorar hasta qué punto puede ser necesario tomar alguna precaución adicional. Hasta aquí la cosa no es del todo grave, porque si se decidiera que fuera necesario observar la antena en sí, entonces es menester detener la antena, levantar un andamio e ir midiendo con una sonda la radiación de cada columna una por una. Es suficiente esta breve descripción para imaginar el coste, el tiempo y los perjuicios causados a la función del radar secundario que esta práctica supone. En contraste aquí se propone el uso de un instrumento ligero, sencillo y económico que no requiere la interrupción del sistema y permite detectar fallos sobre la antena a partir de las medidas de campo.

### Necesidades de observación para la identificación de fallos

Según se argumentó en §4.4 la estructura de alimentación de las antenas de radar secundario, SSR, ilustradas en las figuras 2-26 y 4-38, hace que la relación de corrientes verticales, dentro de las

columnas, permanezca estable mientras que la relación de corrientes horizontales, entre columnas, resulte relativamente incierta. El efecto de esta incertidumbre es, no obstante, de gran importancia ya que de ello depende el diagrama de radiación acimutal y con él la precisión en la posición de las aeronaves. Como se indicó en §4.4, ocurre a menudo el fallo completo de una de las columnas que, naturalmente, urge identificar y cuya posibilidad –a partir del campo observado– se discutió allí.

En lo que respecta a los campos radiados sobre los dominios de medida, este tipo de incertidumbre en la relación de corrientes horizontales se traduce en una impredecibilidad sobre las variaciones del campo en desplazamientos horizontales y en cambio una buena predeterminación de las variaciones verticales. Por esta razón el dominio de medida debe proveer fundamentalmente variaciones horizontales, lo cual se consigue dejando al medidor fijo mientras la antena gira en condiciones normales de operación, que lo hace a razón de 15 r.p.m. [28], es decir 4 segundos por vuelta. La figura 5-6 ilustra la realización de las medidas de acuerdo a estos presupuestos, que evidentemente corresponde a la observación sobre un dominio ideal de observación cilíndrica como muestra la figura 4-39.

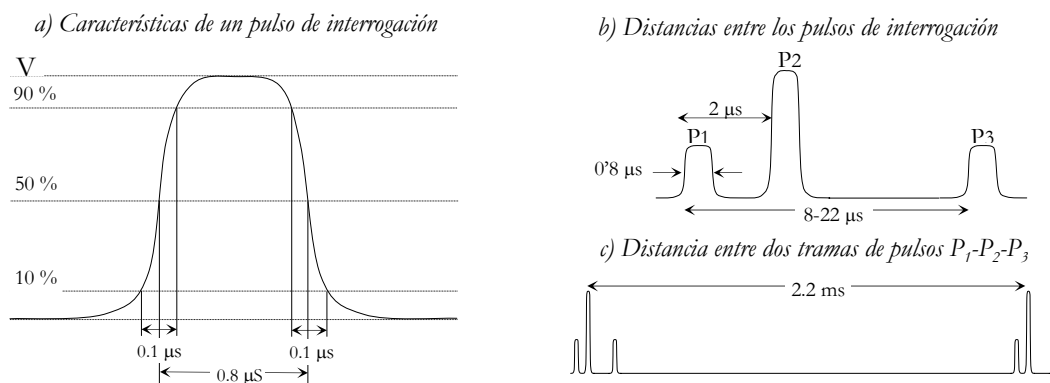


**Figura 5-6.** Observación del campo radiado por la antena SSR mientras se encuentra operativa, colocando el sistema adaptado de medida en sus inmediaciones.

De acuerdo con la arquitectura general de sistema adaptado para la observación del campo se requiere un detector de radiofrecuencia y un receptor adaptado para la identificación óptima de los niveles con los que la señalización es recibida. Una vez que estos niveles han sido cuantificados pueden emplearse como representantes del campo eléctrico sobre el dominio cilíndrico para su ulterior proceso numérico (en un ordenador). Por tanto, externamente el *sistema de diagnóstico* –como muestra la figura 5-6– estará constituido por un dispositivo de medida y un ordenador que además de controlar al medidor hará la reconstrucción de corrientes sobre la antena. A partir de ésta la *diagnóstico* es inminente.

### Señalización del Radar Secundario (señales de interrogación)

Como se discutió en §5.3 una condición necesaria para la identificación del campo, cuando no se tiene control sobre las señales radiadas, es el uso de señales determinísticas cuyas características no dependan del instante de observación sino solamente de la posición del punto de observación relativo a la antena. En el caso del Radar Secundario esto puede hacerse recurriendo a las señales de interrogación que emplea el sistema para ser captadas por las aeronaves y cuyas características formales están representadas en la figura 5-7. Estas señales consisten en ráfagas de tres pulsos separadas unos 2.2 ms, que espectralmente suponen un ancho de banda de 12,5 MHz (véanse los tiempos de subida y bajada). Cada pulso tiene una duración de 800 ns, manteniendo una separación entre el primero, P<sub>1</sub>, y el segundo, P<sub>2</sub>, de 2 μs; y entre el primero y el tercero, P<sub>3</sub>, una separación que varía dinámicamente entre 8 y 22 μs. Mientras que para la transmisión de los pulsos P<sub>1</sub> y P<sub>3</sub> se emplea la estructura de distribución antes descrita, que involucra la radiación de todas las columnas (generando un diagrama de radiación que se denomina *suma*), para el P<sub>2</sub> se emplea una sola columna frontal y otra trasera de la que, hasta ahora, nada hemos dicho y cuyos fallos al ser fácilmente identificables no le prestaremos especial atención. Puesto que las características de radiación de este último par de columnas genera un diagrama de radiación, denominado de *Supresión de Lóbulos Secundarios* (SLS), cuyo nivel es superior al del suma fuera del lóbulo principal, la detección de este pulso si bien no nos sirve para la identificación de la radiación procedente del diagrama directivo, podrá, sin embargo, ser de gran utilidad para la identificación de las ráfagas de pulsos válidas.



**Figura 5-7.** Características temporales de las señales de interrogación SSR

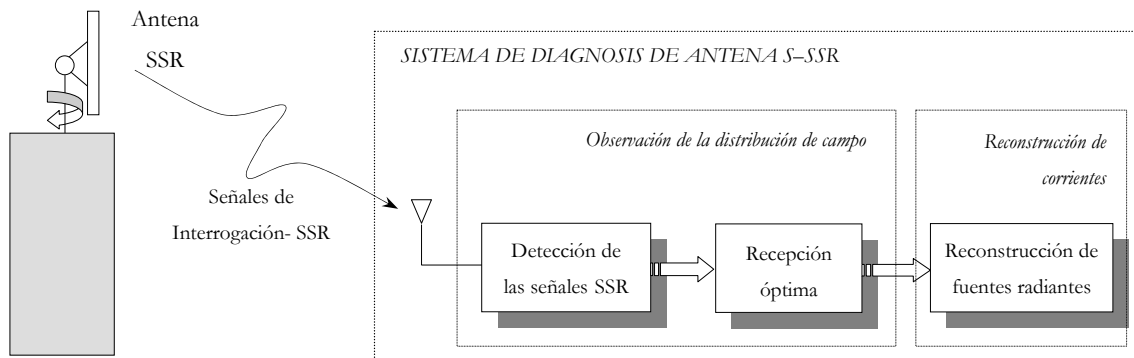
Puesto que la observación del campo dependerá de las diferencias observadas en estas señales, las anteriores características tendrán consecuencias capitales en la facultad de observación y en los requisitos del receptor. Veamos:

- 1º) Si se observan las diferencias en los niveles de los pulsos P<sub>1</sub>-P<sub>2</sub>-P<sub>3</sub>, la repetición de 2.2 ms a lo largo de una vuelta completa de 4 s supone 1818 puntos de observación (que como puede verse en §2.5.2, es más que suficiente no solo a tenor del teorema 3º de muestreo sino también del primero);

- 2º) Como consecuencia de la brevedad de los pulsos de interrogación y los largos intervalos de silencio resulta tecnológicamente inviable la detección de la fase<sup>6</sup> y, por tanto, el sistema debe ceñirse a la detección en módulo;
- 3º) La contingencia en la posición de  $P_3$  nos impide hacer una detección óptima de las ráfagas  $P_1$ - $P_2$ - $P_3$ . Al no haber una forma estable en el conjunto  $P_1$ - $P_2$ - $P_3$ , la detección adaptada no puede considerar el  $P_3$ .
- 4º) La separación fija entre  $P_1$  y  $P_2$  y el hecho de que la suma de los niveles de ambos pulsos es superior a un cierto valor puede emplearse para la identificación de ráfagas válidas;
- 5º) Identificada una ráfaga válida, el nivel del pulso  $P_1$  está en relación directa con el campo que nos interesa conocer y por tanto será el valor que se conserve para la identificación de la distribución de módulo del campo.

### 5.4.1 Arquitectura del sistema

Como se indicó antes, en el sistema de diagnóstico pueden distinguirse tres etapas que, aunque relacionadas entre sí, tienen funciones bien definidas: 1) detección de las señales de interrogación (discutido de forma general en §5.3.2); 2) recepción y muestreo de las señales detectadas en una vuelta completa de la antena (discutido de forma general en §5.3.3); 3) Reconstrucción de las fuentes radiantes (ya considerado en detalle en §4.4.2). La figura 5-8 ilustra esta arquitectura básica.

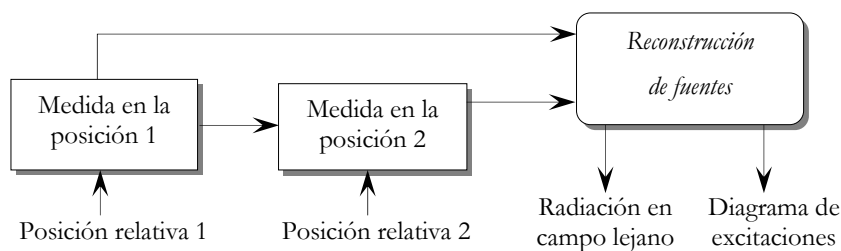


**Figura 5-8.** Arquitectura básica del sistema de diagnóstico para antenas de radar secundario.

Dada la limitación de adquisición de sólo distribuciones de módulo, se requiere, por tanto, una segunda distribución, que podrá obtenerse fácilmente colocando el medidor a otra distancia. Así la

<sup>6</sup> Para ilustrar la dificultad técnica del enganche de fase téngase en cuenta que una deriva de  $20^\circ$  entre pulsos separados 2.2 milisegundos exigiría una estabilidad de 25 Hz, que para una oscilación de 1030 MHz implica un deriva de 0.025 ciclos por millón.

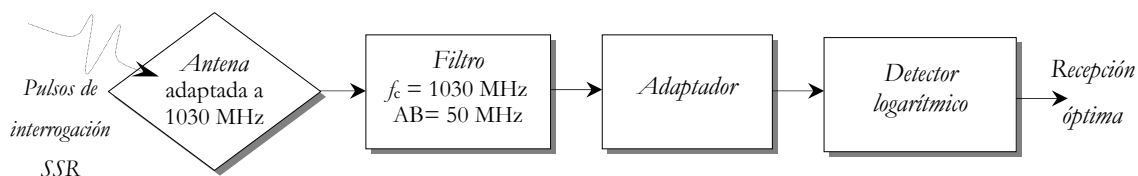
operación del sistema de diagnóstico, esquematizada en la figura 5-9, consiste en la colocación del medidor en las inmediaciones (por ejemplo, a 30 m de la base de la antena); la adquisición de una primera distribución de módulo del campo a esa distancia; la disposición del detector a una segunda distancia (por ejemplo, 100 m) y la subsiguiente adquisición de una segunda distribución de módulo del campo. Una vez realizado este par de medidas el sistema procedería a la reconstrucción de la distribución de fuentes (cuyos resultados se presentaron en §4.4).



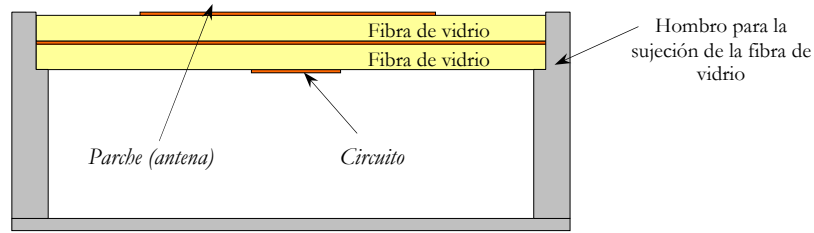
**Figura 5-9.** Operación del sistema de diagnóstico.

### 5.4.2 Circuito de detección

Para la detección de las señales de interrogación, de acuerdo con la arquitectura básica esbozada en §5.3.2, se necesita: una *antena*; un *filtro* que permita el paso de las señales de interrogación a 1030 MHz; y un *detector logarítmico*, que naturalmente habrá de *adaptarse* al resto del circuito en la frecuencia de interés (como ilustra la figura 5-10). Con objeto de aumentar la portabilidad del medidor, el circuito de detección se ha diseñado con objeto de que pueda integrarse en una estructura compacta. Una forma de conseguirlo es hacer que la antena, el filtro y el detector logarítmico queden sumidos en una misma configuración biplaca como la que muestra la figura 5-11, construida sobre un substrato de fibra de vidrio para el que se han buscado las soluciones óptimas de cada subcircuito. Como puede apreciarse en la figura 5-11 esta arquitectura tiene la ventaja adicional de aislar al circuito de detección y proveer una cierta directividad a la antena, que a su vez ofrece un relativo rechazo a señales no deseadas.

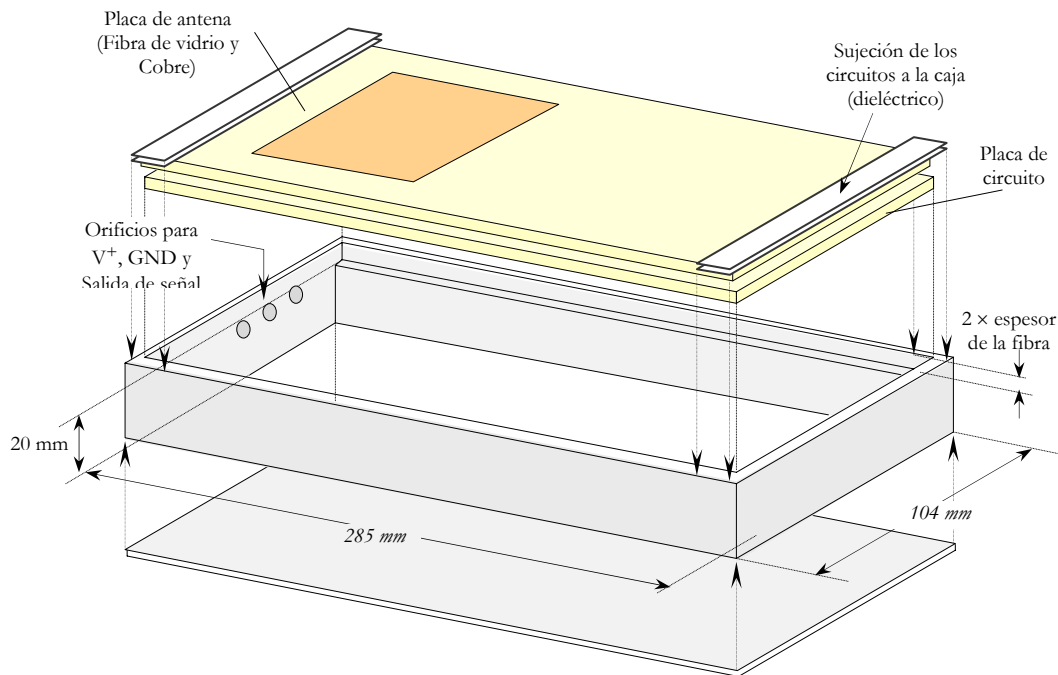


**Figura 5-10.** Circuito de detección de las señales de interrogación



**Figura 5-11.** Configuración biplaca sobre fibra de vidrio del circuito de detección.

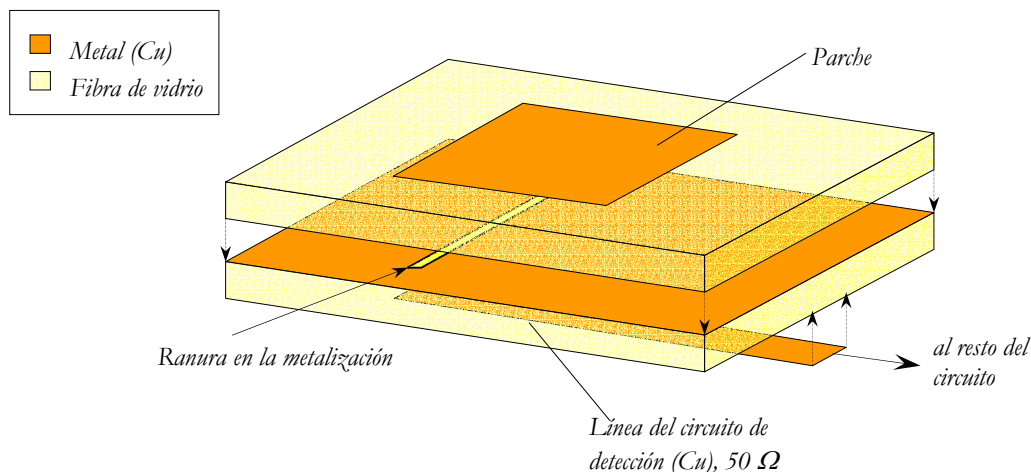
En la figura 5-12 se representan las características mecánicas del circuito de detección, donde puede distinguirse la configuración biplaca del circuito, la posición de la antena y el ensamblaje del circuito en la caja que lo contiene.



**Figura 5-12.** Características mecánicas del circuito de detección.

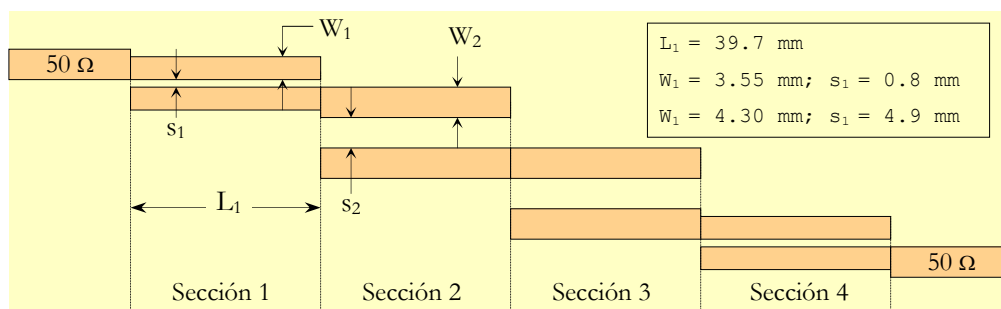
### Antena y filtro

Para conseguir la integración de la antena con el resto del circuito de recepción ésta consiste esencialmente en un parche y una ranura, como puede verse en la figura 5-13, permitiendo esta última la transferencia de la señal al resto del circuito. Con objeto de lograr la adaptación a la impedancia del circuito, que se ha elegido de  $50 \Omega$ , se han ajustado: 1) la longitud de un pequeño talón de microtira (en circuito abierto) que excede la posición de la ranura en la placa del circuito y 2) la distancia de la ranura al borde del parche.



**Figura 5-13.** Estructura de la antena e integración con el resto del circuito

Con la finalidad de conseguir que el filtro rechace lo suficiente las bandas laterales, con un orden mínimo para el substrato empleado (cuyas pérdidas son elevadas), éste se hizo a base de líneas acopladas [130, §9.7]. En la figura 5-14 se representan sus dimensiones, elegidas después de la optimización experimental. La figura 5-15 recoge las características del filtro medidas experimentalmente según indica la propia figura. Puede observarse un ancho de banda a 10 dB de 50 MHz y a 20 dB de 133 MHz, que supone un rechazo suficiente a las bandas adyacentes. Finalmente la figura 5-16 recoge los resultados experimentales de la respuesta conjunta de la *antena y el filtro*, para una configuración de ensayo en la que uno de los extremos está constituido por una bocina cuadrada y el otro por la antena unida al filtro. Puede observarse una buena adaptación del conjunto; un rechazo a la polarización cruzada mejor que  $-10\text{dB}$ ; y una pendiente de atenuación fuera de banda de aproximadamente  $1\text{ dB/MHz}$  (teniendo en cuenta la respuesta del filtro, fig. 5-15b, es evidente que fuera de la banda de paso, nítidamente distinguible en la figura 5-16b, se producen mecanismos de acoplo que no corresponden al trayecto investigado bocina-antena-filtro).



**Figura 5-14.** Filtro de líneas acopladas en microtira



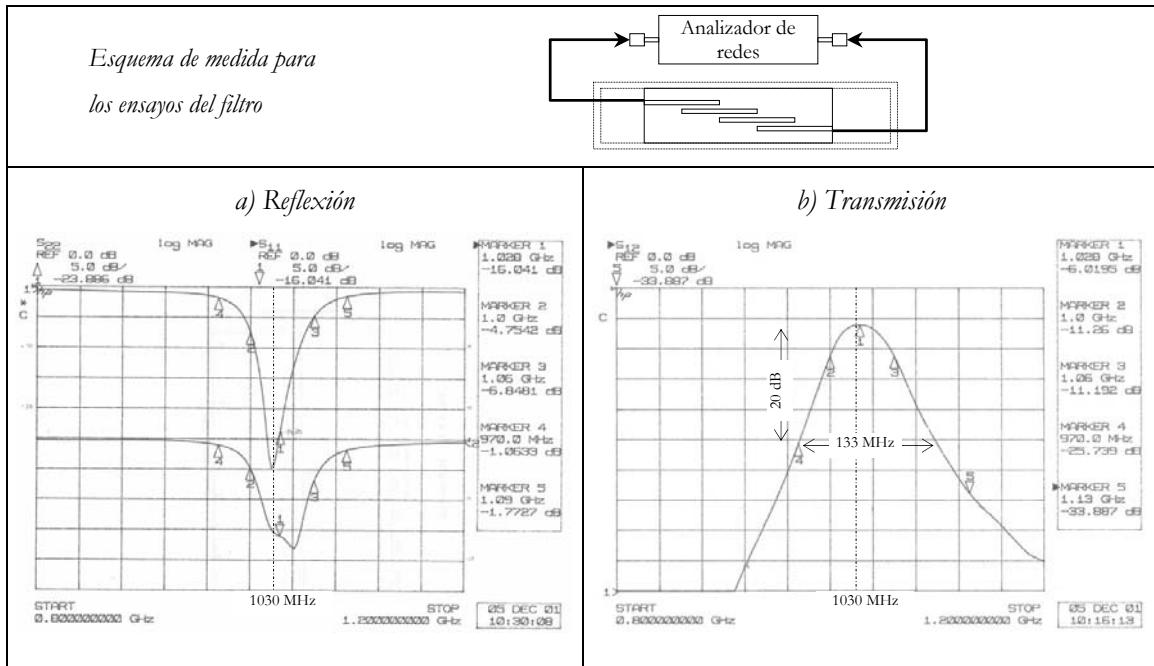


Figura 5-15. Características experimentales del filtro de la fig. 5-14.

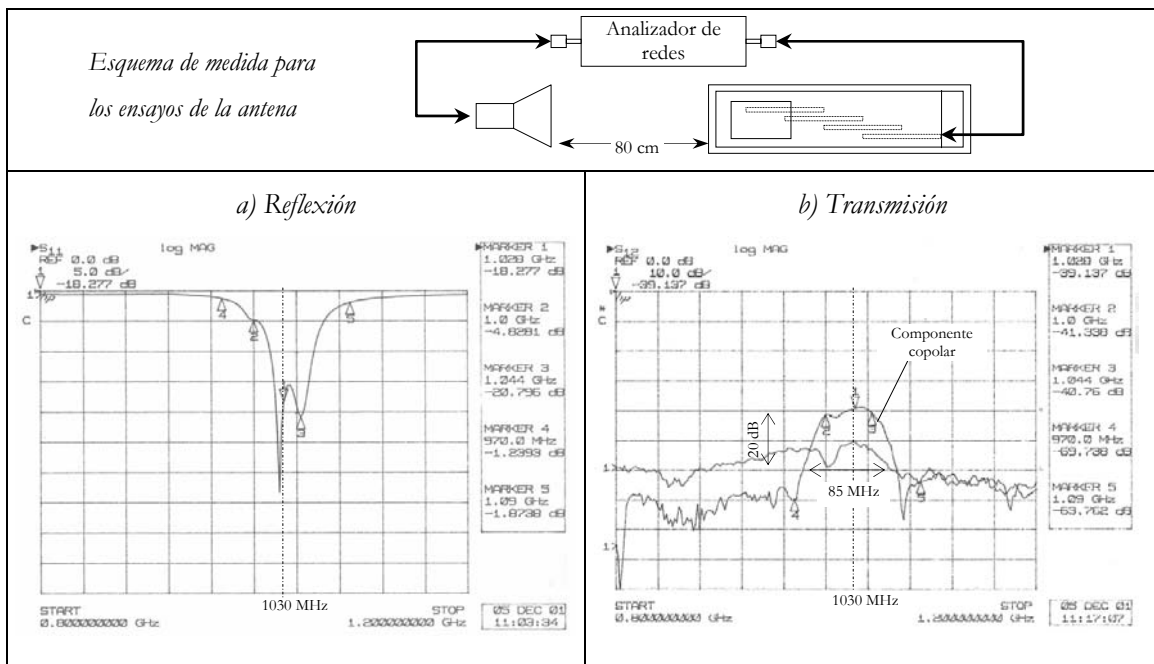
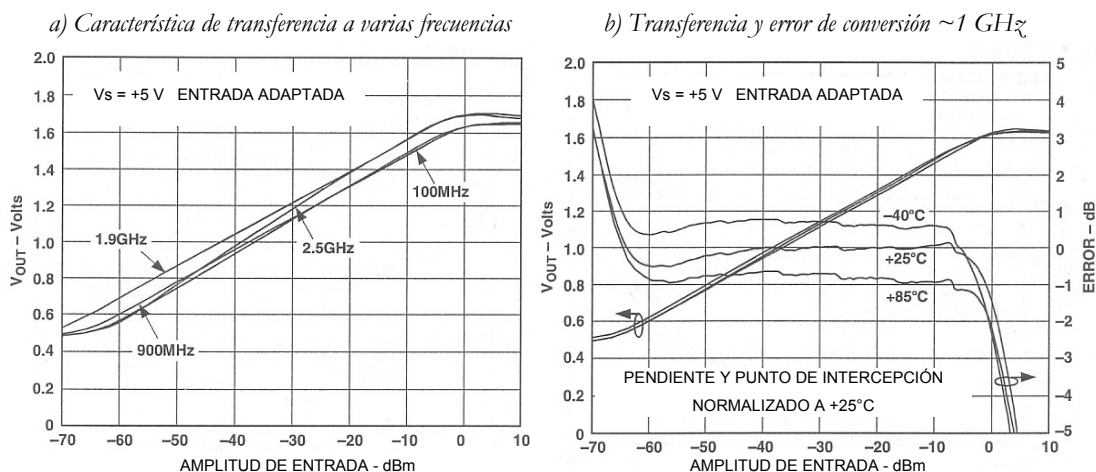


Figura 5-16. Características experimentales de la antena-filtro de las fig. 5-13 y 5-14.

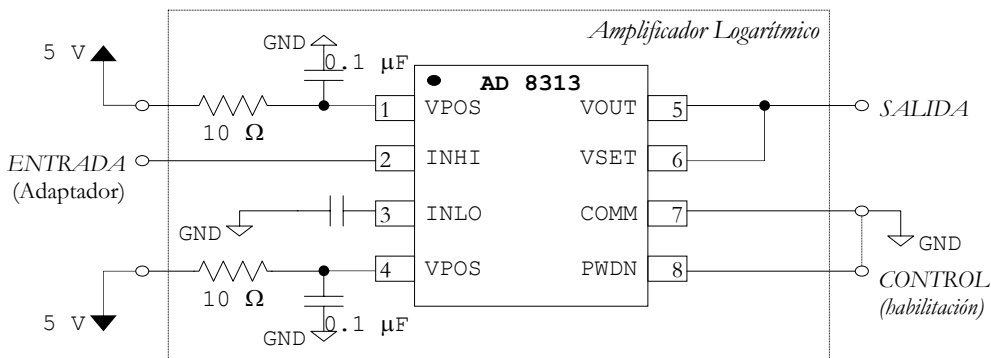
### Detector logarítmico

Una pieza clave en la observación del campo, como se señaló en §5.3.3, es el dispositivo empleado para la conversión de las señales de radiofrecuencia (de las que cabe esperarse un gran margen dinámico) en señales en banda base, que posteriormente habrá que muestrear y cuantificar. Como se argumentó entonces una solución a este problema consiste en la utilización de detectores logarítmicos, como es el caso de los amplificadores logarítmicos [122]. Uno de entre los

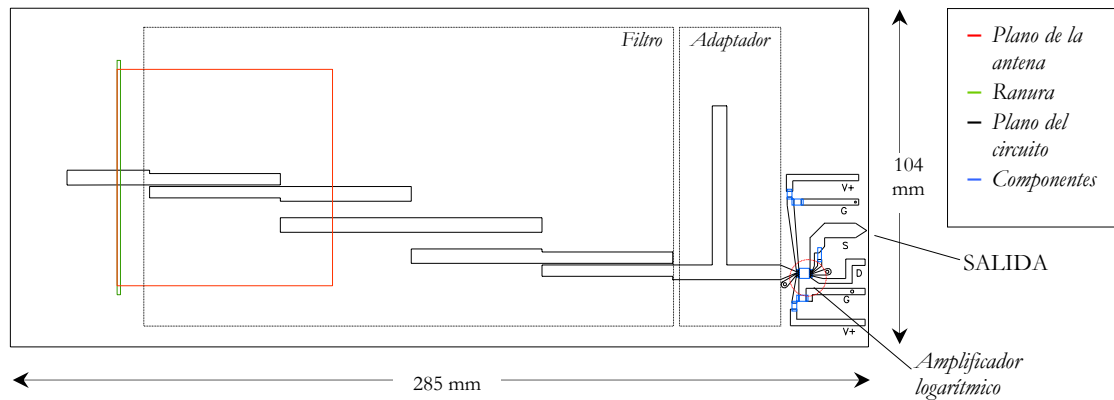
comercialmente disponibles, que responda de forma adecuada a 1030 MHz, es el que se ha elegido para la realización del circuito de detección. Las características funcionales más relevantes del amplificador utilizado, integrado en el circuito de montaje superficial AD8313 [4], están recogidas en la figura 5-17. Como puede observarse este detector ofrece un margen dinámico de conversión con un error de  $\pm 0.25$  dB de unos 60 dB (según se hizo mención en §4.4.1-*Síntesis de medidas*), error que naturalmente puede reducirse (o ampliar su margen dinámico hasta 65 dB) mediante calibración de la respuesta global del circuito de detección. Como es lógico el amplificador, para su funcionamiento, requiere de un circuito de polarización y de otro de adaptación al filtro, que se consigue por medio de un talón y un trozo de microtira. Las conexiones y componentes involucrados en el circuito de polarización se representan en la figura 5-18, mientras que en la figura 5-19 expresa las características geométricas más relevantes de todo el circuito de detección, incluyendo por tanto: la antena (parche y antena, en planos diferentes); el filtro; el adaptador al amplificador y el propio amplificador (resaltado con un círculo); su circuito de polarización y las conexiones externas (véase también fig. 5-12).



**Figura 5-17.** Características técnicas del Amplificador Logarítmico AD-8313.

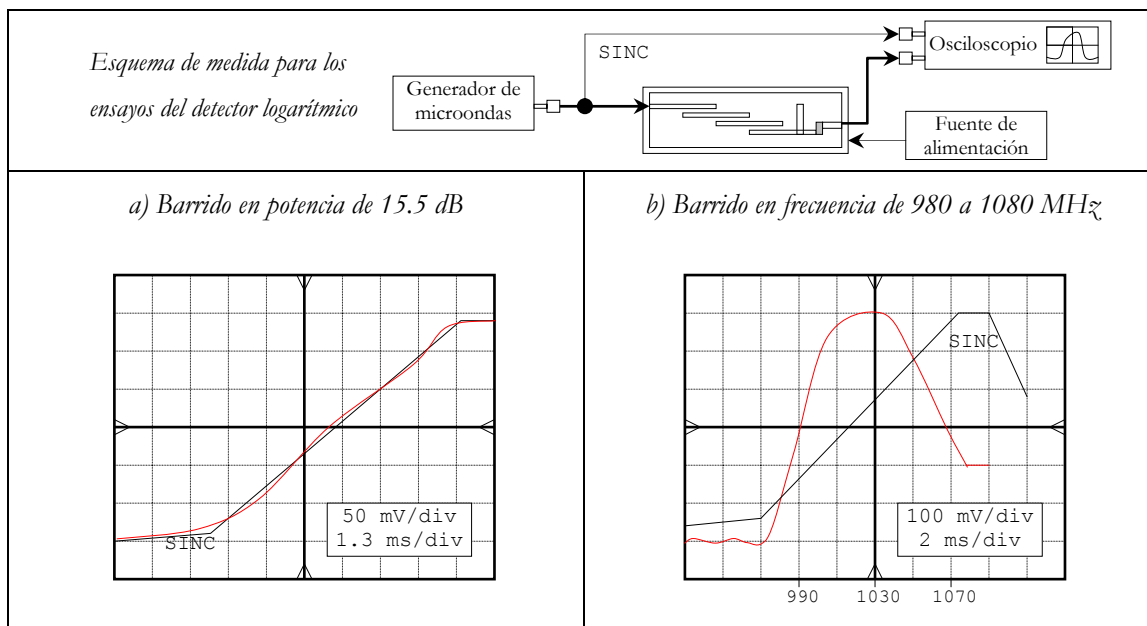


**Figura 5-18.** Circuito de polarización del amplificador logarítmico.



**Figura 5-19.** Vista en planta del circuito completo de detección.

La figura 5-20 muestra los resultados de los ensayos de barrido de potencia y frecuencia según el esquema de la propia figura. Un *barrido en potencia* de una onda continua a 1030 MHz, en el que el nivel logarítmico de potencia de la señal aumenta linealmente (función que realiza el generador de microondas), nos permite observar la característica de transferencia logarítmica y las desviaciones respecto a la transferencia ideal. Puesto que se ha ajustado el eje vertical para que la señal de sincronismo (en negro y de pendiente constante en el periodo de barrido) coincida con la salida del detector (en rojo), la comparación de las dos señales permite evaluar el error en la conversión logarítmica para el rango de medida. Aunque en el caso representado la sensibilidad es de 25.8 mV/dB, en las condiciones de polarización empleadas para la detección de las señales de interrogación la sensibilidad es de 17.5 mV/dB. En cualquier caso el error de conversión está acotado entre  $\pm 0.3$  dB, que naturalmente puede reducirse mediante calibrado. Por otra parte el *barrido en frecuencia* permite evaluar la selectividad espectral. También aquí puede corroborarse la pendiente de 1 dB/MHz fuera de la banda {1000-1040 MHz}, mencionada a tenor de los resultados antena-filtro.



**Figura 5-20.** Medidas a la salida del circuito de detección: a) barrido de potencia, característica logarítmica de transferencia; b) barrido en frecuencia, selectividad.

### Respuesta global del circuito de detección a la señalización SSR

Usando el montaje de la figura 5-21 se pueden simular las condiciones de radiación frente a la antena de Radar Secundario. Una señal periódica constituida por pulsos con características como los de interrogación del SSR y con periodos de silencio del orden a los que hay entre los pulsos  $P_1$ ,  $P_2$  y  $P_3$  modulan en amplitud la radiación que emerge del generador de onda. De esta forma se obtienen medidas como las que se muestran en la figura 5-21. En estas medidas se representan las señales procedentes del circuito de detección (Canal 1) y las utilizadas para modular el generador de microondas (Canal 2). Como puede observarse: se produce un rizado en el flanco de subida que se va atenuando al reducir la potencia. Para evaluar la desviación de estas señales con respecto a los pulsos cuadrados empleados para el diseño del receptor óptimo, se ha discretizado un pulso con rizado máximo y se ha comparado la autocorrelación de esta señal con la de un pulso perfectamente cuadrado con el mismo nivel después de la estabilización del rizado, observándose una diferencia de un 3%. De acuerdo con este resultado está justificada la aproximación de los pulsos a la salida del detector por medio de pulsos cuadrados, que en el caso discreto se convierte en una simple suma de muestras, y que por tanto permite una notable simplificación práctica del receptor óptimo.

Finalmente, la figura 5-22 recoge los resultados obtenidos haciendo medidas cada 10 dB según el montaje de la figura 5-21. Puede aquí observarse la dependencia logarítmica de la salida respecto a la entrada así como pequeñas desviaciones respecto a la transferencia ideal.

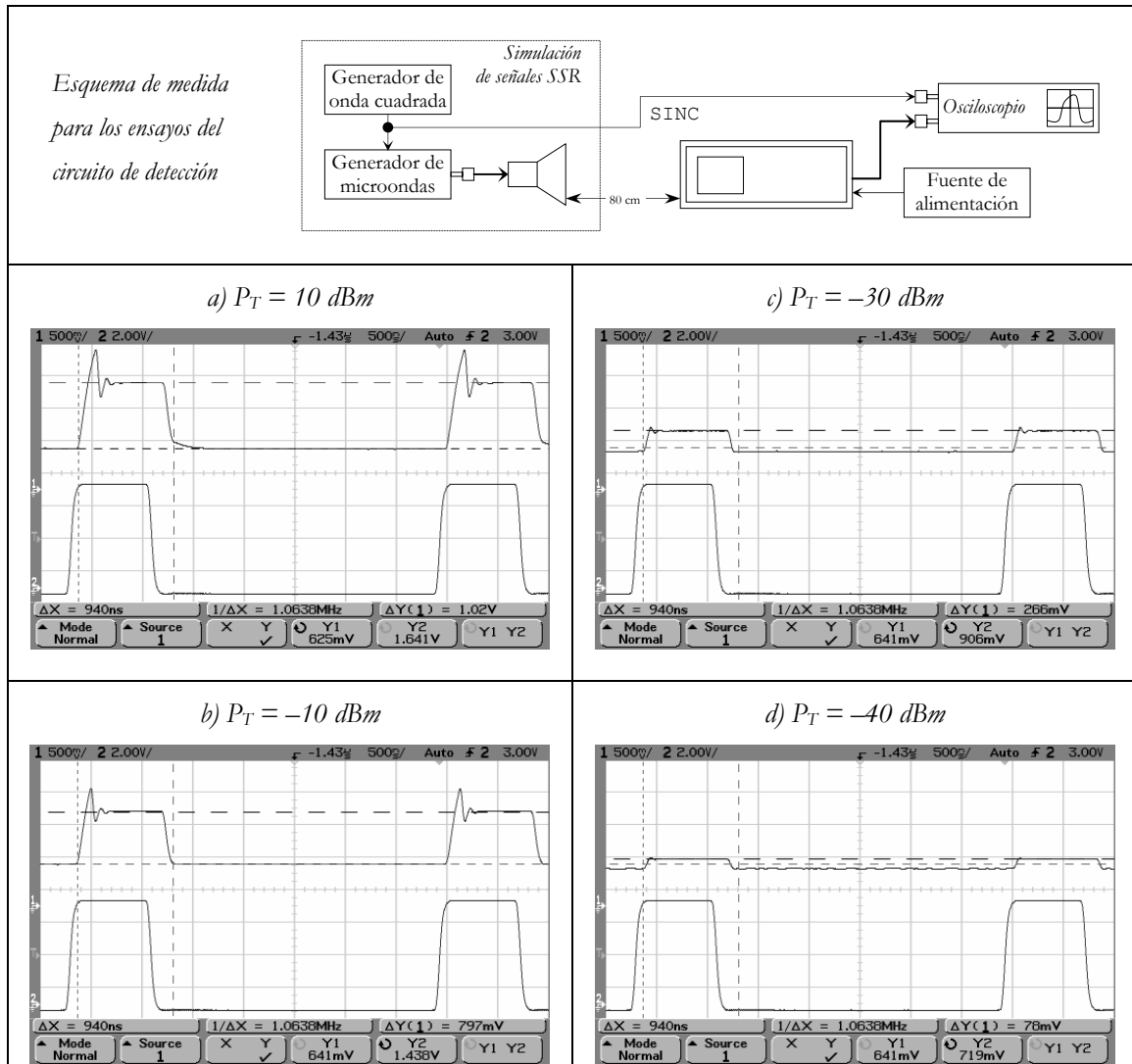


Figura 5-21. Medidas a la salida del circuito de detección. Conjunto: Transmisor (simulación de pulsos SSR) – Bocina – Circuito de detección. Para varias potencias de transmisión.

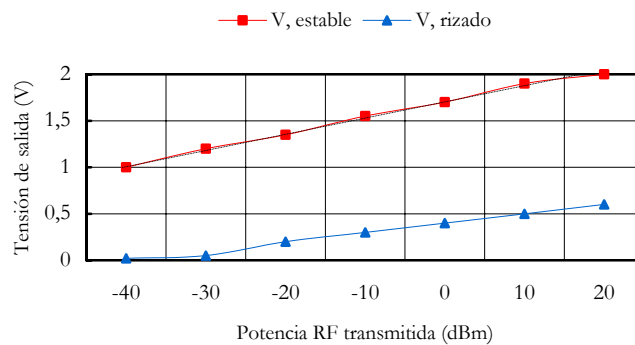
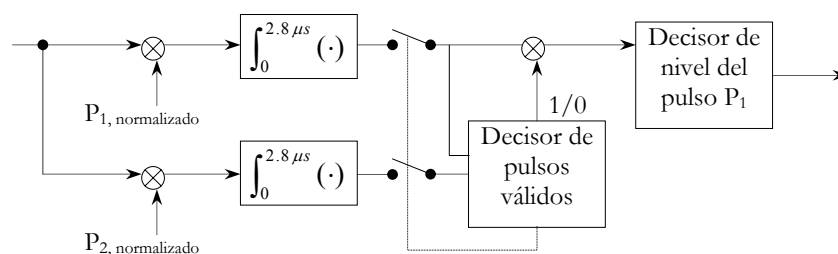


Figura 5-22. Característica de respuesta del circuito de detección para la amplitud del rizado y para la amplitud estabilizada tras el rizado.

### 5.4.3 Recepción óptima del módulo de la distribución de campo radiada por la antena SSR

Según se indicó en §5.3 la manera de aprovechar de forma óptima las señales de interrogación consiste –como mostró Kotel’nikov– en adaptar la respuesta a la propia forma de las señales, por medio de algún procedimiento que remede la operación del circuito teórico de la figura 5-4. En nuestro caso, como se observó al analizar las propiedades de las señales de interrogación, puede usarse la señal constituida por la combinación  $P_1$ - $P_2$  para identificar los pulsos válidos, y el nivel del  $P_1$  para poder determinar la amplitud del campo procedente del diagrama directivo de la antena SSR. Una forma de combinar estas dos operaciones, teniendo en cuenta la ortogonalidad de las señales  $P_1$  y  $P_2$ , consistiría en la detección adaptada a los pulsos  $P_1$  y  $P_2$  por separado, junto con un esquema de decisión que consideraría la combinación de los dos (que sabemos garantiza unos mínimos) para decidir su validez y que solamente digitalizaría  $P_1$  para la representación de la amplitud de campo. La figura 5-23 ilustra la estructura de este esquema continuo, cuya realización práctica sería evidentemente compleja pero que según se argumentó en §5.3.5 puede aproximarse mediante una realización discreta como la de la figura 5-5b. No obstante, teniendo en cuenta la equivalencia asintótica de las dos realizaciones puede a partir de ésta y de las características del ruido valorarse: a) la probabilidad de detectar pulsos falsos y b) la probabilidad de confundir dos pulsos  $P_1$  cuyos niveles se diferencien en 0.5 dB.



**Figura 5-23.** Estructura de adquisición óptima.

#### Análisis del error de recepción de campo

Para la consideración del error se valorará, por una parte, el hecho de no confundirnos en la posición del dominio y, por otra, la probabilidad de confundir niveles separados 0.5 dB, es decir, de que el error rebase los  $\pm 0.25$  dB (en caso de que esta probabilidad sea pequeña entonces estará justificado el uso de un modelo de error con distribución uniforme entre  $-0.25$  dB y  $+0.25$  dB). Teniendo en cuenta las estabilidades: de la dirección del máximo de radiación [87], de la rotación de la antena, y del periodo de repetición de pulsos; una vez identificados los máximos de radiación, la justa ubicación de los valores de amplitud recibidos estarán a tenor de que sólo hayan sido detectados pulsos válidos. Por tanto, un parámetro para la valoración de la concordancia geométrica de la distribución de campo detectada, será la probabilidad error en la identificación de pulsos

válidos. En suma, ambos errores podremos valorarlos a partir del modelo de la figura 5-23 (en virtud de su equivalencia con la realización discreta), el nivel de las señales mínimas (correspondientes a pulsos válidos), así como las características del ruido (para el que se buscará un modelo gaussiano). Para ello los pulsos  $P_1$  y  $P_2$  normalizados en energía, pueden asumirse –en primera aproximación– como pulsos cuadrados de duración  $0.8 \mu\text{s}$  y amplitud  $1118 \text{ V}$ , al principio o al final respectivamente de un intervalo de  $2.8 \mu\text{s}$  (según se señaló antes, la diferencia cuadrática entre los pulsos realmente detectados y esta aproximación es menor que el 3%).

Según las especificaciones de ruido a la salida del amplificador logarítmico [4], su densidad espectral es de  $2 \mu\text{V}/\sqrt{\text{Hz}}$  a  $100 \text{ Hz}$ ; y  $1.3 \mu\text{V}/\sqrt{\text{Hz}}$  a  $10 \text{ MHz}$ . Se puede, por tanto, admitir un modelo conservador de ruido a la entrada de nuestro receptor consistente en ruido gaussiano blanco de nivel  $2 \mu\text{V}/\sqrt{\text{Hz}}$ . Suponiendo un circuito normalizado ( $R=1$ ) la densidad espectral de potencia del ruido equivalente sería:  $N_o = 4 \cdot 10^{-12} \text{ W/Hz}$ .

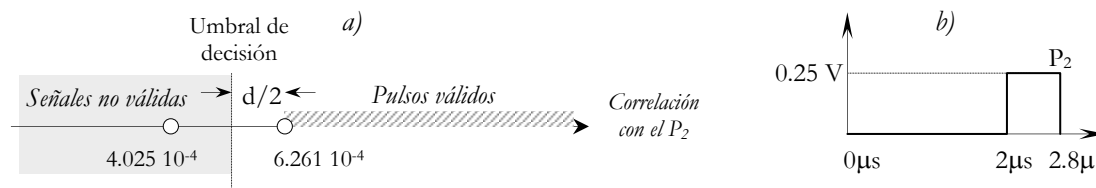
#### a) Probabilidad de detectar pulsos falsos

Consideremos por simplicidad que la falsedad de los pulsos (o ráfagas falsas) la valoramos sólo a tenor del pulso  $P_2$ , en lugar de la suma de  $P_1$  y  $P_2$ . La diferencia, como se verá, es insignificante ya que el nivel de estos es suficiente para asegurar la veracidad del conjunto.

Haciendo un balance de potencia que tenga en cuenta la potencia transmitida ( $2000 \text{ W}$ ), la ganancia direccional de la antena (del diagrama *suma* para el  $P_1$  y del *SLS* para el  $P_2$ ), las pérdidas en el trayecto entre antenas a una distancia inferior a  $100$  metros y las pérdidas del circuito de detección: sabemos que puede esperarse un nivel mínimo del pulso  $P_2$  a la entrada del amplificador logarítmico superior a  $-60 \text{ dBm}$ . Nivel que, de acuerdo a las características de transferencia del amplificador antes revisadas (ver figura 5-17), le corresponderá una salida de  $\sim 0.70 \text{ V}$ , mientras que sin señal la salida es de  $\sim 0.45 \text{ V}$ .

Usando como referencia el nivel de los pulsos normalizados  $P_2$ , los anteriores valores de tensión corresponderán a los niveles normalizados:  $0.45/1118 = 4.025 \cdot 10^{-4}$ ;  $0.7/1118 = 6.261 \cdot 10^{-4}$ . Que equivalen respectivamente a los resultados de la convolución sin señal y con un pulso  $P_2$  mínimo. Si todos los pulsos cuya convolución es superior a  $6.261 \cdot 10^{-4}$  se pueden considerar válidos, entonces el umbral óptimo de decisión para precisar la validez o invalidez de los pulsos será el punto intermedio entre la salida sin señal y con pulso  $P_2$  mínimo<sup>7</sup>, es decir:  $\frac{1}{2} \{V_s(-60 \text{ dBm}) + V_s(\text{sin señal})\} = 0.575 \text{ V}$ , normalizando:  $5.143 \cdot 10^{-4}$ . En la figura 5-24 se representa la constelación correspondiente a las señales válidas e inválidas.

<sup>7</sup> Si se tiene en cuenta que la duración de los silencios ( $\sim 2.2 \text{ ms}$ ) hace que la ausencia de pulsos sea unas mil veces más improbable, la posición del umbral de decisión óptimo estará un poco desplazado respecto al mencionado. Sin embargo, al considerar las especificaciones de ruido este desplazamiento es despreciable.



**Figura 5-24.** a) Constelación para la decisión de señales válidas. b) Problema equivalente

En esta situación la probabilidad de interpretar por pulso válido el ruido, es decir pulsos falsos, es equivalente al de error en la detección de un pulso como el representado en la fig. 4.18b que puede calcularse usando la función de probabilidad normal complementaria:

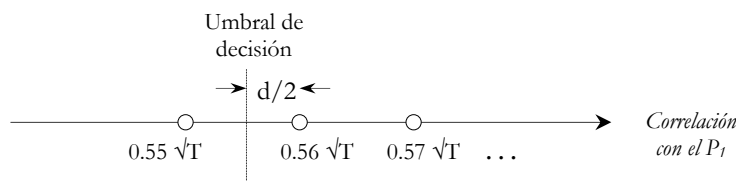
$$P_{err} = Q\left(\frac{d/2}{\sigma_o}\right) = Q\left(\frac{\sqrt{E}/2}{\sqrt{N_o/2}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E}{2N_o}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{0.25^2 \cdot 0.8 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 4 \cdot 10^{-12}}}\right) = Q(79) \approx 0 \quad (5-4)$$

Es decir, podemos dar por válida la identificación de pulsos válidos, con lo que en consecuencia los errores en la concordancia geométrica de las medidas dependerán exclusivamente de la identificación del máximo de radiación y de las inestabilidades antes mencionadas.

*b) Probabilidad de confundir dos pulsos  $P_1$  cuyos niveles se diferencien en 0.5 dB*

Para estimar esta probabilidad podemos considerar que se trata de un problema equivalente al de una transmisión digital multinivel [148; 25], en la que las señales se corresponden con pulsos  $P_1$  de niveles  $\{-70, -69.5, -69, \dots, -20\}$  dBm a la entrada del amplificador logarítmico y  $\{0.55, 0.56, 0.57, \dots, 1.55\}$  V a su salida. La figura 4.19 muestra la constelación correspondiente a este caso, en la que la probabilidad de confusión entre señales adyacentes, bajo el supuesto de ruido blanco gaussiano es:

$$P_{err} = 2 \frac{M-1}{M} Q\left(\frac{d/2}{\sigma_o}\right) = 2 \frac{99}{100} Q\left(\frac{0.01 \sqrt{0.8 \cdot 10^{-6}}}{2 \cdot \sqrt{2 \cdot 10^{-12}}}\right) \approx 2 \cdot Q(3.15) = 1.8 \cdot 10^{-3} \quad (5-5)$$



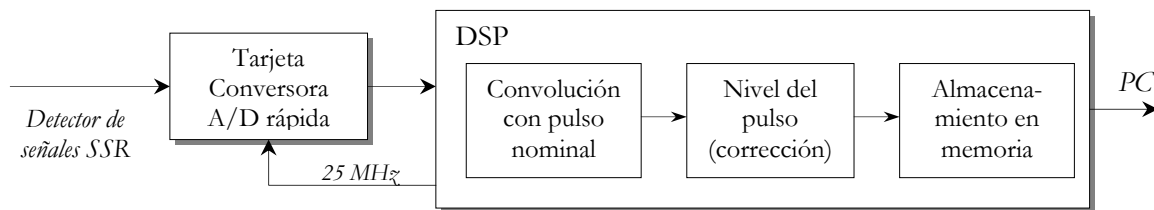
**Figura 5-25.** Constelación para la decisión del nivel de los pulsos  $P_1$ .

En suma, puede considerarse que el sistema detectará solamente los pulsos válidos y la probabilidad de confundirse 0.25 dB es inferior al 2 %, con lo cual está justificada la admisión de 0.25 dB como cota superior del error en el conjunto de medidas (utilizado para la sintetización de las medidas en §4.4).



### Realización numérica del receptor óptimo

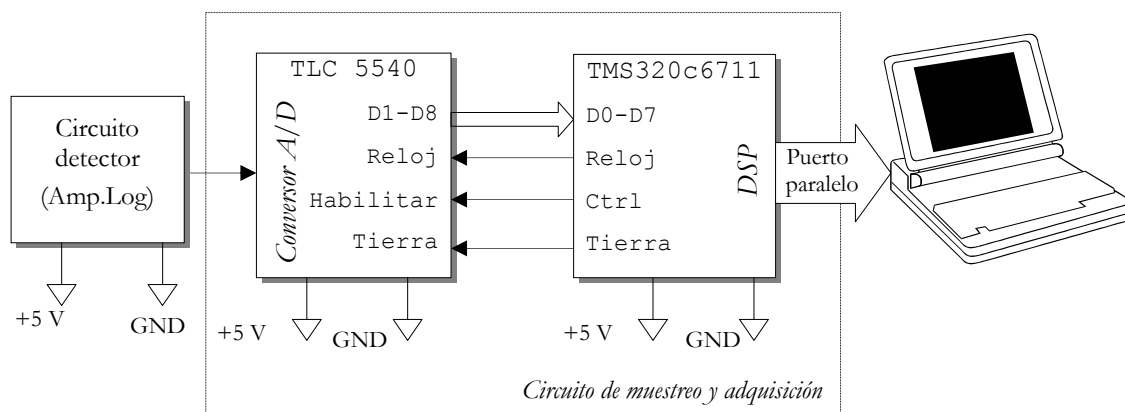
Teniendo cuenta que el ancho de banda de las señales de interrogación es limitado, la estructura de recepción óptima para señales continuas, representada en la figura 5-23, podrá remedarse numéricamente si se toman muestras lo suficientemente rápidas. Un circuito de computación de rapidez adecuada deberá comparar la señal muestreada con la esperada y en función de los resultados de esa comparación decidir si se trata de un pulso válido y de su nivel. La realización de estas operaciones puede lograrse mediante un Procesador de Señales Digitales (DSP) que además podrá gobernar, como muestra la figura 5-26, el proceso completo de detección, recepción, adquisición y transferencia de datos.



**Figura 5-26.** Circuito de recepción óptima y adquisición de datos.

Una configuración, usando dispositivos comerciales, que responda a las necesidades de muestreo y velocidad de proceso para la ejecución de las operaciones que han de realizarse, es la que muestra la figura 5-27, en la que la tarjeta conversora admite un muestreo de hasta 40 MHz [154] y el procesador puede realizar 600 Millones de Instrucciones por segundo [155]. No obstante, teniendo en cuenta que el ancho de banda de las señales de interrogación es de 12.5 MHz, será suficiente un muestreo a 25 MHz, con lo que el procesador podrá realizar 24 instrucciones entre dos muestras consecutivas. Empleando esta velocidad de muestreo se contará con 18 muestras por cada pulso y 24 entre los pulsos  $P_1$  y  $P_2$ . Por tanto, si se almacenan las 60 últimas muestras y se hace una suma parcial de las 18 primeras y de las 18 últimas, los resultados de estas sumas parciales, de acuerdo con el modelo de pulsos cuadrados (arriba justificado), podrán considerarse como las convoluciones con los pulsos  $P_1$  y  $P_2$  respectivamente. A partir de estos resultados las operaciones que completarían el esquema de recepción óptima (figura 5-23) serán:

- Se decidirá que se trata de pulsos válidos cuando la convolución correspondiente al pulso  $P_2$  supere un valor umbral.
- El momento en el que la convolución ( $P_2$ ) sea máxima se considerará que es éste el instante de muestreo óptimo.
- En este instante se seleccionará el resultado de la convolución correspondiente al  $P_1$  y este valor se almacenará en la memoria del procesador digital para transferirse al ordenador después de una vuelta completa de la antena (unos 1818 valores).



**Figura 5-27.** Dispositivos empleados para la realización del receptor óptimo y esquema de conexiones.

### Algoritmo numérico de recepción óptima

Para realizar las sumas el Procesador deberá hacer uso de un registro de desplazamientos con 60 posiciones de memoria: las posiciones de memoria 1 a la 18 (las más nuevas) se consideran correspondientes al pulso  $P_2$ ; y de la 43 a la 60 (las más antiguas) al pulso  $P_1$ . En la figura 5-28 se representa este registro de desplazamientos y las posiciones que corresponden a cada pulso. Por tanto las operaciones que deben realizarse pueden reducirse a las especificadas en la tabla 5-1.

1.	Inicializar las sumas $S_1$ , $S_2$ (resultados de la convolución) a cero; cuenta = 0;
2.	Leer una nueva muestra e introducirla en el registro de desplazamientos;
3.	Actualizar las sumas: $S_2[n] = S_2[n-1] - m_{19} + \text{entrada};$ $S_1[n] = S_1[n-1] - \text{salida} + m_{43};$
4.	Realizar las pruebas: $Pr_1 = S_2 \geq \text{Umbral}_2;$ $Pr_2 = S_2[n] < S_2[n-1];$
5.	Si ( $Pr_1 = 1$ ) y ( $Pr_2 = 1$ ): Si ( $S_1 \geq \text{Umbral}_1$ ): almacenar $S_1[n-1]$ en la memoria de niveles de pulsos válidos, $P_{\text{válido}}[m];$ cuenta = 0 y volver a (2); De lo contrario: incrementar {cuenta};
6.	Si (Cuenta > 0): Si (cuenta > 50): almacenar 0 en $P_{\text{válido}}[m];$ cuenta = 0 y volver a (2); De lo contrario: incrementar {cuenta};
7.	Volver a (2);

**Tabla 5-1**

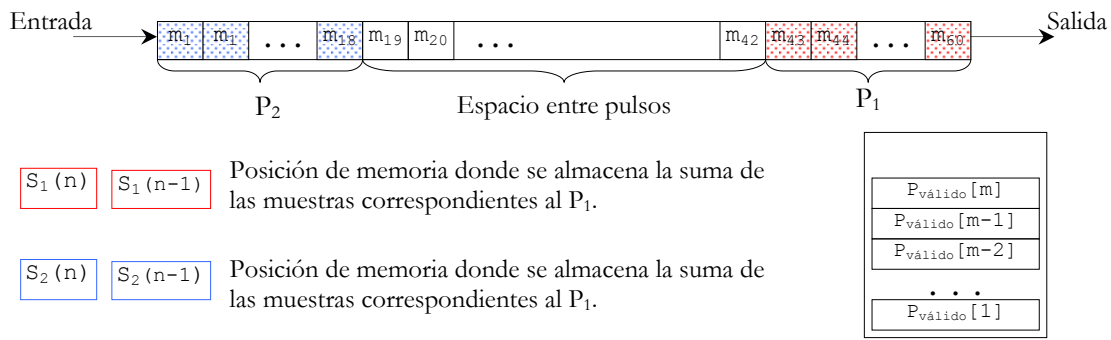


Figura 5-28. Organización de la memoria para la realización de las operaciones del receptor óptimo.

Como se puede observar las doce operaciones por periodo de muestreo a que se reduce el esquema anterior podrán realizarse con la configuración de la figura 5-27, ya que según se indicó el procesador tiene la facultad de realizar hasta 24 instrucciones por muestra. En lo que respecta al resto de las operaciones, la velocidad de proceso no es crítica siendo el ordenador central el que gestiona, por medio de interrupciones, el inicio y fin del proceso de detección óptima. (1) En un primer momento es necesaria la inicialización del convertor A/D, definiéndose los recursos de memoria que se vayan a emplear, a continuación (2) se inicia la recepción óptima siguiendo el esquema antes descrito. (3) Cuando haya transcurrido el tiempo suficiente para que la antena de una vuelta completa, una interrupción detendrá el proceso; y a continuación (4) tendrán que transferirse al ordenador los datos que hayan quedado almacenados en la memoria del procesador (DSP). (5) Una vez se le haya aplicado a los datos la calibración del sistema de medida, estos se almacenarán en un fichero. A continuación se repetirá el mismo proceso a otra distancia, para finalmente emplear los resultados de la observación sobre los dos dominios en el proceso numérico de reconstrucción de fuentes (particularizado al problema de diagnóstico de las antenas de Radar Secundario en §4.4).

### 5.4.4 Resultados del sistema de diagnóstico

Los resultados experimentales mostrados en §5.4.2 evidencian la eficacia del detector para ser empleado en el proceso de diagnóstico; mientras que las conclusiones analíticas de §5.4.1 demuestran que puede en efecto alcanzarse las calidades de medida supuestas para la sintetización de las medidas (§4.4.1, donde se consideró un modelo de ruido superior al que cabe esperarse). Por otra parte, se ha probado la realizabilidad técnica en virtud de las velocidades de procesado y mediante un refinado del algoritmo numérico. Y finalmente, se ha realizado una simulación completa y detallada del sistema cuyos resultados ya han sido objeto de varias publicaciones [98; 36; 37; 107] que nuevamente evidencian la factibilidad del sistema de diagnóstico.

Por tanto, y aunque por el momento el sistema completo no se haya concluido (entre otras cosas motivado porque las instituciones a las que compete el mantenimiento de los radares secundarios no se han mostrado activamente interesadas) es evidente su viabilidad. En suma, puesto que cabe

esperarse medidas de distribuciones de módulo con una calidad mejor que las que se sintetizaron para evaluar los métodos inversos, los resultados recogidos y comentados en §4.4, pueden considerarse representativos para la valoración del sistema completo de diagnosis.



*“Todo eso es verdad –dijo  
a esa sazón Don Quijote–;  
pero no sé a dónde vas a  
parar”.*

Miguel de Cervantes.  
*El ingenioso hidalgo Don  
Quijote de la Mancha*

## **VI. CONCLUSIONES Y LÍNEAS FUTURAS**



## 6.1 CONCLUSIONES

A lo largo del estudio de los problemas directo e inverso y el de la observación del campo electromagnético se ha llegado a numerosos y variados resultados que se han señalado allí donde aparecieron y que aquí se recogen de forma condensada:

- 1°. Se llegó a una formulación diádica del campo en términos de las funciones de Green y de las funciones modales.
- 2°. Dicha expresión diádica permitió probar el isomorfismo entre las formulaciones modal y de fuentes (corrientes).
- 3°. Se estudió el problema de la frecuencia espacial del campo engendrado por unas fuentes acotadas, lo que a su vez dio pie a la formulación de tres útiles teoremas de muestreo.
- 4°. Se acotó la dimensión del problema electromagnético por medio del segundo teorema.
- 5°. Se estudió el problema de las ondas evanescentes que nos permitió definir, para una precisión dada, la separación mínima entre muestras independientes de las distribuciones de campo y de corrientes.
- 6°. Se llegó a una formulación discretizada y matricial del problema electromagnético sobre un espacio vectorial  $\mathfrak{E}$  de dimensión mínima que permitió expresar las distribuciones de campo engendradas por una distribución cualquiera de corrientes interior a una superficie dada. Este espacio relaciona directamente las distribuciones de campo con las corrientes sobre la retícula de dipolos de Hertz.
- 7°. Definida una métrica generalizada sobre el espacio  $\mathfrak{E}$  se encontró la proyección en dicho espacio de una distribución cualquiera de campo observado.
- 8°. Se propusieron métodos numéricos para abordar la solución cuando la dimensión del problema sea elevada.
- 9°. Se definió un procedimiento iterativo general para la incorporación de información adicional que facilita la convergencia hacia la solución deseada.
- 10°. En la discusión del problema inverso sin fase se encontraron algunos errores sobre varias teorías acerca de la ambigüedad y unicidad de solución.
- 11°. Se encontró una condición suficiente para la unicidad de solución del problema inverso sin fase.
- 12°. Se extendió el análisis del problema inverso sin fase al caso discreto y al de distribuciones superficiales.

- 13°. Se generalizaron varios métodos de reconstrucción de las distribuciones complejas para su aplicación a cualquier geometría.
- 14°. Se definió un método de proyecciones sucesivas generalizado que permite incorporar todas aquellas informaciones que facilitan la convergencia hacia la solución deseada.
- 15°. Se definió un modelo de *sistema adaptado de medida* para la observación de sistemas radiantes mientras se encuentran operativos.
- 16°. Esta arquitectura junto con los métodos inversos se emplearon para la configuración de un sistema de diagnóstico de antenas de Radar Secundario, cuya viabilidad ha sido demostrada.

## 6.2 LÍNEAS FUTURAS

Una continuación inmediata del trabajo mostrado en la presente tesis consistiría en la realización completa e integrada del sistema de diagnóstico descrito en el capítulo quinto (§5.3) y validado en el anterior, cosa que de hecho se está llevando a cabo. No obstante, sobre el resto de los puntos en los que la tesis presenta especial aportación tienen cabida variadas continuaciones:

- Una modificación drástica del problema consistiría en la consideración de medios no homogéneos. Para ello podría recurrirse al sugerente planteamiento de Colton y Kress [31, §9], permitiendo así la extensión a interesantes problemas electromagnéticos.
- Podría dedicarse más detalle a la comparación de la teoría de muestreo presentada y los resultados de otros autores como son los de Bucci y colaboradores [18; 21; 22].
- La manera en que se ha considerado discretizados los dominios ha quedado abierta aunque esta se haya definido con objeto de que cumpla ciertas características ideales. Existe muy diversa bibliografía sobre este asunto, cuya comparación y conveniencia cabe discutirse (p.ej. en [24] puede encontrarse una sucinta relación de métodos y autores).
- Sería interesante la consideración de un mayor número de casos para el estudio de la aplicabilidad de los criterios de sobremuestreo obtenidos en el estudio de las ondas evanescentes, así como la comparación de ésta con los empleados por diversos autores (p.ej. [58; 49]).
- La cuestión de la dimensión esencial del problema cabe también abordarse, como propone Barakat [14], desde el punto de vista del módulo de los valores singulares del operador lineal de transformación  $\mathcal{T}$ .
- En lo relativo a la reducción del coste operacional de problemas inversos superficiales una drástica simplificación consiste en poder descomponerlo en dos problemas unidimensionales. Se ha mencionado el caso plano que es el más trivial, pero podrían considerarse otras



geometrías en las que la utilización de aproximaciones o planteamientos iterativos permiten un tratamiento unidimensional del problema superficial [95; 96; 97].

- En la resolución del problema inverso cabe estudiarse la velocidad en la obtención de la solución de diversas técnicas numéricas, a la manera de los estudios de Fienup [46], Saxton [142], Hayes [61] o Ivanov [78].
- Podría buscarse una aplicabilidad de los teoremas de Hayes [62], Sanz [138] y Barakat [13] para la búsqueda de condiciones alternativas para la unicidad de solución (es presumible que estas presupongan una restricción de la fase sobre las distribuciones de fuentes).
- Puede fácilmente demostrarse que mediante la observación del campo utilizando dos antenas, suficientemente distintas, se garantiza también la unicidad de solución del problema inverso sin fase (la demostración es similar a la §3.3.1.8). Este caso podría considerarse en detalle y en consecuencia proponer un método consistente en la exploración del campo mediante una antena de agrupación reconfigurable.
- En lo relativo a la observación del campo electromagnético la consideración de la corrección de sonda [168; 88; 89; 17] puede resultar de gran interés como así lo prueban sus virtudes técnicas.
- La aplicación del problema inverso a las medidas de compatibilidad electromagnética es otro asunto de gran interés [33; 96; 100; 140; 85; 86] al que atañen una serie de aspectos en los que aun cabe ahondar, como es el caso de los dominios de observación [33]; del muestreo temporal y frecuencial [22] o la compensación del entorno de medida [17].



# BIBLIOGRAFÍA

- [1] AHLFORS, L.V. *Complex Analysis*. Nueva York: McGraw-Hill, 1979.
- [2] AKUTOWICZ, E. "On the determination of the phase of the Fourier integral, I." *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 83, pp. 179-192, 1956.
- [3] AKUTOWICZ, E. "On the determination of the phase of the Fourier integral, II." *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 84, pp. 237-238, 1957.
- [4] ANALOG DEVICES, INC. "0.1 GHz-2.5 GHz, 70 dB Logarithmic Detector/Controller. AD8313" Descripción técnica. Disponible en <http://www.analog.com>, Massachusetts, EE.UU., 1999.
- [5] ANDERSON, A.P. "Microwave holography". *Proc. IEE*, vol. 124, no. 11R, pp. 946-962, Nov. 1977.
- [6] ANDERSON, A.P.; SALLI, S. "New possibilities for phaseless microwave diagnostic. Part 1: Error reduction techniques". *IEE Proc. Pt. H*, vol. 132, no. 5, pp. 291-298, Aug. 1985.
- [7] ANDERSON, A.P.; MCCORMACK, J.E.; JUNKIN, G. "Phase Retrieval Enhancement of Antenna Metrology Data". *Electron. Lett.*, vol. 24, no. 19, pp. 1243-1244, 15<sup>th</sup> Sept. 1988.
- [8] — "Near-Field Far-Field Predictions form Single-Intensity-Planar-Scan Phase Retrieval". *Electron. Lett.*, vol. 25, no. 8, pp. 519-520, 13<sup>th</sup> April 1989.
- [9] ANDERSON, A.P.; CHEUNG, Y.D.; JUNKIN, G. "Phase Retrieval Near-Field Metrology of Unknown Apertures". *Electron. Lett.*, vol. 28, no. 5, pp. 454-455, 27<sup>th</sup> Feb. 1992.
- [10] ARISTÓTELES. *Metafísica*. Traducción de T. CALVO MARTÍNEZ. Madrid: Gredos, 1994.
- [11] ARSENAULT, H.A.; CHALASINSKA-MACUKOW K. "The solution to the phase retrieval problem using the sampling theorem". *Optics Com.*, vol. 47, no. 6, pp. 380-386, Oct. 1983.
- [12] BALANIS, CONSTANTINE A. *Advanced Engineering Electromagnetics*. New York: John Wiley & Sons, 1989.
- [13] BARAKAT, R.; NEWSAM, G. "Necessary conditions for a unique solution to two-dimensional phase recovery". *J. Math. Phys.*, vol.25, no.11, Nov. 1984.
- [14] — "Algorithms for reconstruction of partially known, band-limited Fourier-transform pairs from noisy data". *J. Opt. Soc. Am. A*, Vol.2, No.11, Nov. 1985
- [15] BERNABÉ A. *De Tales a Demócrito. Fragmentos Presocráticos*. Madrid: Alianza, 1988.
- [16] BLANCH BORIS, SEBASTIÁN. *Diagnóstico y caracterización de antenas y entornos de medida*. Tesis doctoral no publicada. Universitat Politècnica de Catalunya. Escola Tècnica Superior d'Enginyers de Telecomunicació. Barcelona: 1996.
- [17] BLACK D.N.; JOY E.B. "Test Zone Field Compensation". *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. AP-45, no. 4, pp. 362-368, April 1995.
- [18] BUCHI, OVIDIO M.; FRANCESCHETTI GIORGO. "On the Spatial Bandwidth of Scattered Fields". *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. AP-35, pp. 1445-1455, Dec. 1987.

- 
- [19] BUCHI, OVIDIO M.; D'ELIA, G.; PIERRI, R. "Far-Field Pattern Determination from the Near-Field Amplitude on Two Surfaces". *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. AP-38, pp. 1772-1779, Nov. 1990.
- [20] BUCHI, OVIDIO M.; D'ELIA, G.; MAZZARELLA, G.; PANARIELLO, G. "Antenna Pattern Synthesis: A New General Approach". *Proc. IEEE*, vol.82, no.3, pp. 358-371, March 1994.
- [21] BUCHI, OVIDIO M. "Non Redundant Representation of Electromagnetic Fields over a Cylinder: an Effective Source Modelling for Elongated Antennas". In *Proc. IEEE APS Int. Symp.*, 1996, pp. 565-568.
- [22] BUCHI, OVIDIO M.; D'ELIA, G.; MIGLIORE, M. D. "Optimal Time-Domain Field Interpolation from Plane Polar Samples". *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. AP-45, no.6, pp. 989-994, June 1997.
- [23] BURGE, R.E. FIDDY, M.A.; GREENAWAY, A.H.; ROSS, G. "The phase problem". *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, vol. 350, pp. 191-212, 1976.
- [24] CARDAMA, A.C.; JOFRE L.; RIUS J.M.; ROMEU, J.; BLANCH S. *Antenas*. Barcelona: Edicions UPC, 1993.
- [25] CARSON, A.B. *Communication systems*. Nueva York: McGraw-Hill, 1986.
- [26] CARTWRIGHT, M.L. "The zeros of certain integral functions". *Quart. J. Math.*, vol. 1, pp. 38-59, 1930.
- [27] CESELSA, S.A. "Antena Monopulso CSL-20-L" Informe técnico (no publicado) n°: MAN1001625700, 1991.
- [28] — "Radar Secundario Monopulso IRS-20MP" Descripción y especificaciones técnicas del sistema, Ceselsa, 1996.
- [29] CHOQUET-BRUHAT, Y.; DEWITT-MORETTE, C.; CILLARD-BLEICK, M. *Analysis, Manifolds and Physics. I: Basics*. Amsterdam: Elsevier Science B.V., 1977.
- [30] CHURCHILL R.V., BROWN J.W. *Variable compleja y aplicaciones*. (5ª edición) Madrid: McGraw-Hill, 1992.
- [31] COLTON, D.; KREES, R. *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory*. Berlin: Springer-Verlag, 1992.
- [32] DE HARO, L.; BESADA J.L.; GALOCHA, B. "Shaped compact dual reflector antenna for Ku-Band Satellite Pico-terminals". In *Proc. IEEE-APS Symp.*, 1998, vol. 2, p. 832-835.
- [33] DÍAZ NAFRÍA, JOSÉ MARÍA; LAS HERAS, F. "Diseño de un sistema de medida de perturbaciones radiadas basada en transformación de campo próximo a lejano". En *Actas del XII Simp URSI*, Bilbao, 15-17 Sept. 1997, pp. 521-524.
- [34] — "Métodos electromagnéticos inversos para la caracterización de sistemas radiantes". En *Actas del XVII Simp. URSI*, Alcalá de Henares, 11-13 Sept. 2002, pp. 29-30.
- [35] DÍAZ NAFRÍA, JOSÉ MARÍA; MARCILLA ELVIRO, J.M.; LAS HERAS, F. "Diseño y simulación de un sistema de diagnosis de antenas radar". En *Actas del XIII Simp. URSI*. Pamplona, Sept. 1998, pp.597-598.
- [36] — "Aplicación de métodos numéricos para la evaluación y control de antenas de radar secundario". En *Actas del XV Simp. URSI*, Zaragoza, 13-15 Sept. 2000, pp.113-114.
- [37] — "Application of Numerical Methods on Failure Evaluation for Radar Antennas and Simulation of a Complete Diagnostic System". In (CD-Rom) *Proc. 2000 European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (ECCOMAS)*, Barcelona, 11-14 Sept. 2000.

- [38] DRENTH, A.J.; HUISER, A.M.; FERWERDA, H.A. "The problem of phase retrieval in light and electron microscopy of strong objects" *Opt. Acta*, vol. 22, pp.615-628, 1975.
- [39] DUDGEON, D.E., MERSEREAU, R.M. *Multidimensional digital signal processing*. New Jersey: Prentice-Hall, 1984.
- [40] EISENHART. "Separable systems of Stäckel." *Ann. Math.*, vol. 35, no. 2, pp. 284-305, 1934.
- [41] ELLDER, J.; LUNDAHL, L.; MORRIS, D. "Test of phase retrieval holography on the Onsala 20 m radiotelescope". *Electron. Lett.*, vol. 20, no. 17, p. 709-710, 1984.
- [42] EVANS, G.E. *Antenna Measurements Techniques*. Boston: Artech House, 1990.
- [43] FANG, WEN-HSIEN; YAGLE, A. "Two-Dimensional Linear Prediction and Spectral Estimation on a Polar Raster". *IEEE Trans. Signal Proc.*, vol. 42, no. 3, pp. 628-641, March 1994.
- [44] FERWERDA, H.A. "The phase reconstruction problem for wave amplitudes and coherence functions," en BALTES, H.P. *Inverse Source Problems in Optics*, Ed. Berlin: Springer-Verlag, 1978.
- [45] FIENUP, J.R. "Reconstruction of an object form the modulus of its Fourier transform". *Opt. Lett.*, vol. 3, pp. 27-29, 1978.
- [46] — "Phase-retrieval algorithms: a comparison". *Appl. Opt.*, vol. 21, no. 15, pp. 2758-2769, Aug. 1982.
- [47] FIENUP, J.R.; WACKERMAN, C.C. "Phase-retrieval stagnation problems and solutions". *J. Opt. Soc. Am.*, vol. 3, no. 11, pp. 1897-1907, Nov. 1986.
- [48] FOLGUEIRA, JESÚS; LAS HERAS, FERNANDO. "Síntesis de excitaciones en geometrías rectangulares a partir de campos cercanos". En *Actas del X Simp. URVI*. Valladolid, 27-29 Sept. 1995, pp. 607-610.
- [49] FRANCIS, MICHAEL H., "Aperture-Sampling Requirements." In *IEEE Antennas & Propagation Magazine*, vol. 39, no.5, pp. 76-81, Oct. 1997.
- [50] GABOR, DENIS. "Microscopy by reconstructed wavefronts". *Proc. R. Soc.*, vol. 64, pp. 449-469, 1951.
- [51] GARRIDO, M. "El teorema de Gödel y la filosofía" en *Filosofía científica actual en Alemania*. Madrid: Tecnos, pp. 41-53, 1971.
- [52] GERCHBERG, R.W.; SAXTON, W.O. "Phase determination from image and diffraction plane pictures in electron microscope". *Optik*, vol. 33, pp. 275-284, 1971.
- [53] GERCHBERG, R.W.; SAXTON, W.O. "A practical algorithm for the determination of phase from image and diffraction plane pictures". *Optik*, vol. 35, pp. 237-246, 1972.
- [54] GERCHBERG, R.W.; SAXTON, W.O. "Wave phase from image and diffraction plane pictures". en HAWKES, P.W. *Image Processing and Computer aided Design in Electron Optics*, Ed. London: Academic, 1973.
- [55] GREENAWAY, A.H. "Proposal for phase recovery from a single intensity distribution". *Opt. Lett.*, vol.1, pp. 10-12, 1977.
- [56] GILLESPIE, EDMOND S. "A History of Antenna Measurements". In *Proc. 20<sup>th</sup> AMTA Symp.*, Quebec, Canada, Nov. 1998, pp. 2-9.

- [57] GÖDEL, K. "Über formal unentscheidbare Sätze der *Principia Mathematica* und verwandte Systeme. I.". *Monatshefte für Mathematik und Physik*, vol. 38, pp. 173-198, 1931.
- [58] HANSEN, J.E *et al.* "Spherical Near-Field Antenna Measurements". En *IEE Electromagnetic Waves*, ser. 26. London, R.U.: Peter Peregrinus, 1988.
- [59] HANSEN, W.W. "A New Type of Expansion in Radiation Problems". *Phys. Rev.*, pp.139-143, Jan. 1935.
- [60] HARRINGTON, R.F. *Time-harmonic Electromagnetic Fields*. New York: McGraw-Hill, 1961.
- [61] HAYES, M.H.; LIM, J.S.; OPPENHEIM, A.V. "Signal Reconstruction from Phase or Magnitude". *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. ASSP-28, no. 6, pp. 672-680, Dec. 1980.
- [62] HAYES, M.H. "The Reconstruction of a Multidimensional Sequence from the Phase or Magnitude of Its Fourier Transform". *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. ASSP-30, no. 2, pp. 140-154, April 1982.
- [63] HERTZ, H.. *Untersuchungen über die Ausbreitung der Elektrischen Kraft*. Leipzig: J. A. Barth, 1892.
- [64] HILGEVOORD. *Dispersion Relations and Causal Description*. Amsterdam: North-Holland, 1960.
- [65] HOENDERS, B.J. "On the solution of the phase retrieval problem". *J.Math.Phys.*, vol. 16, no. 9, pp. 1719-1725, Sept. 1975.
- [66] HUISER, A.M.; FERWERDA, H.A. "The problem of phase retrieval in light and electron microscopy of strong objects. II: On the uniqueness and stability of object reconstruction processes using two defocused images". *Opt. Acta*, vol. 23, pp. 445-456, 1976.
- [67] HUISER, A.M.; DRENTH, A.J.; FERWERDA, H.A. "On phase retrieval in electron microscopy from image and diffraction patterns". *Optik*, vol. 45, pp. 303-316, 1976.
- [68] HUISER, A.M.; FERWERDA, H.A. "On the problem of phase retrieval in electron microscopy from image and diffraction patterns. II". *Optik*, vol. 46, pp. 407-420, 1976.
- [69] HUISER, A.M.; VAN TOORN, P.; FERWERDA, H.A. "On the problem of phase retrieval in electron microscopy from image and diffraction patterns. III". *Optik*, vol. 47, pp. 1-8, 1977.
- [70] HURT, N.E. *Phase retrieval and zero crossings. Mathematical methods in image reconstruction*. Serie: Mathematics and its applications, Kluwer Academic Pub., 1989.
- [71] HUYGENS, C. *Traite de la Lumiere*. Leyden, 1690.
- [72] ISERNIA, T.; LEONE, G.; PIERRI, R.. "A quadratic inverse problem: the phase retrieval". in SABATER, P.C. (Ed.). *Inverse methods in action*, Berlin: Springer-Verlag, 1990.
- [73] ISERNIA, T.; PIERRI, R.; LEONE, G. "New technique for estimation of farfield from near-zone phaseless data". *Electron. Lett.*, vol. 27, no. 8, pp. 652-654, 11<sup>th</sup> April 1991.
- [74] ISERNIA, T.; LEONE, G.; PIERRI, R. "Phaseless near field techniques: formulation of the problem and field properties". *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, Vol. 8, No. 7, pp. 871-888, 1994

- [75] — “Phaseless near field techniques: uniqueness conditions and attainment of the solution”. *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, vol. 8, no. 7, pp. 889-908, 1994
- [76] — “Radiation Pattern Evaluation from Near-Field Intensities on Planes”. *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 44, no. 5, pp. 701-710, May 1996.
- [77] ISERNIA, T.; SOLDOVIERI, F.; LEONE, G.; PIERRI, R. “On the local minima in phase reconstruction algorithms”. *Radio Science*, Vol. 31, No. 6, pp. 1887-1899, Nov.-Dec. 1996.
- [78] IVANOV, V.Y.; SIVOKON, V.P.; VORONTOV, M.A. “Phase retrieval from a set of intensity measurements: theory and experiment”. *J. Opt. Soc. Am.*, vol. 9, no. 9, pp. 1515-1524, Sept. 1992.
- [79] JAMES, G.C.; POULTON, G.T.; MCCULLOCH, P.M. “Panel Setting from Microwave Holography by the Method of Successive Projections”. *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 41, no. 11, pp. 1523-1528, Nov. 1993.
- [80] JASIK, H., editor. *Antenna Engineering Handbook*. Nueva York: McGraw-Hill, 1961.
- [81] KOHLER, D.; MANDEL, L. “Operational approach to the phase problem of optical coherence”. *J. Opt. Soc. Amer.*, vol. 60, pp. 280-281, 1970.
- [82] KOHLER, D.; MANDEL, L. “Source reconstruction from the modulus of the correlation function: a practical approach to the phase problem of optical coherence theory”. *J. Opt. Soc. Amer.*, vol. 63, pp. 126-134, 1973.
- [83] KOTEL'NIKOV, V.A. *The theory of Optimum Noise Immunity*. Nueva York: McGraw Hill, 1959.
- [84] KRASNOV, M; KISELIOV, A.; MAKARENKO, G.; SHIKIN, E. *Curso de matemáticas superiores para ingenieros*. Ed. Mir Moscú, 1990.
- [85] LAROUSSE, R.; COSTACHE, G.I. “Finit-Element Method Applied to EMC Problems”. *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, vol. 35, no. 2, pp. 178-184, May 1993.
- [86] — “Far-Field Predictions from Near-Field Measurements Using an Exact Integral Solution”. *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, vol. 36, no. 3, pp. 189-195, Aug. 1994.
- [87] LAS HERAS ANDRÉS, F. y GALOCHA IRAGÜEN, B. “Evaluación de viabilidad de técnicas de medida de diagramas de radiación de antenas y detección de fallos utilizando radiofuentes”. Proyecto realizado por el Grupo de Radiación para CESELSA. Informe n°: UPM/ETSIT/SSR/GR/11/94. 1994.
- [88] LAS HERAS ANDRÉS, F.; GALOCHA IRAGÜEN, B., BESADA SANMARTÍN, J. L. “A method to transform measured fresnel patterns to far-field based on a least-squares algorithm with probe correction”. In *Proc. 17<sup>th</sup> AMTA Symp.*, Williamsburg, Virginia, EEUU, Nov. 13-17, 1995, pp. 352-357.
- [89] — “Obtención de diagramas de antena mediante un sistema de medida en zona de Fresnel y algoritmo de transformación de mínimos cuadrados”. En *Actas del X Simp. URSI*, Valladolid, 27-29 Sept. 1995, pp.781-784.
- [90] — “Transformación de diagramas de campo de Fresnel a campo lejano mediante reconstrucción de fuentes”. En *Actas del XI Simp. URSI*, Madrid. 18-20 sept. 1996, vol. 1, pp. 464-467.

- 
- [91] — “Equivalent Source Modelling and Reconstruction for Antenna Measurement and Synthesis”. In *Dig. 1997 IEEE AP-S International Symp.*, Montreal, Canada, July 13-18 1997, vol. 1, pp. 156-159.
- [92] — “Fresnel to far field Transformation using Least Squares Minimization and Equivalent Magnetic Sources Reconstruction”. In *Proc. 1997 PIERS Symp.*, Hong Kong, 6-9 Jan. 1997, vol. 1 (invited paper), pp. 148.
- [93] LAS HERAS, F.; GALOCHA, B., BESADA, J.L., CABALLERO, P. “Diagnosis of aperture antennas from measured near field data using least square software”. In *Proc. 20<sup>th</sup> AMTA Symp.*, Quebec, Canada, Nov. 26-30, 1998, pp.192-196.
- [94] LAS-HERAS, F.; ORTIZ-VALBUENA, C. “Antenna diagnosis and pattern reconstruction using near amplitude data and iterative source reconstruction”. In *Proc. IEEE APS Int. Symp.*, Atlanta, Georgia, June 1998, pp.1346-1343.
- [95] LAS-HERAS, F. “Application of the equivalent principle for the sequential reconstruction of source components”. In *Proc. IEEE APS Int. Symp.*, Atlanta, Georgia, June 1998, pp.456-459.
- [96] — “Equivalent Source Method for Diagnosis and Radiated EMI Measurement”. *Actas de II Conferencia de Telecomunicações*, Sesimbra, Portugal, 15-16 abril, 1999, pp.76-78.
- [97] LAS HERAS, F.; GALOCHA, B. “Planar source reconstruction and far field calculation from near field hemispherical acquisition”. In *Proc. 21<sup>st</sup> AMTA Symp.*, Monterey, California, Oct. 4-6, 1999, pp.17-21.
- [98] LAS-HERAS, F., SARKAR, T.K. “Planar NF-FF With Direct Optimization-Source Reconstruction Using Amplitude Only Data”. In *Proc. IEEE APS Int. Symp.*, Boston, July 2001, vol.2, pp.618-621.
- [99] — “A Direct Optimization Approach for Source Reconstruction NF-FF Using Amplitude Only Data.” Invited paper in *Proc. IEEE EMC Int. Symp.*, Montreal, August 2001, vol.1, pp. 399-402.
- [100] — “A Direct Optimization Approach for Source Reconstruction and NF-FF Transformation using Amplitude-Only Data” *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 50, no. 4, pp. 500-510, April 2002.
- [101] — “Radial Field Retrieval in Spherical Scanning for Current Reconstruction and NF-FF Transformation” *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 50, no. 6, pp. 866-874, June 2002.
- [102] LEITH, E.N.; UPATNIEKS, J.; HAINES, K.A. “Microscopy by wavefront reconstruction”. *J. Opt. Soc. Am.*, , vol. 55, pp. 981-986, 1965.
- [103] LEONE, G.; PIERRI, R. “Reflector Antenna Diagnosis from Phaseless Data”. *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 45, no. 8, pp. 1236-1244, Aug. 1997.
- [104] LO, Y.T.; LEE S.W. *The Antenna Handbook*. Princeton: Van Nostrand Reinhold, 1993.
- [105] LUENBERGER, D.A. *Programación lineal y no lineal*. México: Addison-Wesley Iberoamericana, 1989.
- [106] MARAVALL CASESNOVES, D. *Diccionario de matemática moderna*. Ed. Madrid: Ra-ma, 1994.
- [107] MARCILLA, J.M. *Diseño y simulación de un sistema de diagnosis de antenas de radar*. Proyecto Fin de Carrera no publicado. Universidad Politécnica de Madrid. Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Telecomunicación. Madrid: 2000.



- [108] MARCONI, GUGLIELMO. "Radio Telegraphy". *Proc. IRE*, vol. 10, pp.215-238, 1922. Reimpreso en *Proc. IEEE*, vol. 85, no.10, pp. 1526-1535, 1997.
- [109] — "Radio Communication". *Proc. IRE*, vol. 16, pp.40-69, 1922. Reimpreso en *Proc. IEEE*, vol. 86, no.10, pp. 2094-2105, 1998.
- [110] MARENGO, E.; DEVANEY, A.J. "The Inverse Source Problem of Electromagnetics: Linear Inversion Formulation and Minimum Energy Solution". *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 47, no. 2, pp. 410-412, Aug. 1999.
- [111] MAUTZ, JOSEPH R.; HARRINGTON, ROGER F. "Computational Methods for Antenna Pattern Synthesis". *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. AP-23, pp. 507-512, July 1976.
- [112] MAYER, C.E.; DAVIS, J.H.; PETERS W.L.; VOGEL, W.J. "A Holographic Surface Measurement of Texas 4.9-m Antenna at 86 GHz". *IEEE Trans. on Instr. & Meas.*, vol. IM-32, pp. 102-109, March 1983.
- [113] MEHTA, C.L. "New approach to the phase problem in optical coherence theory". *J. Opt. Soc. Amer.*, vol. 58, pp. 1233-1234, 1968.
- [114] MISELL, D. L. "A method for the solution of the phase problem in electron microscopy". *J. Phys. D: Appl. Phys.*, vol. 6, L6-L9, 1973.
- [115] — "An examination of an iterative method for the solution of the phase problem in optics and electron optics: I. Test calculations". *J. Phys. D: Appl. Phys.*, vol. 6, pp. 2200-2216, 1973.
- [116] — "An examination of an iterative method for the solution of the phase problem in optics and electron optics: II. Sources of error". *J. Phys. D: Appl. Phys.*, vol. 6, pp. 2216-2225, 1973.
- [117] — "Phase determination from image intensity measurements in bright-field optics". *J. Phys. D: Appl. Phys.*, vol. 7, pp. L17-L20, 1974.
- [118] MORRIS, D. "Telescope testing by radio holography". *URSI International Symposium on millimetre and submillimetre wave radio astronomy*, Granada, Sept. 11-14, 1984. pp. 29-45.
- [119] — "Phase Retrieval in the Radio Holography of Reflector Antennas and Radio Telescopes". *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. AP-33, no. 7, pp. 749-755, 1985.
- [120] NAKAJIMA N.; ASAKURA T. "Two-dimensional phase retrieval using the logarithmic Hilbert transform and the estimation technique of zero". *J. Phys. D: Appl. Phys.*, vol 19, pp. 319-331, 1986.
- [121] NAKAJIMA N. "Phase retrieval from two intensity measurements using the Fourier series expansion". *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 4, no. 1, pp.154-158, 1987.
- [122] NASH, E. "Design a Logamp RF Pulse Detector". *Microwaves & RF*, pp.62-71, 2000.
- [123] NIKOLSKI, V. V. *Electrodinámica y propagación de ondas*. traducción de A.B. Elías, Cuba: Edición Revolucionaria, 1972.
- [124] NOBLE, B., DANIEL, J.W. *Álgebra lineal aplicada*. Trad. F.A. Sánchez y Herrera. Mexico: Prentice-Hall, 1989.
- [125] NYQUIST, H. "Certain topics in telegraph transmission theory". *AIEE Trans.*, p.617, Apr. 1928.
- [126] OPPENHEIM, ALAN V.; WILLSKY, ALAN S. *Signals and Systems*. New Jersey: Prentice-Hall, 1983.

- [127] ORTEGA Y GASSET, J. *Sobre la razón histórica*. Madrid: Alianza, 1979.
- [128] ORTIZ-VALBUENA, CESAR. *Técnicas de reconstrucción de fase para medidas de diagramas de radiación de antenas*. Proyecto Fin de Carrera no publicado. Universidad Politécnica de Madrid. Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Telecomunicación. Madrid: 1998.
- [129] PALEY, R., WIENER, N. *Fourier Transform in the Complex Domain*. New York: American Mathematical Society, 1934.
- [130] POZAR, DAVID M. *Microwave Engineering*. New York: Addison-Wesley, 1990.
- [131] PRESS, W. H.; FLANNERY, B.P.; TEUKOLSKY, S.A.; VETTERLING, W.T. *Numerical Recipes*. Cambridge University Press, 1986.
- [132] RAHMAT-SAMII, YAHYA. "Microwave Holography of Large Reflector Antennas-Simulation Algorithms". *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. AP-33, no. 11, pp. 1194-1203, Nov. 1985.
- [133] REICHENBACH, H. *Philosophic Foundations of Quantum Mechanics*. London: Cambridge Univ. Press, 1944.
- [134] ROCHBLATT, D.; RAHMAT-SAMII, Y. "Effects of Measurement Error on Microwave Antenna Holography". *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. AP-39, no. 7, pp. 933-940, July 1991.
- [135] ROSS, G. *et al.* "A solution to the phase problem based on the theory of the entire functions" *Optik*, vol. 49, pp.71-80, 1971.
- [136] ROSS, G.; FIDDY, M.A. "The analytic nature of scattered electromagnetic fields and the effect of coherence on phase retrieval" in MANDEL, L.; WOLF, E. *Coherence and Quantum Optics IV*. Nueva York: Plenum, 1977.
- [137] SALL, S. "New possibilities for phaseless microwave diagnostic. Part 2: The uniqueness problem and half plane imaging". *IEE Proc. Pt. H*, vol. 132, no. 5, pp. 299-306, Aug. 1985.
- [138] SANZ, J.L.C. "Mathematical considerations for the problem of Fourier transform phase retrieval from magnitude". *SIAM J. Appl. Math.*, vol. 45, no. 4, pp. 651-664, Aug. 1985.
- [139] SARKAR, T.K. *Application of Conjugate Gradient Method to Electromagnetic and Signal Analysis*. New York: Elsevier, 1990.
- [140] SARKAR, T.K.; LAS-HERAS, F. "A Direct Optimization Approach For Source Reconstruction Nf-FF Using Amplitude Only Data". Invited Paper to "Near Field Measurements" in *Symposium Record of the 2001 IEEE EMC International Symposium*, Montreal, August 11-16, 2001, vol.1, pp. 399-402
- [141] SAXTON, W.O. "Phase determination in bright-field electron microscopy using complementary half-plane apertures". *J. Phys. D: Appl. Phys.*, Vol. 7, pp. L63-L64, 1974.
- [142] — *Computing techniques for image processing in electron microscopy*. New York: Academic Press, 1978.
- [143] SCHAFER, R.W.; MERSEREAU, R.M.; RICHARDS, M.A. "Constrained Iterative Restoration Algorithms". *Proc. IEEE*, vol. 69, no. 4, pp. 432-450, April 1981.
- [144] SCHELKUNOFF, S.A. "Some equivalence theorems of electromagnetics and their application to radiation problems". *Bell System Tech. J.*, vol. 15, pp. 92-112, 1936.

- [145] SERABIN, E.; PHILLIPS, T.G.; MASSON, C.R.. "Surface figure measurements of radio telescopes with a shearing interferometer". *Applied Optics*, vol. 30, no. 10, pp. 1227-1241, April 1991.
- [146] SHANNON, CLAUDE E. "Communication in the presence of noise". *Proc. IRE*, vol. 37, no. 1, pp. 10-21, Jan. 1949.
- [147] SIEGMAN, A.E. "Quasi fast Haenkel Transform". *Opt. Lett.*, vol. 1, pp. 13-15, July 1977.
- [148] SKLAR, BERNARD. *Digital Communications: Fundamentals and Applications*. Nueva Jersey: Prentice-Hall, 1988.
- [149] SPIGEL, M.R.; ABELLANAS, L. *Formulas y tablas de matemática aplicada*. Ed. Madrid: McGraw-Hill, 1988.
- [150] SPINOZA, B. *Ética demostrada según el orden geométrico*. Trad. A. Domínguez. Barcelona: Trotta, 2002.
- [151] STRATTON, J.A. *Electromagnetic Theory*. New York: McGraw-Hill, 1941.
- [152] TAAGHOL, A.; SARKAR, T. "Near-Field to Near/Far-Field Transformation for Arbitrary Near-Field Geometry, Utilizing an Equivalent Magnetic Current". *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, vol. 38, no. 3, pp. 536-541, Aug. 1996.
- [153] TAYLOR, LEONARD S. "The Phase Retrieval Problem". *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. AP-29, no. 2, pp. 385-391, March 1981.
- [154] TEXAS INSTRUMENTS. *Data Sheet: TLC5540*. (disponible en <http://www.ti.com>, ref. SLAS105B). Dallas, EE.UU.: Texas Instruments, 1999.
- [155] TEXAS INSTRUMENTS. *Data Sheet: TMS320C6211 Fixed-Point/TMS320C6711 Floating-Point*. (disponible en <http://www.ti.com>, ref. SPRS073). Dallas, EE.UU.: Texas Instruments, 2001.
- [156] TICRA ENGINEERING CONSULTANTS. *SNIFTD: Software package for Spherical Near-Field to Far-Field Transformations with Full Probe Correction*. Copenhagen: Ticsra, 1992.
- [157] TITCHMARSCH, E.C. "The zeros of certain integral functions". *Proc. London Math. Soc. (2)*, vol.25, pp. 283-302, 1926.
- [158] TOLAND, B.; RAHMAT-SAMII, Y. "Application of FFT and DFT for Image Reconstruction of Planar Arrays in Microwave Holographic Diagnostic". In *Proc. 1990 IEEE AP-S International Symp.*, 1990, pp. 292-295.
- [159] VOLKOV, B. *Métodos numéricos*. Ed. Mir Moscú, 1990.
- [160] WALTER, A. "The question of phase retrieval in optics". *Opt. Acta*, vol. 10, pp. 41-49, 1963.
- [161] WANGNESS, R. K. *Campos electromagnéticos*. Versión en español de J.R. Értze Encias. México: Ed. Limusa, 1989.
- [162] WHITTAKER, J. M. "Interpolatory function theory". *Cambridge Tracts in Mathematics & Mathematical physics*, no. 33. Cambridge, U.K.: Cambridge University Press, ch. IV, 1935.
- [163] WILLIAMS, L.I.; RAHMAT-SAMII, Y.; YACCARINO, R.G. "The Bi-Polar Planar Near-Field Measurement Technique, Part I: Implementation and Measurement Comparisons". *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 42, no. 2, pp. 184-195, Feb. 1981.

- [164] WITTGENSTEIN, L. *Tractatus logico-philosophicus*. Trad. J. Muñoz e I. Reguera. Madrid: Alianza, 1999.
- [165] WOLF, E. "Is a complete determination of the energy spectrum of light possible from measurements of the degree of coherence". *Proc. Phys. Soc.*, vol. 80, pp. 1269-1272, 1962.
- [166] YACCARINO, R.G.; RAHMAT-SAMII, Y.; WILLIAMS, L.I. "The Bi-Polar Planar Near-Field Measurement Technique, Part II: Near-Field to Far-Field Transformation and Holographic Imaging Methods". *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 42, no. 2, pp. 196-204, Feb. 1994.
- [167] YACCARINO, R.G.; RAHMAT-SAMII, Y. "Phaseless Bi-Polar Near-Field Measurements: Squared Amplitude Interpolation / Iterative Fourier Algorithm". In *Proc. 17<sup>th</sup> Antenna Measurement Techniques Association (AMTA) Annual Meeting & Symposium*, Williamsburg, Virginia, EEUU, Nov. 13-17, 1995, pp. 195-200.
- [168] YAGHJIAN, ARTHUR D. "An Overview of Near-Field Antenna Measurements". *IEEE Trans. Antenna Propagat.*, vol. AP-34, no. 1, pp. 30-45, Jan. 1986.
- [169] ZERVAKIS, M.E.; VENETSANOPOULOS, A.N. "Iterative Least Squares Estimators in Nonlinear Image Restoration". *IEEE Trans. Signal Proc.*, vol. 40, no. 4, pp. 927-944, April 1992.